O Método de Petrus no Cubo 3×3×3

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Novembro de 2018

[1] egipereira@gmail.com

Conteúdo

Prefácio

Este texto começou a ser escrito em 2014, tendo sido completado em Novembro de 2018. Foram introduzidos 13 exemplos que o próprio Lars Petrus resolve na sua página e um Capítulo onde o método de Petrus é ligeiramente modificado.

Este método é bastante interessante, destinando-se a pessoas que tenham uma grande agilidade mental, relativamente à distribuição espacial das várias peças do cubo. Tem uma grande vantagem: o número de algoritmos a decorar é relativamente pequeno (quando comparado com o método de Fridrich, por exemplo). Além disso, o número total de movimentos, em média, é inferior ao número (médio) de movimentos, quando se aplica o método de Fridrich. A popularidade do método de Fridrich tem a ver com a sua fácil compreensão, embora obrigue à memorização de mais de uma centena de fórmulas (algoritmos).

Funchal, 7 de Novembro de 2018

Egídio Gonçalves Pereira

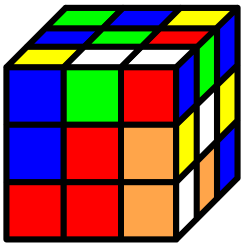
Capítulo 1

O Método de Petrus

Como sempre acontece, eu começo a escrever um texto sobre o cubo de Rubik, quando começo a aprender um determinado método. Desta maneira, espero que quem comece, consiga entender o que eu escrevo. Neste Capítulo, vou apresentar a resolução de dois exemplos, para que se entenda bem em que consiste o método de Lars Petrus.

1.1 Primeiro Exemplo

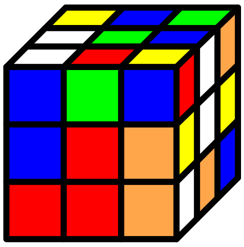
A primeira etapa do Método de Petrus consiste na formação dum cubo $2\times2\times2$, a partir dum canto qualquer do cubo $3\times3\times3$.



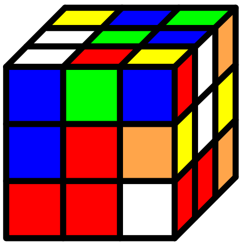
Neste caso, já temos um canto e um meio unidos (canto azul branco e laranja em DTB) e meio laranja e branco à esquerda do canto.

O próximo passo consiste em juntar um meio e um centro. Há dois meios possíveis: o meio laranja e branco e o meio azul e laranja.

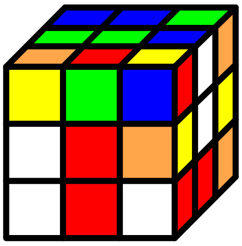
Fazendo C, o meio azul e laranja alinha com o centro laranja, embora isso não seja visível na figura:



Agora, temos que unir os dois pares: isso pode ser feito com BE:

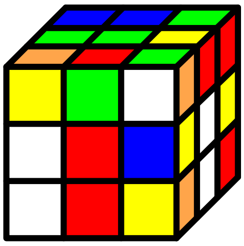


B



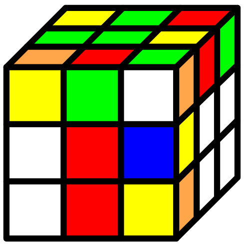
E

E já temos um bloco 2×2×1: os dois azuis que vemos na camada de trás e as duas peças que ficam por baixo (o centro laranja e o meio laranja e branco). Falta-nos o meio azul e branco, meio esse que deve ficar alinhado com o centro azul e com o centro branco. Ora, ele já está alinhado com o centro branco, pelo que temos de alinhá-lo com o centro azul (que está na camada de baixo). Isso faz-se com D^2:



D^2

Agora, vamos unir o par acabado de formar com o bloco 2×2×1, já formado. Neste caso, podemos fazer T^2.



T^2

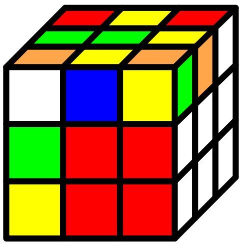
E já está formado o cubo 2×2×2, do qual vemos quatro quadrados brancos. O quadrado laranja 2×2 está atrás e o quadrado 2×2 azul está em baixo.

Neste exemplo, fizemos 5 movimentos, mas é natural que, em geral, se façam mais.

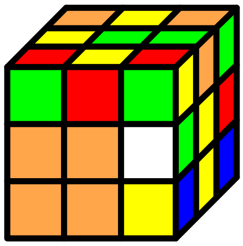
Agora, é uma questão de treino, para conseguirmos resolver o cubo 2×2×2, de maneira rápida.

Este exemplo é fácil e podemos já completar o bloco 2×2×3, pois o meio vermelho e branco está unido ao centro vermelho (na frente) e o canto azul vermelho e branco está unido ao meio azul e vermelho (esquerda, baixo).

Então, fazemos $E^2FC^{-1}F^2$, completando-se o bloco 2×2×3.



$E^2FC^{-1}F^2$



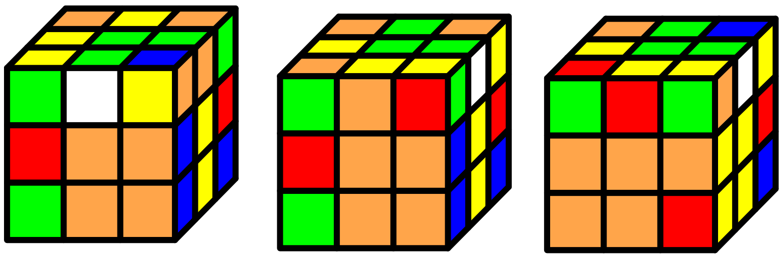
$C_3{}^2$

A partir desta posição, podemos mover livremente a camada de cima e a camada da direita. No entanto, para completarmos a resolução do cubo 3×3×3, temos de fazer com que todos os meios que não fazem parte do cubo 2×2×2 (já formado), fiquem bem orientados.

Há sete meios que não fazem parte do cubo 2×2×2, sendo que o número de meios mal orientados pode ser 0, 2, 4 ou 6. Um meio está bem orientado, se é possível alinhá-lo com os dois centros, movimentando, apenas, a camada da direita e a camada da esquerda. No entanto, há uma maneira fácil de ver se um meio está bem ou mal orientado. Os centros que não fazem parte do cubo 2×2×2 (já formado), são o amarelo e o verde. Os meios da camada de cima, com amarelo, estão mal orientados, pois o amarelo está adjacente ao centro verde. O quarto meio com amarelo (direita, baixo) está bem orientado, pois os dois amarelos (do centro e do meio) estão bem alinhados. O meio verde e laranja está bem orientado (porque os dois verdes combinam); o meio verde e branco está mal orientado, porque o verde está adjacente ao centro amarelo; os dois outros meios estão bem alinhados, porque não têm verde nem amarelo.

Logo, temos quatro meios mal orientados, os quais têm de ficar bem orientados. A orientação dos meios mal orientados faz-se dois de cada vez, sendo conveniente fixar a posição onde eles ficam colocados e qual a sequência que resolve a orientação dos dois meios.

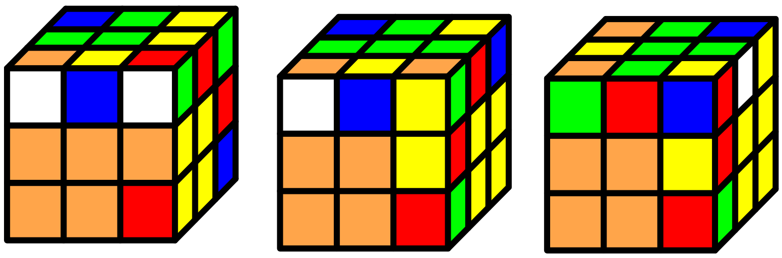
Na figura anterior, cubo da direita, corrigimos a orientação do meio amarelo e laranja (cima, esquerda) e o meio verde e branco, aplicando a sequência $F^{-1}C^{-1}F$:



F^{-1} C^{-1} F

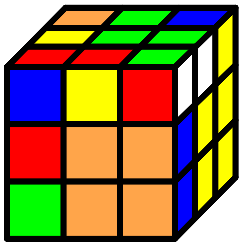
Repare-se que o bloco $2{\times}2{\times}3$ continua formado, embora momentaneamente tivesse sido desfeito. Repare-se, ainda, que o meio verde e branco e o meio amarelo e laranja ficaram bem orientados.

Agora, vamos ter que posicionar os dois meios com amarelo que estão em cima, para que possam ser (bem) orientados. Isso faz-se com $C^{-1}D^{-1}C$:

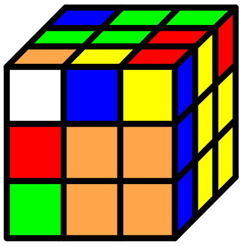


C^{-1} D^{-1} C

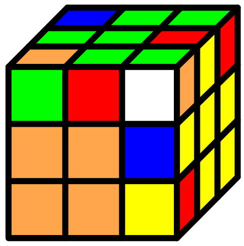
O meio azul e amarelo e o meio amarelo e vermelho já estão colocados no lugar onde a sua orientação é corrigida, pelo que vamos aplicar a sequência $F^{-1}C^{-1}F$:



F^{-1}



C^{-1}



F

Agora, todos os meios estão bem orientados, pelo que vamos prosseguir com a resolução do cubo.

A próxima etapa consiste em formar duas camadas, ou seja, um bloco 2×3×3.

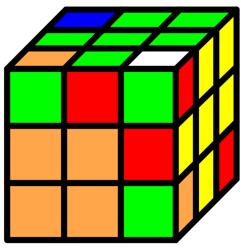
A primeira coisa a fazer é segurar de maneira firme o bloco 2×2×3 já formado, para não o desfazermos. Quase que apetece colar fita cola à volta desse bloco! Seguramos o cubo com a mão esquerda e, com a mão direita, rodamos as camadas C e D. Para formarmos duas camadas, temos duas hipóteses: acrescentamos um bloco 1×2×3 na direita do bloco já formado (completando as duas camadas de baixo) ou por cima (completando as duas camadas da esquerda.

Convém fixar que o bloco 2×2×3 já formado tem as cores azul, laranja e branco, não vá aparecer outro bloco 2×2×3!

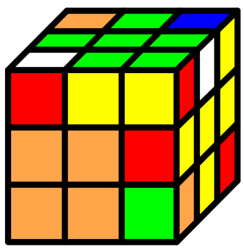
Agora, vamos formar um bloco 1×2×2, para acrecentar ao bloco 2×2×3. Para isso, vamos ter que juntar um canto e dois meios a um dos centros.

Suponhamos que escolhemos o canto azul, amarelo e laranja. Então, vamos utilizar o meio azul e amarelo e o meio laranja e amarelo.

O meio mais fácil de unir com o canto é o meio laranja e amarelo (direita, baixo). Para isso, basta fazer $D^{-1}C$.



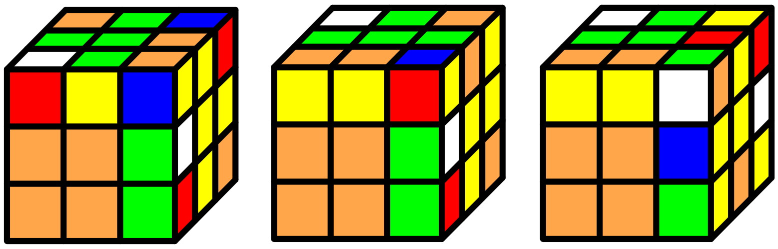
D^{-1}



C

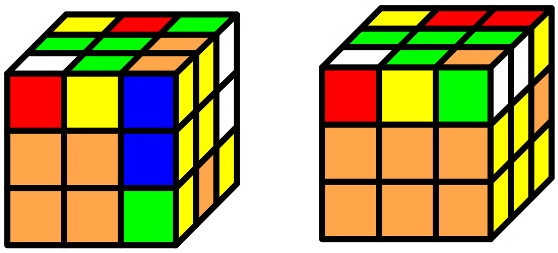
Agora, falta-nos substituir o meio verde e branco pelo meio azul e amarelo. Ora, isso parece bastante fácil: se rodarmos a camada de trás e dermos meia volta, na frente,... Alto! Não podemos mover a camada de trás. Vamos ter que seguir outro caminho.

Com $D^{-1}CD^2$, deixamos canto e meio na camada de cima e o meio azul e amarelo na direita, frente.



D^{-1} C D^2

Agora, basta-nos fazer $C^{-1}D^{-1}$, obtendo-se a seguinte posição:



C^{-1} D^{-1}

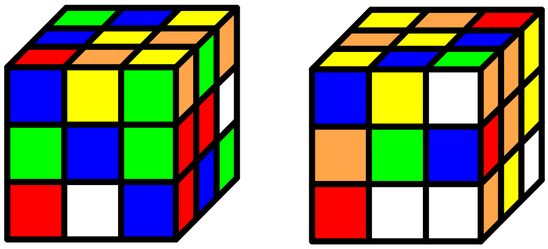
Falta-nos colocar o canto azul, vermelho e amarelo e o meio vermelho e amarelo, para completarmos as duas primeiras camadas. As duas peças estão juntas, mas mal alinhadas. Mas estamos muito limitados nos movimentos: só podemos mover a direita e a esquerda, mas não convém desfazer o bloco 1×2×2 acabado de formar.

1.2 Segundo Exemplo

Consideremos um cubo resolvido, com a face amarela em cima e a face azul na frente e baralhemo-lo da seguinte maneira:

$$D^2CF^{-1}BD^{-1}TE^{-1}C^2DB^2DCFDTECD^{-1}F$$
$$C^2D^{-1}CDB^2DFD^2C^{-1}DBFDC^2DBF^{-1}E^{-1}$$

A posição obtida é a seguinte (duas vistas, sem apresentar a face inferior):

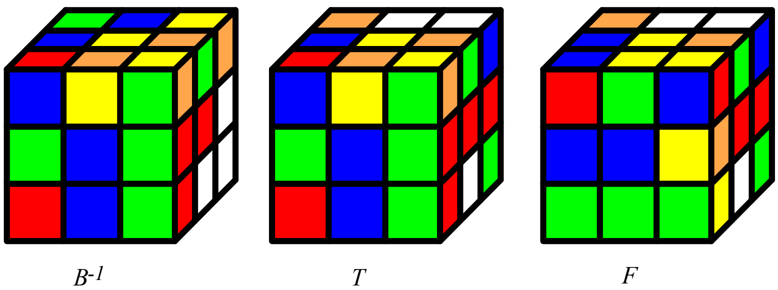


Resolução

1. B^{-1} (unindo o canto verde, vermelho e amarelo com o meio verde e vermelho)

2. T (unindo o centro vermelho com o meio amarelo e vermelho)

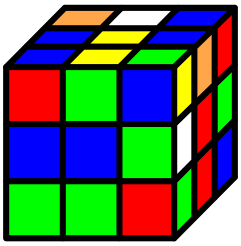
3. F (afastando o bloco canto-meio da camada da direita.



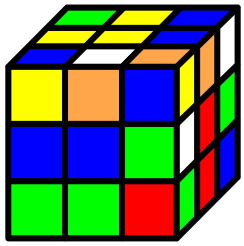
4. D (preparando o bloco centro-meio para a união com o outro bloco já formado)

5. Se rodarmos a frente no sentido anti-horário, formamos o bloco $1{\times}2{\times}2$, mas desfazemos o par centro amarelo-meio verde e amarelo, pelo que é preferível fazer C^2, deixando centro e meio na camada M.

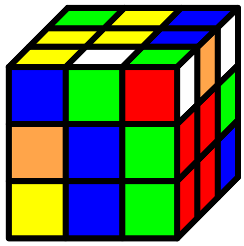
6. Agora, fazemos F^{-1}, formando o bloco $1{\times}2{\times}2$



D

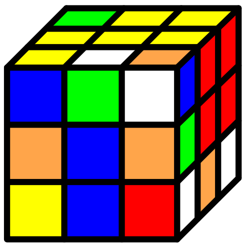


C^2



F^{-1}

7. Agora, vamos formar um cubo 2×2×2, com D^2.



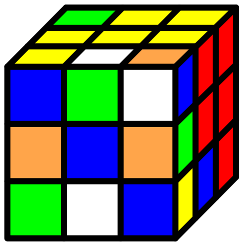
D^2

O próximo passo é formar um bloco 2×2×3, havendo três possibilidades: expandir para baixo, para a esquerda ou para a frente (relativamente à última posição da figura anterior). Suponhamos que queremos expandir o cubo 2×2×2, para a frente. O canto azul, vermelho e amarelo está em FBE (frente, baixo, esquerda), sendo fácil uni-lo com o meio azul e amarelo.

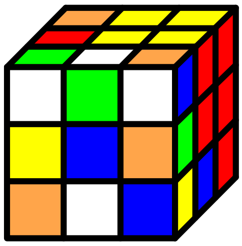
8. B (afastando a canto da camada da esquerda, para que possamos trazer o meio azul e amarelo para a frente).

9. E^2 (trazendo o meio azul e amarelo para a frente).

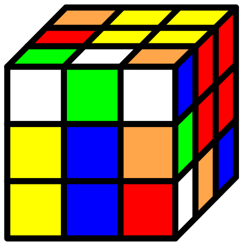
10. B^{-1} (unindo o canto azul, vermelho e amarelo com o meio azul e amarelo).



B



E^2



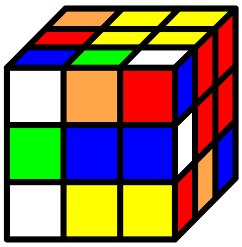
B^{-1}

Agora, falta-nos colocar o meio azul e vermelho de modo que combine com o centro azul e o centro vermelho (lugar onde está o meio laranja e verde).

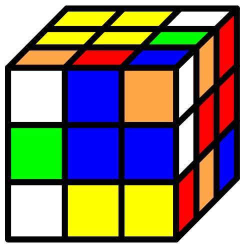
11. Ora, o meio azul e vermelho está na camada de cima, pelo que vamos rodar a camada da frente no sentido anti-horário, ou seja, fazemos F^{-1}.

12. C^{-1} (unindo o meio azul e vermelho com o centro azul)

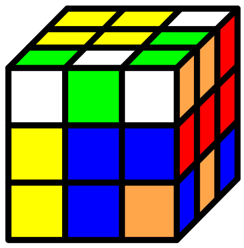
13. F (colocando o meio azul e vermelho no seu lugar)



F^{-1}

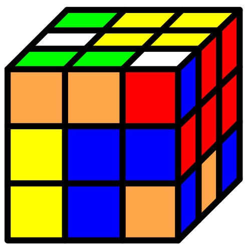


C^{-1}



F

14. C (refazendo o bloco 1×2×2)

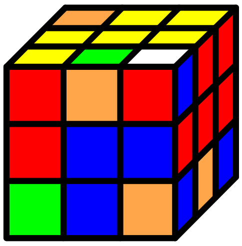


C

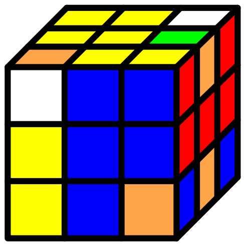
Agora, vamos ter que colocar o par que está na frente/esquerda unido ao par centro azul-meio azul e vermelho, completando-se o bloco 2×2×3. Isso faz-se de forma bastante fácil.

15. E^{-1} (colocando o par em cima)

16. C^{-1} (formando novo bloco 1×2×2)

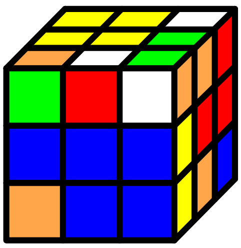


E -1

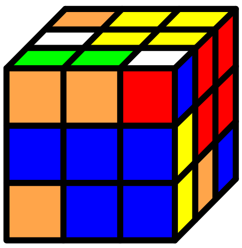


C -1

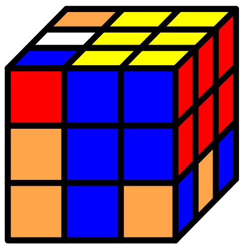
17. Agora, afastamos o bloco acabado de formar, refazemos o cubo 2×2×2 e recolocamos o bloco 1×2×2 com FCF^{-1}



F

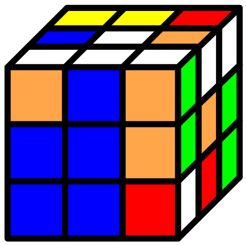


C



F -1

18. $D_3^2C_3^2$ (reposicionando o cubo)



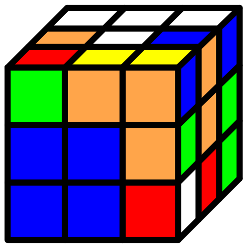
$D_3{}^2 C_3{}^2$

Agora, vamos verificar se há meios mal orientados e, se houver, temos de corrigi-los. Comecemos por referir que os dois centros que não fazem parte do bloco já formado, são o centro branco e o centro laranja. Quanto aos meios que não fazem parte desse bloco são sete (como sempre): quatro em cima e mais três na direita.

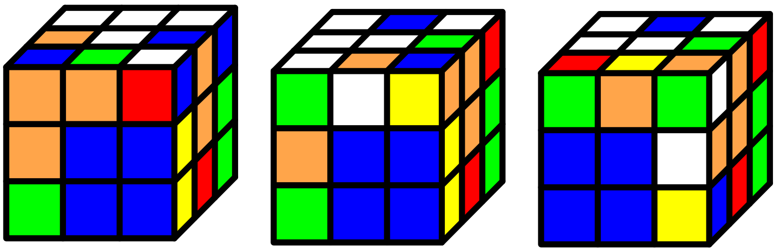
Comecemos pela camada de cima. O meio azul e branco está bem orientado; o meio azul e laranja (esquerda) está bem orientado, porque o laranja não está adjacente ao centro branco; o meio laranja e amarelo (camada de trás) está bem orientado, pela mesma razão; o meio laranja e branco está mal orientado; o meio verde e branco (camada de trás) está bem orientado, porque o branco não está adjacente ao centro laranja; o meio verde e laranja está mal orientado (o laranja devia estar adjacente ao centro da messma cor); como o número de meios mal orientados tem que ser par, o último meio está bem orientado (o branco não está adjacente ao centro laranja).

Então, temos dois meios mal orientados, um dos quais já está na posição padrão.

19. C^2 (colocando o segundo meio errado, na sua posição padrão).



20. $F^{-1}C^{-1}F$ (corrigindo a orientação dos dois meios errados)



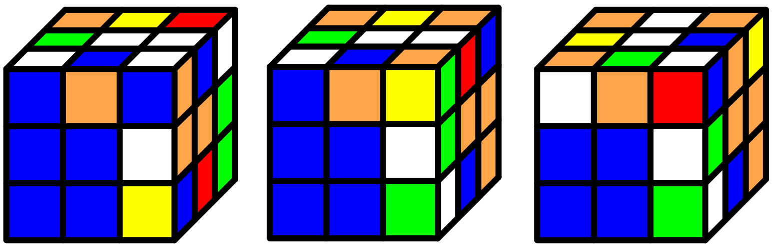
F^{-1} C^{-1} F

Nesta posição, será conveniente colar uma fita transparente no bloco 2×2×3 que já está formado. Ou, em vez disso, devemos convencer-nos que só podemos mover as camadas C e D, embora haja fórmulas (algoritmos) que utilizam movimentos noutras camadas.

O próximo passo consiste em completar duas camadas, havendo duas alternativas: podemos completar as duas camadas de baixo ou as duas camadas da esquerda. Em cada um dos casos, há duas possibilidades de continuarmos: juntamos um bloco 1×2×2 atrás ou à frente.

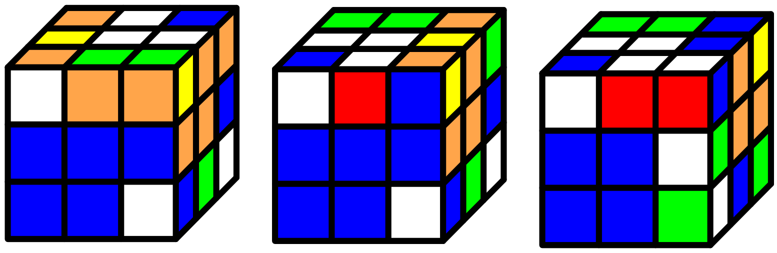
21. C^2 (colocando o canto azul, vermelho e branco em CEF).

22. D^2C^{-1} (desviando o meio vermelho e branco da camada da direita).



C^2 D^2 C^{-1}

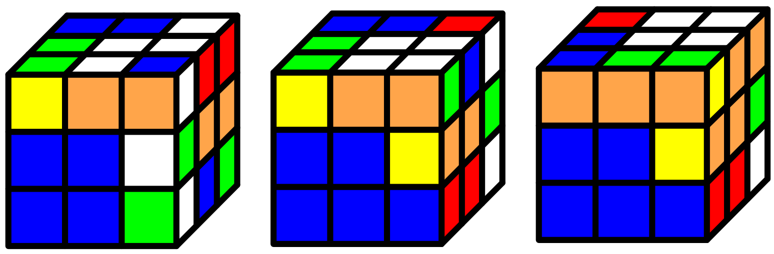
23. $D^{-1}C^2D$ (unindo o canto azul, vermelho e branco com o meio vermelho e branco)



D^{-1} C^2 D

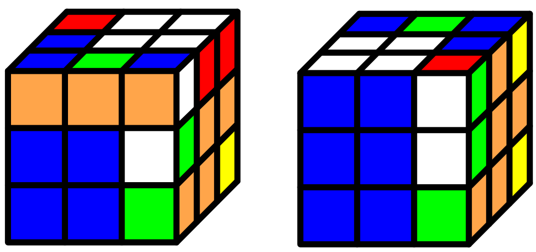
Olhando para a figura anterior (cubo da direita), vemos que falta o meio azul e branco para completarmos o bloco 1×2×2 azul, vermelho e branco. Temos de resistir à tentação de mover a camada da frente! Se colocarmos o par já formado na camada da direita e alinharmos o meio azul e branco com o centro branco (colocando-o na camada de trás), formamos o pretendido bloco 1×2×2.

24. $C^{-1}D^2C^{-1}$ (preparando a formação do bloco 1×2×2 azul, branco e vermelho).



C^{-1} D^2 C^{-1}

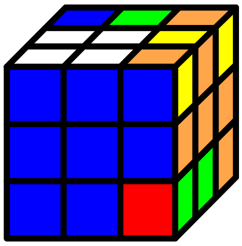
25. D^2C^2 (formando o bloco e unindo-o ao bloco 2×2×3)



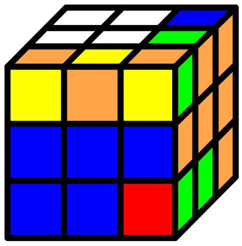
D^2 C^2

Neste caso, fomos tremendamente felizes, porque obtivemos um bloco canto e meio pronto (vermelho, verde e branco), pelo que é bastante fácil completar as duas camadas.

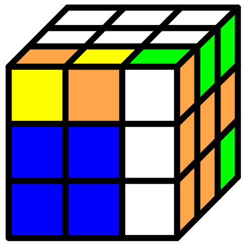
26. $D^{-1}CD^2$ (completando o bloco 1×2×3)



D^{-1}

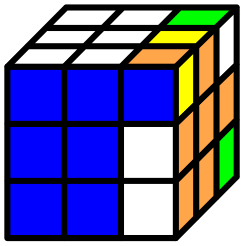


C

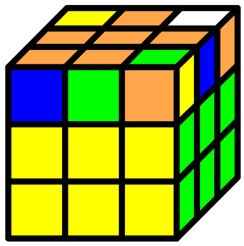


D^2

27. $C^{-1}F_3^{-1}C_3$ (completando as duas camadas da esquerda e reorientando o cubo)



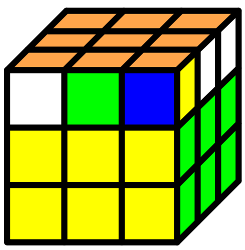
C^{-1}



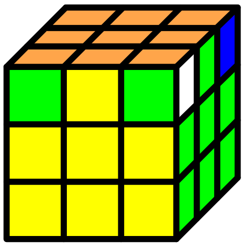
$F_3{}^{-1}C_3$

Note-se que os meios da terceira camada estão bem orientados.

28. Agora, aplicamos a fórmula $DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$



29. Fazendo C^{-1}, acertamos os meios da camada superior.

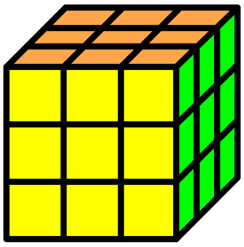


Agora, o canto em CTE está no seu lugar, sendo que os outros três cantos permutam: na frente, o da esquerda vai para a direita,...

Além disso, os meios estão bem alinhados com os centros da segunda camada. Há várias maneiras de resolvermos a questão, sendo uma delas a seguinte

$$D_3^{-1}\left(DC^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CD\right)B^2D^2D_3$$

E o cubo fica resolvido!



Sem o D_3 final, o cubo ficaria resolvido na mesma, mas com o branco para cima (e o verde para a direita).

Foram realizados 55 movimentos, na resolução apresentada. Como sempre, espero não me ter enganado nos desenhos apresentados.

Outra solução (com o mesmo número de movimentos) é

$$C_3^{-1}D^2T^2DFD^{-1}T^2DF^{-1}DC_3$$

Observação

O exemplo anterior não foi "trabalhado", tendo resultado de baralhar o cubo duma forma aleatória. Além disso, a resolução foi aquela que eu consegui, com ajuda dos meus (poucos) conhecimentos do método de Petrus.

Capítulo 2

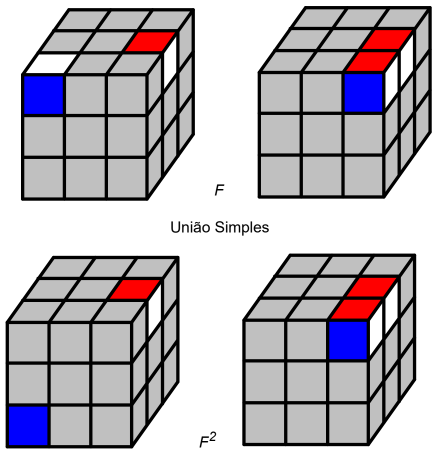
Blocos e Algoritmos

Seguem-se alguns exemplos de situações comuns, na formação dos vários tipos de blocos.

União Simples ou Simple Join

Este é o caso mais simples de todos, bastando um movimento para a formação dum bloco $2 \times 1 \times 1$. É claro que, num caso concreto, pode ser preciso fazer algum tipo de movimento preparatório.

Dois exemplos de União Simples (canto e meio ficam unidos, formando um bloco $2 \times 1 \times 1$).



Na figura anterior, os cubos da direita são obtidos dos cubos da esquerda, aplicando o movimento indicado (F ou F^2).

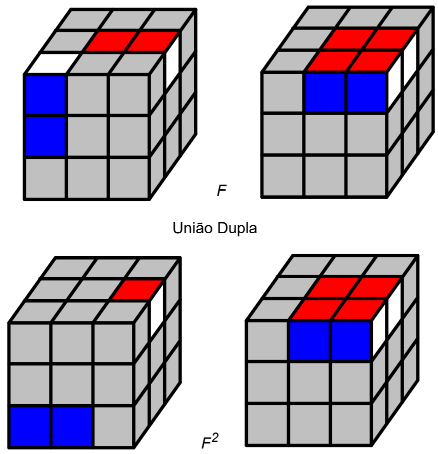
Evidentemente, pode acontecer que o movimento seja outro: D ou D^{-1} ou D^2 ou C^{-1} ou T^2 ou...

Note-se que se trata de unir um canto com um meio.

União Dupla ou Double Join

A união dupla consiste em juntar dois blocos $2 \times 1 \times 1$, formando um bloco $2 \times 2 \times 1$. Isso é feito com um só movimento (se os dois blocos estiverem bem colocados).

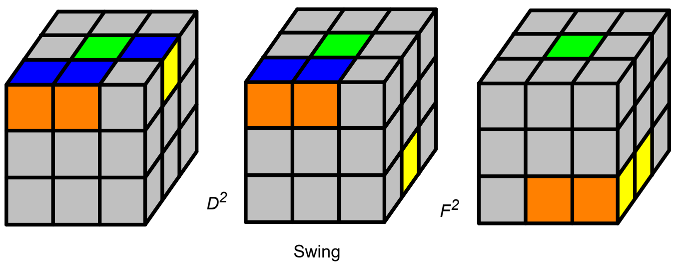
Dois exemplos de União Dupla:



Note-se que os dois blocos são de natureza distinta: um dos blocos é formado por um canto e um meio, enquanto que o outro bloco é formado por um meio e um centro.

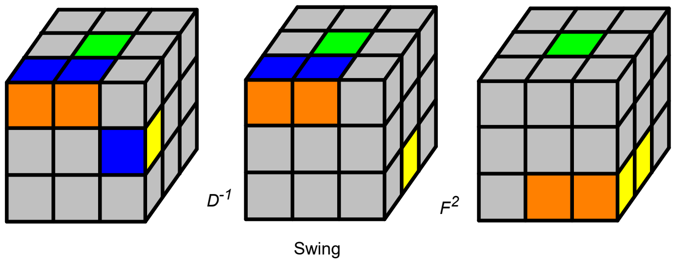
Swing

Primeiro exemplo



Ao fim e ao cabo, demos meia volta na direita, seguindo-se uma União Dupla. Então, **Swing é uma união dupla, após um movimento inicial** (para colocar as duas peças em boa posição).

Segundo exemplo



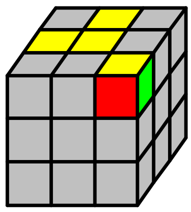
Este segundo exemplo é quase igual ao anterior, só que começamos por fazer D^{-1}, deixando o meio azul e amarelo na posição ideal, para receber o par azul, laranja (e amarelo). Note-se que o verde do centro da face superior é a cor oposta ao azul. Por isso, obtemos um bloco azul 2×2, na face inferior.

Note-se que o primeiro movimento pode ser ligeiramente diferente (se o meio azul e amarelo estiver noutra posição).

Double Swing

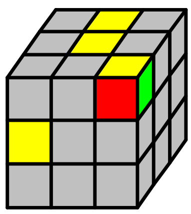
Primeiro exemplo

Esta sequência permite dar meia volta a um canto da camada superior, mantendo dois meios adjacentes.



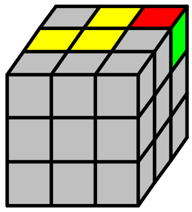
Na figura anterior, pretendemos colocar o canto verde, vermelho e amarelo no canto Noroeste, de modo a formar um bloco $2 \times 2 \times 1$, mantendo os dois meios que têm o amarelo voltado para cima. A solução é simples: $E^2F^2E^2$. A primeira meia volta (na esquerda) deixa o meio verde e amarelo com o amarelo voltado para baixo, a meia volta, na Frente, une canto e meio e a última meia volta junta os dois blocos.

Segundo exemplo



A situação da figura anterior é semelhante, sendo que a solução é EF^2E^2.

Terceiro exemplo



A solução (começa por trazer o canto para o lugar adequado): $D^{-1}E^2F^2E^2$

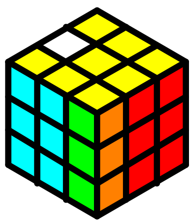
Observação

A sequência Double Swing é mais interessante do que possa parecer, à primeira vista.

Apliquemos a sequência $E^2F^2E^2$, a um cubo resolvido, começando por notar que esta sequência é uma **involução**, porque aplicada duas vezes, faz com que o cubo volte à posição inicial.

A sequência $E^2F^2E^2$ permutou duas colunas (as colunas 1 e 3 e deu meia volta na coluna que inclui o centro azul, deixando o branco voltado para cima e o amarelo voltado para baixo. Então, ao aplicarmos a sequência $E^2F^2E^2$, vamos "levar"toda a coluna verde e laranja e "trazer"toda a coluna azul e vermelha e, ainda, vamos dar meia volta, na coluna que inclui o meio azul e branco.

Por simetria, temos a sequência $F^2E^2F^2$, cujo efeito num cubo resolvido é o seguinte:



No caso da figura anterior, a coluna que inclui o meio laranja e branco deu meia volta. Num caso concreto, podemos ter interesse em aplicar a primeira ou a segunda sequência.

É claro que podemos escolher outra posição padrão e outras sequências.

Consideremos a sequência $D^2F^2D^2$ e apliquemo-la a um cubo resolvido:

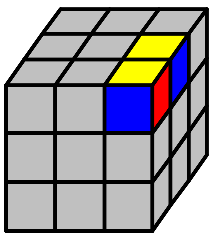
Por simetria, obtemos a sequência $F^2D^2F^2$, cujos efeitos, num cubo resolvido, são os seguintes:

Agora, é uma questão de gosto, na escolha da posição padrão e consequentes sequências a aplicar.

Roundabout

Primeiro exemplo

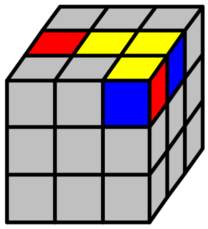
No caso da figura seguinte, pretendemos trocar a ordem das duas peças coloridas, de modo a ficarmos com um par alinhado.



A solução é $F^{-1}E^{-1}T^{-1}$. Note-se que o canto azul, vermelho e amarelo passa pelos quatro cantos da camada de cima. Daí, o nome: Rodar à Volta. E, é claro, o meio azul e amarelo ficou no mesmo lugar e com a mesma orientação.

Segundo exemplo

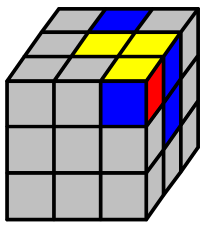
A "manobra"anterior pode ser aproveitada, para juntar outra peça, formando um bloco $2 \times 2 \times 1$. Para isso, o centro de cima deve ser amarelo (relativamente à figura anterior) e devemos ter um meio vermelho e amarelo, como na figura seguinte:



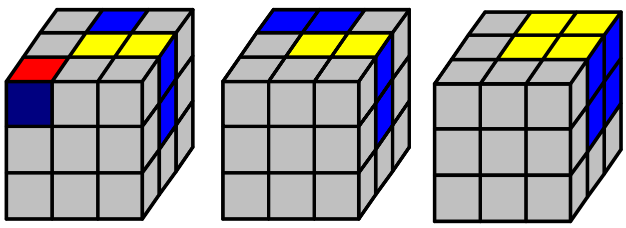
Quando fazemos F^{-1}, o canto e o meio ficam alinhados e seguem juntos, até ao destino final. A solução continua a ser a mesma do caso anterior a este. Note-se que obtemos um quadrado 2×2, na face superior. Isso significa que obtemos um bloco $2 \times 2 \times 1$, na terceira camada.

Terceiro exemplo

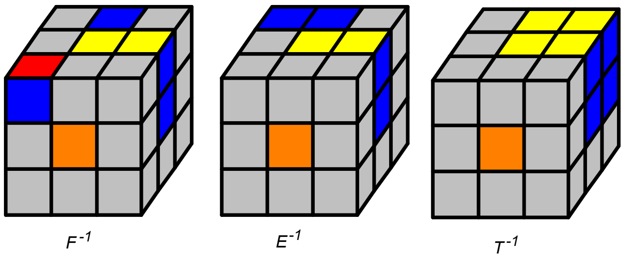
Há um caso semelhante ao anterior, no qual se obtém um bloco $2 \times 2 \times 1$, na camada da direita.



A solução continua a ser a mesma: $F^{-1}E^{-1}T^{-1}$, sendo que a junção do canto e meio é feita no segundo movimento.



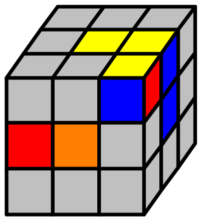
Se raciocinarmos um pouco, chegamos à conclusão que, na realidade, temos um bloco $2 \times 2 \times 2$. Repare que o centro da face da frente tem de ser cor de laranja.



É claro que as cores podem ser diferentes das que estão indicadas, mas o padrão é o mesmo.

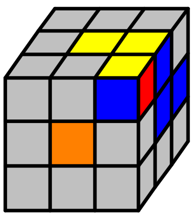
Quarto exemplo

Um caso muito semelhante é o seguinte:



Agora, temos de começar por E^{-1}, após o que se obtém uma posição já apresentada. A solução total é $E^{-1}F^{-1}E^{-1}T^{-1}$.

Quinto exemplo



Neste caso, fazemos $TF^{-1}E^{-1}T^{-1}$. É claro que estamos a supor que o meio (da camada de trás) é azul e vermelho.

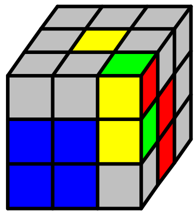
Os exemplos anteriores não preservam o bloco $2 \times 2 \times 3$, pelo que só podem ser usados no início da resolução.

Observação importante

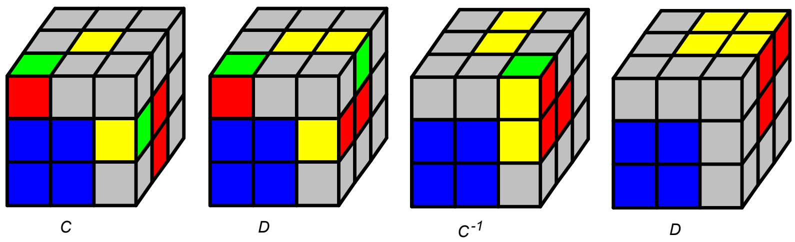
Depois de formado o cubo $2 \times 2 \times 2$ e de o colocarmos na posição padrão, temos de usar outros algoritmos (os quais também podem ser usados, no início). Os seguintes algoritmos preservam o cubo $2 \times 2 \times 2$, se ele estiver na posição indicada:

Broken Corner

Primeira situação

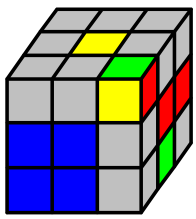


Neste caso, a solução é $CDC^{-1}D$



Note-se que, neste primeiro caso, o bloco $2 \times 2 \times 1$ ficou com o vermelho a combinar com o centro da mesma cor, mas podíamos ter escolhido outras cores, embora o amarelo fosse uma cor obrigatória (centro da face superior).

Segunda situação

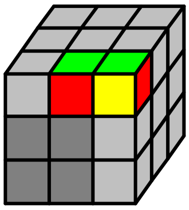


Este caso é muito semelhante ao anterior, sendo que a única diferença está no segundo movimento: meia volta, ou seja, a solução é $CD^2C^{-1}D$.

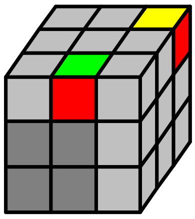
É possível complicar um pouco mais as duas situações anteriores, mas não o fazemos.

Parallell Roundabout

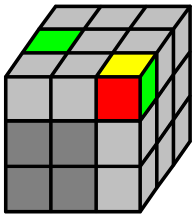
Primeira situação



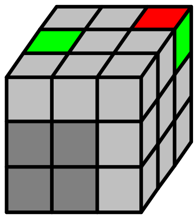
A solução é $DCDCD$ (fácil de fixar).



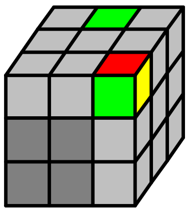
D



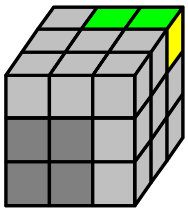
C



D



C

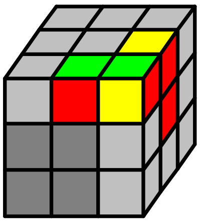


D

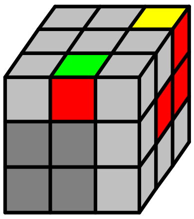
Se acrescentarmos C (no fim), obtemos o canto verde, vermelho e amarelo na mesma posição onde estava, tendo o meio verde e vermelho "pulado"para o outro lado do canto. É o que veremos a seguir.

Segunda situação

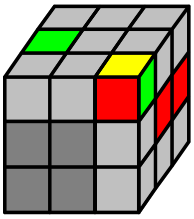
Esta situação permite formar um bloco $2 \times 2 \times 2$



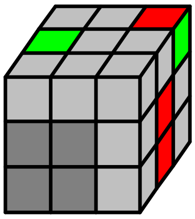
Como já referimos, a solução é $DCDCDC$, a que corresponde as seguintes imagens:



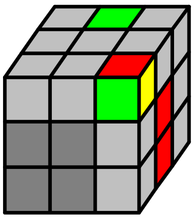
D



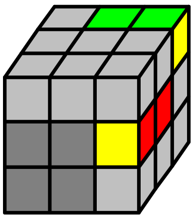
C



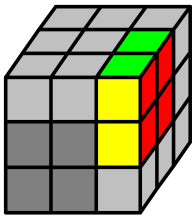
D



C

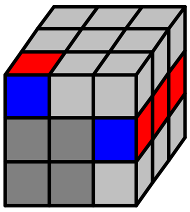


D

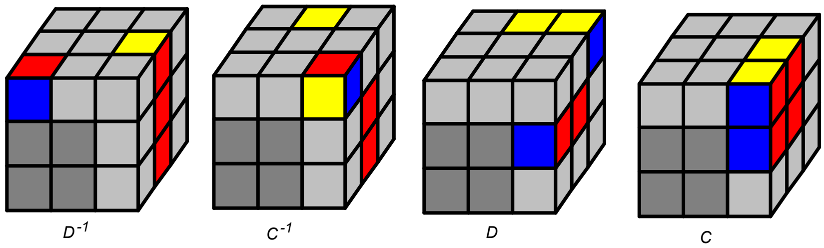


C

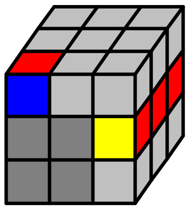
Pillar
Primeira situação



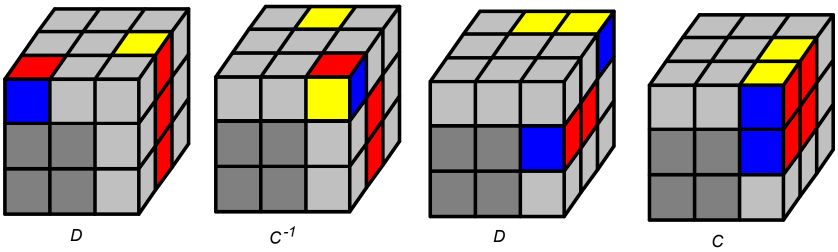
Neste caso, a solução é $D^{-1}C^{-1}DC$. Podemos chamar a este caso "Taco de Golfe".



Segunda situação



Na figura anterior, temos, não completamente visíveis, o canto azul, vermelho e amarelo e o meio vermelho e azul. Pretendemos formar um bloco $2 \times 2 \times 1$. A solução é $DC^{-1}DC$.



Neste segundo caso, as peças são as mesmas, mas estão colocadas em lugares diferentes. Como basta fazer D^2, para passarmos duma situação para outra, a solução será $D^2D^{-1}C^{-1}DC$, ou seja, $DC^{-1}DC$.

Resumindo, temos:

Simple Join – um movimento, por exemplo, F ou F^2.

Double Join – um movimento, por exemplo, F ou F^2.

Swing – dois movimentos, por exemplo, $D^{-1}F^2$.

Double Swing – três movimentos, por exemplo, $E^2F^2E^2$.

Roundabout – três movimentos, por exemplo, $F^{-1}E^{-1}T^{-1}$.

Casos que preservam o bloco $2 \times 2 \times 3$:

Broken Corner – quatro movimentos, por exemplo, $CDC^{-1}D$

Parallell Roundabout – cinco ou seis movimentos: $DCDCD$ ou $DCDCDC$.

Pillar – quatro movimentos, por exemplo, $DC^{-1}DC$ ou $D^{-1}C^{-1}DC$.

Note-se que estas três últimas sequências só utilizam movimentos nas camadas de Cima e da Direita e, por essa razão, preservam o bloco $2 \times 2 \times 3$ que resulta de eliminar a camada de Cima e a camada da Direita. Chega a ser desconcertante verificar que sequências tão simples provoquem efeitos tão especiais.

Como é evidente, vamos precisar destas últimas sequências, quando tivermos um bloco $2 \times 2 \times 3$ e quisermos completar um bloco $2 \times 3 \times 3$.

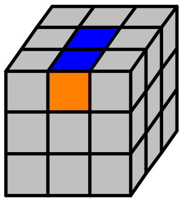
A parte final do método de Petrus é um pouco surpreendente (no método lento). Assim, quando se completam duas camadas, ainda temos três passos.

No primeiro passo, há que colocar os cantos nos lugares adequados, sem nos preocuparmos com a orientação das cores. A única coisa que nos intressa, é manter os meios bem orientados. No segundo passo, resolve-se a face superior (de modo a obtermos uma única cor). Por fim, permutam-se os meios, no terceiro passo. Quem conhecer o método de Fridrich, pode resolver a última camada, em dois passos.

Capítulo 3

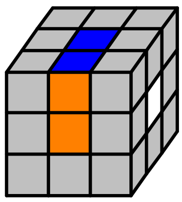
Cubo 2×2×2

Podemos resolver este passo, sem saber muito sobre o cubo de Rubik. Observe a figura seguinte:

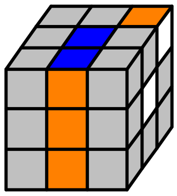


Quando baralhamos o cubo, é natural que haja um centro e um meio bem alinhados, como na figura anterior. Se não houver, é fácil obter um par desses.

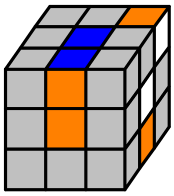
Como o centro verde tem de ficar em baixo, pois o de cima é azul, um dos centros da segunda camada é o que tem cor laranja, pelo que podemos acertar as duas peças da figura anterior com o centro laranja (embora isso não seja necessário):



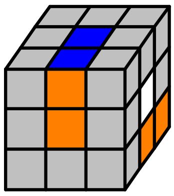
Note-se que o centro da direita é o branco. Para completar este passo, precisamos de colocar o canto azul, laranja e branco, bem como os meios azul e branco e laranja e branco. Se colocarmos, duma só vez o canto e o meio laranja e branco, obtemos um bloco $2 \times 2 \times 1$.Suponhamos que temos a seguinte situação:



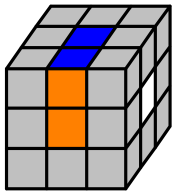
O meio laranja e branco está alinhado com o centro laranja (o branco está voltado para baixo) e o canto azul, laranja e branco está na camada de cima, vendo-se as faces branca e laranja desse canto. Então, podemos fazer $BT^{-1}BTD^2$



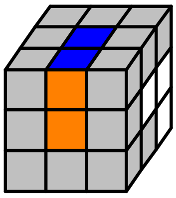
B



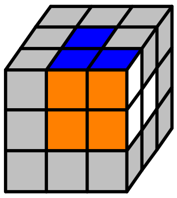
T^{-1}



B

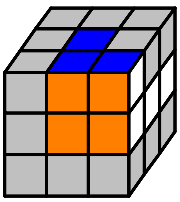


T



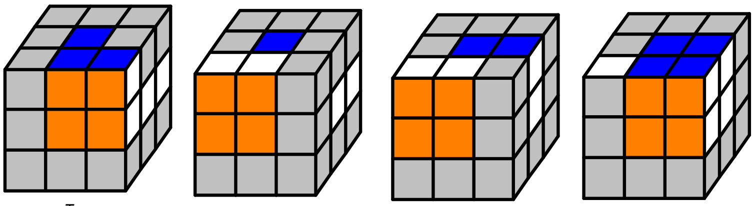
D^2

Agora, basta-nos colocar o meio azul e branco, para obtermos um cubo $2 \times 2 \times 2$. No exemplo que estamos a utilizar, basta-nos fazer T, para que esse meio fique visível:



T

Além de visível, o meio azul e branco ficou alinhado com o centro branco. Se fizermos D^{-1}, o meio azul e branco fica bem colocado, mas desfazemos um bloco já formado. Ora, a maneira de evitarmos isso, é bastante fácil: $F^{-1}D^{-1}F$

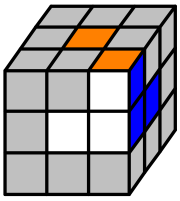


T F^{-1} D^{-1} F

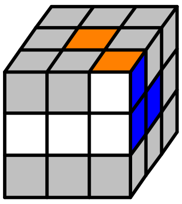
Ou seja, tivemos de "desviar"o bloco já formado, da camada da direita, para colocarmos o meio azul e branco e voltarmos a refazer o bloco anteriormenta formado.

Neste exemplo, foram necessários 9 movimentos, para a formação do cubo $2 \times 2 \times 2$.

Note-se que, num cubo baralhado, pode bem acontecer já termos um par de canto e meio bem unidos. Nesse caso, acerta-se esse bloco $2 \times 1 \times 1$, com os dois centros (das cores do meio). Um exemplo que obtive (já com as duas peças alinhadas com os dois centros):

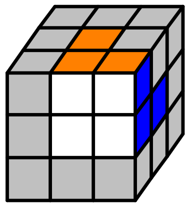


Para completar o cubo $2 \times 2 \times 2$, temos de colocar o meio laranja e branco e o meio azul e laranja. Fazendo E^{-1}, obtivemos a seguinte posição:



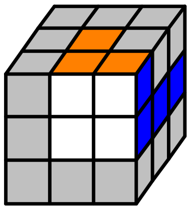
E^{-1}

Agora, fazemos DFD^{-1}, obtendo-se:

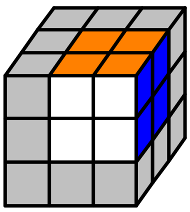


DFD^{-1}

Agora, falta colocar o meio azul e laranja. No caso que estamos seguindo, tínhamos



Então, basta-nos desviar o bloco que está na camada da frente, pelo que a solução é $F^{-1}D^{-1}F$



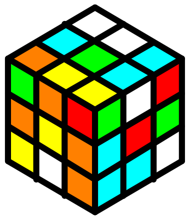
$F^{-1}D^{-1}F$

Agora, é uma questão de treino, sem a preocupação de avançar (na resolução do cubo). O leitor só deve passar ao próximo passo, quando for capaz de formar o cubo $2 \times 2 \times 2$, sem dificuldade e sem utilizar um número grande de movimentos. Se conseguir resolver o cubo $2 \times 2 \times 2$, em seis a nove movimentos, já é bom.

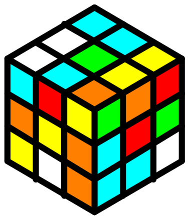
Vejamos alguns exemplos:

Primeiro exemplo

Posição Inicial

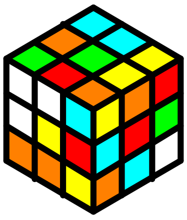


B^{-1}

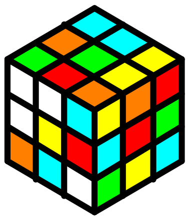


C^{-1}

E^{-1}



F

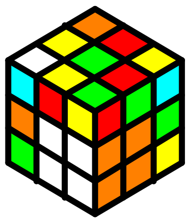


B^{-1}

$C_3{}^2$

D^{-1}

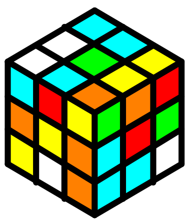
F^2



D

Posição Inicial

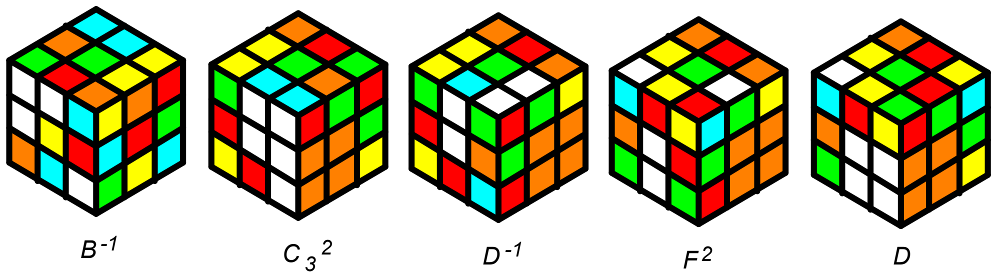
B^{-1}



C^{-1}

E^{-1}

F



Breve descrição dos movimentos e sua finalidade:

B^{-1} – une o canto azul, laranja e branco com o meio azul e laranja

C^{-1} – une o meio laranja e branco com o centro laranja

E^{-1} – alinha o meio laranja e branco com o centro branco (e com o centro laranja)

F – alinha o par canto e meio com o centro azul

B^{-1} – alinha o par canto e meio com o centro laranja

C_3^2 – roda o cubo, para vermos o bloco que já está formado

D^{-1} – afasta o bloco $2 \times 2 \times 1$, para permitir a colocação do meio azul e branco

F^2 – alinha o meio azul e branco com os dois centros (centro branco e centro azul)

D – construindo o cubo $2 \times 2 \times 2$

Observe-se que o ideal era ter colocado o meio azul e branco numa posição que permitisse a formação do bloco $2 \times 2 \times 2$, mais cedo.

Resolução alternativa

B^{-1} – une o canto azul, laranja e branco com o meio azul e laranja

C^{-1} – une o meio laranja e branco com o centro laranja

E – afasta o bloco $2 \times 2 \times 1$ da camada de Trás, permitindo o próximo passo

T^2 – alinha o meio laranja e branco com o centro branco (e com o centro laranja)

E^2 – alinha o par canto e meio com o centro azul

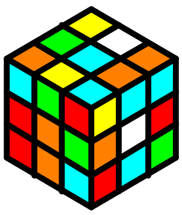
C_3^2 – roda o cubo, para vermos o bloco que já está formado

Desta maneira, teríamos feito cinco movimentos em vez de oito.

Segundo exemplo

Posição Inicial

Já temos quatro meios alinhados com o centro, pelo que vamos escolher um. Consideremos o meio vermelho e amarelo (de que vemos o vermelho na segunda camada).



T

C^2

E

F

T^{-1}

F^{-1}

C^{-1}

F

T – une o canto azul, laranja e amarelo com o meio azul e laranja
C^2 – prepara a união dos dois blocos
E – forma um bloco $2 \times 2 \times 1$
F – alinha o bloco com os dois centros (amarelo e azul)
T^{-1} – traz o meio azul e amarelo para cima
F^{-1} – tira o bloco $2 \times 2 \times 1$ da camada de cima
C^{-1} – alinha o meio azul e amarelo com o centro azul
F – forma o bloco $2 \times 2 \times 2$

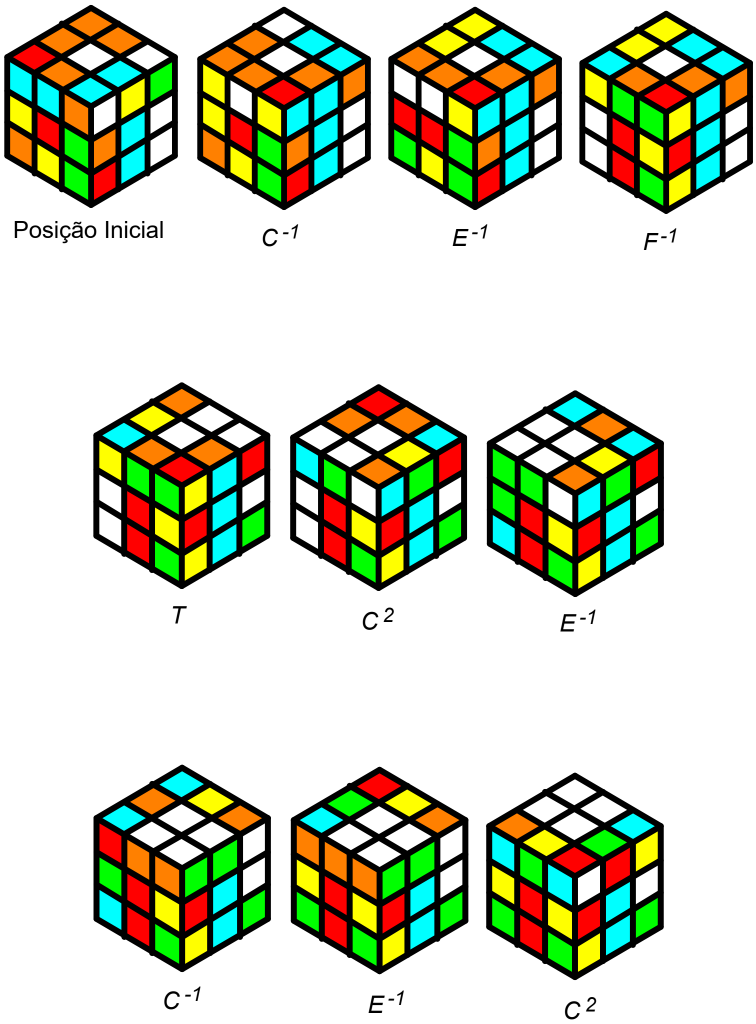
Resolução alternativa

Teria sido mais rápido, ter aplicado a seguinte sequência:

$$TC^2ET^{-1}C^{-1}F$$

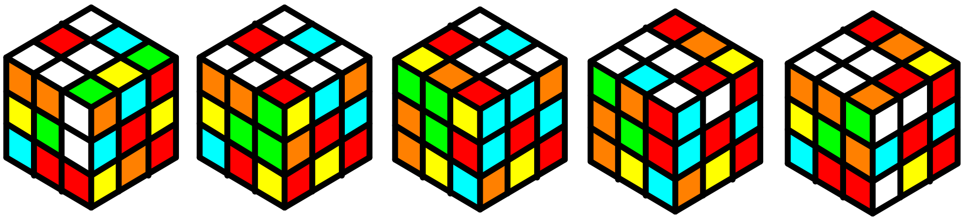
Note-se que não adiantou alinhar parcialmente o bloco $2\times2\times1$, para que o mesmo fosse desalinhado, quase de imediato. Nesta segunda resolução, tivemos menos dois movimentos do que na primeira resolução (seis, em vez de oito).

Terceiro exemplo

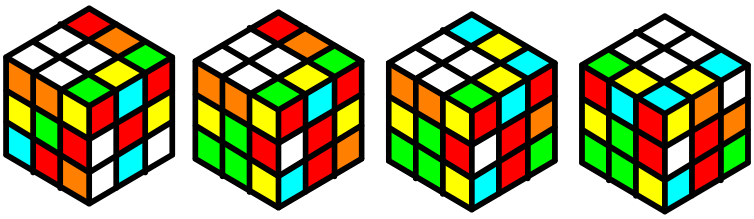


Nesta resolução, fizemos nove movimentos.

Quarto exemplo



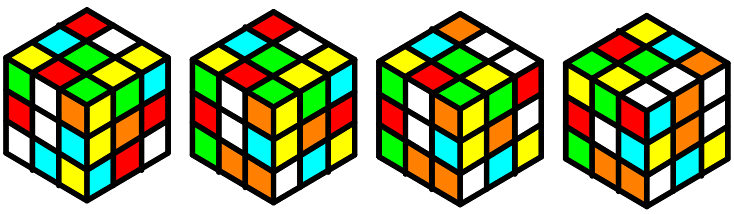
Posição Inicial D F^{-1} C^{2} F



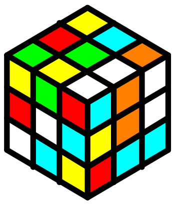
D^{-1} B T^{-1} C

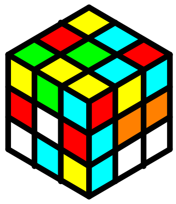
Quinto exemplo

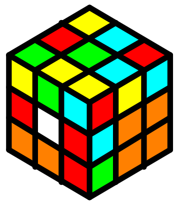
Primeira resolução

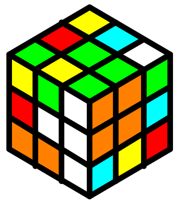


Posição Inicial B T^{-1} C


B^{-1}


D


B^2


D^2

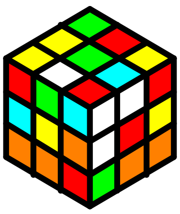

B

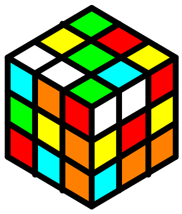

D^2

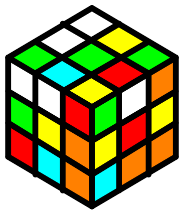

F^2

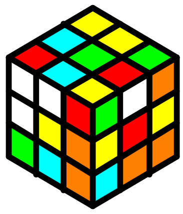

D^2

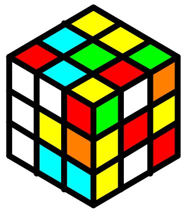
Segunda resolução

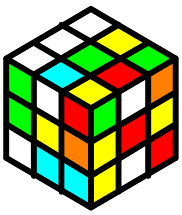

Posição Inicial

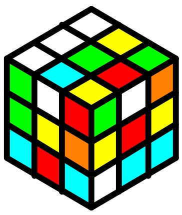

F^{-1}

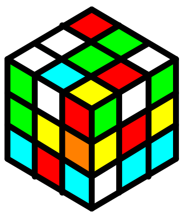

C

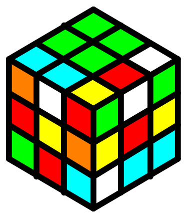

E


B^2


E^{-1}


B

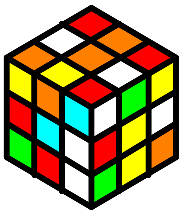

T^2

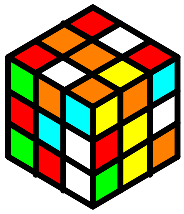

E^{-1}

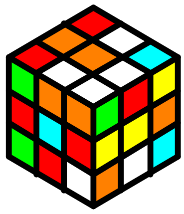
Nesta segunda resolução, com $F^{-1}CEB^2$, obtivemos um bloco $2 \times 2 \times 1$. Agora, pretendemos colocar o meio verde e branco. Para isso, utilizamos a sequência $E^{-1}BT^2E^{-1}$, em que o primeiro movimento se destina a "afastar"o bloco já formado da camada de baixo, permitindo alinhar o meios verde e branco com o centro branco, dar meia volta na camada de Trás e unir os dois blocos. O número de movimentos foi de oito, contra onze da primeira resolução.

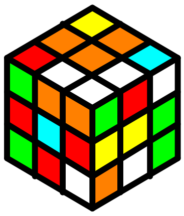
Sexto exemplo


Posição Inicial


D^{-1}

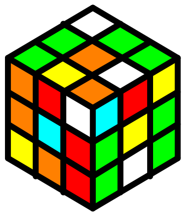

C^{-1}

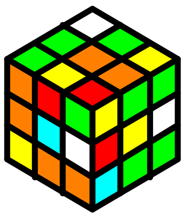

D

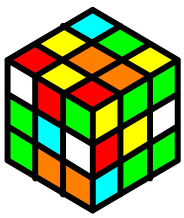

T

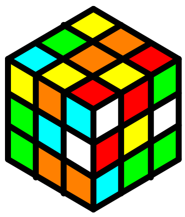

E

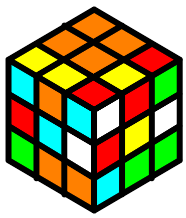

F^{-1}


T


D^{-1}


E


C^{-1}

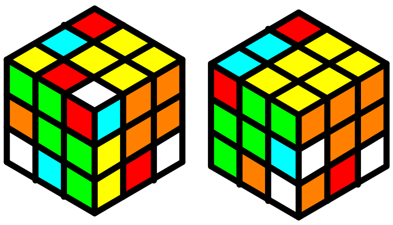

E^2

Este é um caso em que o número de movimentos realizados é manifestamente elevado.

Resumo

Unimos um canto com uma aresta, de modo que as duas cores da aresta combinem com duas cores do canto.

Na figura anterior a aresta laranja e amarela está bem alinhada com o canto azul, laranja e amarelo. Além disso, as duas peças já estão alinhadas com o centro amarelo, mas isso não é obrigatório, uma vez que podemos fazer esse alinhamento. Como podemos verificar, temos outro par bem alinhado (entre si). Então, podemos fazer $C^{-1}F^{-1}$, alinhando os dois pares com alguns dos centros.



C^{-1} F^{-1}

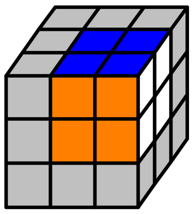
Agora, falta-nos colocar o meio verde e laranja, no lugar onde está o meio azul e branco. Para isso, temos de saber onde está esse meio, uma vez que nem todos os meios estão visíveis, na figura anterior. Relativamente a esssa figura anterior, há três possibilidades, relativamente aos meios visíveis: o meio com castanho da primeira camada e dois meios da segunda camada (de um, vemos o verde, do outro, vemos a cor laranja). Se for o da primeira camada, fazemos BC^2DC^2. O primeiro movimento alinha com o centro laranja, o segundo desvia o bloco da camada da direita, o terceiro alinha o meio com o centro verde e o quarto acerta tudo, obtendo-se um cubo $2 \times 2 \times 2$. Se se tratar do meio com laranja que se vê na segunda camada, a solução é $C^2D^2C^2$. Se for o meio com verde, da segunda camada, a solução é $C^{-1}F^2C$.

Em geral, construimos um bloco $2 \times 2 \times 1$, após o que colocamos o meio em falta, para obtermos um cubo $2 \times 2 \times 2$.

Capítulo 4

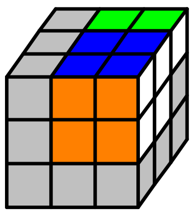
Bloco 2×2×3

Depois de termos formado um cubo $2 \times 2 \times 2$, temos de expandir esse bloco.

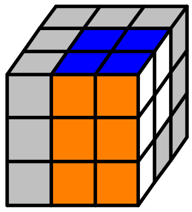


Na figura anterior, temos um cubo $2 \times 2 \times 2$. Esse cubo pode ser expandido para Trás, para a Esquerda ou para Baixo. A opção dependerá da posição que as restantes peças ocupem no cubo. Se expandirmos o cubo para Baixo, precisamos do canto laranja, branco e verde.

Num exemplo utilizado, no Capítulo anterior, tínhamos a seguinte situação:

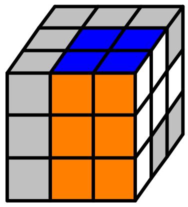


A união dos dois blocos é muito simples: T^2B^2



T^2B^2

Agora, falta-nos colocar o meio verde e branco.



O meio verde e branco está na segunda camada (vemos o branco). Se dermos meia volta, na camada de Trás, se rodarmos a Esquerda convenientemente, se desviarmos o bloco que está na camada da Frente, damos meia volta, na camada de Baixo e recolocamos o bloco da camada da Frente. Ou seja, fazemos

$$T^2E^{-1}F^{-1}B^2F$$

Quando temos um cubo $2 \times 2 \times 2$ já formado, temos de olhar para as cores envolvidas.

No caso da figura anterior, temos um bloco $2 \times 2 \times 2$, com as cores laranja, branco e uma terceira cor. Nos cubos habituais, essa cor é o azul. Independentemente disso, há três maneiras de continuarmos. Uma dessas maneiras é colocarmos o canto apropriado no lugar onde está o canto verde, branco e laranja. Curiosamente, é ele mesmo que deve ficar lá, mas orientado convenientemente. Então, temos de retirá-lo da posição em que ele se encontra, uni-lo com um meio adequado (verde e branco ou verde e laranja) e formar um bloco maior. Depois, há que inserir um outro meio, de modo a ficar bem alinhado com as restantes peças.

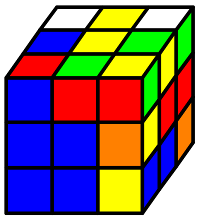
Na figura anterior, podemos ser levados a supor que o canto azul, vermelho e branco está bem unido com o meio azul e branco. Suponhamos que tal acontece. Como levar as duas peças para o seu devido lugar? Ora, esta pergunta não tem nada de complicada: é uma situação bastante frequente, quando se resolve o cubo de Rubik, utilizando o método básico das camadas. A resposta é $CD^{-1}CD$, como é hábito. O primeiro movimento alinha as faces laterais brancas com o centro azul, o segundo movimento destina-se a vir buscar as duas peças, o terceiro movimento coloca as duas peças (canto e meio) no lugar devido e o quarto movimento leva as duas peças para baixo, refazendo, ao mesmo tempo, o bloco laranja e branco da terceira camada.

Se não tivermos formado um bloco $2 \times 2 \times 3$, é necessário colocar um último meio. Mas, isso é que fazemos na resolução do cubo pelo método das camadas (F2L). Note-se que a única diferença é que temos uma camada completamente livre (no caso da figura anterior, é a camada da Esquerda.

Capítulo 5

Inversão de Meios

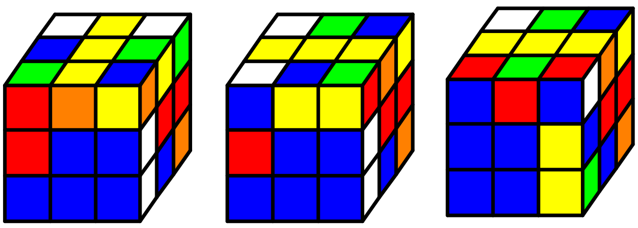
Quando completamos o prisma $2 \times 2 \times 3$, em geral, temos uma situação que precisa de ser corrigida. Isso tem a ver com a orientação dos 7 (sete meios) que não pertencem ao prisma $2 \times 2 \times 3$. Das sete peças, há um número ímpar de meios bem orientados (1, 3, 5 ou 7), pelo que temos 0, 2, 4 ou 6 meios mal orientados. A boa orientação de todos os meios é essencial para o método de Petrus e vai fazer com que, ao terminarmos duas camadas, já tenhamos a cruz da camada formada, embora alguns meios possam estar fora do lugar.



No caso da figura anterior, está formado o bloco $2 \times 2 \times 3$ (primeiras duas camadas, na esquerda).

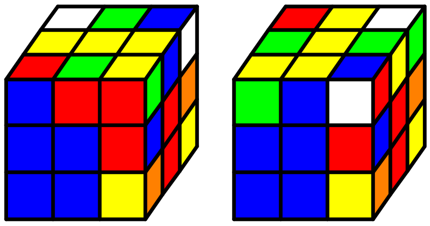
O meio verde e amarelo está, manifestamente, mal orientado. O meio azul e amarelo (meio Oeste, em Cima) e meio laranja e amarelo também estão mal orientados.

Então, podemos fazer $F^{-1}C^{-1}F$



F^{-1} C^{-1} F

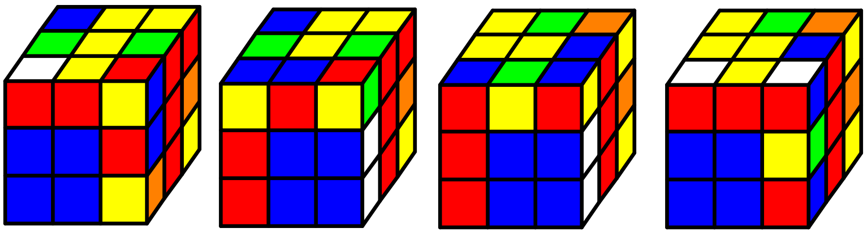
E seguimos com DC



D C

Na figura anterior (cubo da direita), o meio verde e amarelo e o meio vermelho e azul estão mal orientados.

Se considerarmos a posição padrão dos dois meios mal orientados, a da figura anterior, temos que aplicar a sequência $C^2F^{-1}C^{-1}F$.



C^2 F^{-1} C^{-1} F

No entanto, a posição padrão é meramente indicativa. Então, poderíamos ter feito $F^{-1}CF$.

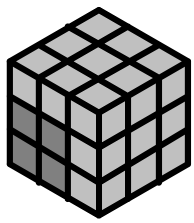
E todos os meios estão bem orientados.

Agora, temos de juntar o canto azul vermelho e branco com o meio azul e vermelho e proceder de igual modo com o último canto e o último meio das duas primeiras camadas. Os únicos meios que podem gerar alguma confusão sobre a orientação, são aqueles que não têm a cor de cima nem a cor de baixo (no caso da figura anterior, são os meios azul e vermelho e verde e vermelho). Estarão bem orientados se pudermos colocá-los no lugar adequado, movendo as camadas de Cima e da Direita e apenas essas. A única dificuldade deste passo consiste em sabermos ver se os meios não pertencentes ao bloco $3 \times 2 \times 2$ estão bem ou mal orientados, uma vez que o modo de corrigir a orientação é facílimo.

Capítulo 6

Resolução de Duas Camadas

Este passo é o mais complicado, porque, colocando o bloco $3 \times 3 \times 2$, na posição padrão, só podemos mover a camada da Direita e a camada de Cima.



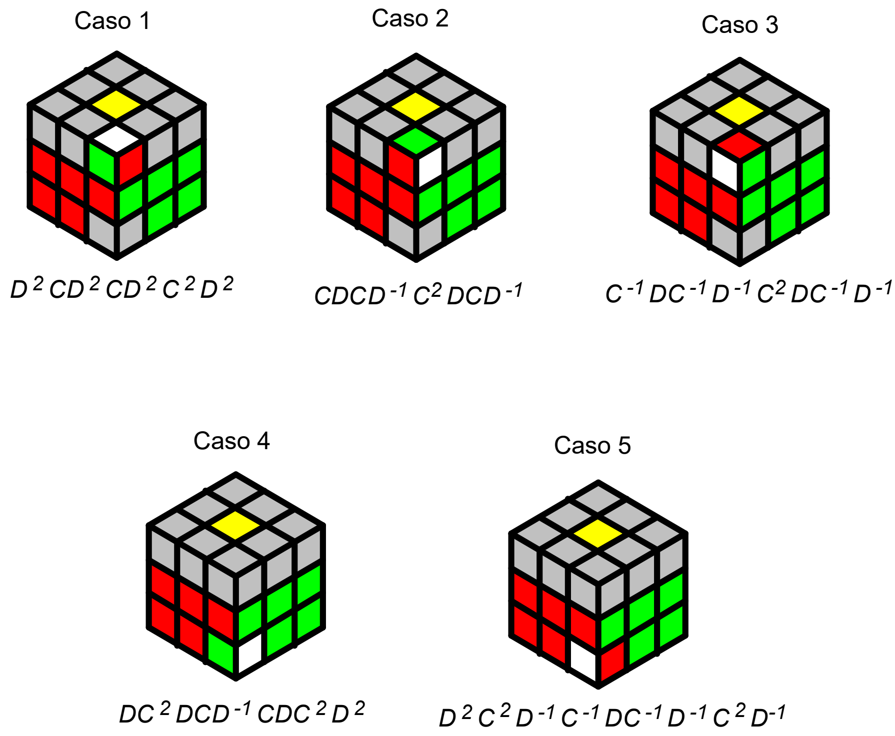
Na figura anterior, a cinzento escuro, temos o bloco $2 \times 2 \times 3$, na sua posição padrão.

Acertando o último meio da primeira camada (o que é facílimo, pois a peça está bem orientada), falta colocar dois cantos (no máximo) e dois meios (no máximo).

No seguinte quadro, temos as soluções dos cinco casos não resolvidos. Para percebermos o significado da última coluna, pensemos em CDF. Este caso é aquele em que o canto a ser colocado na primeira camada está em CDF, ou seja, está no único canto que pertence às camadas de Cima, da Direita e da Frente. A letra de maior tamanho, C, indica que a cor que tem de ficar voltada para baixo, está voltada para Cima. E analogamente para os restantes casos. É claro que há situações em que o canto e o meio podem ser colocados mais rapidamente, por exemplo, com a sequência DCD^{-1} (a Pesca).

Nº	Canto da Primeira Camada	Posição
1	$(D^2C)\,(D^2C)\,(D^2C^2D^2)$	**C**DF
2	$CDCD^{-1}C^2DCD^{-1}$	C**D**F
3	$C^{-1}\,(DC^{-1}D^{-1})\,C^2\,(DC^{-1}D^{-1})$	CD**F**
4	$DC^2DCD^{-1}CDC^2D^2$	B**D**F
5	$D^2C^2\,(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1})\,C^2D^{-1}$	BD**F**

Eis as imagens acompanhadas das soluções:



O Caso 6 é aquele em que o Canto e o meio já estão resolvidos.

Então, para completarmos duas camadas do cubo de Rubik, precisamos de aplicar um entre cinco algoritmos (tratam-se de cinco algoritmos de F2L, pelo que já são conhecidos dos utilizadores do método de Fridrich).

Capítulo 7

Posicionar os Cantos

Quando se termina a resolução das primeiras duas camadas, utilizando o método de Petrus, já temos a Cruz da face superior formada. O próximo passo consiste em acertar a posição dos cantos, sem mais nenhuma preocupação. Isto, caso os cantos não estejam todos bem posicionados.

No caso em que os cantos não estão todos bem posicionados, há duas possibilidades.

1^o Caso

Temos dois cantos adjacentes bem posicionados e os outros dois mal posicionados. É um caso muito comum para quem utiliza o método básico das camadas. A solução é

$$D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2\left(C^{-1}\right)$$

O último movimento da sequência anterior não costuma ser feito, porque não é estritamente necessário, uma vez que podemos rodar a camada de Cima, mais tarde.

Vejamos um exemplo:

A Cruz amarela está formada e os dois meios de Trás estão bem posicionados. É claro que os dois da Frente estão mal posicionados e temos de permutá-los.

Aplicando a sequência $D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$, obtemos o seguinte cubo:

Se tivéssemos realizado o movimento final C^{-1}, os cantos ficavam todos na sua posição. Como não fizemos isso, os cantos estão todos fora da sua posição, mas podemos acertá-los, a qualquer momento.

2^o Caso

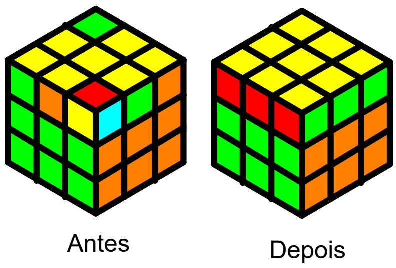
Neste segundo caso, temos dois cantos opostos bem posicionados e dois cantos (opostos) mal posicionados. A solução é

$$FC^2F^{-1}T^{-1}CFC^{-1}TC^2F^{-1}$$

Na sequência anterior, falta um último movimento na camada de Cima.

Neste capítulo, necessitamos de dois algoritmos, pata posicionarmos os quatro cantos adequadamente. Há um terceiro caso em que não precisamos de fazer nada e passamos adiante.

Como este Capítulo é bastante pequeno, vejamos um exemplo de cada um dos casos anteriores.



O cubo da esquerda tem os dois cantos da "diagonal principal"mal posicionados e os outros dois bem. Aplicando a sequência escrira acima, obtemos o cubo da Direita. Manifestamante, falta C, para que o cubo fique resolvido.

Neste exemplo, fomos felizes e o cubo ficou resolvido. No caso geral, ainda faltarão dois passos (que correspondem aos próximos dois Capítulos.

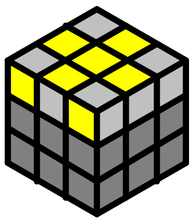
Capítulo 8

Orientação dos Cantos

Terminado o passo anterior, podemos ter alguns cantos mal orientados, embora estejam bem posicionados. É claro que temos a Cruz da face superior formada. Se toda a face amarela está formada, passamos ao próximo passo.

Se a face amarela ainda não está formada, temos 7 (sete) casos, pelo que precisaremos de 7 (sete) algoritmos, embora um deles chegue, se o aplicarmos uma ou várias vezes.

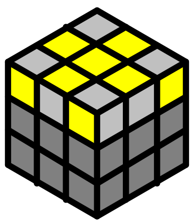
1^o Caso



Eu costumo chamar a este caso "robô de 4 olhos": dois olhos amarelos voltados para a Frente e dois olhos amarelos voltados para Trás.

Solução: $C_3DCD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^2D^{-1}$

2^o Caso



Eu costumo chamar a este caso "robô de 2 olhos e duas orelhas": dois olhos amarelos voltados para a Frente e duas orelhas amarelos voltadas para os lados.

Solução: $C_3DC^2D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^2C^2DC^2$

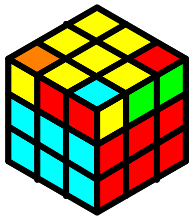
3^o Caso

A **solução** é bastante conhecida (Sonho ou Sune):

$$DCD^{-1}CDC^2D^{-1}\left(C^2\right)$$

A última meia volta (em Cima) destina-se a acertar os cantos. No caso da figura anterior, o cubo fica resolvido, mas isso nem sempre acontece.

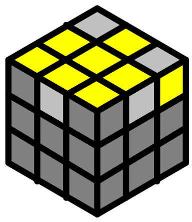
4^o Caso



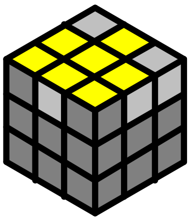
Solução: $D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2DC^2$

Trata-se do bem conhecido Anti-Sonho ou Anti-Sune.

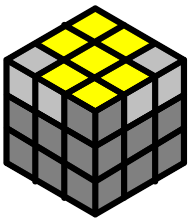
5^o Caso



"Mão e Dedo, Sem Amarelos aTrás"ou "Mão e Dedo SAT.
Solução: $C_3^{-1}F^{-1}C^2FCF^{-1}CF^2C^2F^{-1}C^{-1}FC^{-1}F^{-1}$
Solução: $C_3^2D^{-1}C^2DCD^{-1}CD^2C^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}$
6^o Caso



"Mão e Dedo, Com Amarelos aTrás"ou "Mão e Dedo CAT.
Solução: $C_3^{-1}FCF^{-1}CFC^2F^2C^{-1}FC^{-1}F^{-1}C^2F$
Solução: $C_3^2DCD^{-1}CDC^2D^2C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D$
7^o Caso



"Laço"ou "Peixe"(dois amarelos invisíveis).
Solução: $DF^{-1}B^2FD^{-1}C^2DF^{-1}B^2FD^{-1}\left(C^2\right)$
Depois de termos a face superior resolvida, falta permutar os meios, para termos o cubo resolvido (a menos que o cubo já fique resolvido).

Observação

No Capítulo anterior, temos duas fórmulas (algoritmos), sendo que uma delas termina em C^{-1}. Este movimento (C^{-1}) não deve ser realizado, porque não traz vantagem nenhuma, uma vez que os algoritmos subsequentes mantêm as duas primeiras camadas e alguns deles terminam em C^2. Logo, esses dois movimentos, na camada de Cima, podem ser feitos no fim, havendo menos um movimento a realizar. Ou seja, os algoritmos do quadro seguinte devem realizar-se, omitindo o C^2 final, quando existente (isso acontece em 4 dos 7 casos). Depois, temos de ver o que falta fazer para completar o cubo.

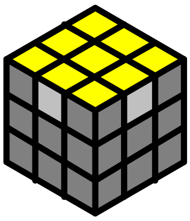
Resumo

Caso	Algoritmo
Robô de 4 olhos	$C_3DCD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^2D^{-1}\left(C_3^{-1}\right)$
Robô de 2 olhos e 2 orelhas	$C_3DC^2D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^2C^2DC^2\left(C_3^{-1}\right)$
Sune (Sonho)	$\left(DCD^{-1}CDC^2D^{-1}\right)C^2$
AntiSune (Anti-Sonho)	$D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2DC^2$
Mão e Dedo (SAT)	$C_3^2D^{-1}C^2DCD^{-1}CD^2C^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}$
Mão e Dedo (CAT)	$C_3^2DCD^{-1}CDC^2D^2C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D$
Peixe (ou Laço)	$DF^{-1}B^2FD^{-1}C^2DF^{-1}B^2FD^{-1}C^2$

Capítulo 9

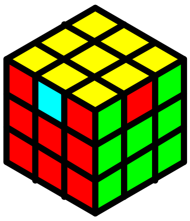
Posicionar os Meios

Consideremos a seguinte situação:



Para completar o cubo, falta permutar adequadamente os quatro meios da terceira camada.

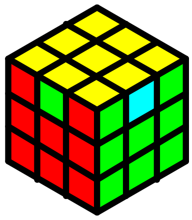
1^o Caso



Na figura anterior, a camada de Trás está resolvida, faltando permutar três meios da terceira camada. É uma situação muito comum e fácil para quem saba resolver o cubo de Rubik, utilizando o método básico das camadas. Como o meio azul e amarelo (que está na Frente) tem de passar para a camada da esquerda, temos a seguinte **solução**

$$F^2CED^{-1}F^2E^{-1}DCF^2$$

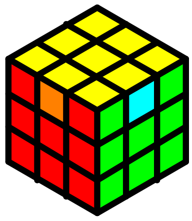
2^o Caso



Neste caso, o meio que está na Frente, tem de passar para a camada da Direita, pelo que a solução é ligeiramente diferente.

Solução: $F^2C^{-1}ED^{-1}F^2E^{-1}DC^{-1}F^2$

3^o Caso



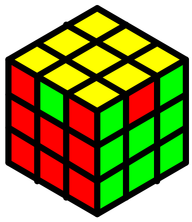
Neste caso, cada meio tem a cor (lateral) oposta ao centro da face. Logo, todos os meios estão errados e vamos permutá-los em forma de +.

Solução: $D^2F^2T^2E^2BE^2T^2F^2D^2C^{-1}$

Trata-se dum algoritmo simétrico, se descontarmos o último movimento.

Ao fim e ao cabo, pretendemos permutar os meios de acordo com a regra (NS)(EW), em que N, S, E, W são os meios Norte, Sul, Este, Oeste. Em inglês, as palavras são North, South, East, West.

4^o Caso



Neste caso, pretendemos permutar os meios de acordo com a regra (NW)(SE).
Solução: $\left(F^2T^2\right)BD^2\left(F^2T^2\right)E^2\left(F^2T^2\right)B^{-1}\left(F^2T^2\right)$

Note-se que, temos de respeitar a posição padrão. Se pretendermos permutar os meios de acordo com a regra (NE)(SW), devemos rodar todo o cubo de um quarto de volta (C_3), obtendo-se a posição anterior.

E não há mais casos a considerar (para além daquele caso em que o cubo fica resolvido num dos passos anteriores).

Resumo

1. (SWE) $F^2CED^{-1}F^2E^{-1}DCF^2$

2. (SEW) $F^2C^{-1}ED^{-1}F^2E^{-1}DC^{-1}F^2$

3. (NS)(EW) $D^2F^2T^2E^2BE^2T^2F^2D^2C^{-1}$

4. (NW)(SE) $\left(F^2T^2\right)BD^2\left(F^2T^2\right)E^2\left(F^2T^2\right)B^{-1}\left(F^2T^2\right)$

Capítulo 10

Exemplos por Lars Petrus

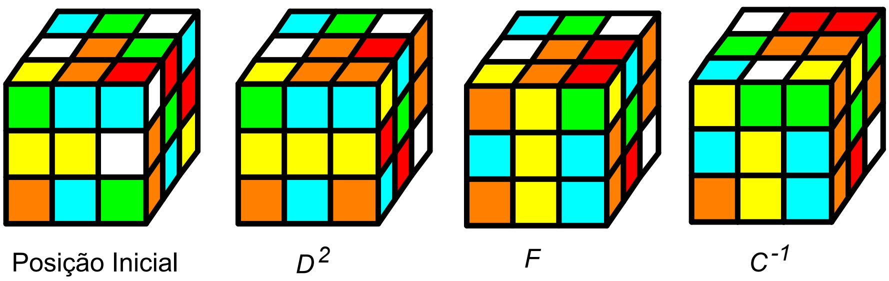
Os exemplos apresentados nesta secção foram recolhidos da página de Lars Petrus, onde ele apresenta 13 exemplos de resolução, sem apresentar a maneira como o cubo foi baralhado. Por isso, a maneira de obter a posição inicial consiste em aplicar, a um cubo resolvido, a sequência inversa da solução apresentada.

Eis o endereço: https://lar5.com/cube/examples.html

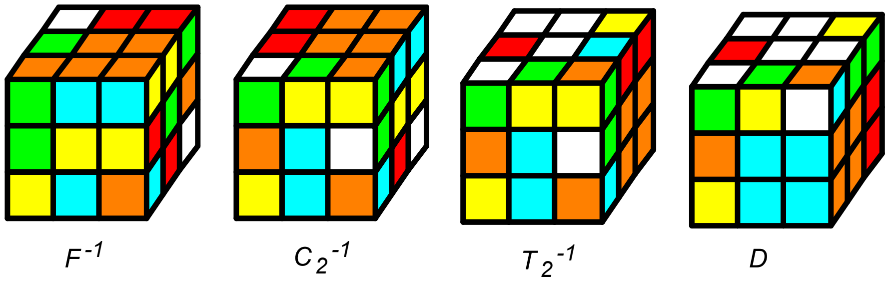
O acesso foi feito em Outubro de 2018.

10.1 Primeiro Exemplo

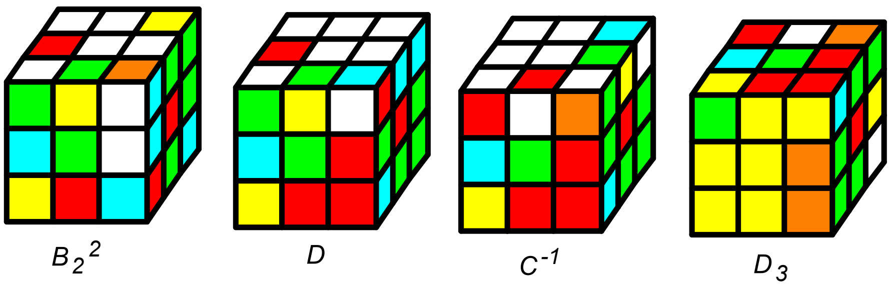
Este é o primeiro exemplo apresentado por Lars Petrus:



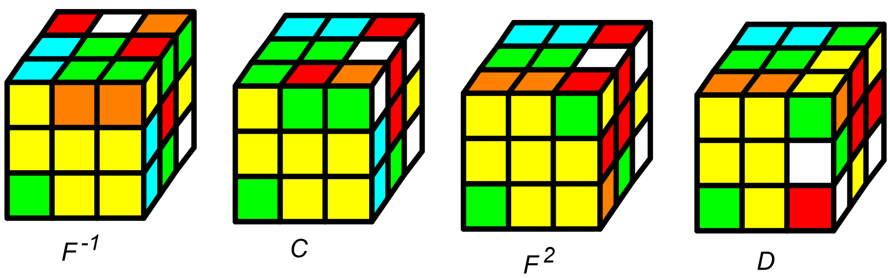
Com D^2, temos um canto, um meio e um centro (o centro laranja). Falta juntar o meio laranja e amarelo.

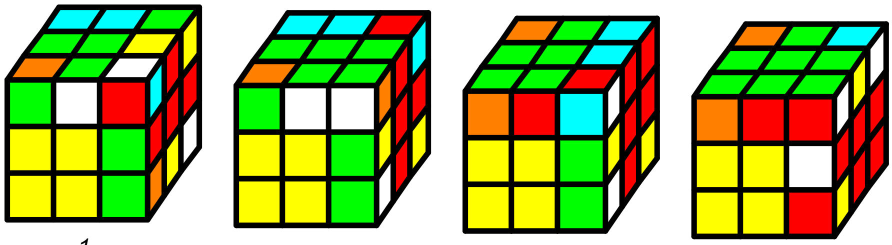


Com $FC^{-1}F^{-1}$, obtemos um bloco $2 \times 2 \times 1$. Com $C_2^{-1}T_2^{-1}D$, conseguimos um bloco $2 \times 2 \times 2$.



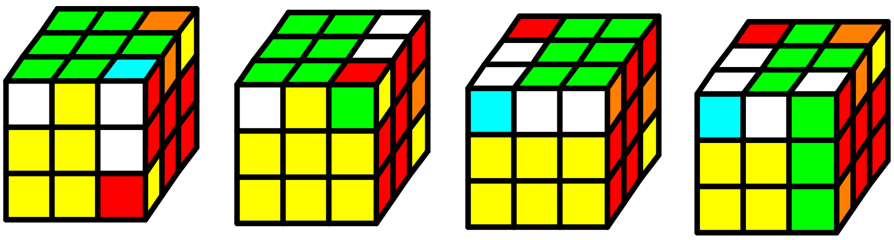
Aplicando a sequência $B_2^2DC^{-1}$, obtemos um bloco $2 \times 2 \times 3$, após o que colocamos esse bloco na posição padrão (cubo da direita, na figura anterior). Agora, vamos ter que orientar os meios (que estão mal orientados).



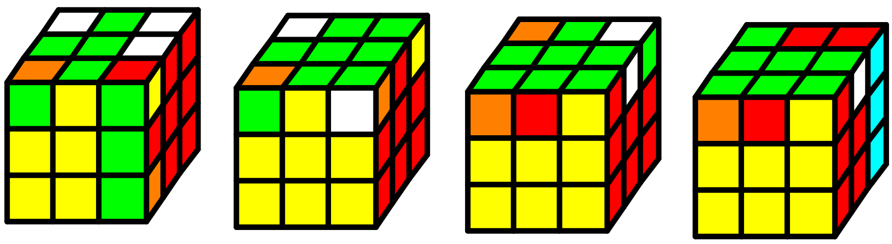


F^{-1} D C D

Na figura anterior, o cubo da direita tem todos os meios bem orientados.

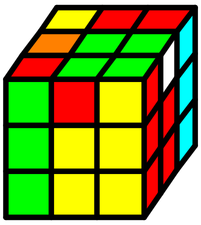


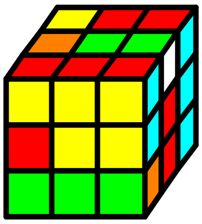
C D C^2 D^{-1}

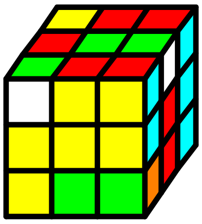


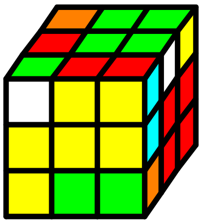
C^2 D C T

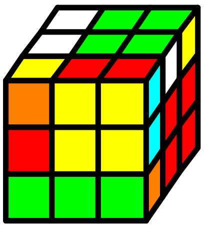
O segundo cubo da figura anterior tem as duas primeiras camadas resolvidas e, além disso, tem a cruz da terceira camada perfeitamente alinhada com os centros. Isso facilita a nossa tarefa, se conhecermos os algoritmos adequados. Lars Petrus continua com a resolução indicada, mas podemos resolver o cubo, utilizando menos movimentos.

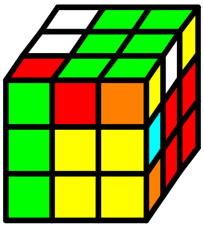

E

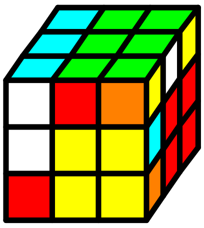

F^{-1}

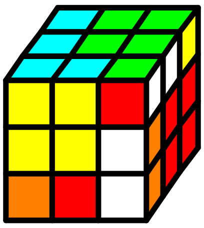

E^{-1}

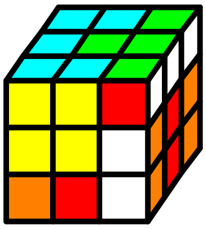

T^{-1}

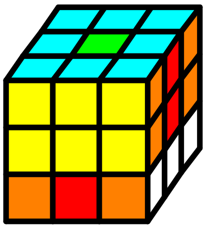

E

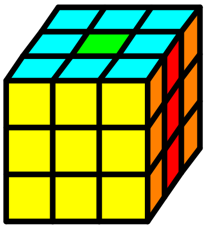

F

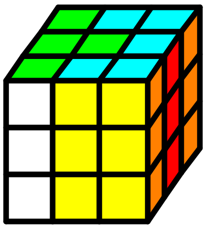

E

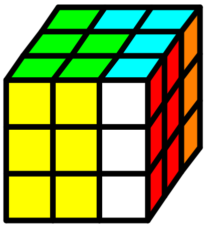

F^2

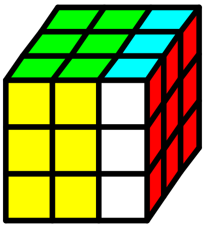

T^2

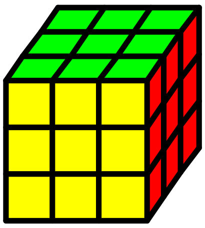

D^2


B


E^2


F^2


T^2

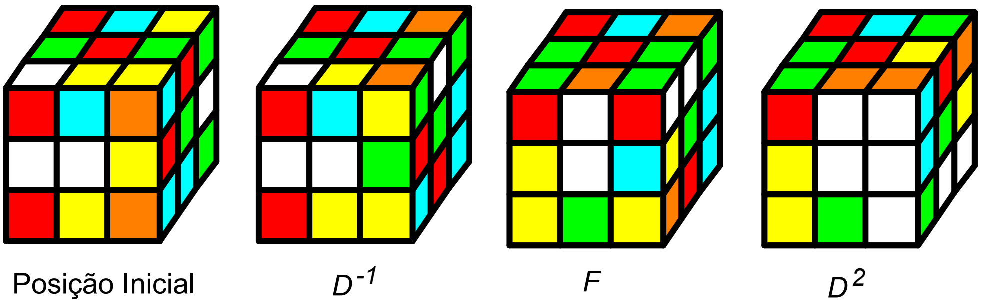

D^2

A solução alternativa, da parte final, é

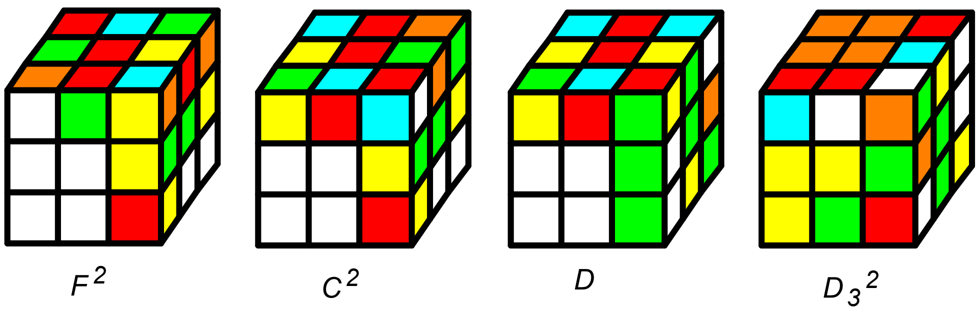
$$C_3\left(T^{-1}CT\right)\left(D^2TD^2C^{-1}D^2\right)\left(CT^2C^{-1}\right)\left(TD^2\right)$$

10.2 Segundo Exemplo

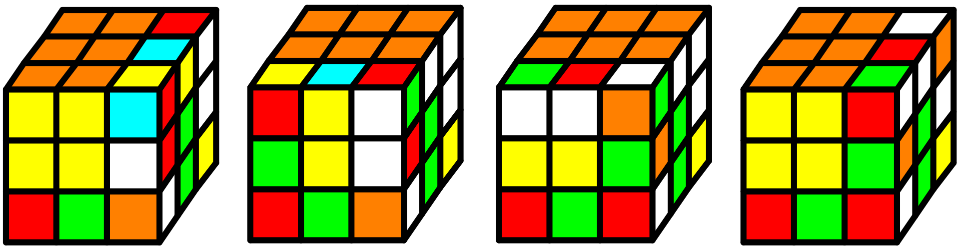
Vejamos o segundo exemplo de Lars Petrus:



Desta maneira, obtivemos um bloco $2 \times 2 \times 1$

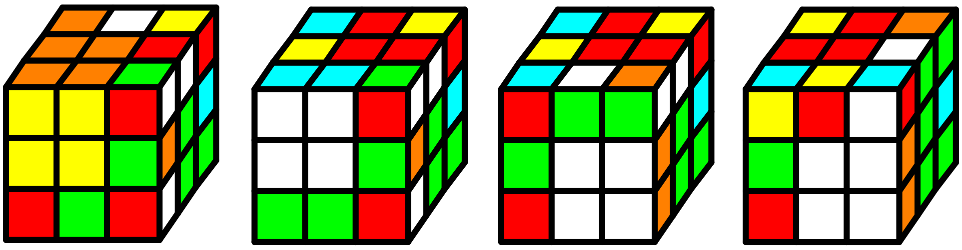


Com F^2, obtivemos um bloco $2 \times 2 \times 2$.

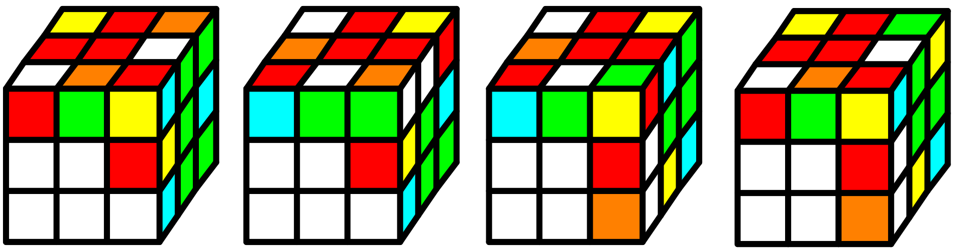


F $\quad C$ $\quad F^{-1}$ $\quad C^{-1}$

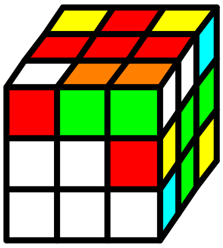
E já temos um bloco $2 \times 2 \times 3$.



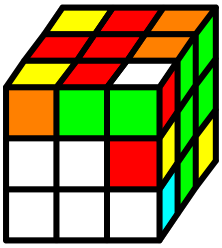
T $\quad E^2$ $\quad F^2$ $\quad C^{-1}$



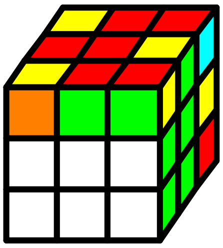
F $\quad C$ $\quad D^{-1}$ $\quad C^{-1}$



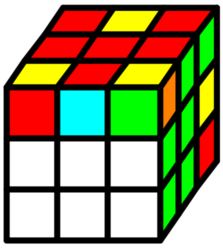
D



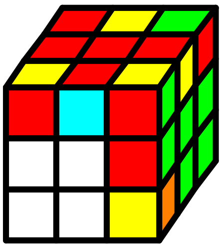
C^{-1}



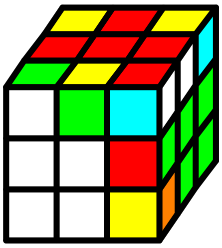
D^2



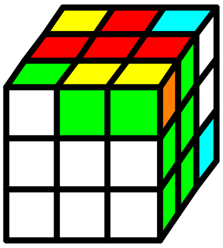
C^{-1}



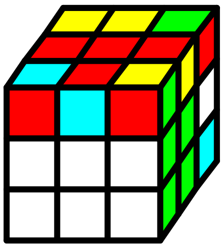
D^{-1}



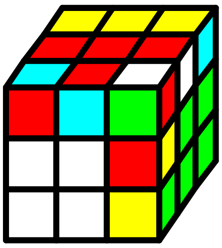
C^2



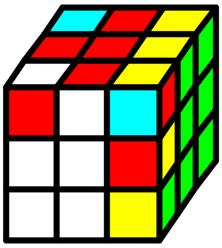
D



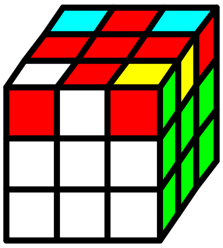
C^2



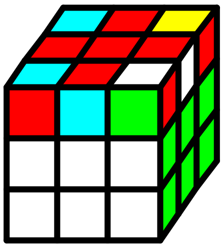
D^{-1}



C

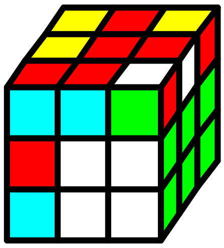


D

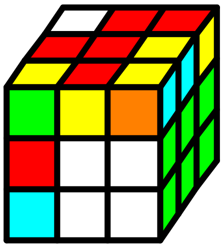


C^{-1}

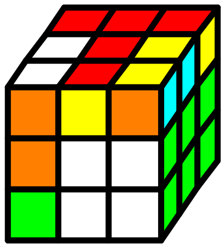
E fazendo movimentos nas camadas da Direita e de Cima, obtivemos duas camadas resolvidas e a cruz da camada superior formada. No entanto, a Cruz vermelha não está bem alinhada com os centros (das faces laterais do cubo).



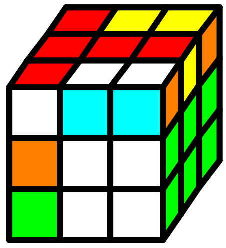
E



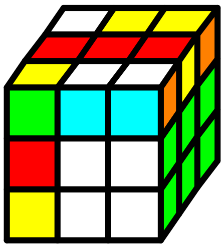
C^2



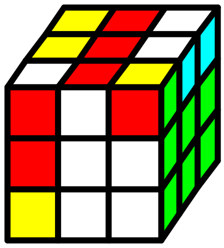
E^2



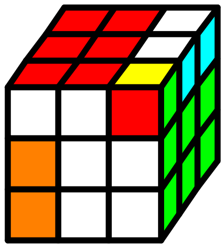
C^{-1}



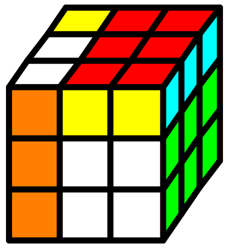
E^2



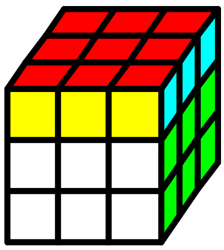
C^{-1}



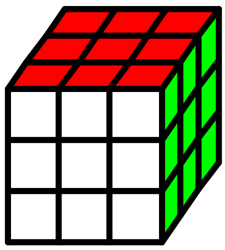
E^2



C^2



E

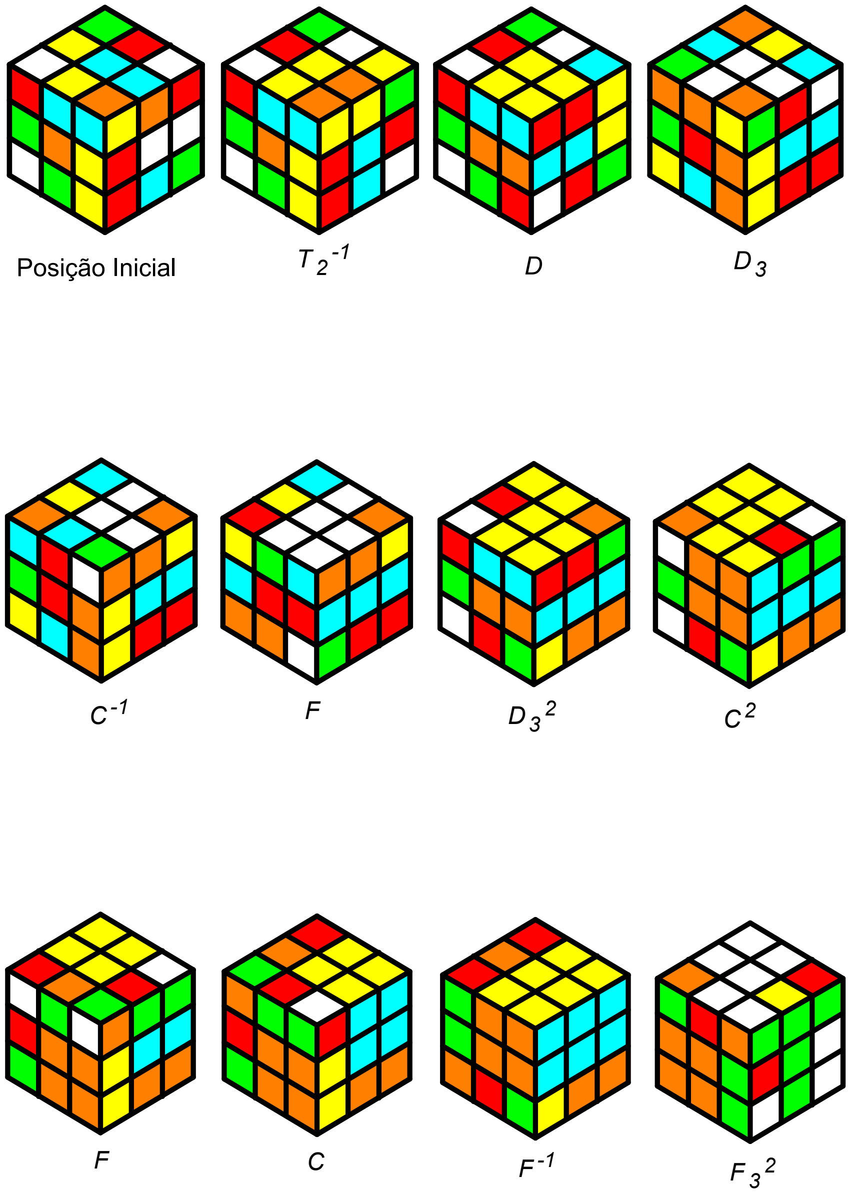


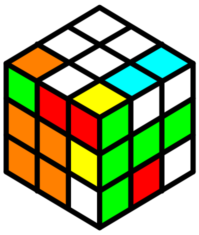
C^2

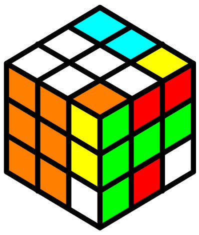
10.3 Terceiro Exemplo

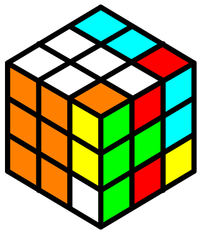
A partir deste exemplo, as figuras apresentadas correspondem a uma perspectiva em que a escala é a mesma em todos os eixos. Tem a vantagem de vermos as três faces, de maneira mais compreensível, pois todos os quadrados do cubo têm a mesma forma (no desenho). Há uma contrariedade: torna-se mais difícil "arrumar"os desenhos, pois os mesmos ocupam mais espaço.

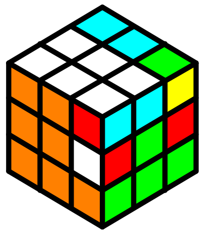
Vejamos o terceiro exemplo de Lars Petrus:

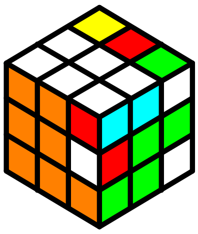


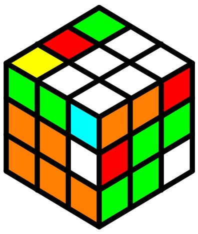

D^{-1}


C^{-1}

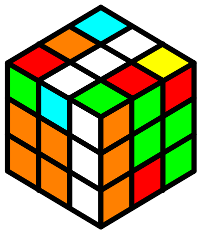

T^{-1}

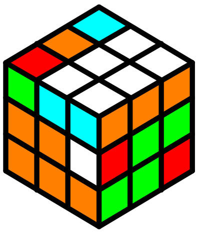

D^{-1}

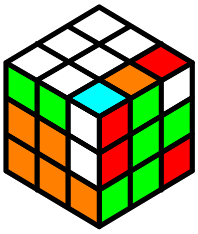

T

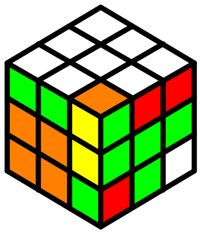

C^{-1}

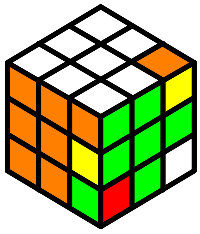

D^{-1}

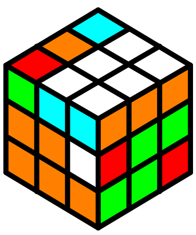

C^{2}

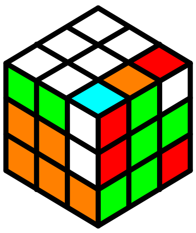

D

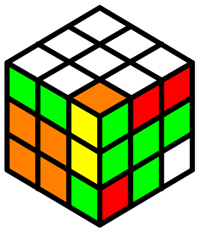

C^{2}

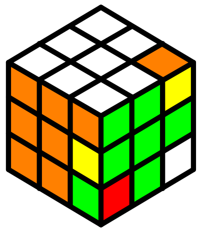

D

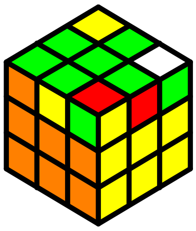

C


D

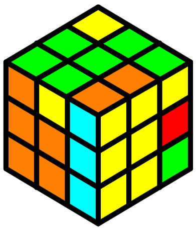

C^{2}


D

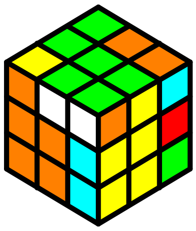

C



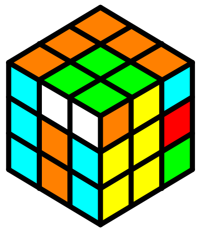
F_3^{-1}



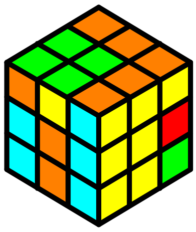
D



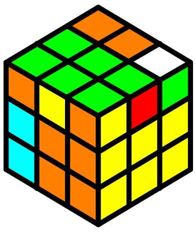
C^{-1}



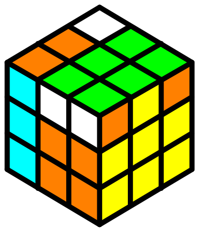
E^{-1}



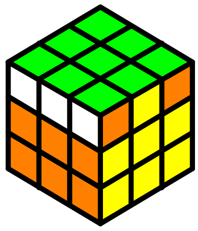
C



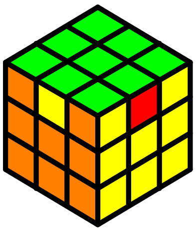
D^{-1}



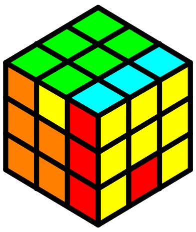
C^{-1}



E

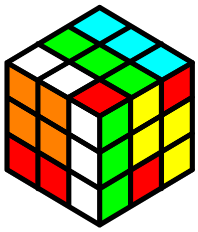


C

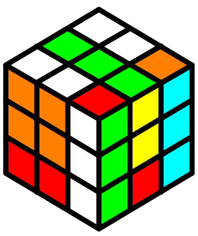


D^2

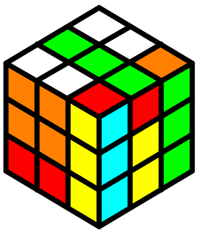
C^{-1}



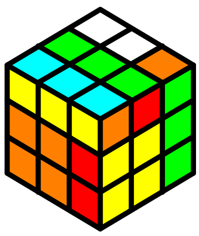
F



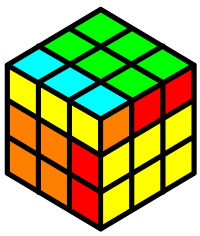
T^{-1}



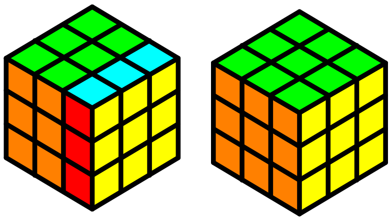
D^2



F^{-1}



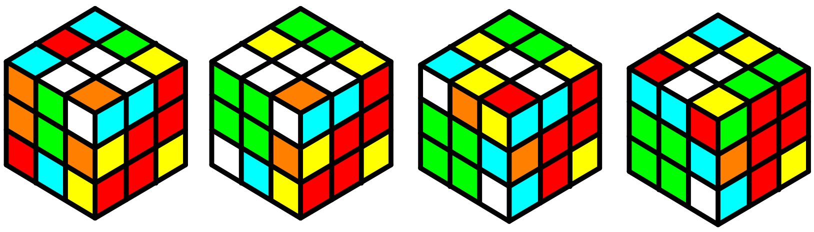
T



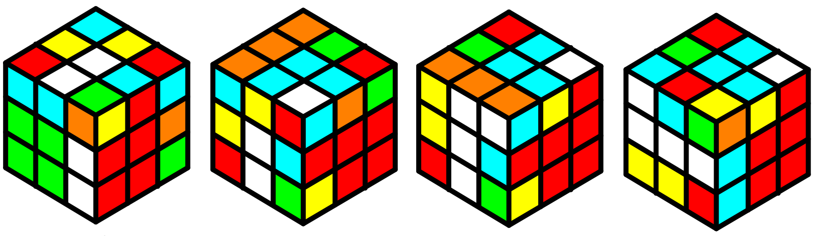
T D^2

10.4 Quarto Exemplo

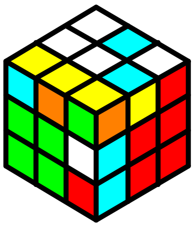
Vejamos o quarto exemplo apresentado por Lars Petrus:



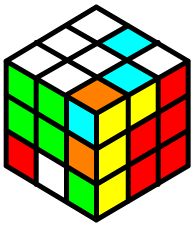
Posição Inicial E^2 F^{-1} C



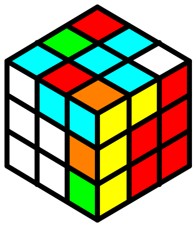
D^2 D_3^{-1} C^{-1} F^{-1}



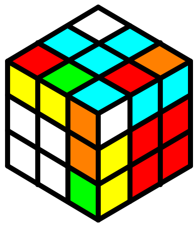
E_2^{-1}



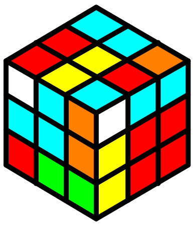
F



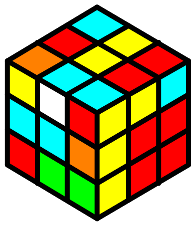
E_2



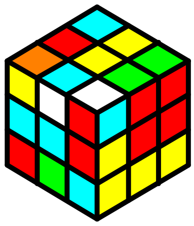
C^{-1}



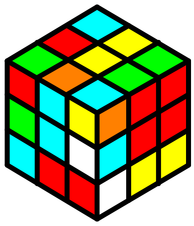
E_2



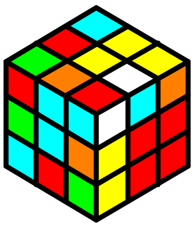
C^2



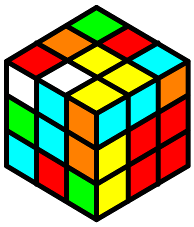
D^{-1}



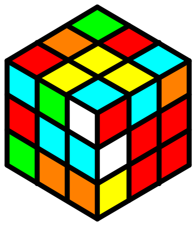
F



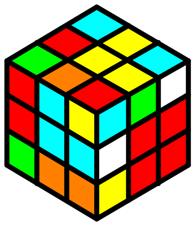
D



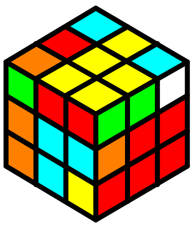
C



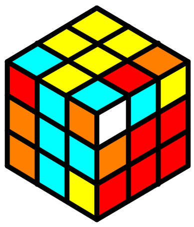
F



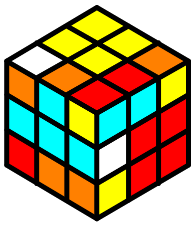
C^{-1}



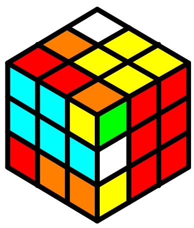
F



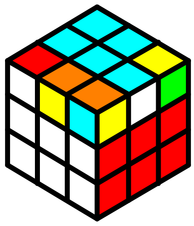
C^2

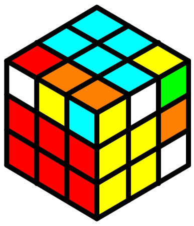


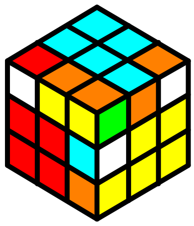
F^{-1}

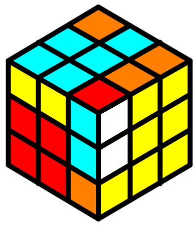


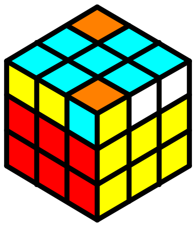
C

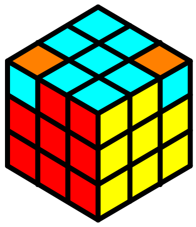

D_3

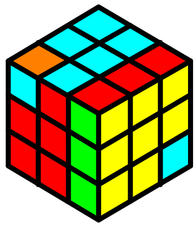

B_2^{-1}

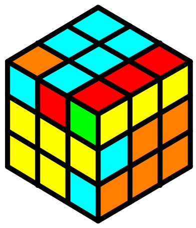

D^{-1}

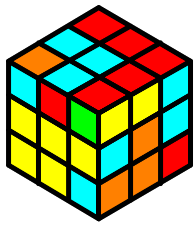

C^{-1}

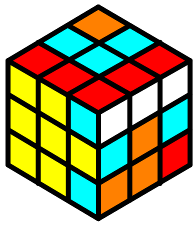

D

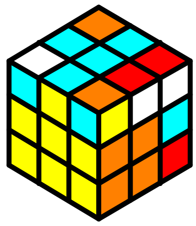

C^{-1}

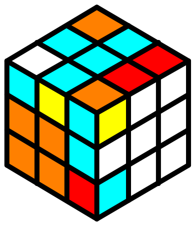

D

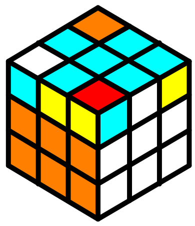

B_2^{-1}

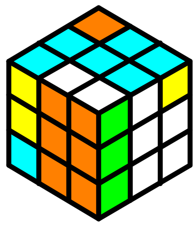

T^{-1}

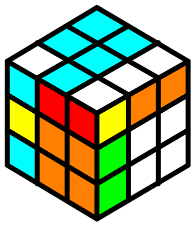

C

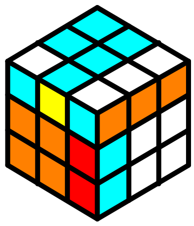

F^{-1}

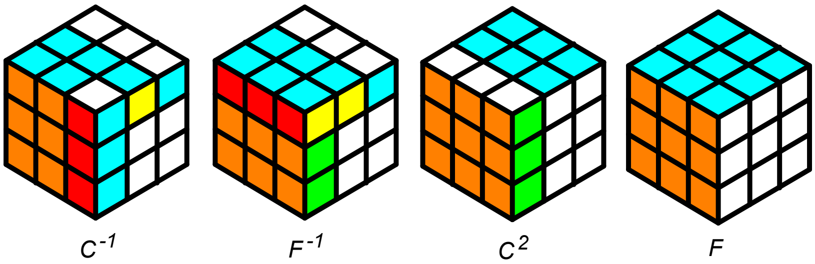

B_2^{-1}


D


F^{-1}

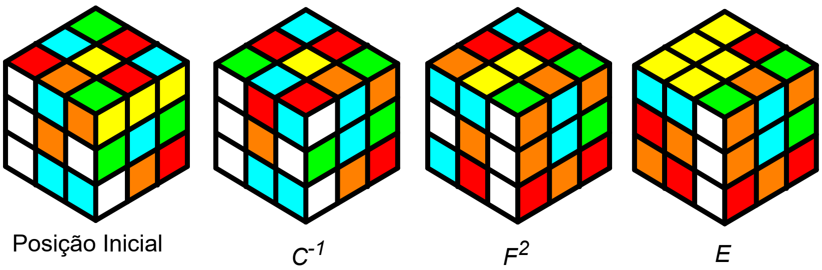

C^{-1}

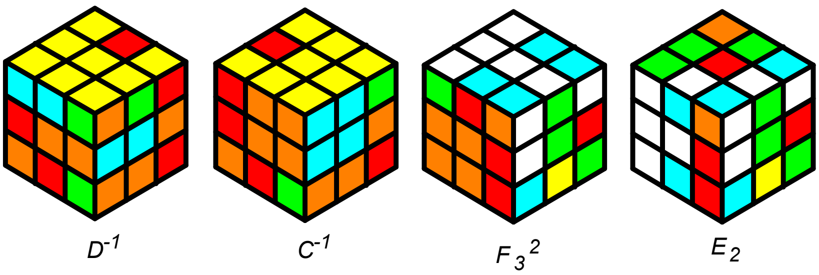

F

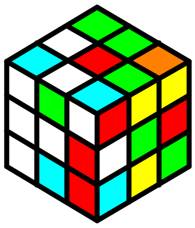


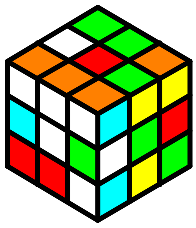
10.5 Quinto Exemplo

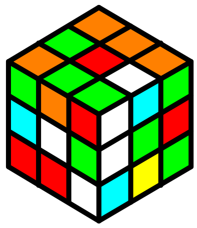
Vejamos o quinto exemplo de Lars Petrus:

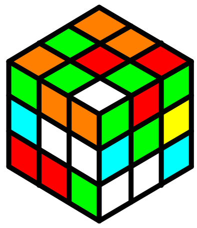


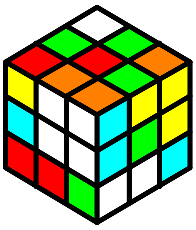


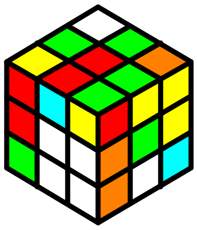

C

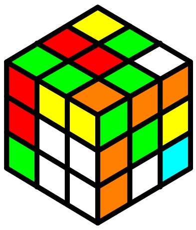

F

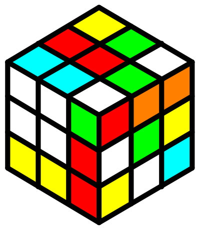

C^2

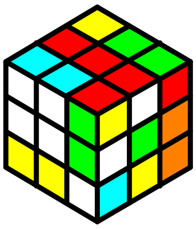

D^{-1}


C^2

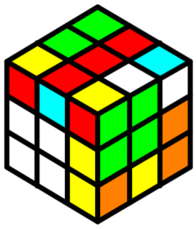

F

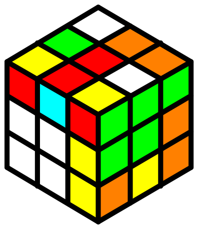

C

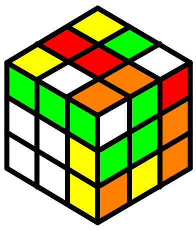

F^2

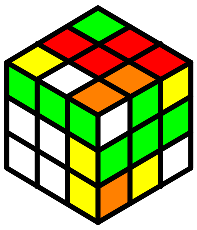

D

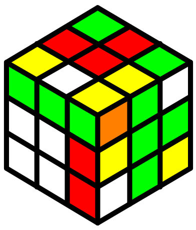

F^{-1}

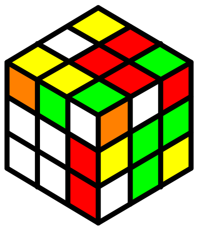

C^{-1}

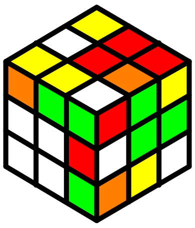

T


C

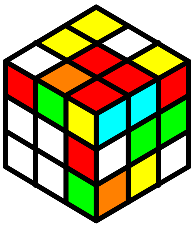

T^{-1}


D

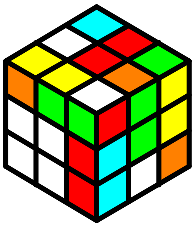

C



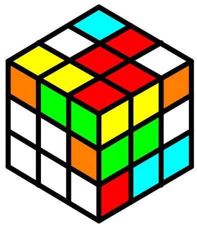
D^{-1}



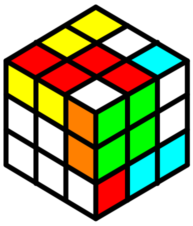
C



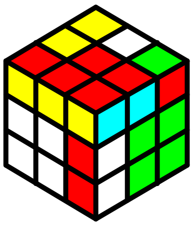
C^{-1}



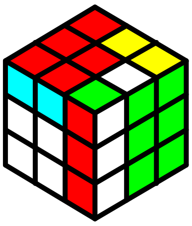
D^{-1}



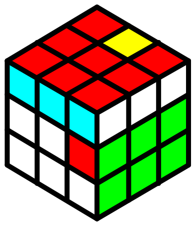
C



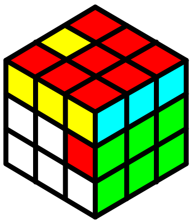
D^2



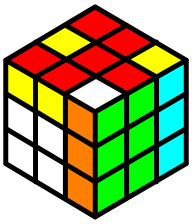
C



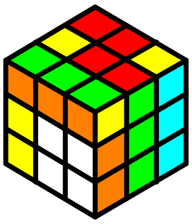
D



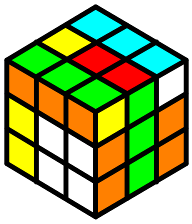
C^{-1}



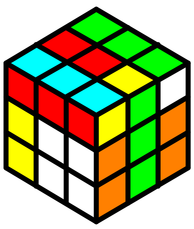
D



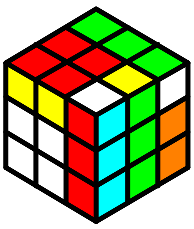
F^{-1}



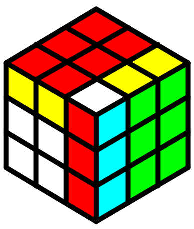
T



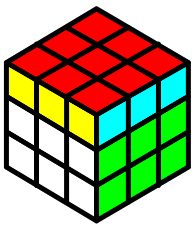
C^2



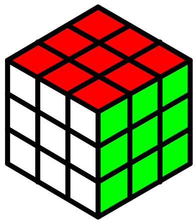
F



T^{-1}



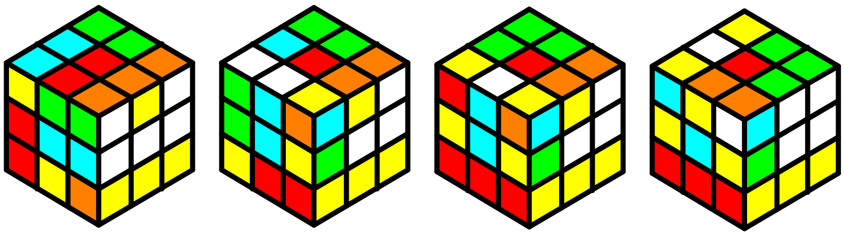
D



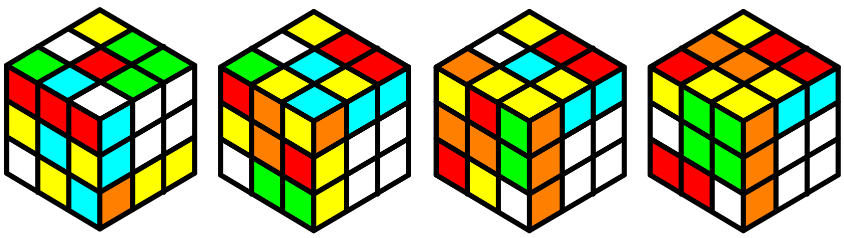
C^2

10.6 Sexto Exemplo

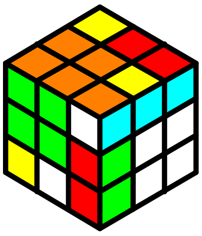
Sexto exemplo de Lars Petrus:

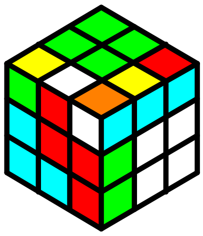


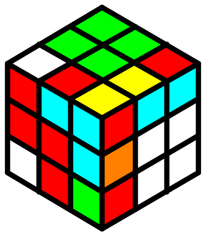
Posição Inicial F^{-1} E^{-1} C

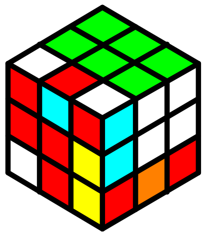


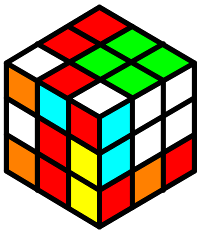
F^2 D_2 F^{-1} E_2^{-1}

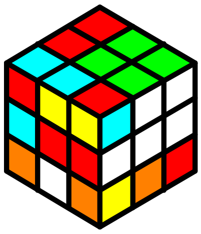

F^{-1}

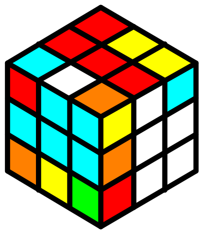

$E_2{}^{-1}$

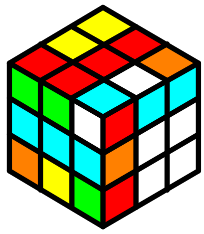

F^2

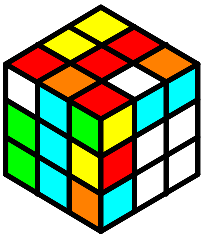

D^{-1}

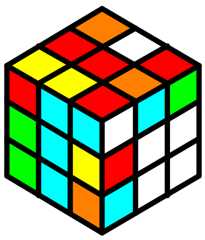

E^{-1}

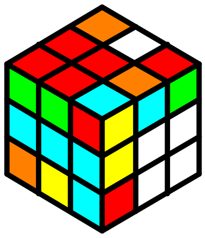

F^{-1}

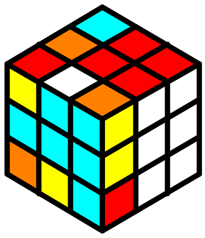

D_2

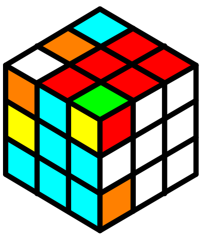

C^{-1}


F^{-1}

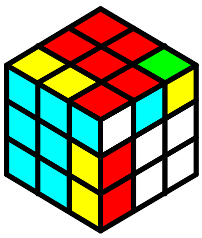

C^{-1}

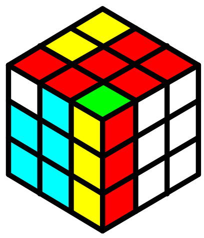

F

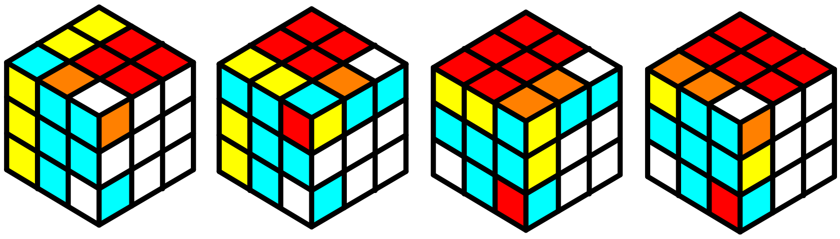

C^2


F

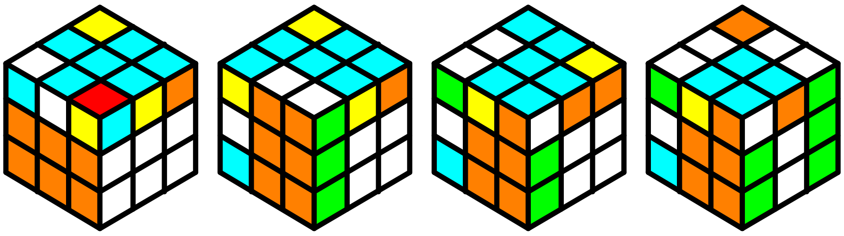

C^{-1}


F^2

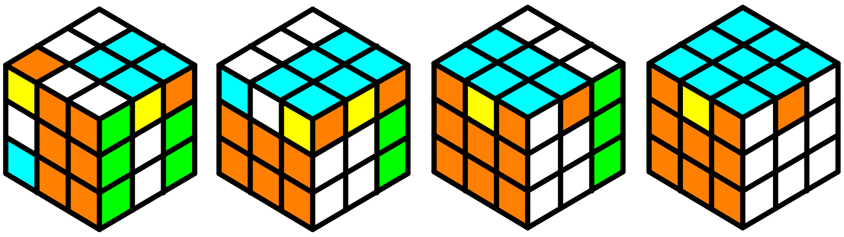

C



F^2 C^{-1} F C



D_3 F^{-1} C T



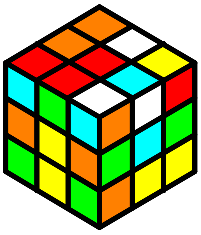
C^{-1} F C T^{-1}

E o resto é bastante simples, mesmo para quem só conheça o método básico das camadas, pelo que não apresentamos imagens:

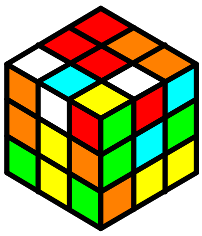
$$F^2CED^{-1}F^2DE^{-1}CF^2$$

10.7 Sétimo Exemplo

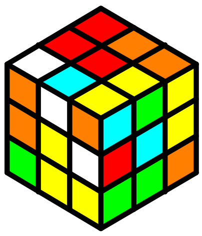
Sétimo exemplo de Lars Petrus:



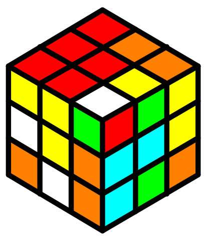
Posição Inicial



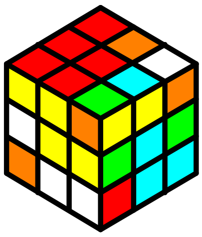
C



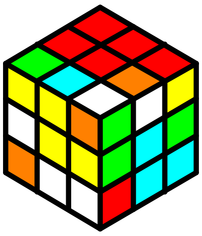
D^{-1}



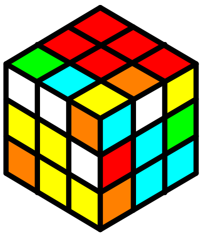
F^{2}



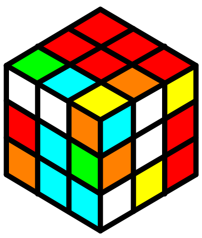
D^{-1}



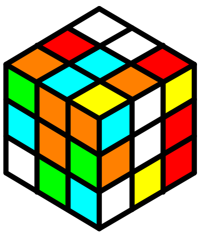
C



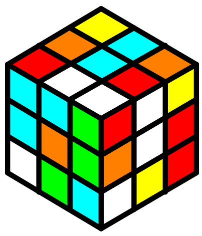
F^{2}



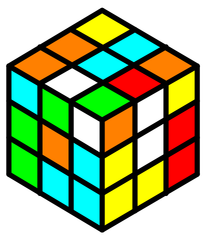
B_{2}^{-1}



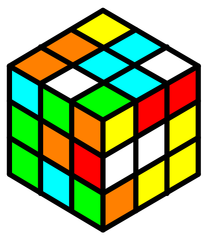
E_{2}^{-1}



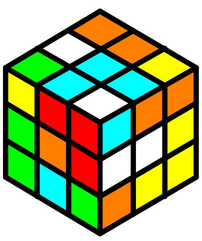
C^{2}



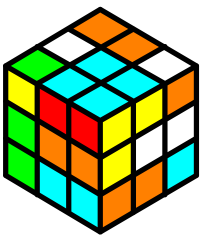
F^{2}



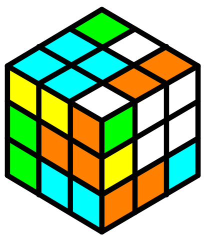
D^{-1}



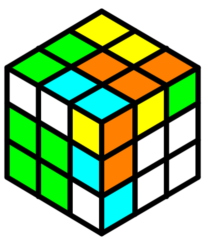
C



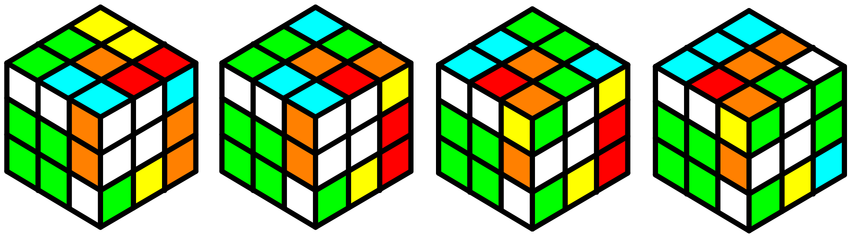
D^{2}



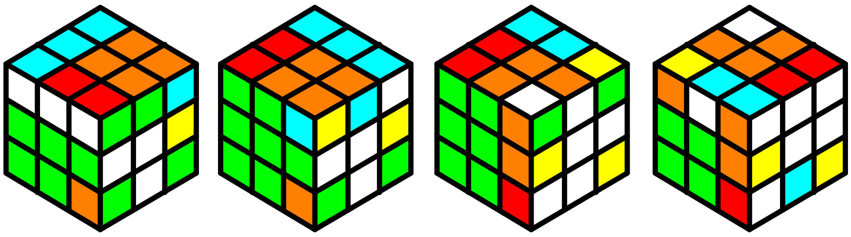
C



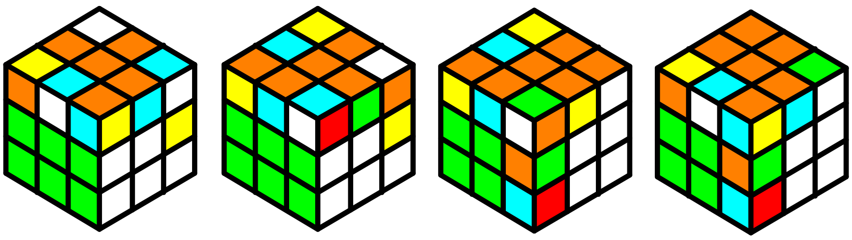
D_{3}



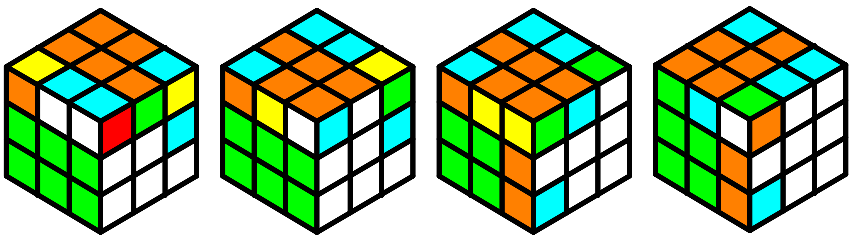
D^2 T^2 C T^{-1}



D^{-1} C D^2 C^2

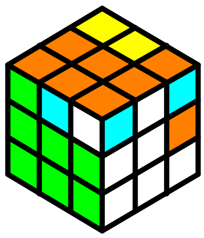


D^2 C D^{-1} C^{-1}

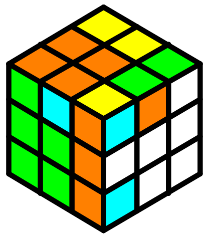


D C^2 D^{-1} C

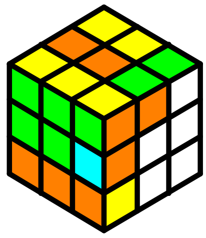
D



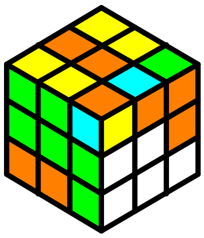
T^{-1}



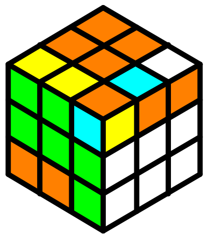
D^{-1}



F

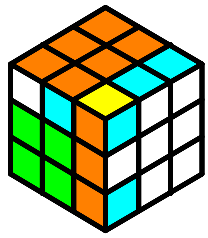


D

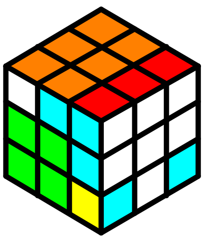


T

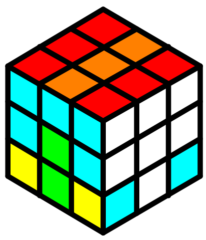
D^{-1}



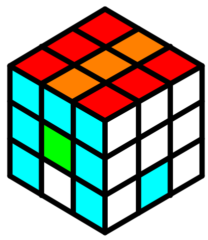
F^{-1}



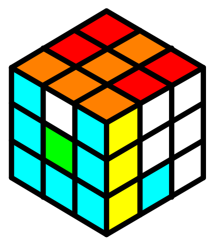
D^{-1}



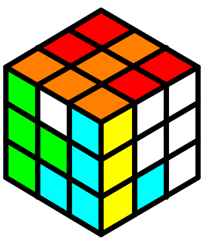
E^{2}



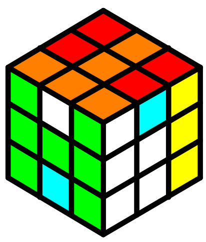
B^{-1}



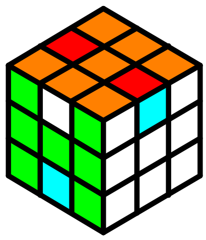
F^{2}



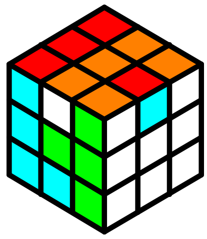
E^{2}



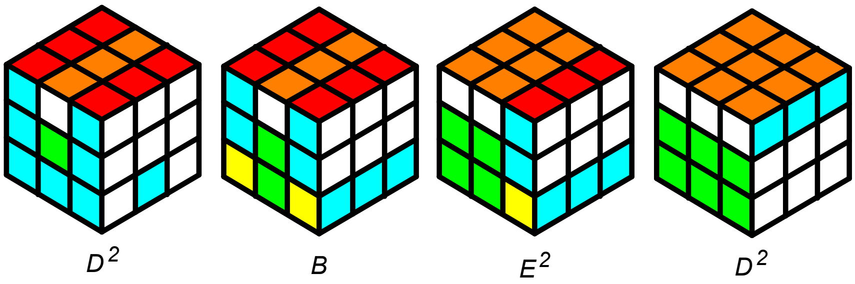
D^{2}



T^{2}



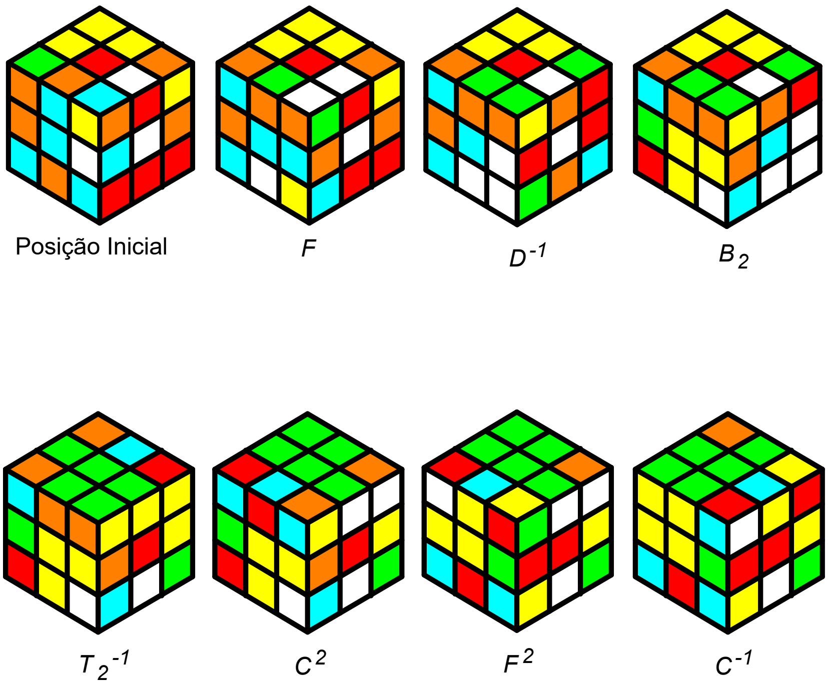
E^{2}

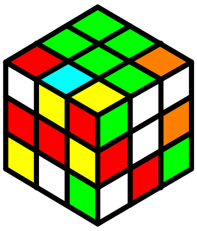


E, por fim, o cubo fica resolvido com C^{-1}.

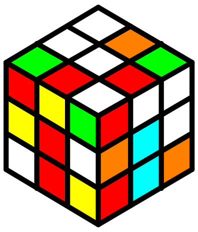
10.8 Oitavo Exemplo

Oitavo exemplo de Lars Petrus:

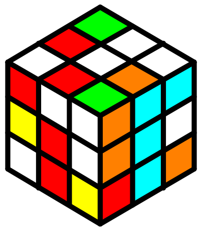




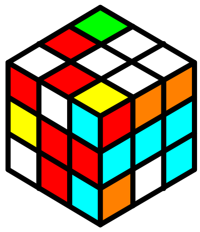
C_3



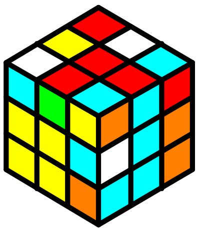
F_3^{-1}



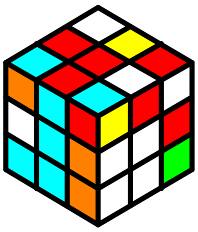
C



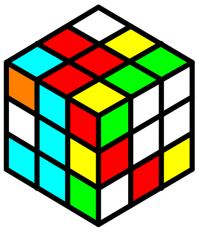
D



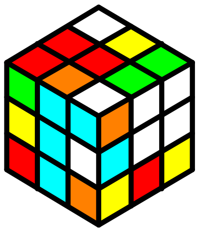
D_3



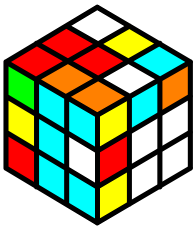
C_3



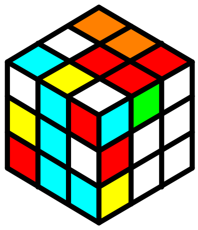
D^2



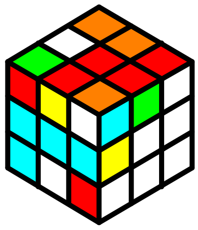
F^2



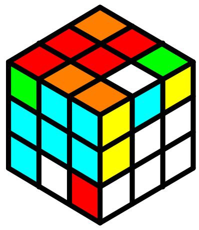
D



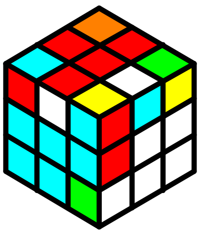
C^2



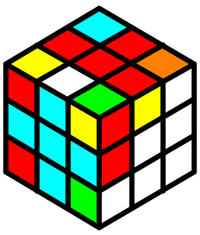
F



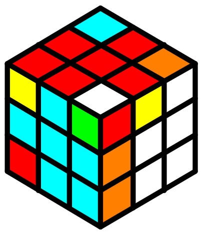
C^2



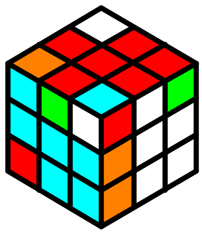
F^2



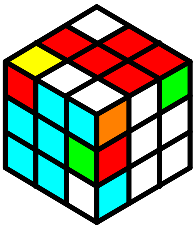
C



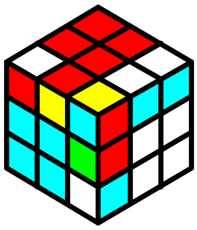
F^{-1}



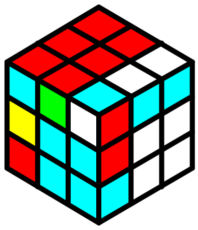
C^2



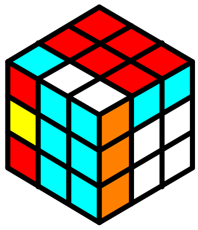
F



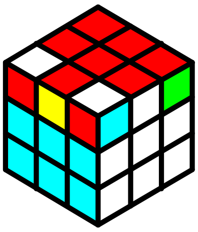
C^{-1}



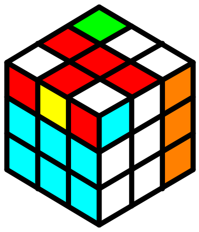
F^{-1}



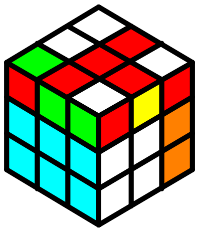
C



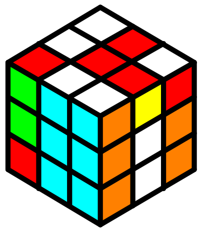
F



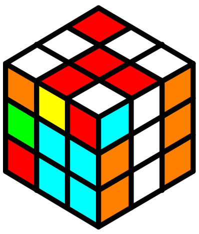
T



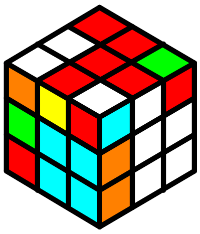
C^{-1}



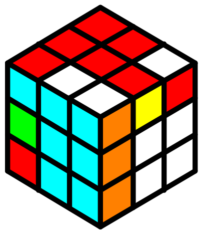
F^{-1}



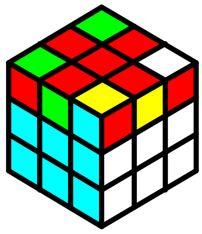
C



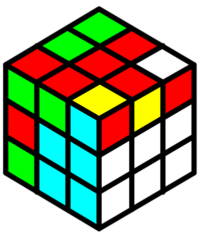
T^{-1}



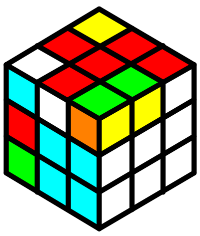
C^{-1}



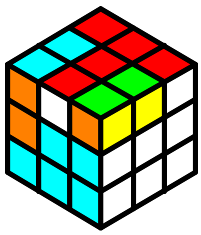
F



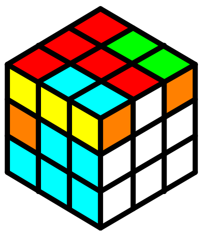
E



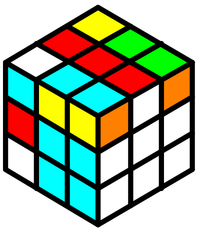
C^2

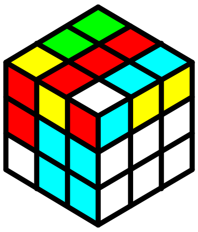


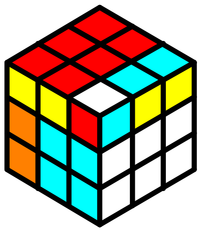
E^2

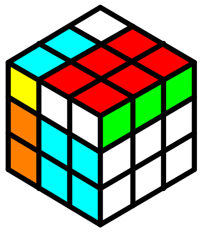


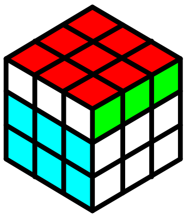
C^{-1}

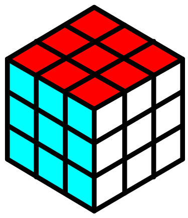

E^2


C^{-1}


E^2

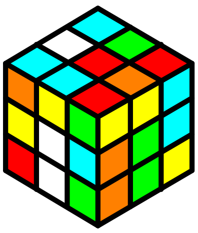

C^2

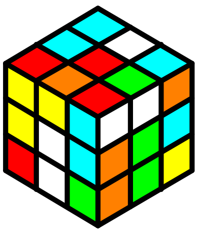

E

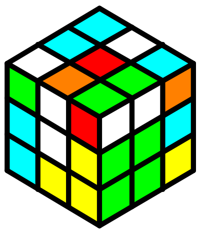

C^{-1}

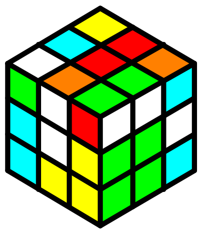
10.9 Nono Exemplo

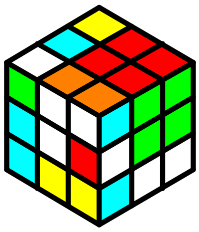
Nono exemplo de Lars Petrus:

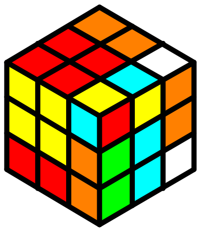

Posição Inicial

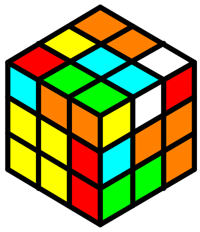

C

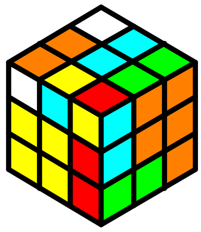

F^2


T^{-1}

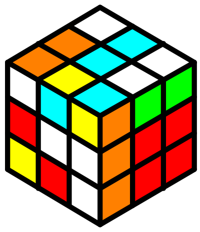

D^2

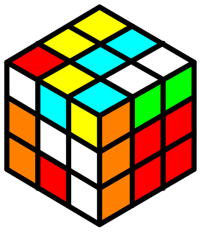

$C_3{}^2$

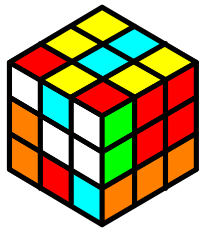

$F_3{}^{-1}$

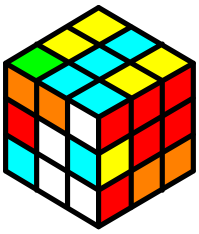

C^{-1}

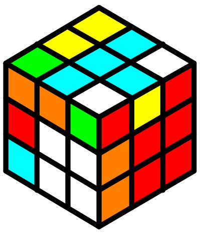

D^2

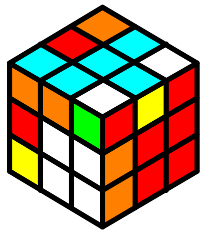

$B_2{}^2$

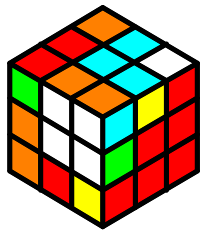

E

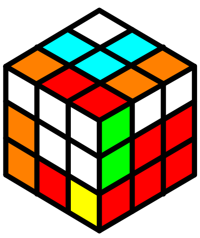

D^{-1}

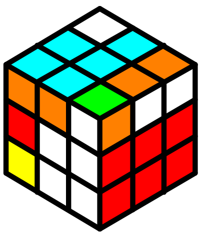

F

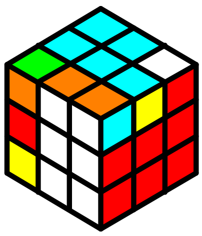

D

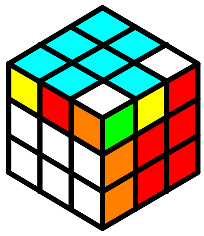

E^{-1}

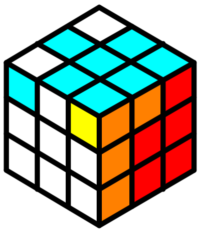

F^{-1}


C^{-1}

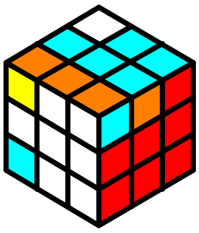

F


C

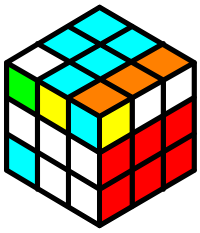

F



C^2

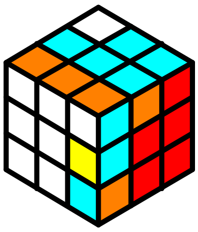


F^{-1}

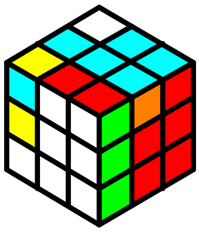


C^{-1}

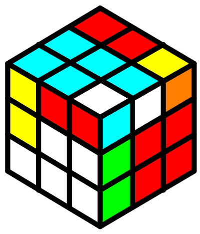
F



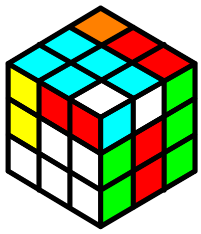
C



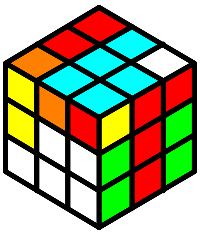
F^2



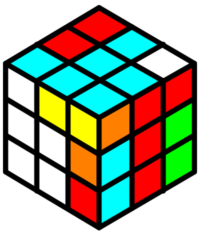
C^2



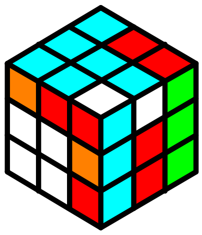
T



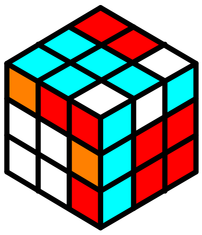
C^{-1}



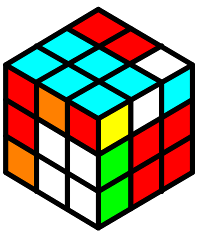
F



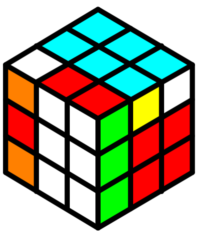
C



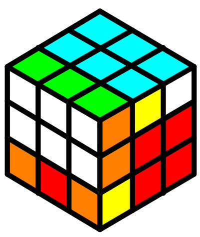
T^{-1}



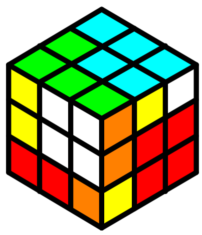
F^{-1}



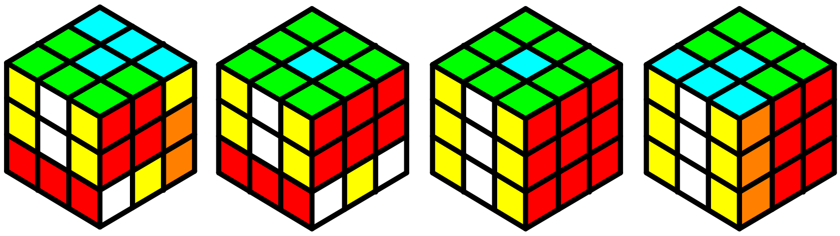
C^2



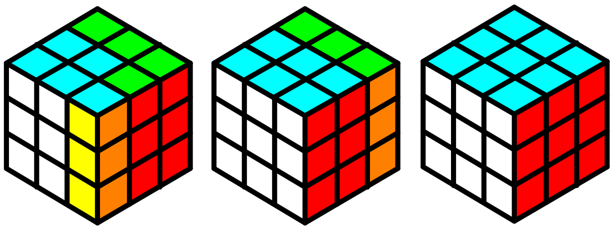
F^{-1}



E^2



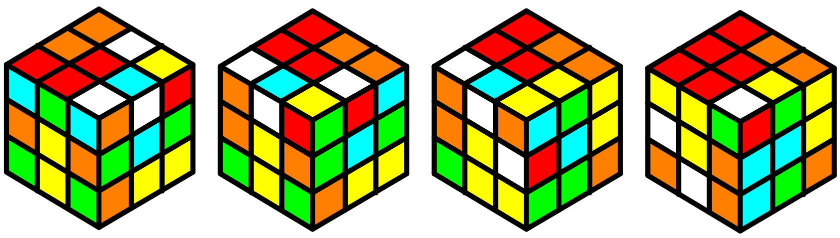
D^2 T^2 B F^2



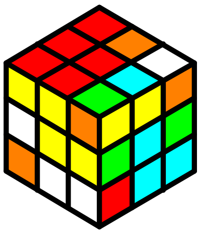
E^2 D^2 T^2

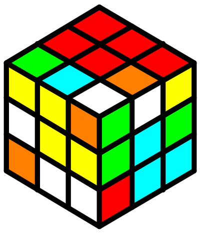
10.10 Décimo Exemplo

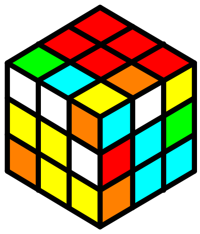
Décimo exemplo de Lars Petrus:

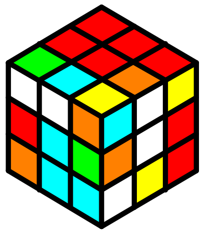


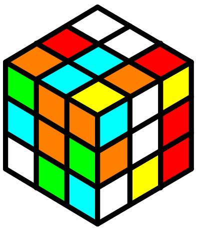
Posição Inicial C D^{-1} F^2

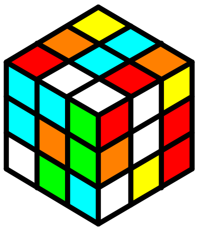

D^{-1}

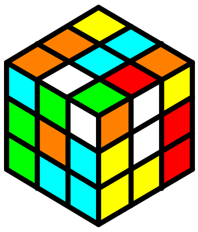

C

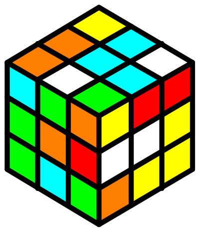

F^2

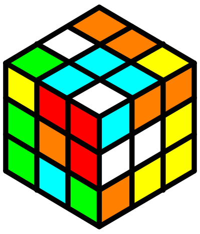

$B_2{}^{-1}$


$E_2{}^{-1}$

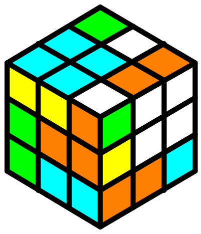

C^2


F^2

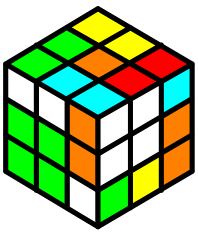

D^{-1}

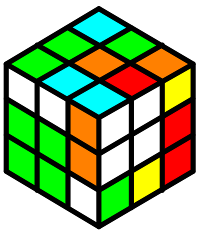

C

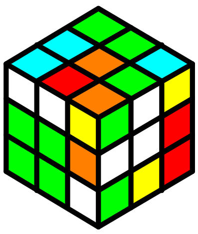

D^2

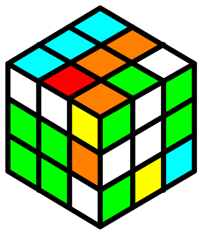

C


D_3


D^2

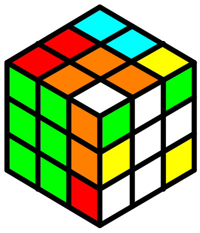

T^2

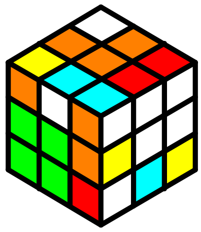

C

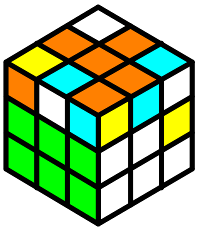

T^{-1}

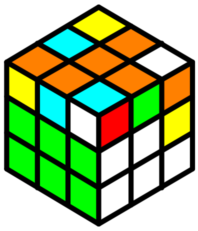

D^{-1}

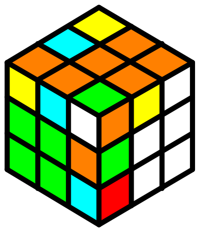

C

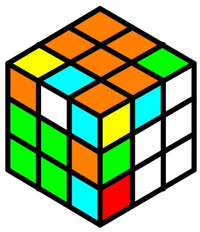

D^{2}

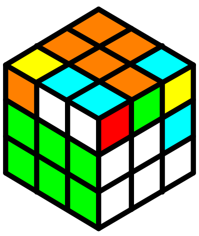

C^{2}

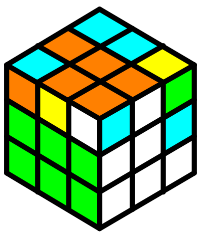

D^{2}


C


D^{-1}

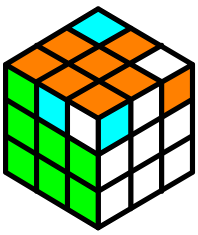

C^{-1}

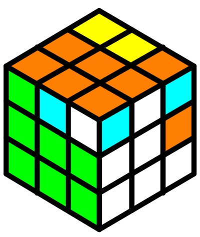

D

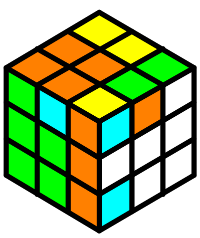

C^{2}

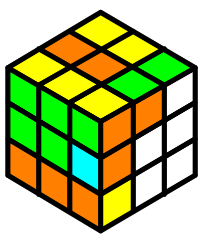

D^{-1}

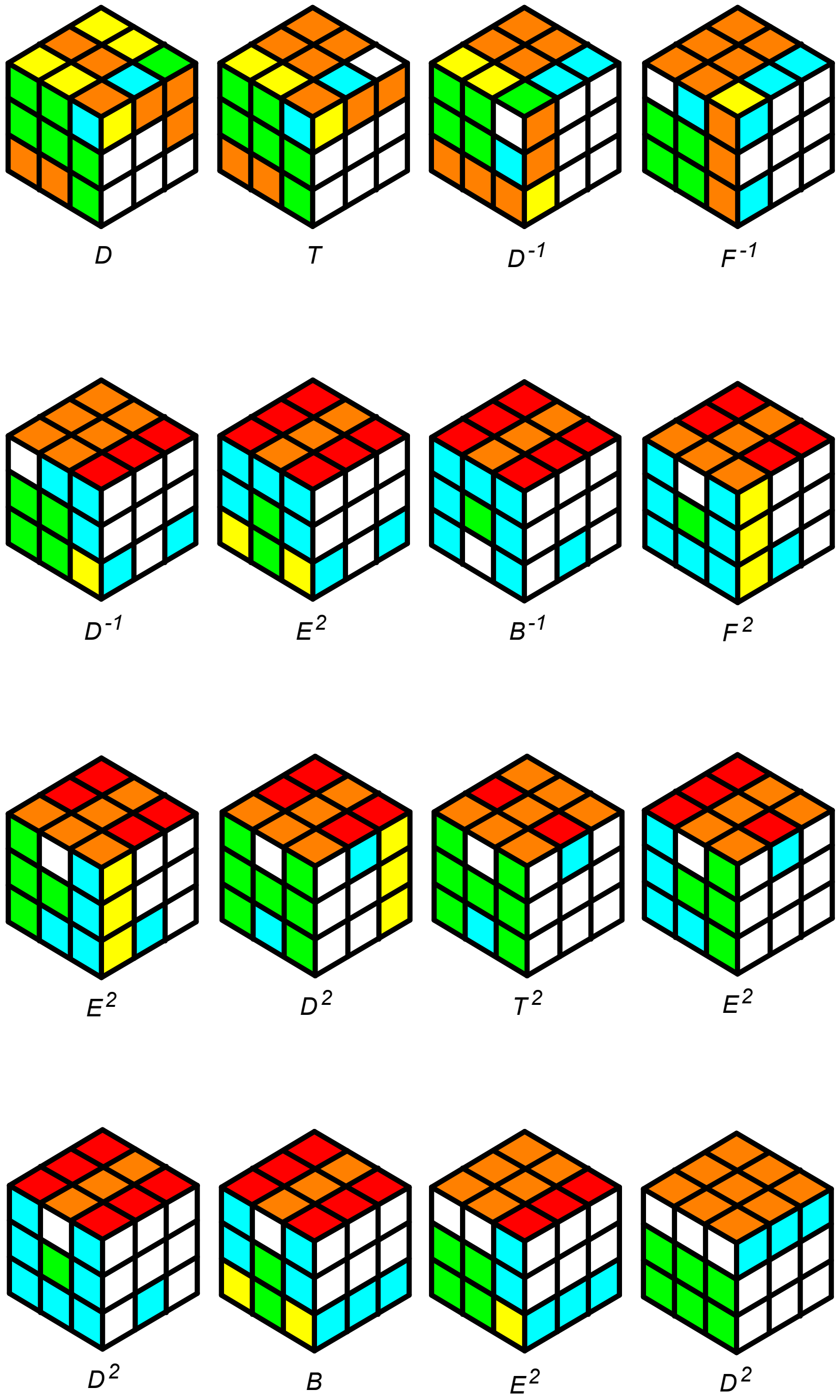

C


D


T^{-1}


D^{-1}

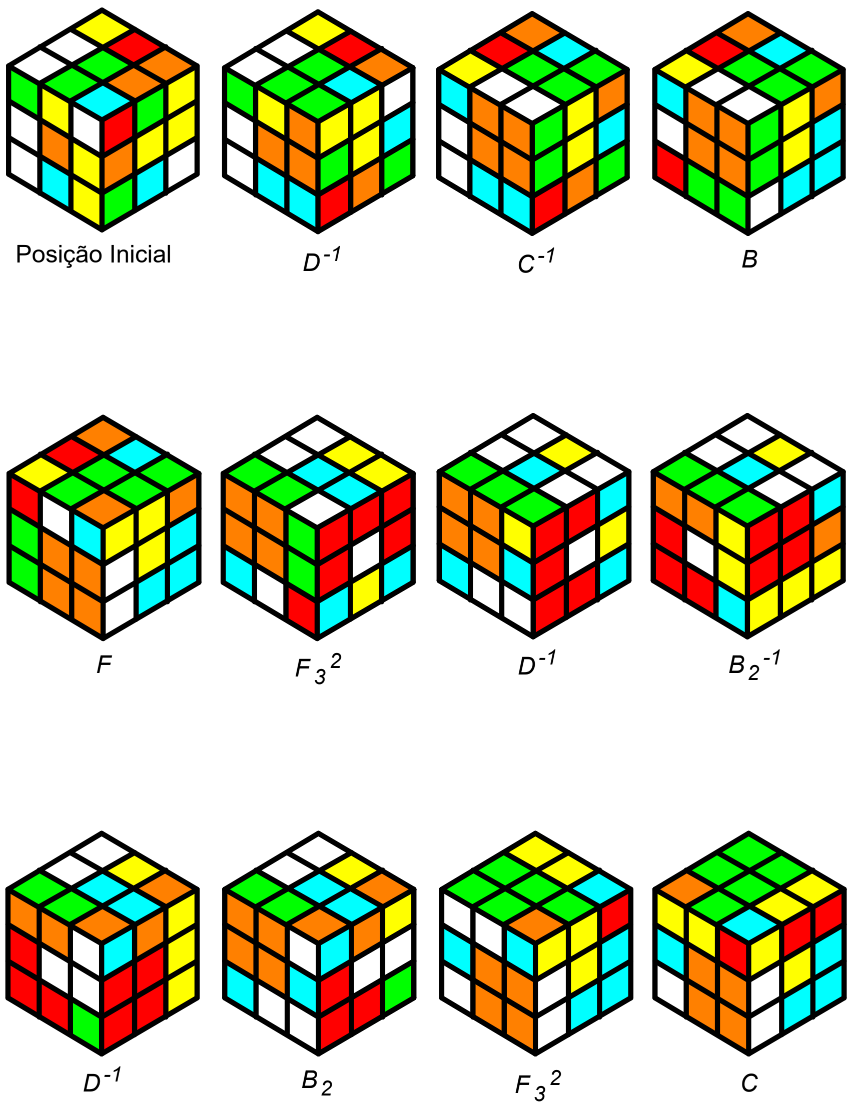

F

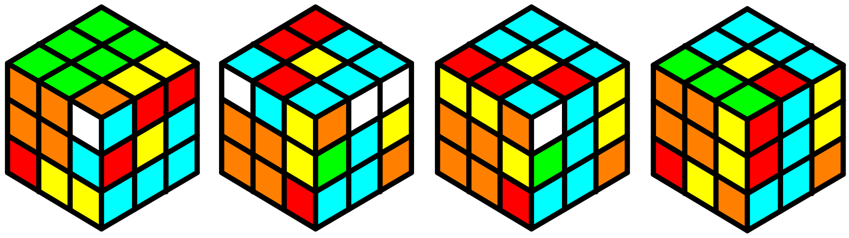

D
T
D^{-1}
F^{-1}
D^{-1}
E^2
B^{-1}
F^2
E^2
D^2
T^2
E^2
D^2
B
E^2
D^2

E, por fim, o cubo fica resolvido com C^{-1}.

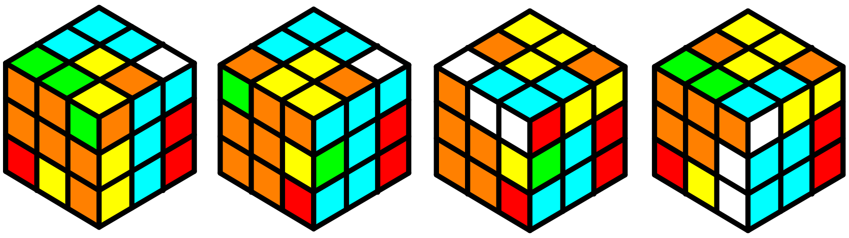
10.11 Décimo Primeiro Exemplo

Décimo primeiro exemplo de Lars Petrus:

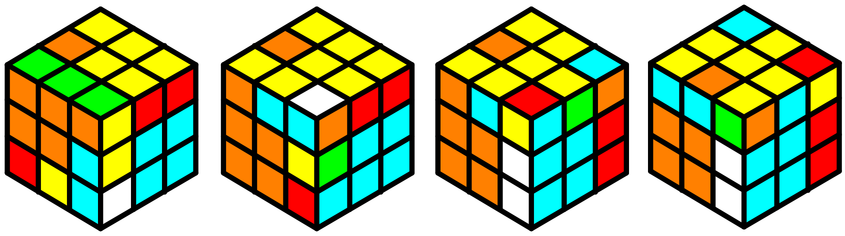




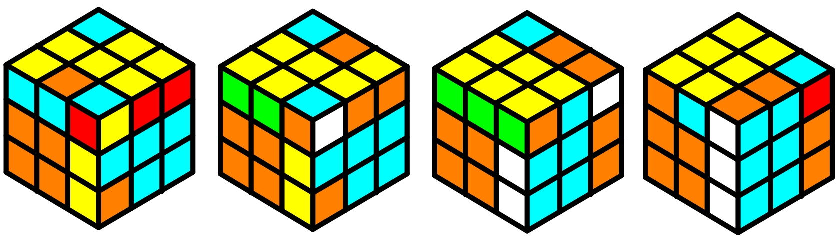
F^2 F_3^{-1} C^{-1} F



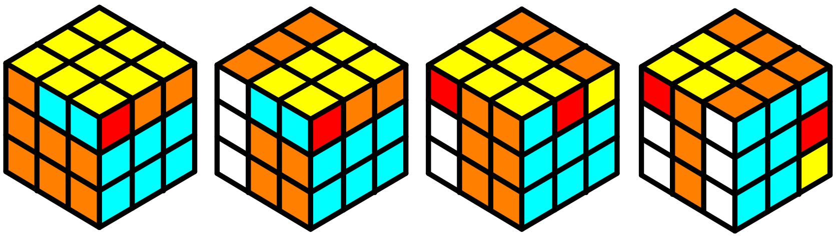
D^2 F^{-1} C^2 F



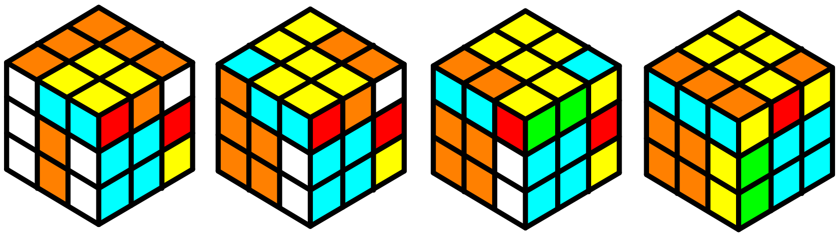
D^{-1} F^{-1} D C^{-1}



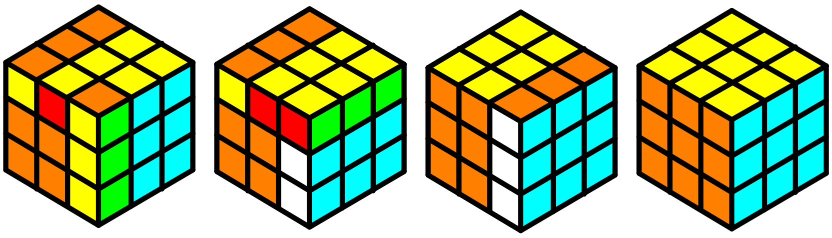
D^{-1} C^2 D C



D^{-1} E^{-1} C D



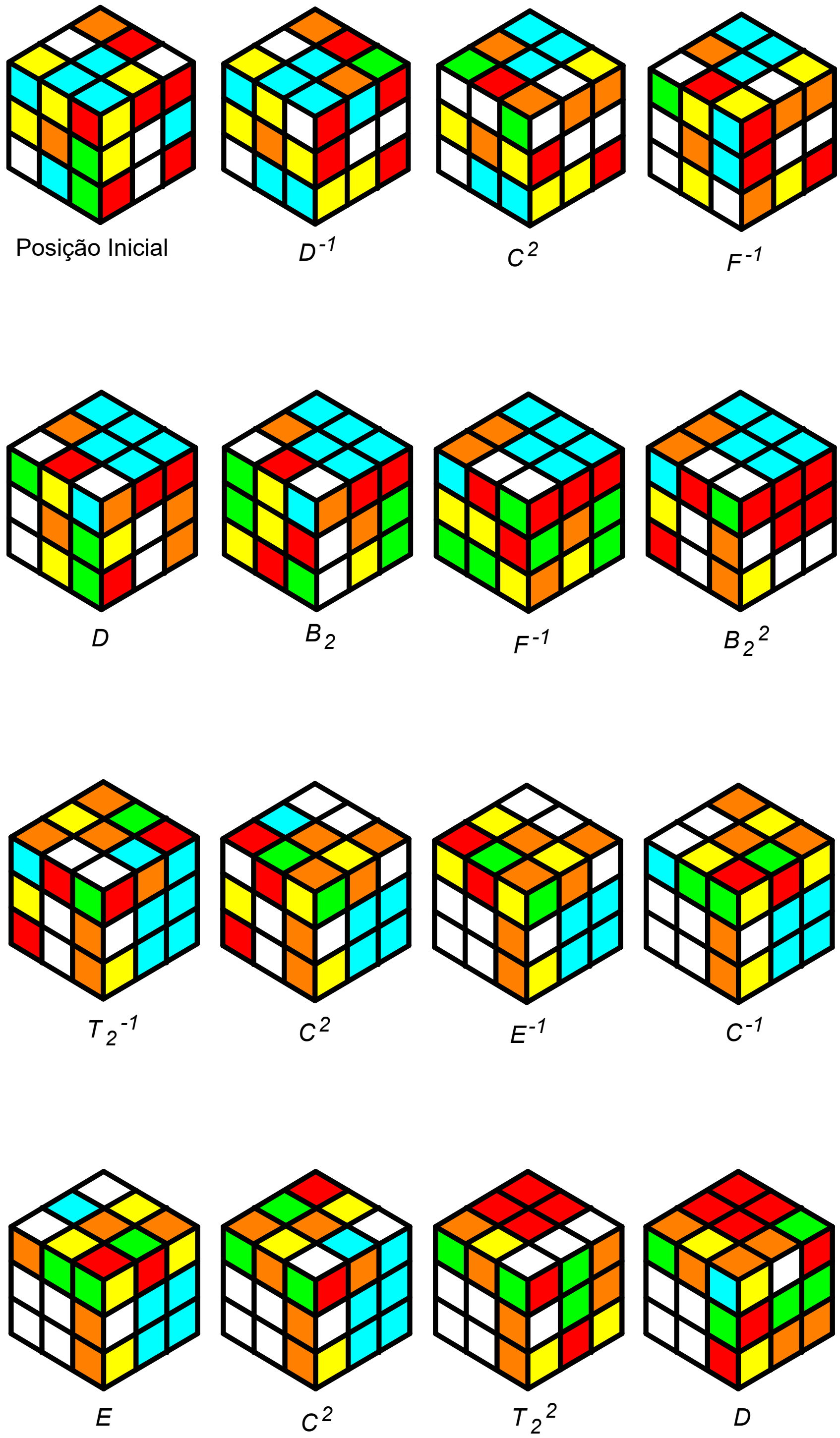
C^{-1} E C^2 D^{-1}

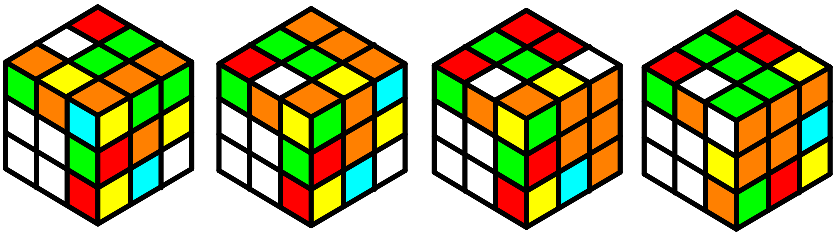


C D C^2 D^{-1}

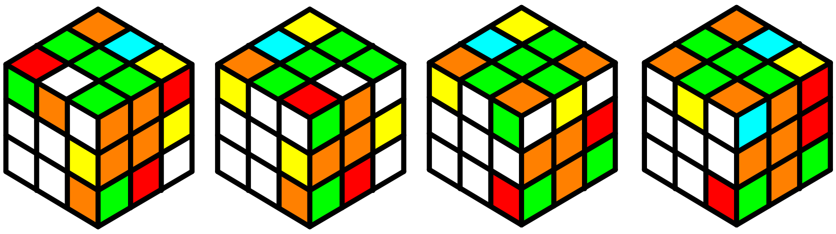
10.12 Décimo Segundo Exemplo

Décimo segundo exemplo de Lars Petrus:

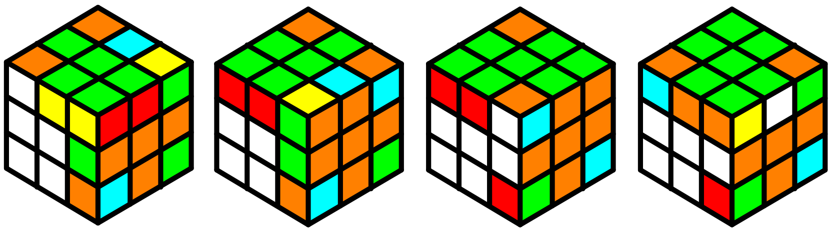

Posição Inicial
D^{-1}
C^2
F^{-1}
D
B_2
F^{-1}
B_2^2
T_2^{-1}
C^2
E^{-1}
C^{-1}
E
C^2
T_2^2
D



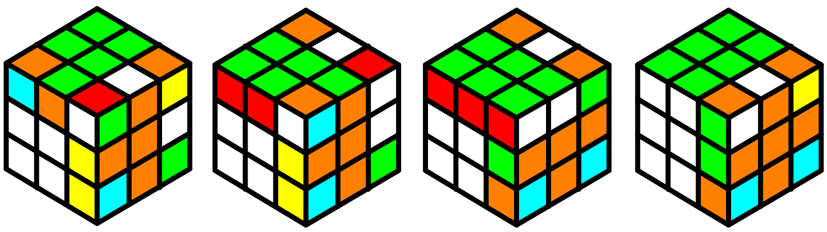
T_2 C^{-1} T^{-1} D^{-1}



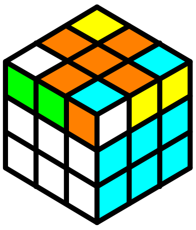
T C^{-1} D^{-1} C



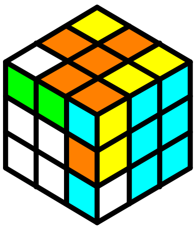
D^{-1} C D C



D C^{-1} D^{-1} C

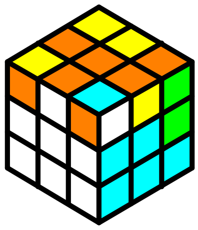


F_3^{-1}

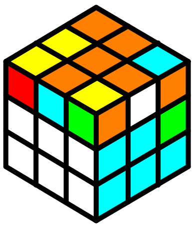


D^{-1}

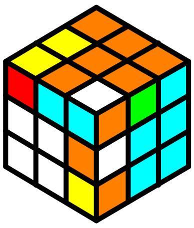
C^{-1}



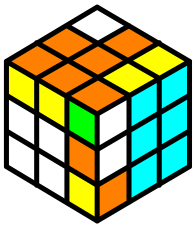
D



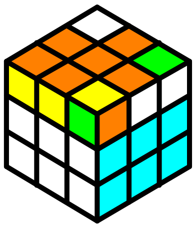
C^{-1}



D^{-1}

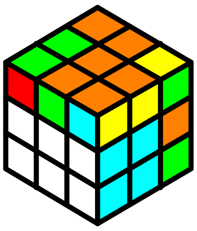


C^2

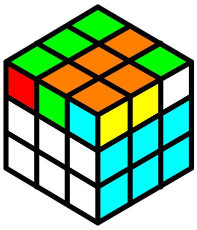


D

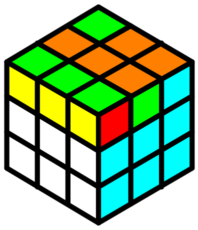
T^{-1}



C^{-1}



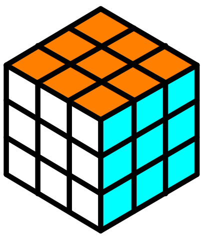
T



C^{-1}

T^{-1}

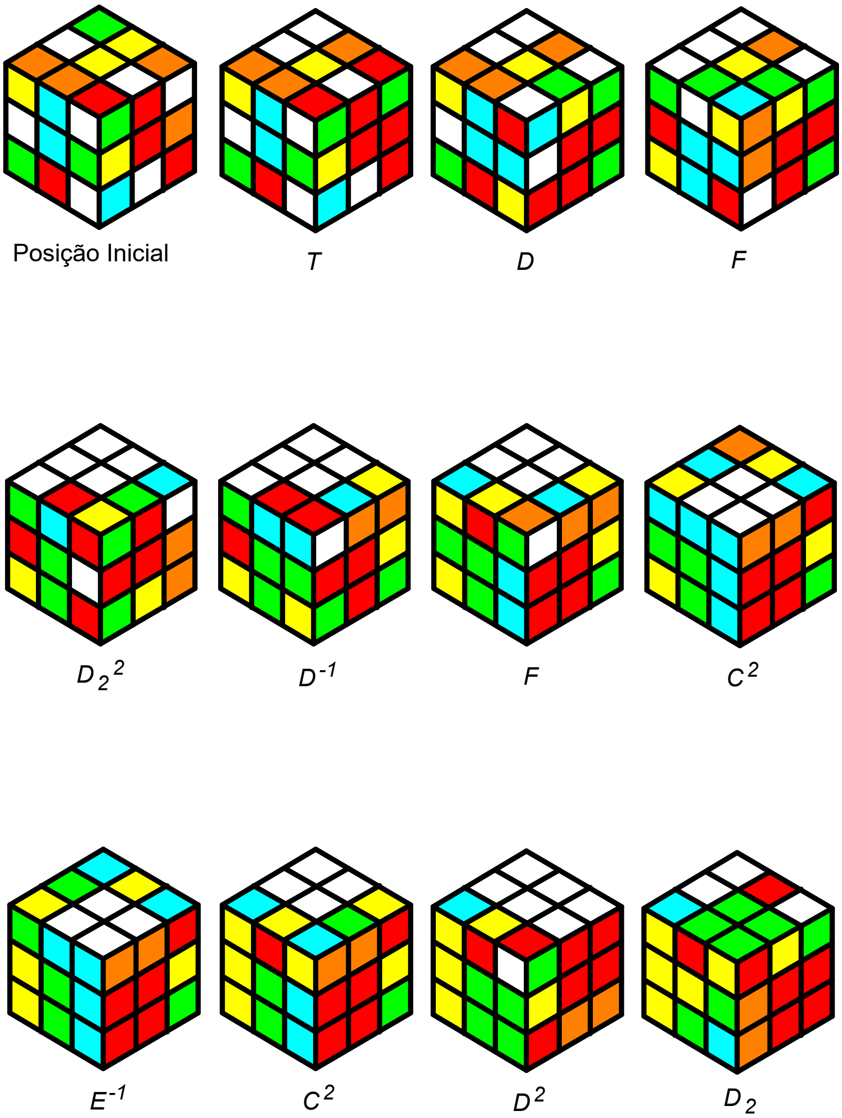
C^2

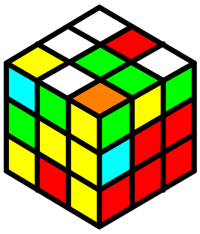


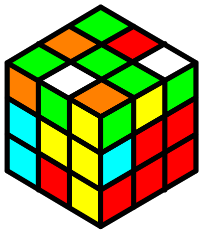
T

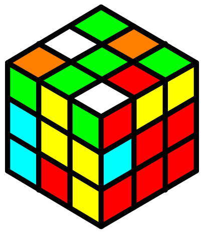
10.13 Décimo Terceiro Exemplo

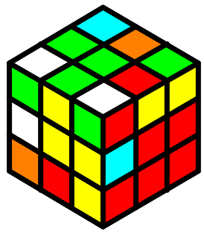
Décimo terceiro exemplo de Lars Petrus:

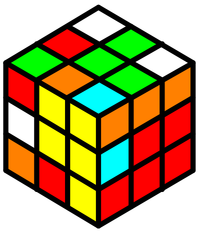


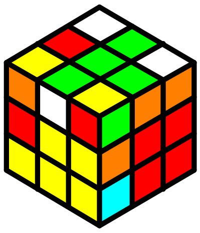

F^2

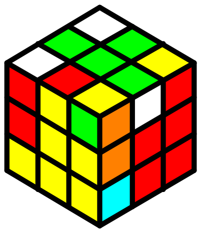

E^2

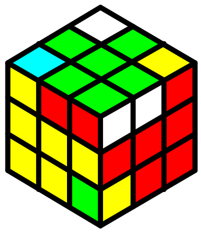

C

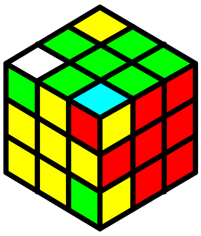

E

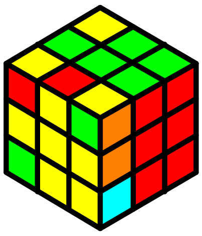

C^2

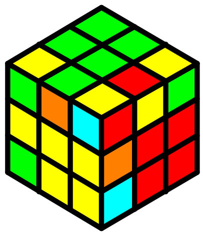

F

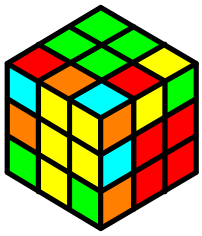

C^{-1}

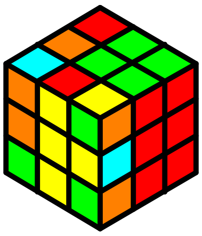

F

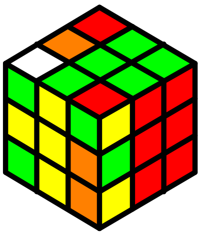

C^{-1}

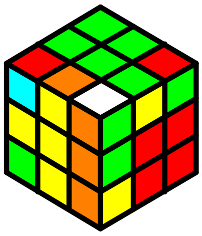

F^{-1}

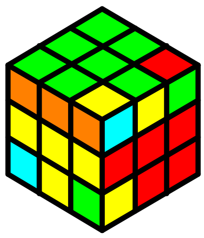

C^{-1}

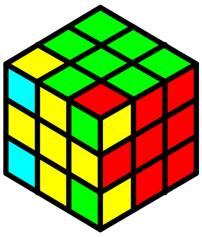

F^{-1}


C

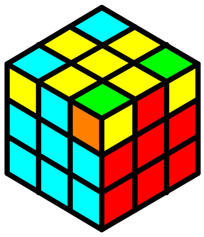

F^2


C^{-1}

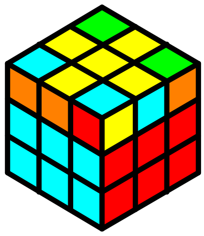

F^{-1}



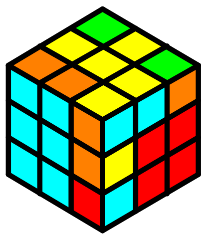
C



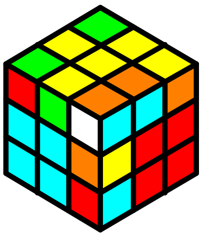
D_3



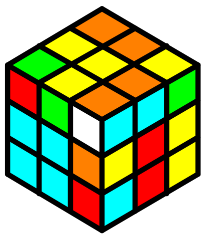
C^{-1}



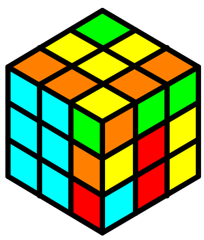
F



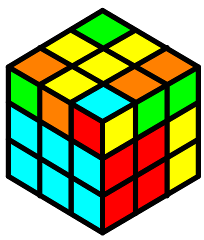
C^{-1}



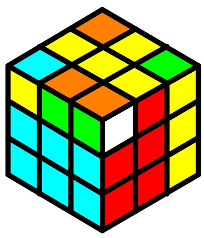
T^{-1}



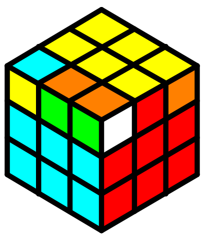
C



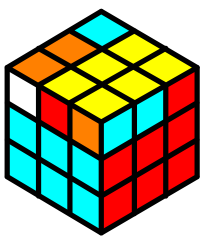
F^{-1}



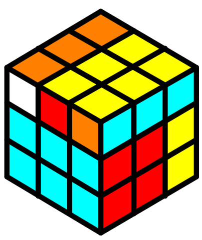
C



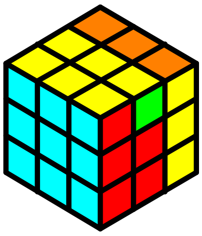
T

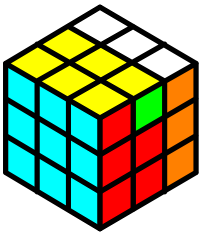


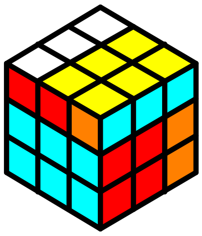
C

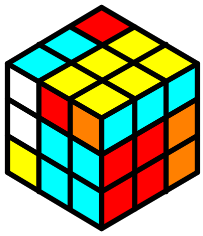


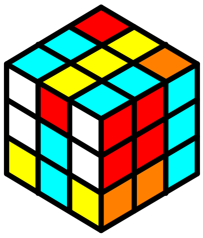
T^{-1}

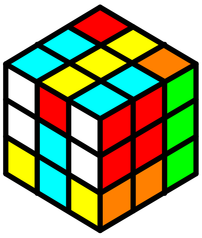

C

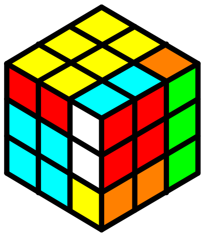

T^{-1}

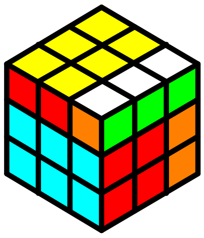

C^{-1}

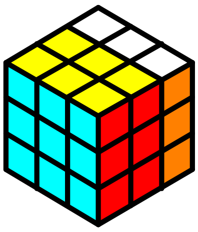

E^{-1}

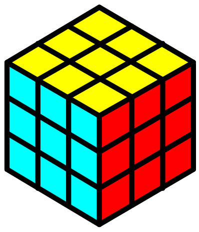

D


T^2


E


D^{-1}


C^{-1}


T^2

Capítulo 11

Petrus(Gidius)

Este método surgiu-me, após eu ter modificado o método de Fridrich, tendo obtido um método a que chamei de Fridgidius. A mesma ideia pode ser aplicada ao método de Petrus, obtendo-se, em ambos os casos, a Cruz da terceira camada completamente certa, ou seja, os meios estão bem orientados e bem posicionados. Isso permite-nos a conclusão da terceira camada, num só passo. Para esse passo final, precisamos de utilizar um de 84 algoritmos (bastante menos do que fazer o mesmo no método de Petrus (Cruz formada, mas nem sempre com os meios devidamente posicionados).

Vamos apresentar os exemplos que Lars Petrus colocou na sua página na Internet, alterando a parte final.

Eis o link: https://lar5.com/cube/examples.html

Há um caso elementar, em que o Método de Petrus pode ser melhorado: trata-se do caso em que, na resolução das duas primeiras camadas, os meios da terceira camada ficam bem orientados e bem posicionados (todas as seis cruzes estão bem formadas). Nesse(s) caso(s), podemos aplicar uma única sequência, ficando o cubo resolvido. Evidentemente, temos que saber a sequência a aplicar, em cada caso concreto. A lista tem 84 sequências.

Nos restantes casos, é um bocado demorado conseguir com que a Cruz da camada superior fique "perfeita", ou seja, com todos os meios bem alinhados com os quatro centros da segunda camada.

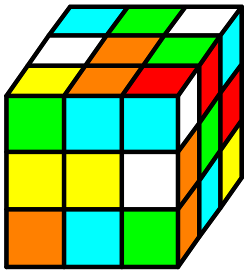
Example 1 *Coloque um cubo resolvido, com a face amarela, na Frente, e a face verde, em Cima. Aplique ao cubo a seguinte sequência (inversa da solução apresentada):*

$$D^2T^2F^2E^2B^{-1}D^2T^2F^2E^{-1}F^{-1}E^{-1}TEFE^{-1}T^{-1}C^{-1}D^{-1}C^2DC^2$$
$$D^{-1}C^{-1}D^{-1}C^{-1}D^{-1}FD^{-1}F^2C^{-1}FD_3^{-1}CD^{-1}B_2^2D^{-1}T_2C_2FCF^{-1}D^2$$

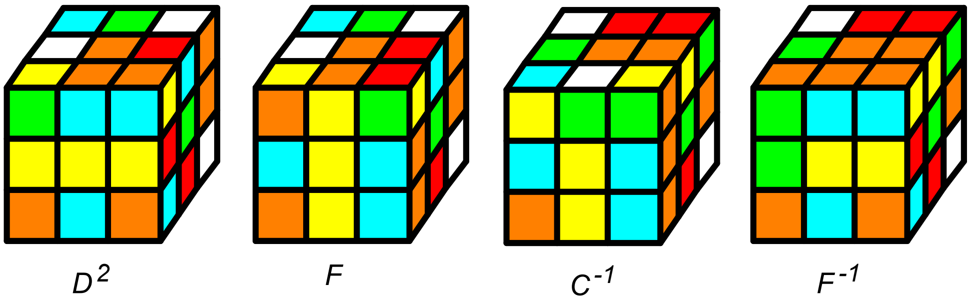
Resolva o cubo obtido.

Resolução

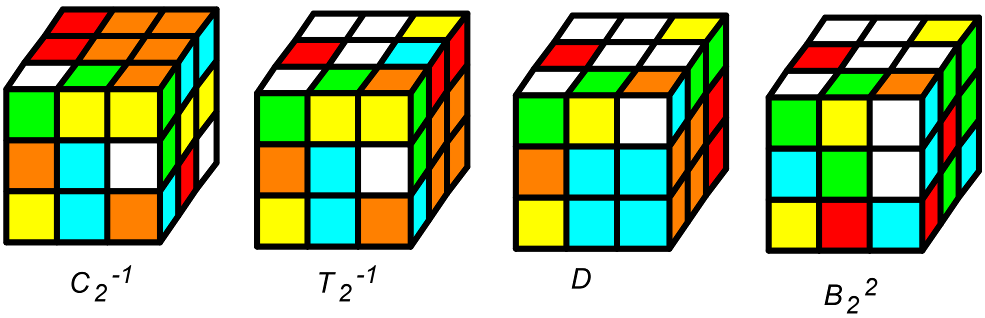
A posição obtida é a seguinte:



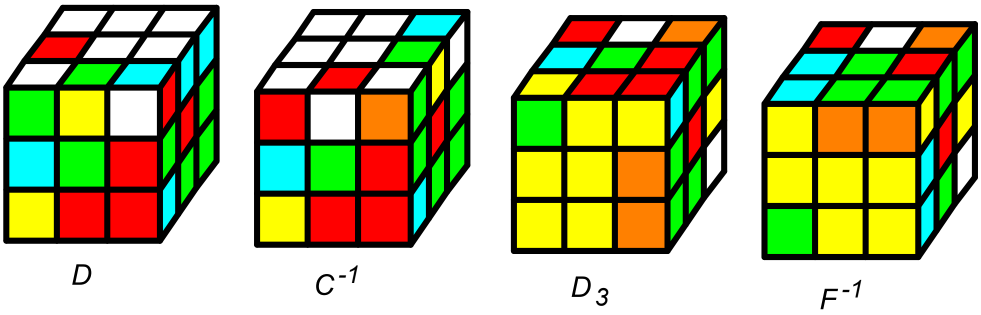
Agora, vamos resolver o cubo, começando por $D^2FC^{-1}F^{-1}$:



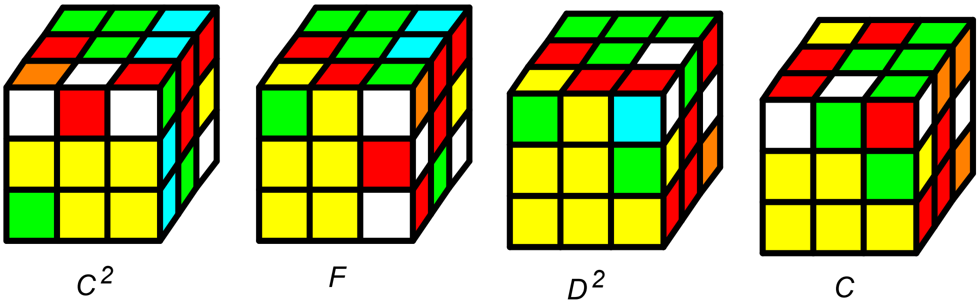
Já temos formado um bloco $2 \times 2 \times 1$. Continuemos com $C_2^{-1}T_2^{-1}DB_2^2$:



E obtivemos um cubo $2 \times 2 \times 2$. Seguimos com $DC^{-1}D_3F^{-1}$:

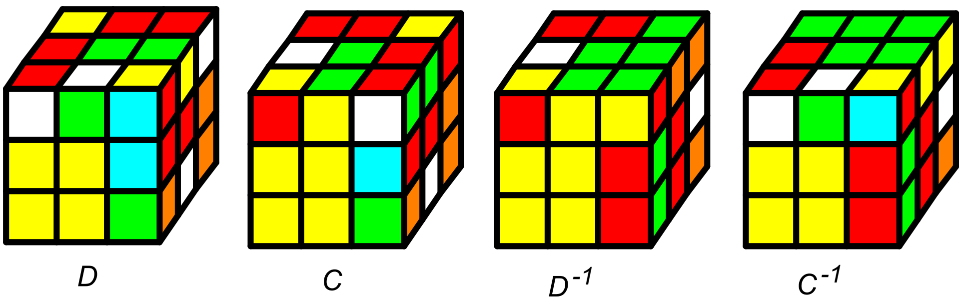


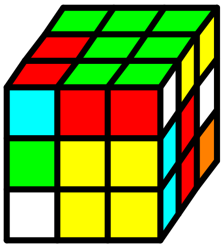
E, após C^{-1}, obtivemos um bloco $2 \times 2 \times 3$. Agora, começam as diferenças com o método de Petrus. Fazemos C^2FD^2C:



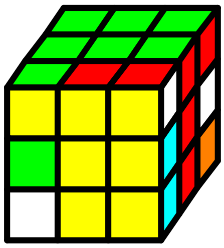
Falta-nos colocar o meio vermelho e amarelo, na segunda camada. Isso consegue-se com

$$DCD^{-1}C^{-1}F^{-1}C^{-1}FC_3$$

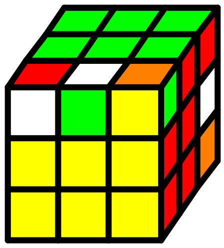




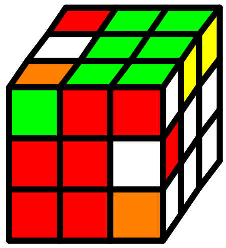
F^{-1}



C^{-1}



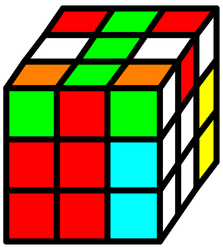
F



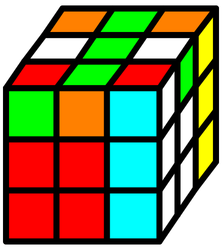
C_3

E seguimos com

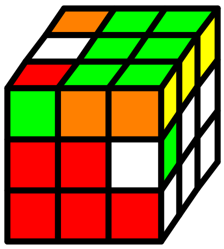
$$DC^2D^{-1}CF^{-1}C^2FC^2$$



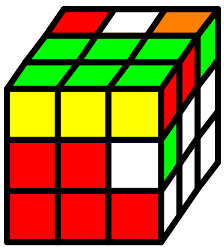
D



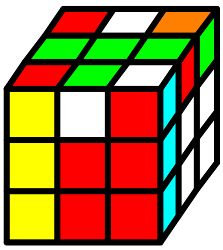
C^2



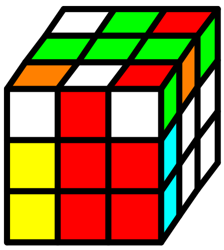
D^{-1}



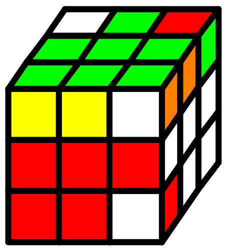
C



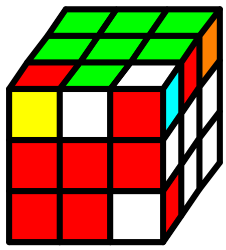
F^{-1}



C^2



F



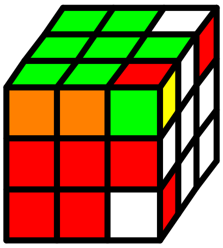
C^2

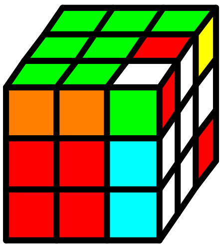
Após todos estes movimentos, temos a Cruz verde já formada, embora haja dois meios opostos que ficam mal posicionados.

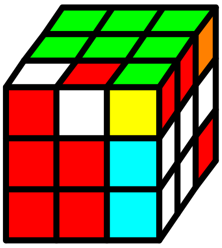
Agora, vamos ter que colocar o canto azul, branco e vermelho, no seu lugar e, ao mesmo tempo, permutamos dois meios opostos, de modo a obtermos a Cruz verde completamente certa. Como o azul está voltado para a Direita, a sequência a aplicar é

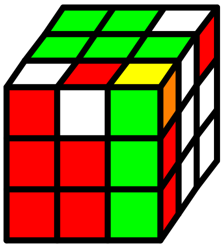
$$C^{-1}DCD^{-1}F^{-1}CFC^2F^{-1}CFCDC^{-1}D^{-1}$$

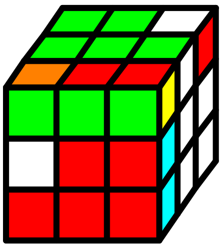
Seguem-se as imagens da aplicação da sequência anterior:

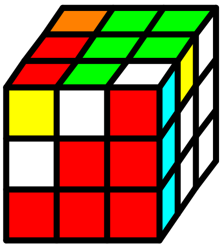

C^{-1}

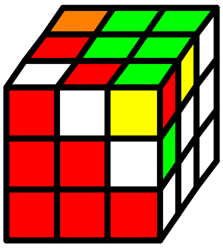

D

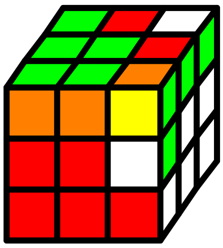

C

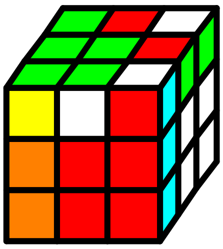

D^{-1}

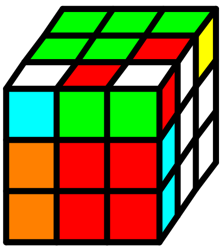

F^{-1}

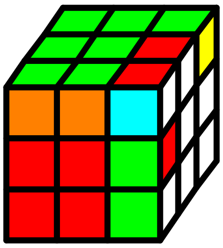

C

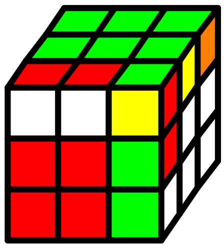

F

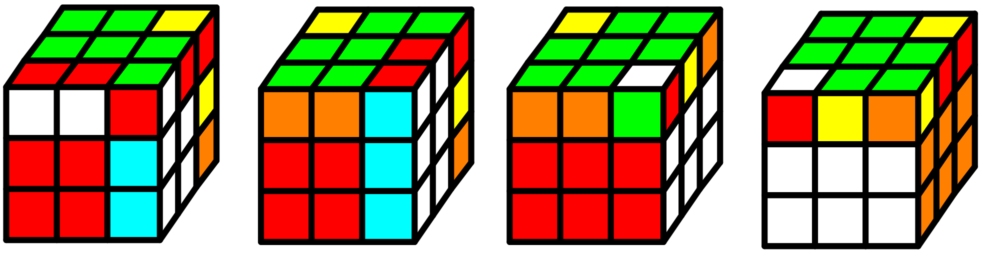

C^2


F^{-1}


C


F

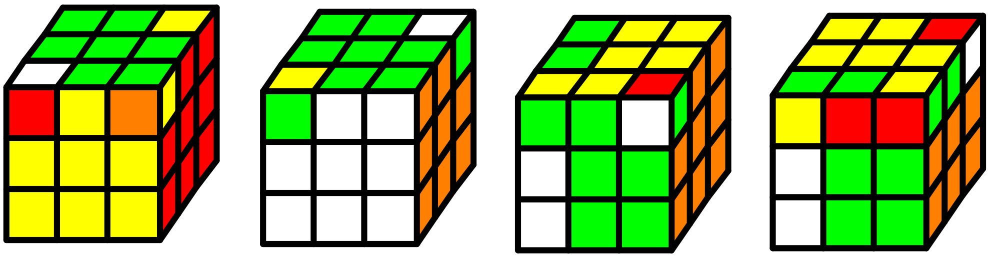

C



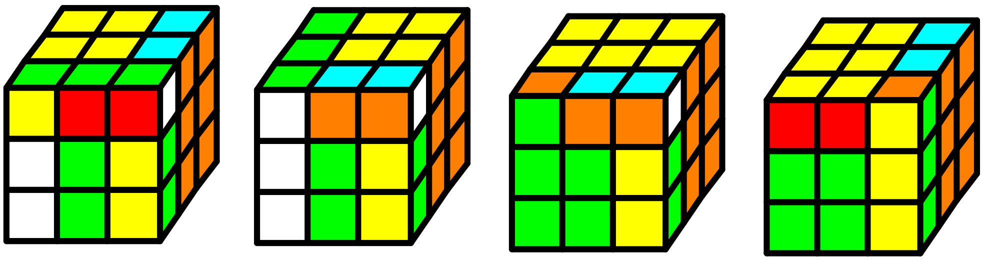
D C^{-1} D^{-1} C_3

O último movimento serve para obtermos a posição padrão. Vamos dar meia volta, nas duas camadas de Baixo, para que fique mais fácil de verificar a posição e o destino de cada canto (da terceira camada). A permuta dos cantos é feita segundo a ordem (234). A sequência a aplicar é

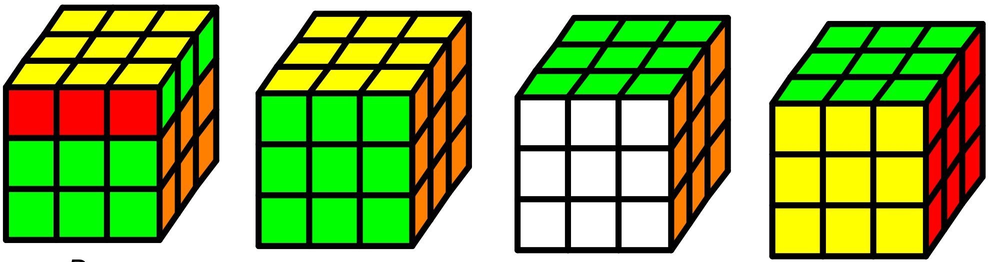
$$B_2^2C_3^2D_2^{-1}C^{-1}D^{-1}CEC^{-1}DC\left(D_3C_3^2\right)$$



$B_2{}^2$ $C_3{}^2$ $D_2{}^{-1}$ C^{-1}



D^{-1} C E C^{-1}

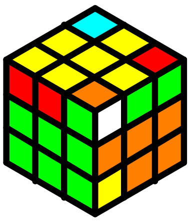


D $\quad$ C $\quad$ D_3 $\quad$ $C_3{}^2$

Fizemos 54 movimentos (que podem ser considerados 53, porque há dois movimentos seguidos, na camada de Cima).

Este método é útil, quando, no método de Petrus, se obtém uma cruz perfeita na terceira camada, permitindo resolver o cubo num só passo, em vez de três passos.

Example 2 *Consideremos o cubo parcialmente resolvido da figura seguinte:*



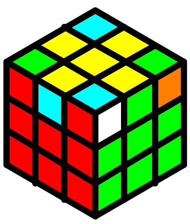
Como terminar a resolução do cubo?

1ª Resolução

Vamos resolver, utilizando o método básico de Petrus. A sequência a aplicar é

$$CDCD^{-1}C^2DCD^{-1}CC_3^{-1}$$

Aplicando a sequência anterior, obtemos o seguinte cubo:

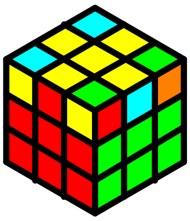


O cubo da figura anterior tem dois cantos de Cima no seu lugar (os dois da camada de Trás) e dois fora do seu lugar (na Frente).

Então, aplicamos a sequência

$$D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2C^{-1}$$

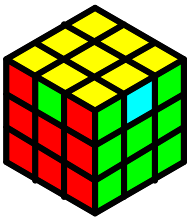
E obtemos a seguinte posição:



À posição anterior, eu chamo de "robô de quetro olhos", sendo que a sequência a aplicar é

$$C_3DCD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^2D^{-1}C_3^{-1}$$

Cubo obtido:



A camada de Trás já está resolvida, pelo que se aplica a sequência

$$F^2C^{-1}ED^{-1}F^2E^{-1}DC^{-1}F^2$$

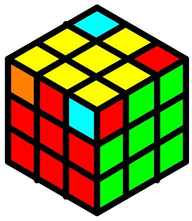
E o cubo fica resolvido. Foram necessários $9 + 10 + 11 + 9 = 39$ movimentos.

2^a Resolução

Apliquemos a seguinte sequência (porque a Cruz amarela fica completamente certa):

$$F_3^2DC^{-1}D^{-1}BDCD^{-1}F_3^2C_3^{-1}$$

Obtemos o cubo na seguinte posição:



Agora, temos a Cruz amarela completamente formada (alinhada com os meios da segunda camada) e os cantos têm de permutar da seguinte maneira: (234).

Como temos Mão e Dedo, com os amarelos aTrás (MDCAT), a sequência a aplicar é

$$C_3D_3^2D^2C^{-1}EC^2DB^{-1}D^{-1}C^{-1}DBC^{-1}E^{-1}CDD_3^2C_3^{-1}$$

E o cubo fica resolvido.

Neste caso, foram necessários $7 + 14 = 21$ movimentos. Ora, isto significa que fizemos 21 movimentos, em vez de 39.

Este segundo processo tem a enorme desvantagem de precisarmos de ter presente uma lista de quase 100 sequências, para além das que são necessárias ao método de Petrus.

É claro que os grandes utilizadores do método de Petrus conseguem diminuir o número de passos, por exemplo, fazendo o acerto dos cantos e da face superior, com uma única sequência.

3^a Resolução

Podemos dividir o último passo da resolução anterior, em dois. Então, teríamos:

1. $F_3^2DC^{-1}D^{-1}BDCD^{-1}F_3^2C_3^{-1}$
2. $D^2B^{-1}DC^2D^{-1}BDC^2D$
3. $C^2M^2CM^2C^2M^2CM^2$

Considerando que M corresponde a dois movimentos, temos um total de $7+9+8+4 = 28$ movimentos (ainda assim, melhor que no método básico de Petrus).

Este exemplo (acabado de apresentar) não foi "trabalhado", tendo sido obtido numa resolução do cubo, pelo métodos de Petrus.

A grande vantagem do método de Petrus é o reduzido número de sequência que temos de decorar (pelo menos, comparando com o método de Fridrich).

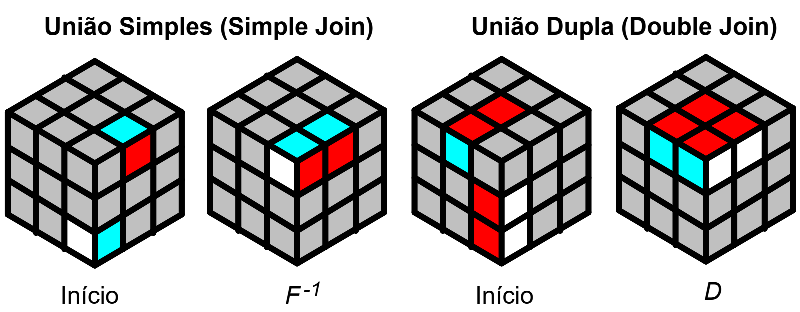
Capítulo 12

Formulário

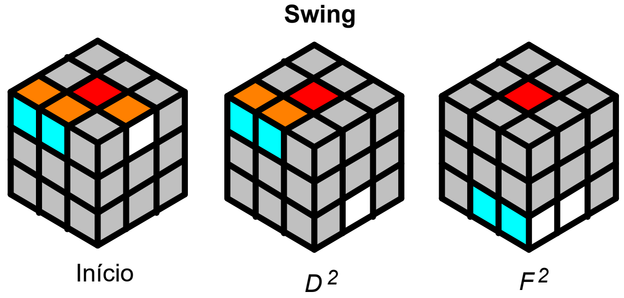
Vamos apresentar as sequências que temos de decorar, quer no método de Petrus, quer no método Petrus(Gidius).Isso é feito em duas secções.

12.1 Petrus

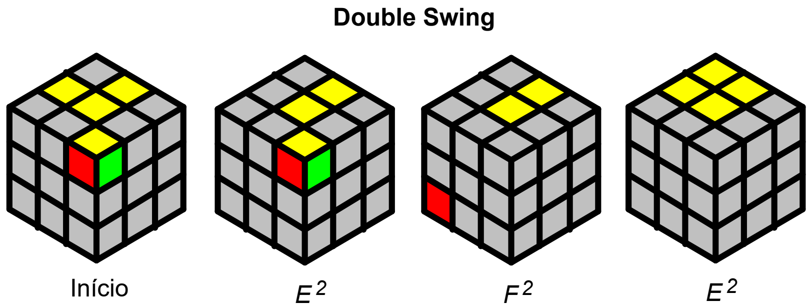
Simple Join e Double Join



Swing

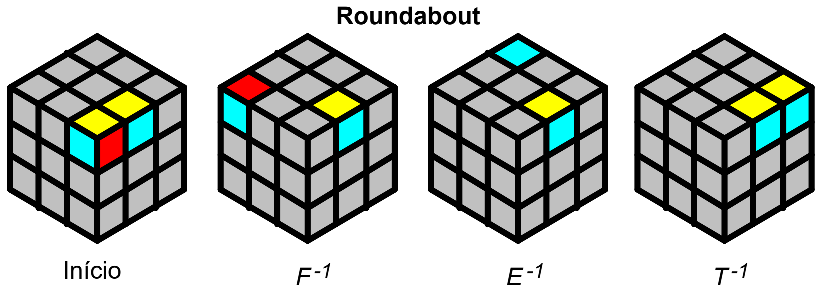


Double Swing

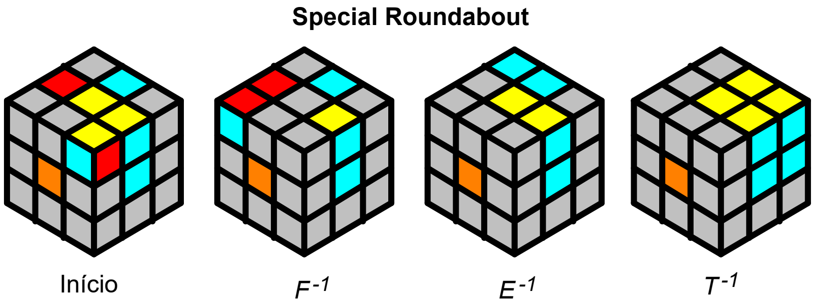


$E^2F^2E^2$ ou EF^2E^2 ou $D^{-1}E^2F^2E^2$ (são meros exemplos, podendo acontecer que as sequências sejam relativamente diferentes).

Roundabout

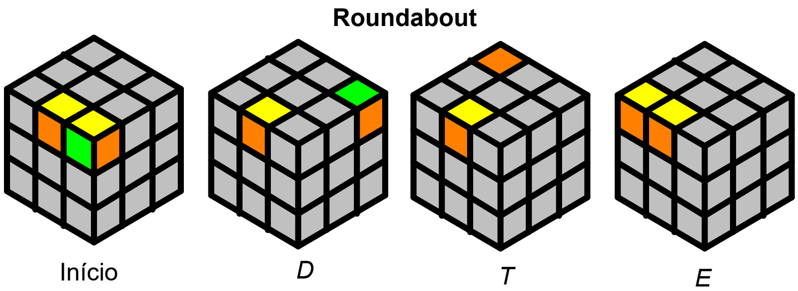


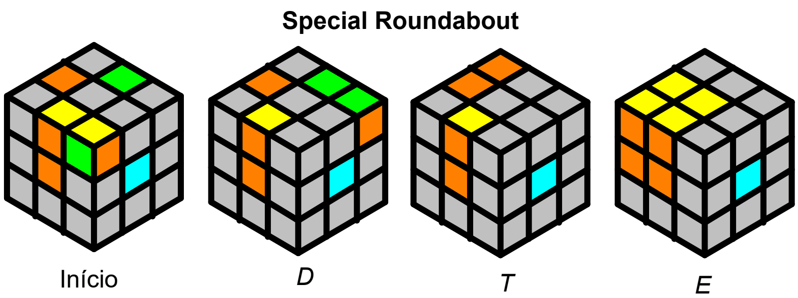
$F^{-1}E^{-1}T^{-1}$ ou $E^{-1}F^{-1}E^{-1}T^{-1}$ ou $TF^{-1}E^{-1}T^{-1}$ (meros exemplos).



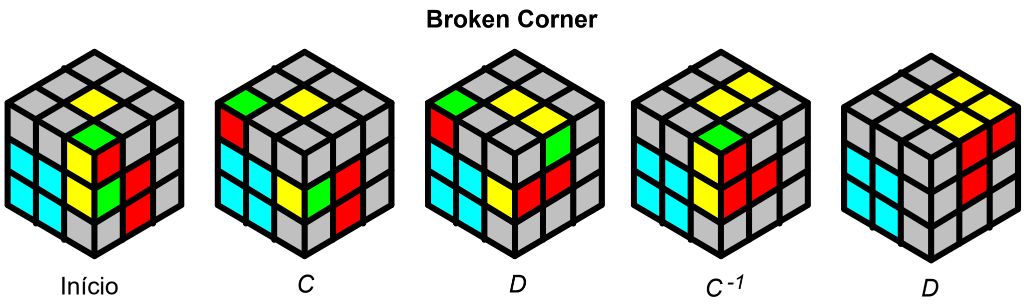
Se tivermos algumas peças em posições especiais, o resultado pode ser favorável. Note-se que se trata da mesma sequência.

O caso anterior pode ser ligeiramente diferente: simetria em relação a uma diagonal. Assim, teremos





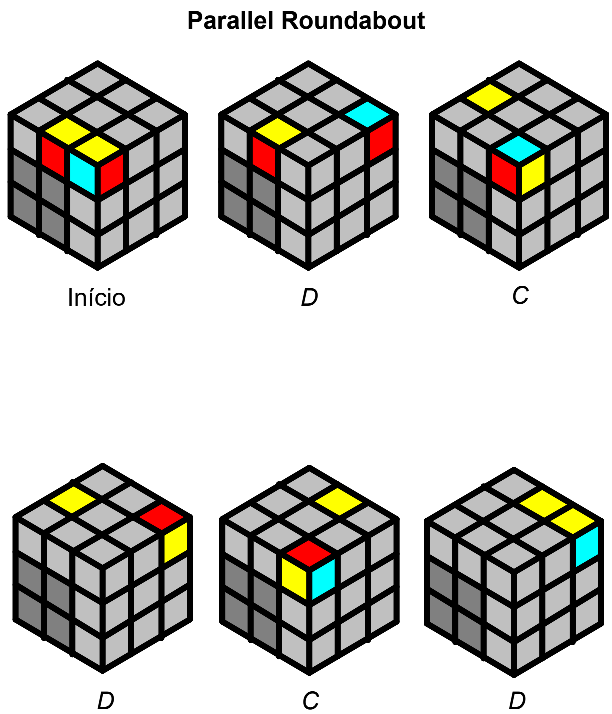
Broken Corner



$CDC^{-1}D$ ou $CD^2C^{-1}D$

Parallell Roundabout

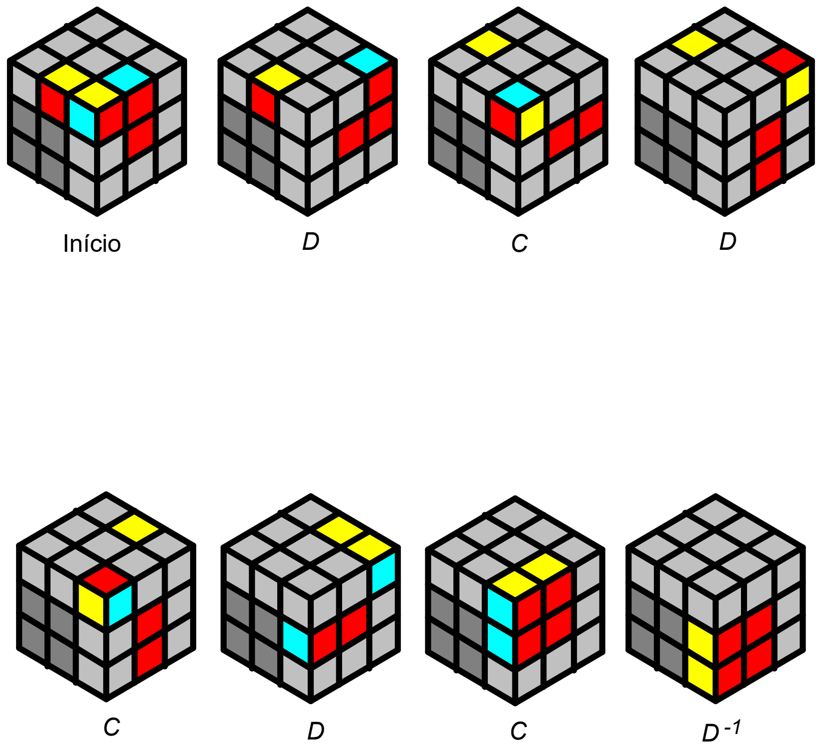
Solução: $DCDCD$



Solução: **Special Parallell Roundabout**

$DCDCDC$

Special Parallel Roundabout



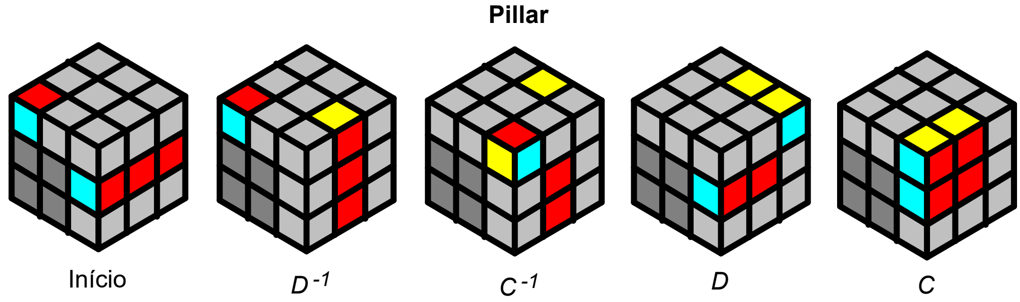
Esta sequência tem mais um movimento do que a anterior (C, no fim).

Observação

No caso anterior (Special Parallel Roundabout), há interesse em obter o bloco 2×2 (azul/vermelho/amarelo), se o centro da camada da Frente for **Amarelo** ou **Verde**. Se o centro da Frente for verde, fazemos D^2, no fim; se o centro da Frente for amarelo, fazemos D^{-1}. É claro que estamos a supor que o bloco $2 \times 2 \times 3$ já está formado. Se tivermos, apenas, um bloco $2 \times 2 \times 2$ formado, então convém que o centro da Frente seja amarelo, para formarmos o bloco $2 \times 2 \times 3$.

Pillar

$D^{-1}C^{-1}DC$ ou $DC^{-1}DC$



Neste caso, vale a mesma observação feita anteriormente: convém que o centro amarelo esteja na Frente ou que o centro azul esteja aTrás.

Completar a segunda camada

N^o	Canto da Primeira Camada	Posição
1	$(D^2C)\,(D^2C)\,(D^2C^2D^2)$	CDF
2	$CDCD^{-1}C^2DCD^{-1}$	CDF
3	$C^{-1}\,(DC^{-1}D^{-1})\,C^2\,(DC^{-1}D^{-1})$	CDF
4	$DC^2DCD^{-1}CDC^2D^2$	BDF
5	$D^2C^2\,(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1})\,C^2D^{-1}$	BDF

Posicionar os cantos

Só há dois casos possíveis. No primeiro, temos dois cantos adjacentes já na sua posição (os dois cantos de Trás); no segundo, temos dois cantos certos em diagonal e dois errados. As duas sequências são as seguintes:

$$D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2\,(C^{-1})$$
$$FC^2F^{-1}T^{-1}CFC^{-1}TC^2F^{-1}$$

Orientar os cantos

Para orientar os cantos, há sete casos.

Robô de quatro olhos

$$C_3DCD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^2D^{-1}$$

Robô de dois olhos e duas orelhas

$$C_3DC^2D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^2C^2D\,(C^2)$$

Sune

$$DCD^{-1}CDC^2D\left(C^2\right)$$

AntiSune

$$D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D\left(C^2\right)$$

Mão e Dedo (SAT)

$$C_3^2D^{-1}C^2DCD^{-1}CD^2C^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}$$

Mão e Dedo (CAT)

$$C_3^2DCD^{-1}CDC^2D^2C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D$$

Peixe

$$DF^{-1}B^2FD^{-1}C^2DF^{-1}B^2FD^{-1}\left(C^2\right)$$

Posicionar os meios
Há quatro casos

N^o	Algoritmo	Efeito nos Meios
1	$F^2CED^{-1}F^2E^{-1}DCF^2$	(SWE)
2	$F^2C^{-1}ED^{-1}F^2E^{-1}DC^{-1}F^2$	(SEW)
3	$D^2F^2T^2E^2BE^2T^2F^2D^2C^{-1}$	(NS)(EW)
4	$\left(F^2T^2\right)BD^2\left(F^2T^2\right)E^2\left(F^2T^2\right)B^{-1}\left(F^2T^2\right)$	(NW)(SE)

12.2 Petrus(Gidius)

Para completarmos as duas primeiras camadas, precisamos duma lista de 11 (onze) fórmulas (sequências). Estamos a supor que a cruz superior tem dois meios opostos certos (pelo menos).

N^o	Último Canto da Primeira Camada (Cruz Certa)	Posição
1	$\left(BD^2BE^2\right)\left(B^{-1}D^2BE^2\right)B^2$ ou $\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)^2\left(DCD^{-1}\right)$	CDF
2	$\left(EB^{-1}E^{-1}\right)C\left(EBE^{-1}\right)$ ou $F_3^2\left(DC^{-1}D^{-1}\right)B\left(DCD^{-1}\right)F_3^2$	CDF
3	$C_3\left(D^{-1}BD\right)C^{-1}\left(D^{-1}B^{-1}D\right)$	CDF
4	$\left(EFE^{-1}FE\right)\left(F^2E^{-1}\right)\left(D^{-1}F^{-1}DF^{-1}D^{-1}\right)\left(F^2D\right)$	BDF
5	$\left(D^{-1}F^2\right)\left(DFD^{-1}FD\right)\left(EF^2\right)\left(E^{-1}F^{-1}EF^{-1}E^{-1}\right)$	BDF

N^o	Último Canto da 1^a Camada (Permuta 2 meios opostos)	Posição
6	$\left(C^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)\left(FCDC^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)C^2F\left(DCD^{-1}\right)$	**C**DF
7	$C^{-1}\left(DCD^{-1}\right)\left(F^{-1}CF\right)C^2\left(F^{-1}CF\right)C\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$	C**D**F
8	$\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)\left(F^{-1}C^{-1}F\right)C^2\left(F^{-1}C^{-1}F\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$	CD**F**
9	$(DC)\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)\left(FD^2\right)\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)\left(DCD^{-1}\right)F^{-1}$	**B**DF
10	$\left(F^{-1}CF\right)\left(CF^{-1}C^{-1}F\right)C^2\left(F^{-1}CF\right)$	B**D**F
11	$\left(F^{-1}C^{-1}F\right)C^2\left(F^{-1}CFC^{-1}\right)\left(F^{-1}C^{-1}F\right)$	BD**F**

Para a resolução da terceira camada, num só passo, precisamos de 84 (oitenta e quatro) sequências.

N^o	Algoritmos de PLL	Efeito nos Cantos
1	$\left(EC^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CE^{-1}\right)\left(DC^{-1}E\right)B^2\left(E^{-1}CD^{-1}\right)$	(12)(34)
2	$C^2M^2CM^2C^2M^2CM^2$	(13)(24)
3	$D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$	(123)
4	$D^2T^2DFD^{-1}T^2DF^{-1}D$	(132)

N^o	Algoritmos Só Cruz (2F,2T)	Efeito Cantos
5	$DC\left(D^2C^{-1}D^2C^{-1}\right)\left(DC^2DC^2D\right)\left(C^{-1}D^2C^{-1}D^2\right)CDC$	(1)(2)(3)(4)
6	$F\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)^3F^{-1}$	(12)(34)
7	$C^{-1}\left(DCD^{-1}CDC^2D^{-1}\right)C^{-1}\left(D^{-1}C^2DCD^{-1}CD\right)$	(13)(24)
8	$C_3EC^{-1}D^{-1}CE^{-1}C^{-1}DEC^{-1}D^{-1}CE^{-1}C^{-1}DC^2\left(C_3^{-1}\right)$	(14)(23)
9	$C_3DC^{-1}E^{-1}CD^{-1}C^2EC^{-1}ECE^2CE^2C^2E^{-1}C^{-1}\left(C_3^{-1}\right)$	(123)
10	$EF^{-1}E^{-1}FC^2E^2T^{-1}DT^{-1}D^{-1}T^2E^2C^2$	(132)
11	$DC^{-1}D^2F^2DC^2DC^2D^{-1}F^2C^{-1}DC^2D^{-1}C^2$	(124)
12	$CDCD^{-1}CD^{-1}C^{-1}D^2C^{-1}D^2C^{-1}EC^{-1}DCE^{-1}$	(142)

N^o	Algoritmos Só Cruz (2F,1E,1D)	Efeito
13	$(CDC)\left(D^2C^{-1}D^2C^{-1}\right)\left(D^2C^2D^2\right)\left(C^{-1}D^{-1}C\right)\left(DC^2D^{-1}\right)$	(1)(2)(3)
14	$\left(C^2DC^2\right)\left(D^{-1}C^{-1}D\right)\left(CE^{-1}CD^{-1}\right)\left(C^{-1}EC^{-1}\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$	(12)(34)
15	$C^2\left(E^{-1}CD\right)\left(C^{-1}ECD^2CEC^{-1}\right)\left(DCE^{-1}\right)$	(13)(24)
16	$C_3\left(FCD^{-1}C^{-1}\right)\left(D^2C^{-1}D^2\right)\left(C^2DC^2\right)\left(DCD^{-1}F^{-1}\right)\left(C_3^{-1}\right)$	(14)(23)
17	$C_3E^{-1}C^2D_2C^2D^{-1}C^{-1}D^{-1}B^{-1}D^2C^{-1}DBD^{-1}(D_3^{-1}C_3^{-1})$	(123)
18	$C_3^{-1}\left(EC^{-1}D^{-1}CE^{-1}\right)\left(C^{-1}D\right)\left(TC^{-1}F^{-1}CT^{-1}\right)\left(C^{-1}FC^2\right)(C_3)$	(132)
19	$\left(CD^{-1}CE\right)\left(C^{-1}DCE^{-1}\right)\left(CD^{-1}CE\right)\left(C^{-1}DCE^{-1}\right)$	(124)
20	$C^{-1}DC^2E_2^{-1}C^2ECEBE^2CE^{-1}B^{-1}ET\left(D_3^{-1}\right)$	(142)
21	$D_3^{-1}E^2C^2DCD^{-1}CE^2D_3C^2F^{-1}EFE^{-1}C^2$	(134)
22	$C_3^{-1}\left(DC^2D\right)\left(BDB^{-1}\right)\left(DC^2D^2B\right)\left(D^{-1}C^2D^2B^{-1}\right)\left(DC^2\right)(C_3)$	(143)
23	$C_3DCD^2F^{-1}DC^2DC^2D^{-1}FCDC^2D^{-1}C^2\left(C_3^{-1}\right)$	(234)
24	$C_3^{-1}C^{-1}D^{-1}C^{-1}DEC^2D^{-1}C^2DC^2E^{-1}CD^{-1}C^2DC^{-1}(C_3)$	(243)

N^o	Algoritmos (Sonho CAC3)	Efeito
25	$D^{-1}CD^2CD^{-1}CDC^2DC^2DCD^{-1}CD^2C$	(1)(2)(3)
26	$DC^{-1}E^{-1}CD^{-1}C^{-1}DC^{-1}ECD^{-1}C^{-1}E^{-1}CEC$	(12)(34)
27	$ECE^2C^{-1}D^{-1}C^2E^2C^2E^{-1}C^2E^{-1}C^2DCEC^{-1}$	(14)(23)
28	$D^{-1}\left(C^2D^2CD^2\right)\left(CDC^{-1}\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C^2$	(13)(24)
29	$D^{-1}\left(C^2D^2\right)(CD)\left(B^{-1}DCD^{-1}B\right)D^2\left(C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)C^2$	(123)
30	$F\left(C^2EC^{-1}D^{-1}CE^{-1}C^2\right)\left(DF^{-1}D^{-1}\right)\left(CDC^{-1}\right)$	(132)
31	$\left(FD^{-1}C^2DF^{-1}\right)\left(D^{-1}FC^2F^{-1}D\right)$	(124)
32	$C_3\left(DC^{-1}E^{-1}C\right)\left(D^{-1}C^{-1}EC\right)\left(C_3^{-1}\right)$	(142)
33	$D^{-1}\left(C^{-1}FC^{-1}\right)\left(D^2CD^2\right)\left(CF^{-1}\right)\left(DC^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)C^2$	(134)
34	$\left(FD^{-1}\right)(CDC)\left(F^{-1}D^{-1}\right)(CFC)\left(F^{-1}D\right)C^2$	(143)
35	$\left(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}\right)\left(DT^{-1}\right)\left(CD^2CD^2\right)\left(C^{-1}TC^{-1}\right)\left(D^{-1}C^2\right)$	(234)
36	$EC^{-1}D^{-1}CE^{-1}C^2\left(DCEC^{-1}D^{-1}\right)\left(CDE^{-1}C\right)$	(243)

N^o	Algoritmos (Anti Sonho CAC2)	Efeito
37	$DC^{-1}D^2C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D^{-1}C^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^2C^{-1}$	(1)(2)(3)
38	$D^{-1}CEC^{-1}DCD^{-1}CE^{-1}C^{-1}DCEC^{-1}E^{-1}C^{-1}$	(12)(34)
39	$DC^2D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^{-1}CD^{-1}CDC^2$	(13)(24)
40	$E^{-1}C^{-1}E^2CDC^2E^2C^2EC^2EC^2D^{-1}C^{-1}E^{-1}C$	(14)(23)
41	$E^{-1}CDC^{-1}EC^2D^{-1}C^{-1}E^{-1}CDC^{-1}D^{-1}EC^{-1}$	(123)
42	$DCD^{-1}CD^{-1}FC^{-1}D^2C^{-1}D^2CF^{-1}CDC^2$	(132)
43	$T^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^{-1}TDC^{-1}T^{-1}C^{-1}TD^{-1}C^2$	(124)
44	$C^2ECE^{-1}CE^{-1}C^{-1}E^{-1}BE^{-1}C^{-1}EB^{-1}EC^2E$	(142)
45	$C_3\left(E^{-1}CDC^{-1}E\right)\left(CD^{-1}C^{-1}\right)\left(C_3^{-1}\right)$	(134)
46	$\left(T^{-1}DC^2D^{-1}T\right)\left(DT^{-1}C^2TD^{-1}\right)$	(143)
47	$C_3\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)\left(CEC^{-1}\right)\left(DC^2E^{-1}\right)\left(C^{-1}DC\right)\left(EC^{-1}E^{-1}\right)$	(234)
48	$\left(C^2EC^2E^2\right)\left(C^{-1}E^{-1}\right)\left(BE^{-1}C^{-1}EB^{-1}\right)E^2\left(CE^{-1}CE\right)$	(243)

N^o	Algoritmos (Mão e Dedo SAT)	Efeito nos Cantos
49	$E^2C^{-1}FE^2B^{-1}E^2BF^2C^{-1}FCE^2C$	(1)(2)(3)(4)
50	$T^2D^2F^{-1}BT^{-1}C^{-1}F^2CTB^{-1}F^{-1}D^2T^2E^2$	(12)(34)
51	$\left(FD^{-1}F\right)\left(E^2F^2\right)\left(EFDF^{-1}E^{-1}\right)\left(F^2E^2F^2\right)$	(13)(24)
52	$DFC^{-1}D^2C^{-1}DC^2DCF^{-1}DC^2DC^{-1}D^2C^{-1}D^2$	(14)(23)
53	$FD^2FE^2F^{-1}D^2FE^2F^2$	(123)
54	$FCF^{-1}D^{-1}FC^{-1}F^{-1}CDC^{-1}$	(132)
55	$F^{-1}C^{-1}FEF^{-1}CFC^{-1}E^{-1}C$	(124)
56	$C_3F^{-1}D^{-1}FC^2F^{-1}DFD^{-1}C^2D\left(C_3^{-1}\right)$	(142)
57	$E^{-1}T^2DTD^2C^2DCD^{-1}C^2DTEC$	(134)
58	$TC^{-1}T^{-1}E^2T^{-1}E^2CE^2C^{-1}T^2CT^{-1}E^2$	(143)
59	$\left(T^{-1}CT\right)\left(D^2TD^2\right)\left(C^{-1}D^2C\right)\left(T^2C^{-1}TD^2\right)$	(234)
60	$E^{-1}T^{-1}D^{-1}C^2DC^{-1}D^{-1}C^2D^2T^{-1}D^{-1}T^2EC^{-1}$	(243)

Nº	Algoritmos (Mão e Dedo CAT)	Efeito Cantos
61	$C_3D^{-1}C^2DCD^{-1}CDC^2DC^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2$	(1)(2)(3)(4)
62	$C_3^{-1}D^{-1}FC^2FE^2B^2T^{-1}D^2TB^2E^2F^2D\,(C_3)$	(12)(34)
63	$D^2CD^2C^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}DC^{-1}DC^{-1}D^2C^2D^{-1}C^2$	(13)(24)
64	$C_3^2D_2^{-1}C^{-1}M^{-1}F^{-1}MCM^{-1}FD\left(C_3^2\right)$	(14)(23)
65	$D_3^{-1}E^2B^2EC^2E^{-1}B^2EC^2E(D_3)$	(123)
66	$D^2B^{-1}DC^2D^{-1}BDC^2D$	(132)
67	$C_3^2D^2BD^{-1}C^2DB^{-1}D^{-1}C^2D^{-1}\left(C_3^2\right)$	(124)
68	$D_3^{-1}D^2B^2D^{-1}C^2DB^2D^{-1}C^2D^{-1}\,(D_3)$	(142)
69	$C_3^{-1}D^{-1}C^{-1}DFD^2B^{-1}DCD^{-1}BD^2C^{-1}F^{-1}C\,(C_3)$	(134)
70	$C_3D^2BE^{-1}B^2D^{-1}CDBD^{-1}C^{-1}BEB^{-1}D^{-1}\left(C_3^{-1}\right)$	(143)
71	$C_3D^2B^{-1}EB^2DC^{-1}D^{-1}B^{-1}DCB^{-1}E^{-1}BD\left(C_3^{-1}\right)$	(234)
72	$C_3^{-1}DCD^{-1}T^{-1}D^2BD^{-1}C^{-1}DB^{-1}D^2CTC^{-1}\,(C_3)$	(243)

Nº	Algoritmo (Peixe – 2 Amarelos Invisíveis)	Efeito Cantos
73	$DC^2D^{-1}E^{-1}C^{-1}EC^{-1}DC^{-1}D^{-1}E^{-1}C^2EC$	(1)(2)(3)(4)
74	$E\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)\left(F^2CEC^2E^{-1}C^{-1}F^2\right)DC$	(12)(34)
75	$DCD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^2D^{-1}$	(13)(24)
76	$D^{-1}CEC^{-1}D^2C^2D^2CEC^{-1}D^2CE^{-1}CD^{-1}CE^{-1}C^{-1}$	(14)(23)
77	$C_3EBD^{-1}CB^{-1}EB^{-1}E^{-1}C^{-1}EB^2DB^{-1}E^2\left(C_3^{-1}\right)$	(123)
78	$C_3^{-1}D^{-1}C^{-1}EC^{-1}DCE^{-1}CD^{-1}C^{-1}DC^2D^{-1}C^2DC^{-1}$	(132)
79	$C_3D^{-1}C^2D^{-1}B^{-1}DC^2D^{-1}BD^2\left(C_3^{-1}\right)$	(124)
80	$\left(EC^2E\right)\left(BE^{-1}C^2EB^{-1}\right)E^2$	(142)
81	$C_3E^{-1}C^2E^2C^{-1}D^{-1}CE^{-1}DC^2E^{-1}C^{-1}D^{-1}C^2DEC$	(134)
82	$D^{-1}B^{-1}EC^{-1}BD^{-1}BDCD^{-1}B^2E^{-1}BD^2$	(143)
83	$C_3^2D_2^{-1}\left(C^{-1}D^{-1}CEC^{-1}DC\right)\left(D_3C_3^2\right)$	(234)
84	$D_3CDBD^{-1}C^{-1}DB^{-1}D^{-1}(D_3^{-1})$	(243)

Se quisermos dividir o último passo em dois, precisamos duma lista de 11 (onze) sequências, em vez das 84. Para isso, podemos escolher uma sequência de cada um dos sete casos e as quatro sequências de PLL (que preservam os meios).

N^o	Algoritmos de PLL	Efeito nos Cantos
1	$\left(EC^{-1}D\right) B^2 \left(D^{-1}CE^{-1}\right) \left(DC^{-1}E\right) B^2 \left(E^{-1}CD^{-1}\right)$	(12)(34)
2	$C^2M^2CM^2C^2M^2CM^2$	(13)(24)
3	$D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$	(123)
4	$D^2T^2DFD^{-1}T^2DF^{-1}D$	(132)

N^o	Algoritmo	Caso
6	$F\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)^3 F^{-1}$	Só Cruz (2F,2T)
15	$C^2\left(E^{-1}CD\right)\left(C^{-1}ECD^2CEC^{-1}\right)\left(DCE^{-1}\right)$	Só Cruz (2F,1E,1D)
31	$\left(FD^{-1}C^2DF^{-1}\right)\left(D^{-1}FC^2F^{-1}D\right)$	Sune (Sonho)
45	$C_3\left(E^{-1}CDC^{-1}E\right)\left(CD^{-1}C^{-1}\right)\left(C_3^{-1}\right)$	AntiSune (AntiSonho)
54	$FCF^{-1}D^{-1}FC^{-1}F^{-1}CDC^{-1}$	Mão e Dedo (SAT)
66	$D^2B^{-1}DC^2D^{-1}BDC^2D$	Mão e Dedo (CAT)
80	$\left(EC^2E\right)\left(BE^{-1}C^2EB^{-1}\right)E^2$	Peixe (Laço)