Os cubos de Rubik $2\times2\times2$ e $3\times3\times3$

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Setembro de 2012

[1]egidiogonsalvespereira@gmail.com

Conteúdo

Preface

Although this text is tagged as the Abstract in the Front Matter, it will appear in the typeset document as the Preface. Replace this text with your preface.

Capítulo 1

Resolução do Cubo 2×2×2

1.1 Notação

Vamos começar por definir a notação aqui utilizada que é bastante diferente da notação oficial. Trata-se duma notação mais rigorosa e mais intuitiva, resolvendo duma maneira fácil os movimentos das camadas interiores em cubos maiores que 2×2×2.

Em primeiro lugar, vamos utilizar as iniciais das palavras portuguesas, porque eu sou português e falo português.

Rodar a camada de cima de 90°, no sentido horário, é representado por C (de Cima).

Rodar a camada de cima de 180°, no sentido horário, é representado por C^2. O expoente dá-nos o número de vezes que fazemos C. Se a rotação for de 90°, no sentido anti-horário, escrevemos C^{-1}. Se quisermos rodar a camada de cima de 180°, no sentido anti-horário, escrevemos C^{-2}. Repare-se que C^2 e C^{-2} produzem o mesmo efeito no cubo. Note-se ainda que, para rodar a camada de cima, 90°, no sentido anti-horário, podemos aplicar C^3, embora seja preferível aplicar C^{-1}. Em rigor, C^3 significa rodar a camada de cima 270°, no sentido horário, só que o efeito é o mesmo que fazer C^{-1}.

O expoente permite-nos escrever sequências do tipo $(DCD^{-1}C^{-1})^2$ em vez de $DCD^{-1}C^{-1}DCD^{-1}C^{-1}$ (o que pode facilitar a memorização).

Analogamente, temos D, D^{-1}, D^2 e D^{-2}, para os movimentos da camada da direita, E, E^{-1}, E^2 e E^{-2}, para os movimentos da camada da esquerda, F, F^{-1}, F^2 e F^{-2}, para os movimentos da camada da frente, T, T^{-1}, T^2 e T^{-2}, para os movimentos da camada de trás e B, B^{-1}, B^2 e B^{-2}, para os movimentos da camada de baixo. É preciso algum cuidado com E e B, porque têm outro significado na notação tradicional.

Para rodar todo o cubo, não vamos utilizar as letras x, y, z. Vamos continuar a usar as letras C, B, E, D, F, T, mas com um índice. No caso do cubo 2×2×2, esse índice é 2.

Assim, D_2 significa rodar as duas camadas da direita (logo, todo o cubo) no sentido horário (como fazíamos com D).

Logo, podemos escrever D_2, D_2^{-1}, D_2^2, D_2^{-2}, com um significado óbvio. Também podemos utilizar C_2, C_2^{-1}, C_2^2, C_2^{-2}, bem como, F_2, F_2^{-1}, F_2^2, F_2^{-2}. Não precisamos de utilizar E_2, embora isso tenha significado.

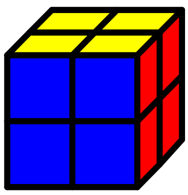
No caso do cubo 3×3×3, vamos utilizar, por exemplo, D, D_2 e D_3, com um significado óbvio: D_2 significa rodar as duas camadas da direita, como se estivessem coladas, enquanto que D_3 significa rodar todo o cubo (as três camadas acompanham o movimento de D.

No caso do cubo 5×5×5, por exemplo, é fácil compreender o significado de D, D_2, D_3 e D_5 (e D_4, se precisarmos).

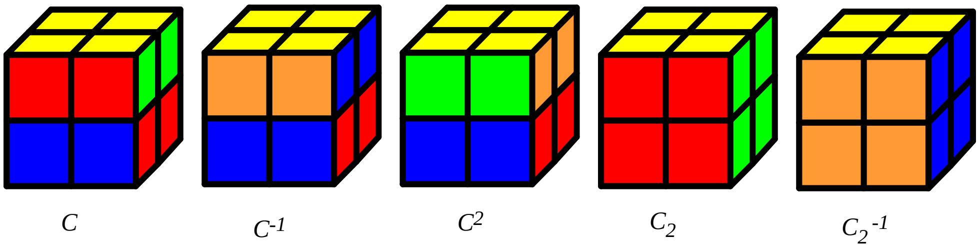
Para as camadas intermédias, utilizaremos M, S e Q, em vez dos habituais M, S e E, porque E é utilizado para a camada da esquerda. A razão do Q tem a ver com a palavra eQuador. Evidentemente, isso não interessa no caso do cubo 2×2×2 (nem no caso dos outros cubos de ordem par).

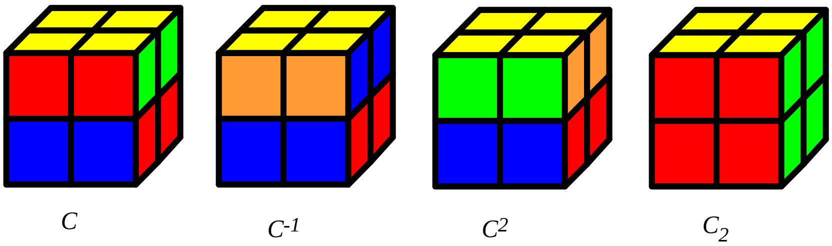
Seguidamente, vamos apresentar imagens dos vários movimentos, partindo sempre duma posição inicial em que o cubo já está resolvido. Note-se que não se trata duma sequência de vários movimentos (uns após outros), mas dum único movimento a partir da posição inicial.

Posição inicial



Posição, após o movimento indicado (por baixo do cubo):





1.2 Breve Descrição do Método de Ortega

O Método de Ortega foi criado por Victor Ortega e, quanto a mim, é o método mais simples de aprender a resolver o cubo 2×2×2. No entanto, embora seja muito simples de aprender, é um método altamente eficiente na resolução do cubo 2×2×2. Refira-se que o método de Ortega foi criado para a resolução do cubo 3×3×3, tendo sido, posteriormente, adaptado para a resolução do cubo 2×2×2. Na realidade, há pouca semelhança entre os dois casos (cubo 2×2×2 e cubo 3×3×3), porque, no caso do cubo 2×2×2, não precisamos de acertar os cantos. No caso do cubo 3×3×3, como veremos, começamos por resolver os cantos e só depois resolvemos os meios. Ora, o cubo 2×2×2 é um cubo só com os cantos do cubo 3×3×3, pelo que a resolução acaba mais depressa. Além disso, como já dissemos, no caso do cubo 2×2×2, não começamos por acertar os cantos, pelo que a resolução é bastante rápida.

Podemos dividir o método de Ortega (para o cubo 2×2×2) em três passos.

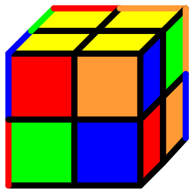
No primeiro passo, resolvemos uma face qualquer, sem a preocupação de alinhar os cantos (para formar uma camada resolvida). Até podemos dizer "quanto mais desalinhados, melhor".

No segundo passo, resolvemos a face paralela à anterior, novamente sem a preocupação de alinhar os cantos (adjacentes).

No terceiro e último passo, colocamos todos os cantos na sua posição definitiva. Curiosamente, o caso mais fácil é aquele em que não temos cantos adjacentes da primeira camada nem cantos adjacentes da segunda camada bem unidos, isto é, todos os blocos 2×1 da primeira camada (da lateral, claro) são bicolores, o mesmo acontecendo na segunda camada.

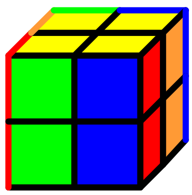
Reparemos que o método de Ortega é bem mais simples que o método de Guimond. A parte final é igual nos dois métodos, mas é mais fácil de aprender a colocar os cantos da primeira camada do que aprender a parte inicial do método de Guimond.

Eis um exemplo, já com duas faces paralelas resolvidas:



Os traços a cor (os traços que não estão a preto) indicam a cor das faces que não estão visíveis.

A solução é tremendamente simples: rodamos a camada de cima até que as cores laterais da camada de cima combinem com as cores laterais da camada de baixo. No exemplo apresentado, basta fazer C^{-1}, após o que obtemos a seguinte posição:



Nesta posição, temos quatro "torres"com as cores bem alinhadas (se preferir, temos quatro paralelipípedos).

Uma solução é $D^2F^2D^2$, havendo várias outras soluções semelhantes, como $F^2D^2F^2$ ou $F^2E^2F^2$.

1.3 Resolução de duas faces paralelas

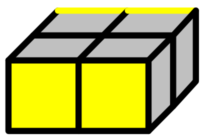
Como habitualmente, resolvemos a face branca (no cubo 2×2×2, é preferível não nos preocuparmos em alinhar os cantos) e, depois, resolvemos a face amarela. É claro que podemos resolver faces de outras cores (opostas), como, por exemplo, a face azul e a face verde.

A primeira face é muito fácil de ser resolvida, pelo que passamos à resolução da segunda face (a amarela).

Terminada a resolução da face branca (que colocamos em baixo), temos várias possibilidades para a face de cima. A face superior pode não ter nenhum amarelo, pode ter um amarelo, pode ter dois amarelos ou pode estar resolvida (face toda amarela).

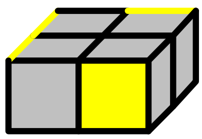
Se a face de cima estiver resolvida, passamos ao passo seguinte. Nos outros casos, vamos resolvê-la.

1. Dois amarelos na frente e dois amarelos atrás:



Uma solução: $D^2C^2DC^2D^2$

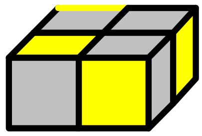
2. Dois amarelos na esquerda, um amarelo na frente, um amarelo atrás:



Uma solução: $DC^2\,(D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^2)\,C^2D$

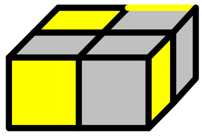
Outra solução: $F\,(DCD^{-1}C^{-1})\,(DCD^{-1}C^{-1})\,F^{-1}$

3. Sonho



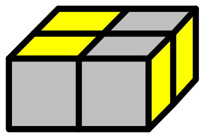
Uma solução: $DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$

4. Anti-Sonho



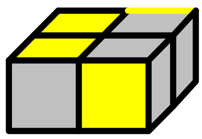
Uma solução: $D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D$

5. Dois amarelos em cima, dois amarelos na direita:



Uma solução: $(FCD)\,(C^{-1}D^{-1}F^{-1})$

6. Dois amarelos em cima (na esquerda), um amarelo para a frente e outro para trás:

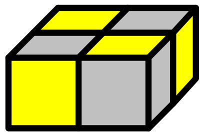


Uma solução: $D^{-1}\,(F^{-1}EF)\,D\,(F^{-1}E^{-1}F)$

Outra solução: $C_2^2\,(DCD^{-1}C^{-1})\,(D^{-1}FDF^{-1})$

Outra solução: $C_2^2\,(DCD^{-1}C^{-1})\,D_2\,(D^{-1}CDC^{-1})$

7. Dois amarelos em cima, na diagonal principal, um amarelo para a frente e outro para a direita.

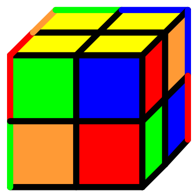


Uma solução: $(FD^{-1}F^{-1}D)\,(CDC^{-1}D)$

1.4 Permutações dos Oito Cantos

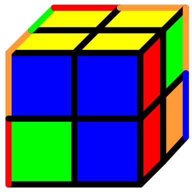
Resolvidas duas faces paralelas, falta acertar os cantos. Como vimos anteriormente, o caso mais fácil é aquele em que nenhuma face lateral da camada de cima está pronta, o mesmo acontecendo com a camada de baixo. Isso significa que todos os blocos horizontais das faces laterais são bicolores. Passemos aos vários casos possíveis, consoante o número de blocos horizontais duma só cor.

1. Nenhum bloco horizontal monocolor. Acerta-se as cores na vertical, formando blocos verticais duma só cor.



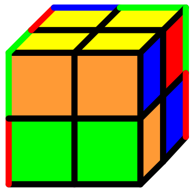
Uma solução: C^{-1}, para formar blocos verticais duma só cor, seguindo-se $D^2F^2D^2$.

2. Um só bloco horizontal monocolor, em cima (frente) e nenhum em baixo. Repare-se no L invertido com uma só cor (na face da frente). Note-se, que pode ser necessário trocar a orientação do cubo (se o bloco monocolor estiver na camada de baixo).



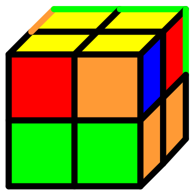
Uma solução: $(DC^{-1}D)\,F^2\,(D^{-1}CD^{-1})$

3. Dois blocos horizontais de uma só cor, na face da frente e todos os restantes bicolores. Note-se que pode acontecer que os dois blocos tenham a mesma cor (lateral), mas não é necessário que tal aconteça.



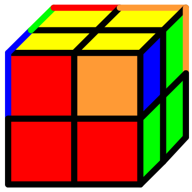
Uma solução: $(D^2CD^2)\,(CB)\,(D^2CD^2)$

4. Camada de baixo pronta e dois cantos adjacentes certos e dois errados. Uma solução será o Tango, se colocarmos os dois cantos errados na frente.



Uma solução: $(D^{-1}FD^{-1})\,T^2\,(DF^{-1}D^{-1})\,T^2D^2$

5. Camada de baixo pronta e dois cantos na diagonal principal errados e os outros dois certos.



Uma solução: $D\,(C^{-1}D^{-1}C^{-1})\,F^2\,(C^{-1}DCD^{-1})\,(BD^2)$

Observação 1

Em alguns dos casos anteriores, pode ser necessário rodar a camada de cima, para que o cubo fique resolvido.

Observação 2

Para quem sabe bem o método de Ortega para o cubo 3×3×3, pode ser vantajoso resolver a primeira camada com os cantos alinhados. Depois, bastará aplicar uma fórmula (entre muitas) para completar a resolução do cubo. Ainda existe uma outra alternativa: resolver a face inferior, sem alinhar os cantos, resolver a face superior num só passo e permutar os cantos da camada inferior (ou alinhar os cantos da camada inferior, antes de resolver a segunda camada). Escreveremos um texto sobre esta alternativa (a que daremos o nome de Método de Waterman).

Capítulo 2

Resolução do Cubo 3×3×3

2.1 Breve Descrição do Método de Ortega

O primeiro passo do método de Ortega consiste em colocar os quatro cantos da primeira camada. Supondo que temos o branco voltado para baixo, os quatro cantos são colocados de modo que as cores laterais combinem umas com as outras. Repare-se que não estamos preocupados com a cruz branca (nem com o centro nem com os meios).

Depois, colocamos do mesmo modo os cantos com amarelo, ou seja, o amarelo tem de ficar voltado para cima e as cores laterais têm de combinar entre si e têm de combinar com as cores laterais dos cantos com branco.

Repare-se que existe uma diferença importante, relativamente à resolução do cubo 2×2×2: neste caso, os cantos têm de ficar alinhados.

Para melhor compreensão do leitor, vamos sistematizar os passos:

1^o passo: resolve-se os cantos com branco, de modo que as cores laterais combinem.

2^o passo: orienta-se os cantos com amarelo, de modo que o amarelo fique voltado para cima.

3^o passo: acerta-se os cantos com amarelo, de modo que as cores laterais combinem com todos os cantos do cubo.

4^o passo: acerta-se o centro da face branca (e da face amarela), colocando o centro branco voltado para a esquerda, onde vai permanecer até ao fim da resolução.

5^o passo: coloca-se três meios com branco, na camada da esquerda, de modo que as cores combinem.

6^o passo: coloca-se os quatro meios com amarelo, na camada da direita, de modo que as cores combinem.

7º passo: coloca-se o último meio com branco na camada da esquerda.

8º passo: verifica-se a existência (ou não) de meios com as cores invertidas e corrige-se (se existirem).

9º e último passo: acerta-se os últimos quatro meios (os que não têm branco nem amarelo).

2.2 Colocação dos Cantos

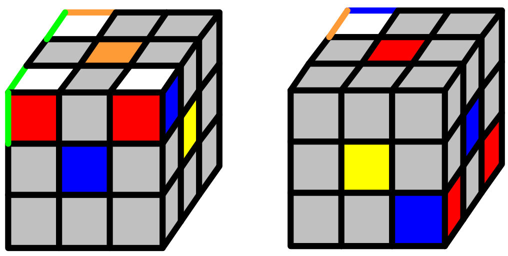
2.2.1 Cantos da camada inferior

A colocação dos primeiros três cantos é bastante fácil. Em primeiro lugar, escolhemos a cor que pretendemos para a face de baixo. Depois, aproveitamos um canto que tenha essa cor e viramo-la para baixo. Como habitualmente, vamos escolher o branco para ficar voltado para baixo.

Se escolhermos o canto verde, vermelho e branco, colocamo-lo com o branco para baixo. Agora, devemos colocar um dos dois cantos adjacentes. Por exemplo, o canto azul, vermelho e branco. Então, o vermelho tem de combinar e o azul vai ficar paralelo ao verde do outro canto.

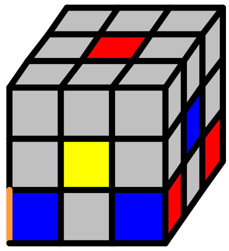
A seguir, colocamos um dos dois cantos que faltam, o que é feito de maneira muito simples, para quem já está familiarizado com o cubo.

Vejamos um exemplo, com os brancos para cima, para melhor visualização e, depois, com os brancos para baixo:



Falta colocar o canto azul, laranja e branco, o que pode ser feito, dando meia volta na camada da esquerda. O problema é que sai o canto verde, laranja e branco. Uma maneira de resolver o problema, é proceder do mesmo modo que colocamos um canto no método das camadas. Começamos por colocar o branco voltado para o lado e, depois utilizamos a sequência conhecida por Pesca (direita ou esquerda, consoante o caso).

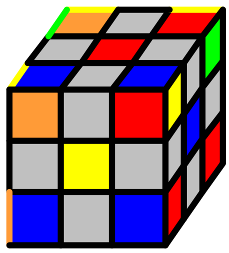
Sequência a utilizar: $C^{-1}E^{-1}CEC^2E^{-1}C^{-1}E$



Deste modo, obtivemos os quatro cantos com o branco voltado para baixo e devidamente alinhados.

2.2.2 Cantos da camada superior

No caso que estamos a considerar, os cantos de cima são os que a seguir se indicam:

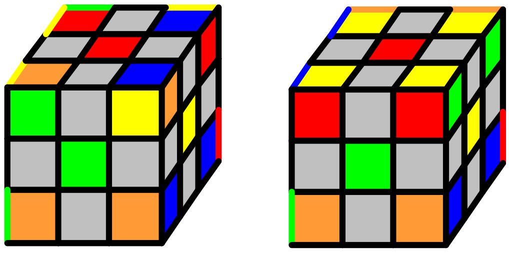


Comparando as cores dos cantos de cima com os de baixo, vemos que todos estão na sua posição certa, embora os de cima estejam mal orientados, pois o amarelo tem de ficar voltado para cima. A sequência que orienta os cantos, neste caso, é a mesma que orienta os cantos no caso de apenas termos a cruz amarela (com amarelo para cima).

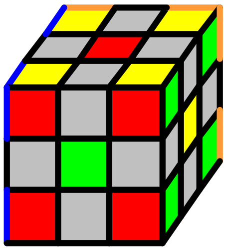
Rodamos todo o cubo, de modo que o centro verde fique para a frente (e o vermelho continue voltado para cima). Deste modo, obtemos a posição padrão para a aplicação da seguinte sequência:

$$\left(DC^2\right)\left(D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^2\right)\left(C^2D\right)$$

A seguir, indicamos a posição inicial e a posição final (depois de aplicada a sequência):



Como podemos ver, os quatro de cantos de cima já estão certos (entre si), embora não estejam alinhados com os quatro cantos de baixo. Para que tal aconteça, podemos dar meia volta na camada de baixo (para poupar tempo no desenho...).



Está, assim, terminado o segundo passo. De qualquer modo, no caso geral, temos duas situações diferentes em que os cantos de cima não estão resolvidos. No primeiro caso, teremos que permutar dois cantos adjacentes e, no segundo caso, teremos que permutar dois cantos em diagonal.

Então, para colocarmos os cantos da face superior vamos ter que saber duas fórmulas. A primeira é do conhecimento de todos aqueles que já sabem resolver o cubo 3×3×3: trata-se da sequência a que chamei de Tango:

$$D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$$

No entanto, há muitas outras soluções, porque não estamos preocupados com aquilo que acontece aos meios.

Do mesmo modo, há muitas soluções para a troca de dois cantos em diagonal. Uma solução é a seguinte:

$$\left(D^{-1}CD\right)\left(C^{-1}D^{-1}\right)\left(F^{-1}C^{-1}F\right)\left(DCD^{-1}\right)\left(FD^{-1}F^{-1}\right)\left(DC^{-1}D\right)$$

Outra solução: $(E^2CT^{-1}CTC^{-1}E^2)\,(C^{-1}T^{-1}C^{-1})\,T$

Quando terminamos a colocação dos cantos, devemos acertar os centros das faces. Isso até pode ser feito no final, mas dá mais trabalho.

No caso da figura anterior, rodamos a camada intermédia que tem o centro vermelho e o centro amarelo, colocando este último voltado para cima, fazendo com que fiquem certos o centro de cima e o centro de baixo. Depois, rodamos a segunda camada, de modo que o centro verde passe para a face da direita. E todos os centros ficam certos, embora não seja necessário acertar mais do que dois centros.

Como sempre, o leitor deve praticar bastante a colocação dos cantos, até que saiba resolver bem esta primeira parte. É claro que tem de acertar dois centros, mas isso é facílimo.

Note-se que, na maioria das vezes, podemos colocar os amarelos dos cantos voltados para cima, já com os cantos nos seus lugares. Para isso, temos de saber mais fórmulas (são aquelas que se aplicam no caso do cubo $2\times2\times2$).

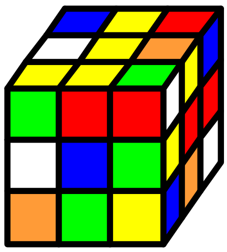
Antes de passarmos para a colocação dos meios, vamos resolver um exemplo:

Example 1 *Baralhe um cubo resolvido, com o azul para a frente e o amarelo para cima, da seguite forma:*

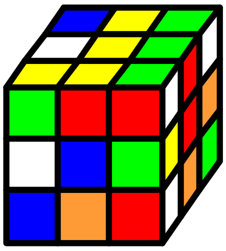
$$FCTB^{-1}DC^2E^2F^{-1}D^2BDCEDTD^{-1}B^2$$
$$TEF^2CBE^2C^{-1}TDBCE^2DCE^{-1}FCT$$

Resolução

A posição inicial é a seguinte:

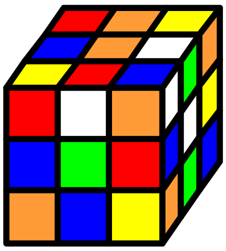


A face da direita tem dois cantos com branco (para a direita), mas não estão certos. O canto de que só vemos o branco é laranja e verde (e branco). Então, podemos fazer F^{-1}, para afastar o canto vermelho, verde e branco, D^{-1}, para trazer o canto laranja, verde e branco para a camada de cima e, depois F, para acertar os dois primeiros cantos.

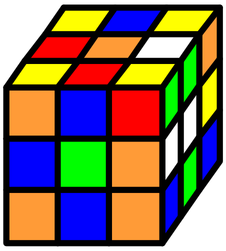


Curiosamente, obtivemos três cantos certos (com o branco para a direita). Então, basta-nos colocar o canto que falta.

Reorientando o cubo, obtemos:

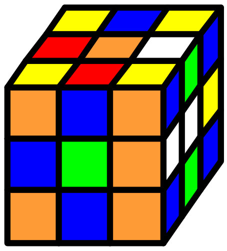


E tivemos sorte, de novo: o último canto com branco já está na posição ideal, pelo que basta fazer DCD^{-1}.

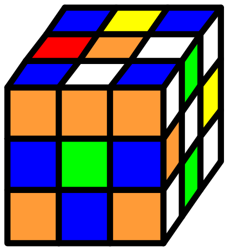


De novo, tivemos sorte, porque os quatro cantos de cima já estão com o amarelo para cima e, ainda, temos dois cantos de cima com azul para trás.

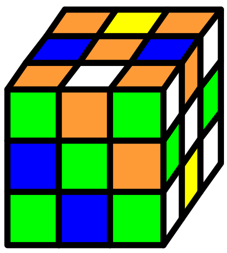
Então, basta-nos aplicar o Tango: $D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$



E, agora, acertamos os dois centros (branco e amarelo): $F^{-1}T$



Note-se que, por agora, não adianta acertar os restantes centros, mas podemos fazê-lo:



Convém observar que, na posição anterior, qualquer uma das seis faces pode ficar voltada para cima, pelo que temos (essencialmente) três possibilidades diferentes: amarelo/branco, verde/azul, laranja/vermelho.

Se escolhermos o centro amarelo para cima (ou para baixo), os quatro meios da segunda camada estão todos errados, no que diz respeito às cores, pois todos têm amarelo ou branco. Se escolhermos o centro azul para cima (ou para baixo), todos os meios da segunda camada estão errados, pois todos eles têm azul ou verde. Se colocarmos o centro vermelho para cima (ou para baixo), três dos meios da segunda camada estão errados, pois apenas um dos meios não tem vermelho nem laranja. Como (ainda) não sabemos mudar os meios de lugar, não sabemos qual a posição mais vantajosa.

Mais adiante, vamos retomar a posição anterior e terminar a resolução do cubo.

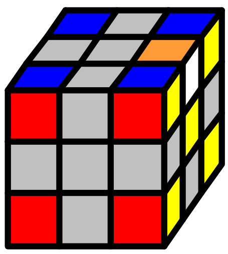
2.3 Colocação dos Meios

Acertados os cantos, temos de colocar os meios nos seus devidos lugares, pois é natural que os meios estejam completamente baralhados. Repare-se que os meios com amarelo têm de ficar na terceira camada, os meios com branco têm de ficar na primeira camada e os meios sem branco nem amarelo ficarão na terceira camada. Além disso, teremos que orientar as cores dos meios, para que as cores combinem.

Depois de termos os oito cantos certos e de termos acertado o centro branco e o centro amarelo, colocamos o centro branco voltado para a esquerda. É claro que podemos colocar qualquer centro voltado para a esquerda (desde que ele esteja alinhado com os cantos).

2.3.1 Colocação de Três Meios com Branco

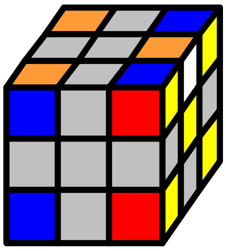
Suponhamos que temos a seguinte situação:



Se os outros meios com branco já estiverem devidamente colocados, passamos adiante, ou seja, colocamos os meios com amarelo.

Como não temos, ainda, três meios com branco devidamente colocados, vamos colocar o meio laranja e branco da seguinte maneira:

Em primeiro lugar, rodamos a camada da esquerda, de modo que os dois cantos com laranja fiquem na camada de cima:



Antes de continuarmos, vamos fazer uma observação importante: podemos rodar livremente a camada da esquerda, a camada da direita e a camada entre essas duas, mas não podemos fazer o mesmo com as restantes camadas. Logo, não há problema com o facto dos cantos da direita não estarem a combinar com os cantos da esquerda. A posição apresentada (na figura anterior) é uma das quatro posições padrão, para a colocação dum meio na camada da esquerda. Em todos os casos, o meio vai ser colocado entre os dois cantos que, na figura anterior, têm a cor laranja.

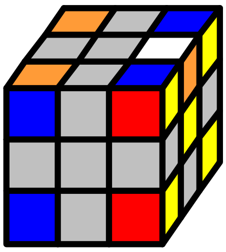
Como há quatro posições padrão, vamos ter que saber quatro fórmulas, para a camada da esquerda. Analogamente, vamos ter quatro fórmulas para a camada da direita.

No caso da figura anterior, a fórmula é a seguinte:

$$CMC^2M^{-1}C$$

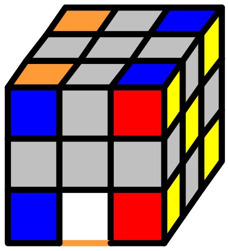
Escolhemos começar por este caso, pois é o que tem a fórmula mais complicada e o meio (laranja e branco) fica bem visível.

Outra situação é aquela em que o meio laranja e branco está na mesma posição, mas com as cores invertidas:



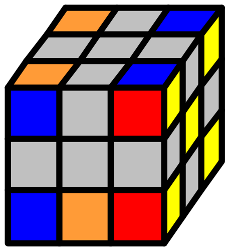
Solução: $C^{-1}MC$

Terceira situação:



Neste caso, a solução é CM^2C^{-1}.

Quarta e última situação:



Neste caso, o branco está voltado para baixo e a solução é $C^{-1}M^{-1}C$.

Todas as restantes situações se transformam numa destas quatro, rodando a camada da direita ou rodando a camada intermédia (a camada M).

Eventualmente, poderemos ter uma situação deveras incomum: todos os brancos já estarem na camada da esquerda em lugares errados ou com as cores invertidas. Numa situação dessas, há que colocar na camada da esquerda um meio qualquer, para que um branco saia de lá.

Seguidamente, vamos colocar as quatro fórmulas juntas, para melhor visualização. E acrescentaremos uma quinta fórmula para uma situação que poderá ocorrer (meio no lugar certo, com as cores invertidas). As palavras em negrito (bold) indicam a posição do branco.

1. $C^{-1}M^{-1}C$ – meio em **baixo**-frente

2. CM^2C^{-1} – meio em **frente**-baixo

3. $C^{-1}MC$ – meio em **cima**-direita

4. $CMC^2M^{-1}C$ – meio em **direita**-cima

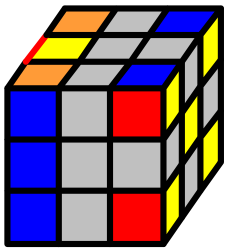
5. $C^{-1}MC^2M^2C$ – meio em **cima**-esquerda (meio no lugar certo), com as cores invertidas.

Repare-se que as fórmulas são bastante simples, tendo-se que as outras cinco (para a camada da direita) são obtidas por simetria.

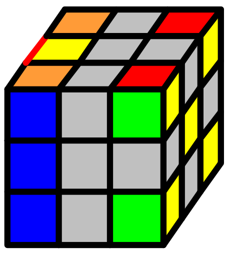
2.3.2 Colocação dos Meios com Amarelo

Depois de colocados três meios com branco na camada da esquerda (com o branco alinhado com o centro branco), deixamos o meio que ainda não tem branco, na camada de cima, para não desfazermos nenhum dos meios já colocados.

Suponhamos que temos a seguinte situação:



O meio vermelho e amarelo vai ser colocado na posição que está entre os dois cantos de cima com azul. Logo, temos de rodar a camada da direita, para que os cantos fiquem com o vermelho para cima.



E, agora, é só aplicar a fórmula correspondente à posição indicada.

Vamos apresentar as cinco fórmulas e as palavras a negrito (bold) indicam a posição do amarelo.

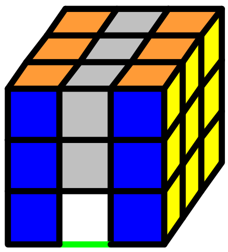
1. $CM^{-1}C^{-1}$ – meio em **baixo**-frente
2. $C^{-1}M^2C$ – meio em **frente**-baixo
3. CMC^{-1} – meio em **cima**-esquerda
4. $C^{-1}MC^2M^{-1}C^{-1}$ – meio em **esquerda**-cima
5. $CMC^2M^2C^{-1}$ – meio em **cima**-direita (meio no lugar certo), com as cores invertidas).

No caso da figura anterior, a fórmula a aplicar é CMC^{-1}.

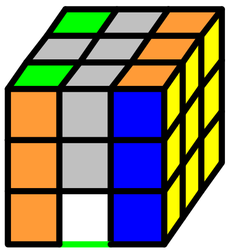
2.3.3 Colocação do último meio com branco

Terminada a camada da direita, temos de completar a camada da esquerda. Há duas situações possíveis em que a camada da esquerda não ficou completa, sendo que o meio com branco tem de ficar em baixo, voltado para a frente ou para trás.

Suponhamos que temos a seguinte situação:



Falta colocar o meio verde e branco, na camada da esquerda. Então, temos de rodar a camada da esquerda, até que o verde dos dois cantos fique voltado para cima:



Agora, aplicamos a fórmula $C^{-1}MC^2MC^{-1}$.

Outra possibilidade, é termos o meio verde e branco (ou outras cores...) com o branco voltado para trás (em baixo, claro).

Nesse caso, aplicamos a fórmula $CM^{-1}C^2M^{-1}C$.

Se o meio que faltar estivar na camada de cima, podemos mover livremente a camada M, até que o meio fique numa das duas posições indicadas.

Pode acontecer que o meio já esteja no seu devido lugar, mas com as cores invertidas. Nesse caso, temos de retirá-lo de lá, colocando um meio qualquer no seu lugar, para chegarmos a uma das duas posições anteriores.

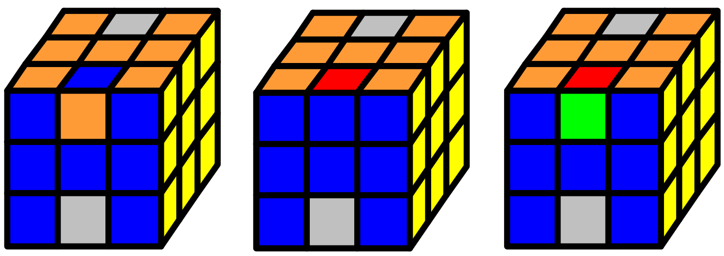
Fórmulas a aplicar, na resolução do último meio com branco:

1. $C^{-1}MC^2MC^{-1}$ – meio em **frente**-baixo

2. $CM^{-1}C^2M^{-1}C$ – meio em **trás**-baixo

2.3.4 Meios Com as Cores Invertidas

Depois de resolvermos as faces da esquerda e da direita, verificamos se há meios com as cores invertidas. Como os meios com branco ou amarelo estão certos, só pode haver zero, dois ou quatro meios com as cores invertidas. Se houver, resolvemos esse problema, antes de tentarmos colocar os meios da camada M. Vamos dar alguns exemplos:



No caso da esquerda, o meio azul e laranja está (manifestamente) com as cores invertidas.

No caso do cubo do meio, o meio azul e vermelho está bem orientado, embora esteja num lugar incorreto. A razão é a seguinte: o azul combina com o centro azul e o vermelho "combina"com o centro laranja, porque são cores opostas. O meio verde e vermelho, no cubo da direita, também está bem orientado, porque ambas as cores são opostas dos centros das faces onde estão assentes. Se o vermelho e o verde estivessem ao contrário, o meio teria de ser invertido.

Se não houver meios com as cores invertidas, passamos adiante. Se houver quatro meios com as cores invertidas, trocamos as cores dos meios dois a dois.

Se houver dois meios invertidos numa mesma camada, invertemos as cores de ambos.

Resta uma possibilidade mais aborrecida: dois meios não adjacentes, com as cores invertidas (podem ser as peças a cinzento na figura anterior).

Nesse caso, temos de inverter as cores de dois meios adjacentes, pelo que continuaremos com dois meios "errados". Só que esses meios já são adjacentes, pelo que invertemos as cores de ambos, duma só vez.

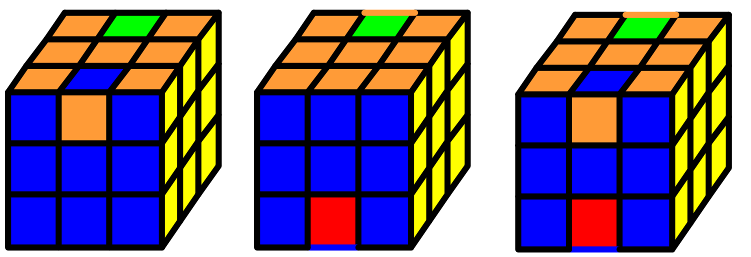
Se o leitor tiver dificuldade em descobrir quais os meios que têm as cores invertidas, não se preocupe. Continue a resolução, que eles aparecerão no fim (se for caso disso).

Felizmente, a fórmula que inverte as cores de dois meios preserva tudo o resto, pelo que não há o perigo de desfazermos aquilo que já foi feito.

Para inverter as cores dos dois meios errados, aplicamos a sequência

$$\left(M^{-1}CM^{-1}CM^{-1}\right)C^2\left(MCMCM\right)C^2$$

Os meios errados têm de estar na posição do cubo da esquerda, na figura seguinte, onde se apresenta três exemplos de meios com as cores invertidas e tudo o resto certo:



Dois meios invertidos Dois meios invertidos, em diagonal Quatro meios invertidos

2.3.5 Permutações dos Últimos Quatro Meios

Se não tivermos meios com as cores invertidas, passamos ao último passo. Há uma possibilidade que não dá trabalho: o cubo já está resolvido.

Se o cubo não estiver resolvido, temos quatro possibilidades diferentes.

No primeiro caso, temos um meio no seu lugar e temos de "rodar"os outros três no sentido de M.

No segundo caso, temos um meio no seu lugar e temos de "rodar"os outros três no sentido de M^{-1}.

No terceiro caso, temos de trocar dois meios em cima e dois meios em baixo.

No quarto caso, temos quatro meios errados que devem ser trocados, dois a dois, em diagonal.

As fórmulas a aplicar são as seguintes:

1. $C^2MC^2M^{-1}$ – fixa o meio em frente-baixo e "roda"os outros no sentido de M.

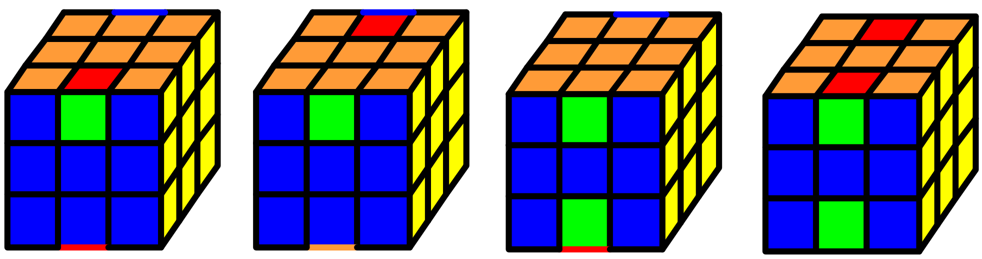
2. $C^2M^{-1}C^2M$ – fixa o meio em frente-baixo e "roda"os outros no sentido de M^{-1}.

3. $C^2M^2C^2M^2$ – troca os dois meios de cima e troca os dois meios de baixo.

4. Q^2MQ^2M – troca os quatro meios, dois a dois, em diagonal

Se não gostar da notação Q^2MQ^2M, pode utilizar S^2MS^2M.

Imagens:



Caso 1 Caso 2 Caso 3 Caso 4

Observemos que, no primeiro caso, o meio certo é o azul e vermelho (frente, baixo); no segundo caso, o meio certo está invisível (trás, baixo).

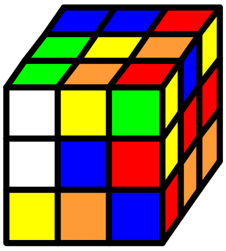
2.4 Exemplos de Resolução

Example 2 *Baralhe um cubo resolvido, com o azul para a frente e o amarelo para cima, da seguite forma:*

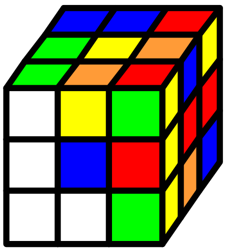
$$FCTB^{-1}DC^2E^2DF^{-1}D^2BDCECDTD^{-1}$$
$$B^2TEF^2CE^2BC^{-1}TDBCE^2CDCE^{-1}FCT$$

Resolução

Depois de termos baralhado o cubo, a posição inicial é a seguinte:

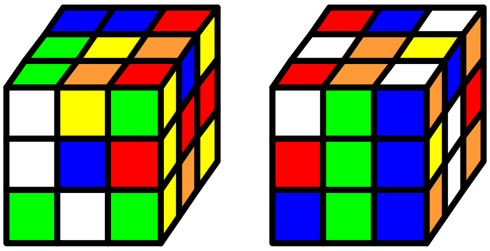


Olhando para o cubo, vemos que há dois cantos adjacentes bem posicionados: o canto vermelho, azul e amarelo e o canto verde, vermelho e amarelo. Por isso, podemos formar os quatro cantos com amarelo ou os quatro cantos com vermelho. Neste caso, mais vale escolher o amarelo, pois há um canto com amarelo que pode ser colocado com um só movimento (B).



E só falta colocar um canto com amarelo (aquele azul da face superior). Fazendo E^{-1}, o canto fica bem posicionado para fazer a Pesca.

Na posição da figura anterior, vamos fazer $E^{-1}BEB^{-1}$. É claro que poderíamos ter colocado os amarelos para baixo, para facilitar a resolução, mas isso iria obrigar-nos a mais desenhos. Posição obtida:

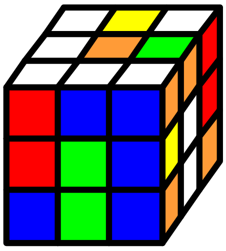


O cubo da direita (na figura anterior) é o mesmo que está na esquerda, mas colocado de outra maneira (o cubo foi reorientado).

Para resolvermos os dois cantos de cima que ainda não estão certos, aplicamos a fórmula

$$\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)\left(D^{-1}FDF^{-1}\right)$$

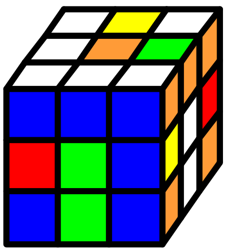
E obtemos a seguinte posição:



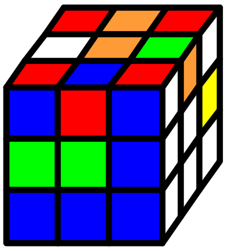
Temos de trocar os dois cantos da direita, porque estão errados. Para isso, utilizamos a sequência

$$C_3D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2C_3^{-1}$$

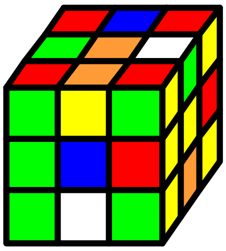
E a nova posição é



Agora, podemos fazer FT^{-1}, para acertar o centro branco e o centro amarelo.

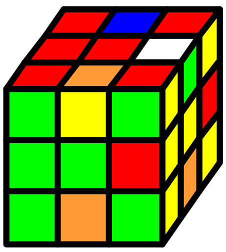


Na posição anterior, já temos o meio azul a branco e o meio laranja e branco devidamente colocados. Na camada da esquerda, temos o meio vermelho e amarelo colocado no lugar errado. Para não complicar, vamos colocar o centro amarelo para a direita e o centro branco para a esquerda, fazendo C_3^2:



Agora, temos de colocar um meio com branco na camada da esquerda. Aquele branco frontal está associado ao vermelho (cor de baixo), pelo que esse meio pode ser colocado no lugar do verde da face de cima, camada da esquerda, entre os dois cantos com vermelho. Neste caso, não foi necessário rodar a camada da esquerda.

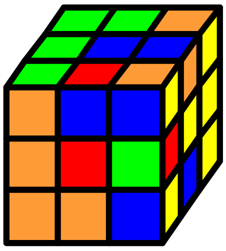
A fórmula para o caso **frente**-baixo é CM^2C^{-1}.



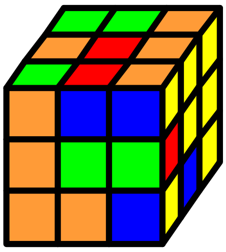
Como já temos três meios com branco, na face da esquerda, vamos colocar os quatro meios com amarelo.

Para isso, temos de colocar o meio sem branco da camada da esquerda em cima e temos de posicionar uma meio com amarelo.

Então, fazemos $E^{-1}D_2^{-1}D^{-1}$:

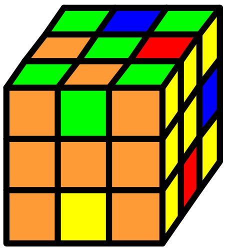


Agora, podemos colocar o meio laranja e amarelo, fazendo $CM^{-1}C^{-1}$.



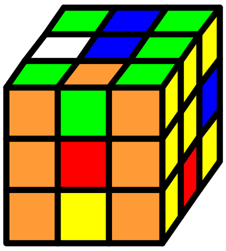
Ainda falta colocar três meios com amarelo, porque um deles está no lugar errado.

Fazendo $M^{-1}D^{-1}$, obtemos a seguinte posição:



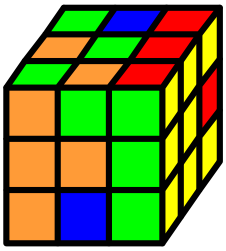
Agora, vamos colocar o meio verde e amarelo no lugar onde está o meio vermelho e amarelo.

Fórmula a aplicar: $C^{-1}M^2C$



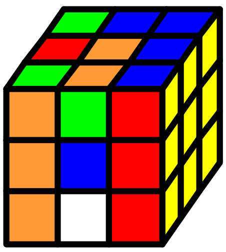
O meio vermelho e amarelo ficou numa boa posição, pelo que basta deixar os dois cantos com vermelho e amarelo voltados para cima e aplicar a fórmula anteriormente aplicada.

Então, vamos fazer $D^{-1}C^{-1}M^2C$:



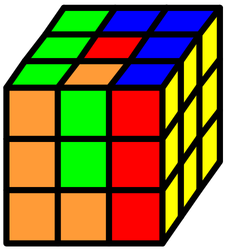
O meio azul e amarelo (que falta colocar) já está bem posicionado, pelo que basta trazer os azuis para cima e aplicar a fórmula (amarelo voltado para baixo):

Então, fazemos $D^{-1}CM^{-1}C^{-1}$, após o que obtemos:



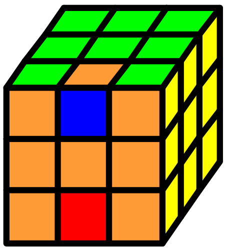
E estamos na posição em que podemos aplicar uma fórmula para a colocação do último meio com branco.

Então, fazemos $C^{-1}MC^2MC^{-1}$:



E estamos muito perto do fim...

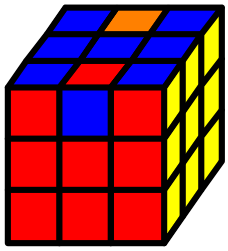
Nesta altura, vamos acertar os restantes quatro centros e acertar a camada da direita, fazendo $M^{-1}D^2$:



Agora, temos dois meios com as cores invertidas (o meio azul e laranja e o meio azul e vermelho). Esses dois meios estão em diagonal, pelo que precisaremos de aplicar a fórmula (de inversão de cores) duas vezes. Então, é melhor deixarmos para o fim essa inversão, a ver se temos sorte e esses meios ficam numa mesma camada. O canto azul e vermelho está no seu lugar (embora com as cores trocadas) e os outros três meios permutam em ciclo (de comprimento 3). Uma vez que eles "rodam"como M, a fórmula a aplicar é a seguinte:

$$D_3C^2MC^2M^{-1}D_3$$

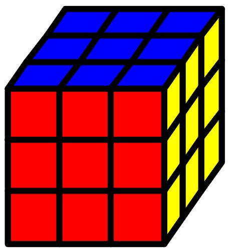
Aquele D_3 inicial é para colocar o meio que vai ficar fixo em FB (Frente-Baixo), para podermos aplicar a fórmula, enquanto o D_3 do fim se destina a deixar os dois meios com cores invertidas na camada de cima. Note-se que tiemos sorte e os dois meios já ficam numa mesma camada, pelo que fizemos bem em esperar. Se apenas fosse preciso aplicar a fórmula de inversão de cores uma vez, devíamos fazê-lo logo, para não nos acontecer o contrário: chegar ao fim e ter de aplicar a fórmula duas vezes.



Para inverter as cores dos dois meios errados, aplicamos a sequência

$$\left(M^{-1}CM^{-1}CM^{-1}\right)C^2\left(MCMCM\right)C^2$$

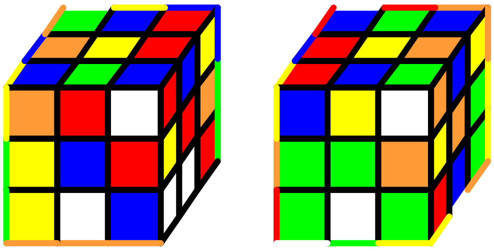
E obtemos o cubo pronto!



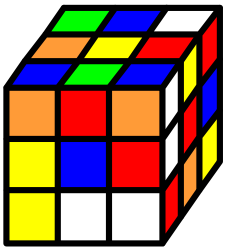
Example 3 *Baralhe um cubo resolvido, com o azul para a frente e o amarelo para cima, da seguite forma:*

$$DCE^2BD^{-1}C^2FD^2BC^2D^{-1}CE^2TDB^{-1}C^{-1}D^2BFE^{-1}TC^2D^{-1}BE$$
$$TDBFDE^{-1}C^2D^{-1}B^{-1}C^2ETD^{-1}B^{-1}C^2D^{-1}BC^2E^{-1}BCDT^2D^{-1}C$$

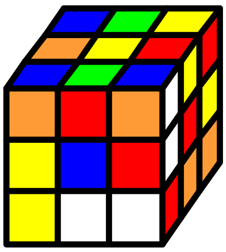
Resolução
Cubo, depois de baralhado (duas vistas):



Vamos começar por escolher a cor que vai ficar para a esquerda. Há várias faces com dois cantos adjacentes da mesma cor, só que as cores laterais não combinam. Uma dessas faces é a que está em cima. Mas, se rodarmos a camada da direita (cubo desenhado no lado esquerdo da figura anterior), o canto azul, laranja e branco fica devidamente alinhado com o canto azul, laranja e amarelo. Então, fazemos D.

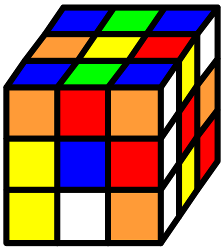


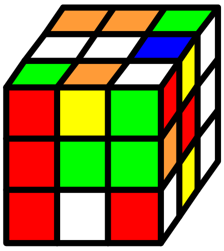
Se dermos meia volta, na camada de trás, acertamos mais um canto. Então, fazemos T^2. O quarto canto ficou em TBE (Trás, Baixo, Esquerda).



Agora, temos de trazê-lo para TBD e aplicamos uma Pesca um pouco estranha.

Sequência a aplicar: $B^{-1}DBD^{-1}$. É claro que poderíamos ter colocado os três azuis dos cantos para cima, simplificando a resolução.



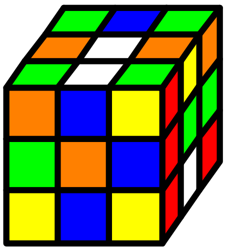


O cubo da direita é o da esquerda no qual fizemos D_3^2, para que o azul dos cantos fique voltado para baixo.

Agora, temos dois cantos com verde bem posicionados. Há várias fórmulas que resolvem a situação obtida, sendo que uma delas é a seguinte:

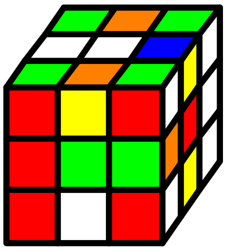
$$C_3^{-1}D^{-1}FDT^{-1}D^{-1}F^{-1}DT$$

A fórmula anterior é uma das que resolvem a face de cima, quando a cruz está pronta e temos dois cantos opostos errados, precedida de C_3, para que os cantos certos fiquem na diagonal principal e haja um verde voltado para a frente e outro para a direita (nos cantos que vamos corrigir). É claro que já podíamos ter colocado o cubo nessa posição e não precisaríamos de C_3^{-1}.

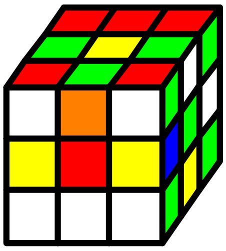


Os dois cantos (com verde) que estão na esquerda estão alinhados, pelo que podemos aplicar o Tango (depois de os colocarmos na camada de trás).

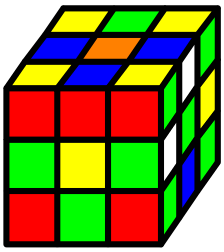
Sequência a aplicar: $C_3D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$.

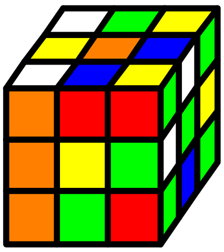


E obtivemos todos os oito cantos alinhados, pelo que vamos acertar o centro verde e o centro azul. Para isso, basta fazer M^{-1}. E vamos reorientar o cubo:



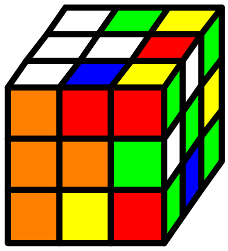
Note-se que a cor do centro de cima só não pode ser o azul e o verde, pelo que temos quatro possibilidades, sendo que a mais simples é colocar o centro laranja para cima, para que um meio com azul já fique posicionado para ser colocado na camada da esquerda. Infelizmente, não temos nenhum meio bem colocado, pelo que temos de colocar os oito meios.



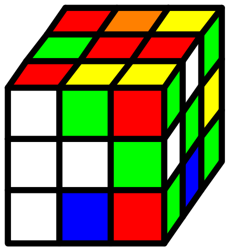


A figura da direita é obtida do cubo da esquerda, fazendo E^2, para que o meio azul e branco fique bem colocado: azul para a esquerda e branco para cima.

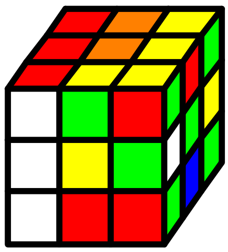
Fórmula a aplicar: $C^{-1}MC$ (meio em **cima**-direita)



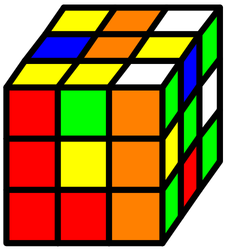
Agora, podemos trazer o meio azul e vermelho para baixo e colocar os cantos com vermelho em cima. Para isso, basta trazer as duas camadas da esquerda, ou seja, E_2.



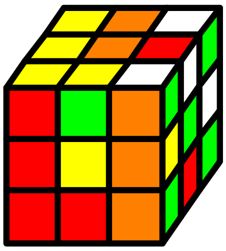
Fórmula a aplicar: CM^2C^{-1} (meio em **frente**-baixo)



Ainda temos que colocar um meio na camada da esquerda. Para isso, podemos dar meia volta na camada da direita (passando o azul para cima) e colocamos os dois amarelos dos cantos da camada da esquerda voltados para cima. Ou seja, fazemos ED^2.

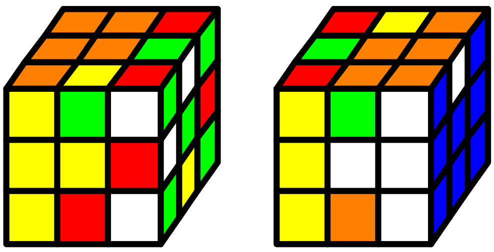


Fórmula a aplicar: $CMC^2M^{-1}C$ (meio em **direita**-cima)

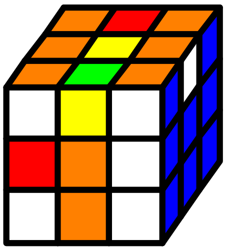


E já temos três meios com azul na camada da esquerda. Então, vamos começar a colocar os meios com verde.

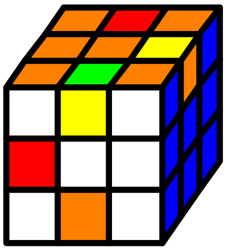
Antes, temos de colocar o meio da camada da esquerda que não tem azul, voltado para cima. Então, rodamos todo o cubo, deixando o centro amarelo na frente e o centro laranja em cima. Por acaso, o meio vermelho e verde já está posicionado para ser colocado. No entanto, para mostrarmos uma outra maneira de resolver, vamos colocar a face de centro azul para a direita e a face de centro verde para a direita. Assim, não temos que decorar as fórmulas para os dois lados.



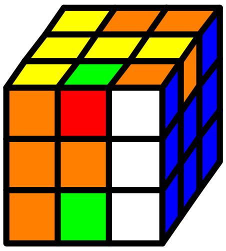
Então,fazemos $E_2 E$, para podermos colocar o meio verde e laranja.



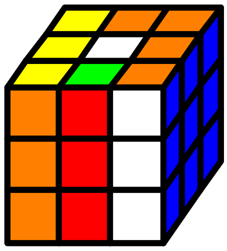
Fórmula a aplicar: $C^{-1}M^{-1}C$ (meio em **baixo**-frente)



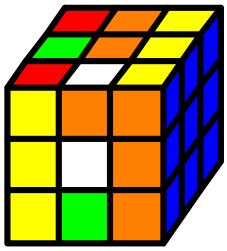
Agora, basta fazer $D_3^{-1}D$, para ficarmos numa boa posição.



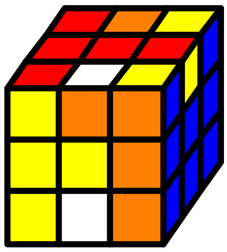
Fórmula a aplicar: CM^2C^{-1} (meio em **frente**-baixo)



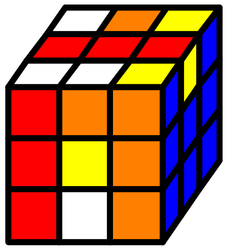
Curiosamente, a camada da direita ficou resolvida, mas isso não adianta nada, pois vamos ter que desfazer um meio com azul. Teria sido perfeito, se isso acontecesse, ao colocarmos o terceiro meio da camada da esquerda. Agora, fazemos D_3^{-1}:



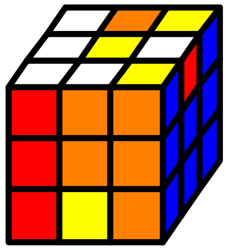
E aplicamos a sequência CM^2C^{-1} (meio em **frente**-baixo)



O meio verde e branco está bem colocado, pelo que temos de colocar os cantos da esquerda com branco para cima, fazendo E e aplicando a sequência $C^{-1}M^{-1}C$ (meio em **baixo**-frente):

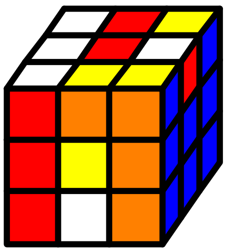


E

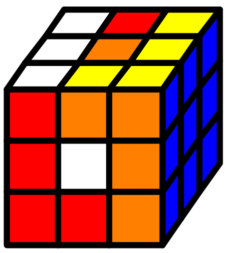


$C^{-1}M^{-1}C$

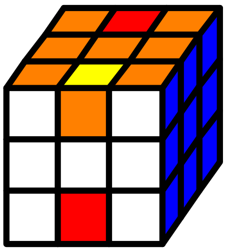
Agora, falta-nos colocar um único meio, na camada da direita. Podemos rodar o cubo ou podemos adaptar a fórmula que coloca o último meio, para o lado direito. Como o azul está voltado para baixo, fazemos M^{-1}, para que o azul fique voltado para trás e obtenhamos a boa posição.



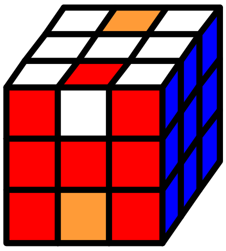
No lado esquerdo, a fórmula a aplicar seria $CM^{-1}C^2M^{-1}C$. Por simetria, obtemos $C^{-1}M^{-1}C^2M^{-1}C^{-1}$, uma vez que na camada M, não há alteração. Repare-se que esta fórmula é bem fáil de fixar, pois todos os expoentes são iguais a -1 (exceto o expoente de C^2).



Agora, fazemos DE, para acertarmos os centros.

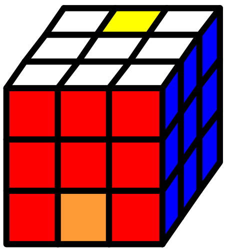


O meio laranja e amarelo está, manifestamente, com as cores invertidas, o mesmo acontecendo com o meio vermelho e branco (ambos na camada da frente). Então, temos de acertar as cores desses dois meios, antes de permutarmos os meios da camada M. Para isso temos de colocá-los na camada de cima, fazendo D_3.

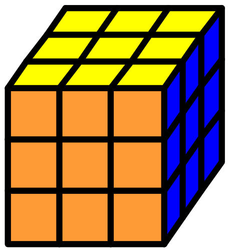


Para inverter as cores dos dois meios errados, aplicamos a sequência

$$\left(M^{-1}CM^{-1}CM^{-1}\right)C^2\left(MCMCM\right)C^2$$



Temos um meio certo e outros "rodam"como M^{-1}. Então, temos de fazer D_3^2, para levar o meio certo para TB e aplicamos a sequência $C^2M^{-1}C^2M$.



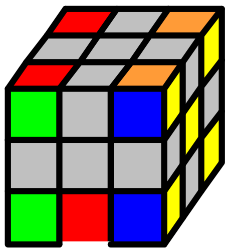
E o cubo ficou pronto!

2.5 Colocação dos Meios Sem Fórmulas

No início, pode fazer alguma confusão, decorar várias fórmulas parecidas umas com as outras. Por isso, faz sentido saber colocar os meios na camada da esquerda, sem a utilização de fórmulas.

Vejamos vários exemplos em que supomos que temos os cantos com o branco voltado para a esquerda, os cantos com o amarelo voltado para a direita e os centros branco e amarelo alinhados com os cantos.

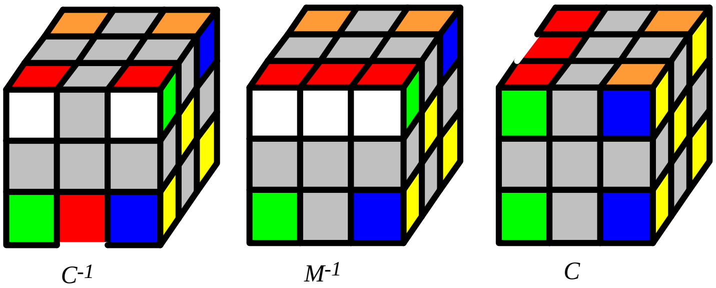
1^o Caso



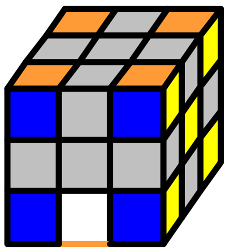
Recordamos que podemos rodar livremente as camadas E, M e D. Suponhamos que queremos colocar o meio vermelho e branco (o vermelho está para a frente e o branco está para baixo) entre os dois cantos com vermelho e branco que estão na camada de cima.

Então, rodamos a camada de cima, deixando os dois brancos na frente, de modo a podermos colocar o meio com o vermelho para cima e o branco para a frente, ficando as três peças bem alinhadas. Depois, voltamos a colocar os brancos na esquerda.

Ou seja, fazemos C^{-1}, depois, fazemos M^{-1} e, por fim, fazemos C.



2^o Caso

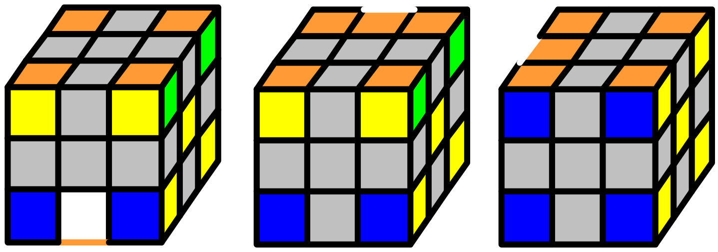


Suponhamos, agora, que queremos colocar o meio laranja e branco da figura anterior, de modo a deixá-lo bem alinhado, entre os dois cantos com laranja e branco da camada de cima. A situação é um pouco diferente da anterior. Para que o branco fique voltado para a lateral, temos que dar meia volta na camada M, deixando o branco voltado para trás e o laranja para cima.

Então, começamos por rodar a camada de cima, no sentido horário, de modo que os dois brancos fiquem voltados para trás (C).

Depois, fazemos M^2, de modo que o meio laranja e branco fique bem alinhado e desfazemos o movimento feito na camada de cima, de modo que voltemos à posição original, mas com o meio laranja e branco devidamente colocado.

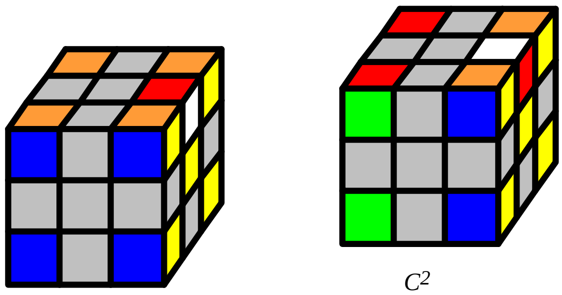
A sequência aplicada foi CM^2C^{-1}.



C M^2 C^{-1}

Mesmo sem sabermos a sequência de cor, somos capazes de colocar o meio no lugar adequado.

3º Caso

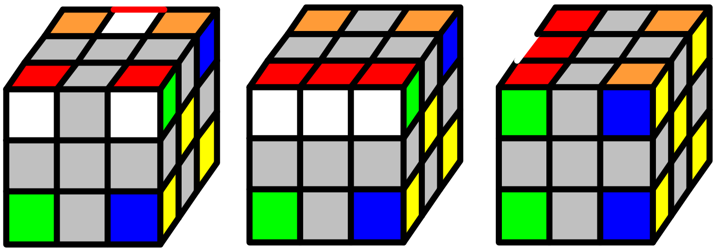


C^2

Suponhamos que pretendemos colocar o meio vermelho e branco na camada da esquerda.

O primeiro passo é dar meia volta na camada da esquerda, para ficarmos com dois vermelhos (dos cantos) voltados para cima.

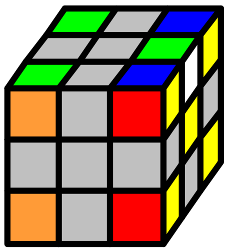
Agora, temos duas possibilidades: podemos rodar a camada de cima, no sentido horário ou no sentido anti-horário, colocar o meio e desfazer o movimento da camada de cima.



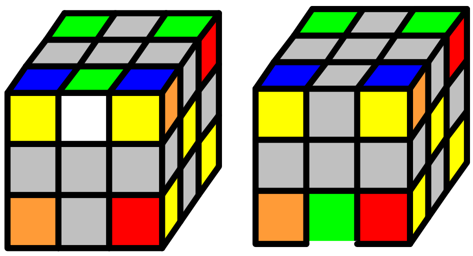
C^{-1} M C

A sequência apresentada é a que está na fórmula ($C^{-1}MC$), mas poderíamos utilizar $CM^{-1}C^{-1}$.

4º Caso



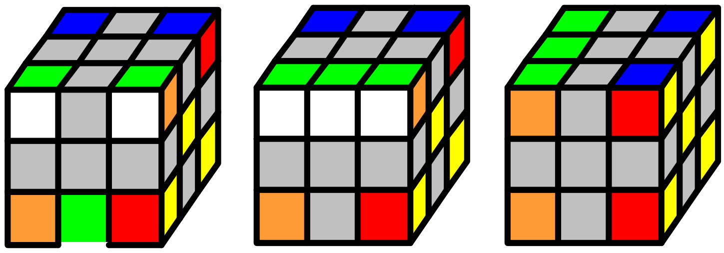
Este quarto caso é um pouco mais complicado do que os anteriores. O raciocínio é o seguinte: trazemos o meio verde e branco para a camada da frente (C) e colocamo-lo em baixo (M).



C M

Agora, podemos desfazer o movimento da camada de cima (C^{-1}) e caímos no 1^o caso.

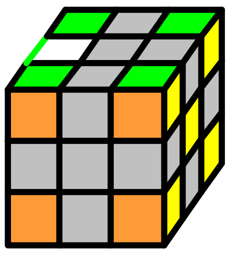
Mas, podemos fazer C^2, duma vez só, colocamos o meio verde e branco e retornamos com os cantos com branco para a esquerda ($M^{-1}C$).



C^2 M^{-1} C

Juntando tudo, temos a sequência $CMC^2M^{-1}C$.

5^o Caso



Se quisermos acertar as cores do meio verde e branco (deixando-o no mesmo lugar), basta colocarmos, no lugar onde ele está, uma peça qualquer e, depois recolocamos o meio verde e branco. Na primeira parte, usamos uma das sequências mais fáceis, por exemplo, fazemos $C^{-1}MC$.

O meio verde e branco vai ficar na frente, com o verde para baixo. E já sabemos como proceder.

Note-se que, se tivermos dois meios com o branco voltado para a esquerda, será mais fácil colocar mais um meio com branco e, depois, ao colocarmos os meios com amarelo, deixamos o meio verde e branco na camada de cima e ele acaba por sair daquele lugar.

Convém realçar que, se deixarmos o meio com as cores invertidas para o acertarmos no fim, acabaremos por tirar um meio da camada da direita, pelo que teremos de recolocá-lo.

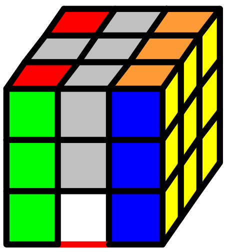
6º Caso

Para colocarmos o último meio, convém decorarmos a fórmula. De qualquer modo, o que pretendemos é retirar um meio já colocado, substituindo-o por um meio sem branco nem amarelo, e deixar o último meio com branco e o último meio com amarelo numa posição tal que, ao colocarmos um dos meios, coloquemos o outro.

Voltamos a escrever as fórmulas que resolvem este caso – colocação do último meio:

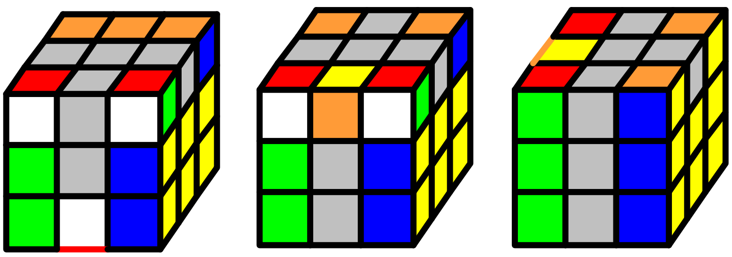
$$\begin{cases} C^{-1}MC^2MC^{-1} \\ CM^{-1}C^2M^{-1}C \end{cases}$$

Analisemos as transformações provocadas pela primeira fórmula, através do seguinte exemplo:



Estamos a supor que só falta colocar o meio vermelho e branco, na camada da esquerda. Já sabemos que não podemos utilizar o mesmo método que anteriormente, uma vez que iremos retirar do seu lugar o meio laranja e amarelo.

Façamos $C^{-1}MC$, em vez de $C^{-1}M^{-1}C$.



C $\qquad$ M $\qquad$ C^{-1}

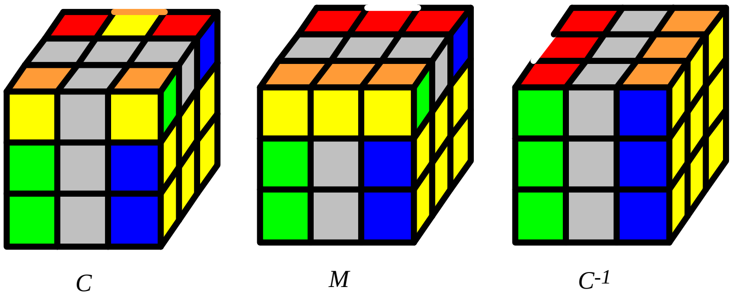


Figura 2.1:

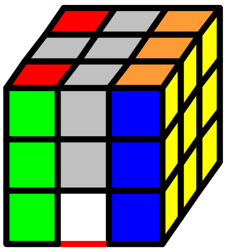
O meio vermelho e branco está em **B**-T (**Baixo**-Trás). Então, se fizermos C, de novo, o meio laranja e amarelo fica na vertical do meio vermelho e branco, pelo que ao acertarmos um deles, o outro também fica certo.

Depois, é só acertar os cantos com C^{-1}.

A segunda fórmula pode ser obtida da primeira por simetria (reflexão num espelho). Se colocarmos um espelho atrás do cubo, a imagem fica na posição que já resolvemos. Mas, no cubo original, temos que fazer C^{-1} em vez de C e M^{-1} em vez de M.

Observação

Por vezes, é mais fácil fixar a sequência de movimentos do que decorar a fórmula. Suponhamos que só nos falta colocar um meio na camada da esquerda e que todos os meios da direita já estão colocados.



Na posição da figura anterior, a maneira de resolver é a seguinte:

1. Trazemos os dois cantos da esquerda para a frente (fazendo C^{-1}), para que as três peças fiquem na mesma camada (a da frente).

2. Trazemos a camada M, deixando o meio vermelho e branco em TB (Trás, Baixo).

3. Damos meia volta em cima, voltando a colocar as três peças numa mesma camada (a de trás).

4. Agora, rodamos a camada M, colocando os dois meios (o que se pretendia colocar e o que ficou provisoriamente desfeito)

5. Roda-se a camada de cima, acertando os cantos.

No caso em que o meio fica em TB, procede-se de forma análoga (como se houvesse um espelho atrás do cubo...).

Recapitulando: "Trazemos"os dois cantos, "fugimos"com o meio, damos meia volta, em cima, "trazemos"o meio para cima, acertando os dois meios e rodamos a camada de cima, acertando os cantos.

Procedendo desta maneira, nem precisamos da fórmula.

2.6 Formulário

2.6.1 Orientação dos cantos de cima

1. Dois cantos com amarelo voltado para trás e dois cantos com amarelo voltado para a frente
$$D^2C^2DC^2D^2$$

2. Dois cantos com amarelo voltado para a esquerda, um com amarelo voltado para trás e outro com o amarelo voltado para a frente
$$\left(FDCD^{-1}C^{-1}\right)\left(DCD^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)$$

3. Sonho
$$DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$$

4. Anti-Sonho
$$D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D$$

5. Dois cantos com o amarelo voltado para cima (na esquerda) e dois amarelos voltados para a direita
$$(FCD)\left(C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)$$

6. Dois cantos com o amarelo voltado para cima (na direita), um canto com o amarelos voltado para trás e outro com o amarelo voltado para a frente

$$\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)\left(D^{-1}FDF^{-1}\right)$$

7. Dois cantos com o amarelo voltado para cima (na diagonal principal), um canto com o amarelo voltado para a frente e outro com o amarelo voltado para a direita

$$\left(FD^{-1}F^{-1}D\right)\left(CDC^{-1}D^{-1}\right)$$

2.6.2 Permutação de dois cantos de cima

1. Permutar dois cantos adjacentes

$$\left(D^{-1}FD^{-1}\right)T^2\left(DF^{-1}D^{-1}\right)T^2D^2$$

2. Permutar os dois cantos da diagonal principal

$$\left(DC^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)F^2\left(C^{-1}DCD^{-1}\right)BD^2$$

2.6.3 Colocação dum meio na camada da esquerda

1. $C^{-1}M^{-1}C$ — Meio em **Baixo**-Frente

2. CM^2C^{-1} — Meio em **Frente**-Baixo

3. $C^{-1}MC$ — Meio em **Cima**-Direita

4. $CMC^2M^{-1}C$ — Meio em **Direita**-Cima

2.6.4 Colocação dum meio na camada da direita

1. $CM^{-1}C^{-1}$ — Meio em **Baixo**-Frente

2. $C^{-1}M^2C$ — Meio em **Frente**-Baixo

3. CMC^{-1} — Meio em **Cima**-Esquerda

4. $C^{-1}MC^2M^{-1}C^{-1}$ — Meio em **Esquerda**-Cima

2.6.5 Casos especiais

1. $C^{-1}MC^2MC^{-1}$ — Último Meio, em **Frente**-Baixo, para ser colocado em **Esquerda**-Cima
2. $CM^{-1}C^2M^{-1}C$ — Último Meio, em **Trás**-Baixo, para ser colocado em **Esquerda**-Cima
3. $C^{-1}MC^2M^2C^{-1}$ — Inverte as cores do meio em **Cima**-Esquerda
4. $(M^{-1}CM^{-1}CM^{-1})\,C^2\,(MCMCM)\,C^2$ — Inverte as cores dos dois meios de cima, da camada M

2.6.6 Permutação dos meios da camada M

1. $C^2MC^2M^{-1}$ — Fixa o meio, em Frente-Baixo e "roda"os outros no sentido de M.
2. $C^2M^{-1}C^2M$ — Fixa o meio, em Trás-Baixo e "roda"os outros no sentido de M^{-1}.
3. $C^2M^2C^2M^2$ — Permuta os dois meios de cima e os dois meios de baixo
4. Q^2MQ^2M — Permuta os quatro meios, dois a dois e em diagonal

Nota: Q significa o Equador (a segunda camada horizontal).

Capítulo 3

Melhorando o Método

Depois de acertarmos os quatro cantos com branco, vamos acertar o centro branco. Depois, em vez de orientarmos os cantos e permutá-los depois, vamos tentar fazer as duas coisas em conjunto. Ou seja, vamos tentar que ao colocarmos os amarelos dos cantos voltados para cima, os cantos já fiquem perfeitamente alinhados. Para isso, vamos precisar de saber mais fórmulas de cor, mas esse é o preço a pagar por resolvermos duas etapas numa.

No que se segue, vamos preocuparmo-nos, apenas, com os amarelos dos cantos. Assim, quando escrevemos "nenhum amarelo para cima", pretendemos dizer que nenhum canto tem o amarelo voltado para cima. Trata-se duma simplificação, para que os títulos fiquem mais pequenos.

Antes de continuarmos, vamos fazer uma observação importante.

Observação

Quando escrevi um texto sobre o método de Fridrich, achei estranho que não tenha havido ninguém que condensasse a OLL e a PLL num só passo.

Por isso, resolvi tentar fazer isso. Comecei a sistematizar as fórmulas de OLL e a ver o que elas faziam com os meios e com os cantos. Descobri que em muitas posições, podíamos aplicar uma só fórmula para resolver os dois passos num só. Entretanto, ia escrevendo sobre outras coisas: o cubo 4×4×4 e o cubo 5×5×5. Como não tinha cubos maiores que o cubo 5×5×5, comecei a pesquisar outras coisas. Uma das coisas que descobri foi o método de Ortega, para o cubo 2×2×2. Isso aconteceu depois de ter escrito um texto sobre o método de Guimond.

Achei o método de Ortega muito bom para o cubo 2×2×2 e, como tinha lido que o método tinha sido criado para o cubo 3×3×3, fui aprender o método para esse caso. Achei o método bastante interessante, embora tenha um problema aborrecido: por vezes, há que inverter as cores de dois meios, ou mesmo de quatro. Nesses casos, temos algum trabalho suplementar. No mais, é um método relativamente fácil (muito mais fácil que o método de Fridrich, para quem não gosta de decorar muitas fórmulas – é o meu caso, também por causa da idade).

Como tinha trabalhado na pesquisa de fórmulas para a resolução num só passo da OLL e da PLL, comecei a aplicar as fórmulas que eu já conhecia, no método de Ortega, para orientar e permutar os cantos de cima, de uma só vez. No entanto, faltavam-me alguns casos para resolver. Eu usava fórmulas que preseravam as duas primeiras camadas, embora eu soubesse que poderia utilizar fórmulas que preservassem os cantos de baixo, mesmo que não preservassem os meios.

Andava eu empenhado nessa tarefa, quando resolvi aprender o método de Waterman, para (eventualmente) escrever um texto sobre esse método.

E que descubro? Muitas fórmulas que resolviam aquilo que eu andava à procura: orientar e permutar os cantos duma só vez. Tudo isso estava em WWW.Rubik

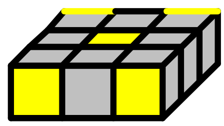
Fui ver o que cada fórmula fazia, de modo a adaptá-las ao método de Ortega. Tudo isso está no que se segue.

3.1 Nenhum Amarelo Para Cima

Suponhamos que os quatro cantos com branco já estão alinhados entre si e com o centro branco. Então, há duas hipóteses, quando nenhum canto tem o amarelo voltado para cima: podemos ter dois cantos com o amarelo para a frente e dois cantos com o amarelo para trás ou podemos ter dois cantos com o amarelo para a frente, um canto com o amarelo para a direita e outro com o amarelo para a esquerda.

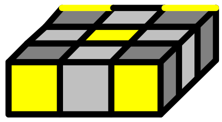
Seguidamente, vamos subdividir esses dois casos em subcasos.

3.1.1 Dois amarelos para a frente e dois para trás



Nas figuras seguintes, a cinzento mais escuro, estão indicados os cantos que não mudam de lugar. Após a aplicação da sequência indicada, esses cantos ficam no mesmo lugar, embora passem a ter o amarelo voltado para cima. Os cantos que estejam a cinzento mais claro, mudam de lugar entre si.

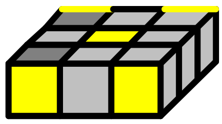
1. Todos os cantos já estão na sua posição, só faltando orientar o amarelo.



Solução: $D^2C^2D^{-1}C^2D^2C^{-1}$.

Há outras soluções, mas esta é a mais simples de fixar, além de ter poucos movimentos. Note-se que esta sequência, em princípio, não pode ser aplicada no método das camadas, pois não preserva a segunda camada.

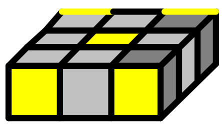
2. Os dois cantos da esquerda (camada de cima) estão no lugar certo e queremos permutar os outros dois cantos (além de acertarmos os quatro amarelos).



Solução: $(FCD^{-1})\,(FDF)\,(FC^{-1}F^{-1})\,(EFE^{-1})\,C$

Outra maneira de escrever a solução anterior: $(FC)\,(D^{-1}FD)\,(F^2C^{-1})\,(F^{-1}EFE^{-1})\,C$

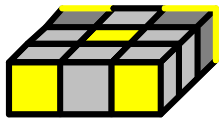
3. Os dois cantos da direita (em cima) estão no lugar certo e queremos permutar os outros dois cantos (além de acertarmos os quatro amarelos).



Solução: $C_3\,(DC^2D^2)\,(FDF^{-1})\,C^2\,(D^{-1}FDF^{-1})\,C$

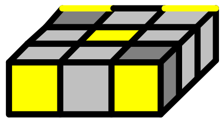
Observemos que esta posição pode ser transformada na anterior, fazendo C_3^2, pelo que é desnecessário fixar a sequência agora apresentada.

4. Os dois cantos de trás (em cima) estão no lugar certo e queremos permutar os outros dois cantos (os da frente).



Solução: $B_2^{-1}\,(D^{-1}FDF^{-1})\,C^2D^2\,(T^{-1}D^{-1}TD^{-1})$

5. Os dois cantos da diagonal principal estão no lugar certo e queremos permutar os dois cantos da diagonal secundária.



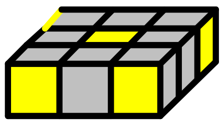
Solução: $B_2\,(F^2DC^2)\,(D^{-1}E^{-1})\,(C^2EF^2)$

6. Os dois cantos da diagonal secundária estão no lugar certo e queremos permutar os dois cantos da diagonal principal. Esta posição pode ser transformada na anterior, fazendo B_2^2 ou C_3^2, pelo que podemos ignorar esta posição:

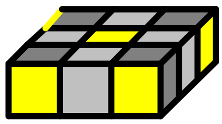
   Solução: $B_2^{-1}\,(F^2DC^2)\,(D^{-1}E^{-1})\,(C^2EF^2)$

Observação:
Embora tenhamos apresentado seis casos, na realidade, são quatro casos, como referido.

3.1.2 Dois amarelos para a frente e nenhum para trás



1. Suponhamos que todos os cantos já estão na sua posição, só faltando orientar o amarelo.



Há várias soluções para resolver a questão:

(**a**) $C_3 B_2^2\,(DC^2D^2)\,(C^{-1}D^2C^{-1})\,(D^2C^2D)$

(**b**) $C_3 F\,(DCD^{-1}C^{-1})^2\,F^{-1}$

(**c**) $C_3^{-1} F^{-1}\,(E^{-1}C^{-1}EC)^2\,F$

(**d**) $C_3^{-1} F\,(CDC^{-1}D^{-1})^2\,F^{-1}$

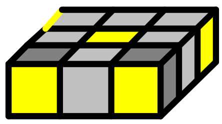
(**e**) $C_3\,(DCD^{-1}CDC^2D^{-1})\,C^{-1}\,(DCD^{-1}CDC^2D^{-1})\,C$

(**f**) $C_3^{-1} F\,(CDC^{-1}D^{-1})^2\,F^{-1}$

Ainda há outras soluções. Por exemplo, há sequências que acertam o amarelo e permutam os quatro cantos em diagonal. Numa posição dessas, podemos começar por fazer B_2^2, ficando os quatro cantos na sua posição definitiva, embora com o amarelo errado.

Note-se que, em princípio, temos de mover as duas camadas de baixo, de modo a obtermos os quatro cantos no lugar certo. Só depois disso, aplicamos uma das sequências acima referidas, pelo que não faz falta conhecer as fórmulas que acertam o amarelo dos cantos e permutam os quatro cantos em diagonal.

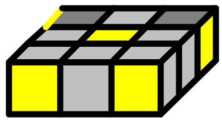
2. Suponhamos que os dois cantos da frente estão no lugar certo e que os dois cantos de trás estão no lugar errado.



Soluções:

(**a**) $(CF^2)\,(C^{-1}E^{-1}C^{-1})\,(EC^2F^2)\,(E^{-1}C^2E)$
(**b**) $(EF^{-1}E^{-1}F)\,CF^2\,(D^{-1}F^{-1}D)\,(C^{-1}F^{-1}C^{-1})$

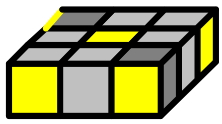
3. Suponhamos que os dois cantos da frente estão no lugar errado e que os dois cantos de trás estão no lugar certo.



Soluções:

(**a**) $C_3\left(E_2C^{-1}DCD^{-1}E_2^{-1}\right)C^2\,(FD^{-1}F^{-1}D)\,C$
(**b**) $C_3\left(D_2^{-1}CE^{-1}C^{-1}ED_2\right)C^2\,(F^{-1}EFE^{-1})\,C^{-1}$

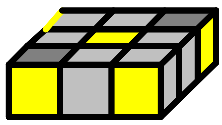
4. Suponhamos que os dois cantos da diagonal principal estão no lugar certo e que queremos permutar os dois cantos da diagonal secundária.



Soluções:

(**a**) $C_3^{-1}\,(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1})\,B_2\,(D^{-1}CD)\,TC$
(**b**) $C_3^{-1}\,(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1})\,(CF^{-1}CFDC)$

5. Suponhamos que os dois cantos da diagonal secundária estão no lugar certo e que queremos permutar os dois cantos da diagonal principal.



Soluções:

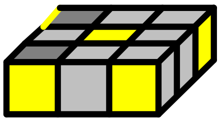


Figura 3.1:

(**a**) $C_3\,(ECE^{-1}CE)\,B_2^{-1}\,(EC^{-1}E^{-1})\,T^{-1}C^{-1}$

(**b**) $C_3\,(ECE^{-1}CE)\,(C^{-1}FC^{-1})\,(F^{-1}E^{-1}C^{-1})$

(**c**) $C_3^{-1}B_2^2\,(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1})\,(CF^{-1}CFDC)$
Note-se que este caso é transformado no caso anterior, fazendo B_2^2.

6. Suponhamos que os dois cantos da esquerda estão no lugar certo e que queremos permutar os dois cantos da direita.

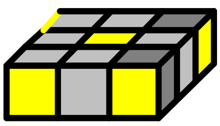
Uma das soluções consiste em acertar os amarelos dos cantos, mantendo os lugares e, depois, permutar os dois cantos errados.

No entanto, o ideal é encontrar uma solução mais curta que acerte o amarelo e corrija os lugares dos dois cantos errados.

Solução: $B_2F^2\,(C^{-1}E^{-1}C^{-1}E)\,C^2F^2\,(E^{-1}C^2E)$

Esta solução não preserva dois meios da segunda camada.

7. Suponhamos que os dois cantos da direita estão no lugar certo e que queremos permutar os dois cantos da esquerda.



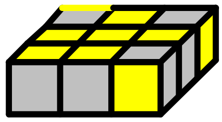
Solução: $B_2^{-1}F^2\,(CDCD^{-1})\,C^2F^2\,(DC^2D^{-1})$. A solução é obtida da anterior, por simetria.

3.2 Um só Amarelo Para Cima

Vamos dividir os casos em que temos um só canto com o amarelo voltado para cima em duas partes. Na primeira parte, vamos considerar os casos que correspondem ao Sonho, enquanto que na segunda parte vamos considerar os casos que correspondem ao Anti-Sonho.

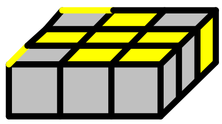
3.2.1 Sonho

Quem aprende o método básico das camadas conhece a sequência Sonho (ou Sune ou Soon). A posição padrão é a seguinte:



A solução aprendida é: $DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$. Esta sequência deixa todos os amarelos voltados para cima, mas não fixa nenhum canto. No entanto, pode ser modificada, de modo a deixar dois cantos no lugar onde estão, permutando os outros dois. É claro que a sequência preserva as duas primeiras camadas.

Só que, presentemente, não estamos muito interessados na resolução dos meios, pelo que podemos utilizar sequências que não preservem todos os meios das duas primeiras camadas. O que mos interessa, é preservar os cantos da primeira camada e orientar e colocar nos seus lugares os cantos da terceira camada. Para não começarmos todas as sequências por C_3^{-1}, vamos alterar a posição padrão para a seguinte:



Vamos ter seis casos: um deles fixa todos os cantos e cinco deles permutam dois cantos e fixam os restantes. Relembramos que não estamos interessados em saber o que acontece com os meios.

1. Suponhamos que os quatro cantos de cima já estão nos seus lugares, faltando (apenas) acertar o amarelo dos cantos.

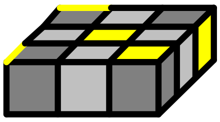
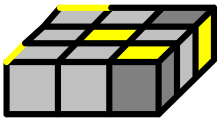


Figura 3.2:

Solução: $B_2^2\,(D^{-1}C^2)\,(DCD^{-1}CD)$

Esta sequência preserva as duas primeiras camadas. Se eliminarmos B_2^2, a sequência obtida deixa os quatro cantos com o amarelo para cima e permuta os cantos, dois a dois, em diagonal. Só que isso ia complicar os desenhos...

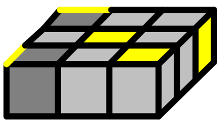
2. Suponhamos que os dois cantos da direita (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da esquerda.



Solução: $B_2\,(F^{-1}C^2FC^2)\,(FD^{-1}F^{-1}D)$

Esta solução preserva as duas primeiras camadas.

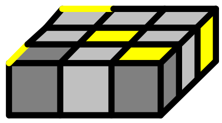
3. Suponhamos que os dois cantos da esquerda (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da direita.



Solução: $B_2^2\,(F^2EFE^2)\,C\,(E^2F^{-1}E^{-1}F^2)$

Esta solução não preserva um meio da segunda camada (o meio em ET).

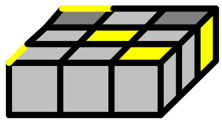
4. Suponhamos que os dois cantos da frente (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos de trás.



Solução: $B_2\,(DT^{-1}D^{-1}T)\,(C^2TC^2T^{-1})$

Esta sequência preserva as duas primeiras camadas.

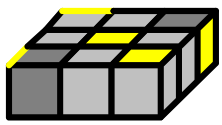
5. Suponhamos que os dois cantos de trás (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da frente.



Solução: $B_2^2\,(TC^{-1}F^{-1}CT^{-1})\,(C^{-1}F)$

Esta solução preserva as duas primeiras camadas.

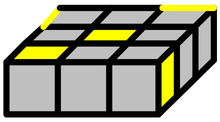
6. Suponhamos que os dois cantos da diagonal secundária (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da diagonal principal.



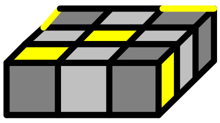
Solução: $B_2\,(E^2C^{-1}E^{-1}C^2)\,(DC^{-1}E^2CD^{-1})$
Esta sequência não preserva os dois meios de trás, da segunda camada.
Se pretendermos permutar os dois cantos da diagonal secundária, basta substituir (na sequência anterior) B_2 por B_2^{-1}.

3.2.2 Anti-Sonho

De modo análogo ao Sonho, também vamos ter seis casos. No primeiro caso, os cantos ficam todos fixos e nos restantes cinco casos, há dois cantos que permutam entre si. A posição padrão (aqui utilizada) é a seguinte:



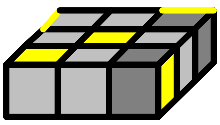
1. Suponhamos que os quatro cantos de cima já estão nos seus lugares, faltando (apenas) acertar o amarelo de três cantos.



Solução: $B_2^2\,(EC^2)\,(E^{-1}C^{-1}EC^{-1}E^{-1})$

Esta sequência preserva as duas primeiras camadas.

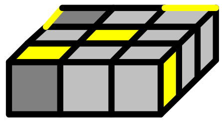
2. Suponhamos que os dois cantos da direita (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da esquerda (deixando todos os cantos com o amarelo para cima).



Solução: $B_2^2\,(F^2EFE^2)\,C^{-1}\,(E^2F^{-1}E^{-1}F^2)$

Esta sequência não preserva o meio da segunda camada (em ET).

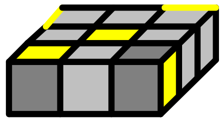
3. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da esquerda (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da direita.



Solução: $B_2^{-1}\,(FC^2F^{-1}C^2)\,(F^{-1}EFE^{-1})$

Esta sequência preserva as duas primeiras camadas.

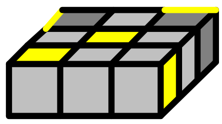
4. Suponhamos que os dois cantos da frente (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos de trás.



Solução: $B_2^{-1}\,(E^{-1}TET^{-1})\,(C^2T^{-1}C^2T)$

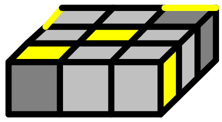
Esta sequência preserva as duas primeiras camadas.

5. Suponhamos que os dois cantos de trás (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da frente.



Solução: $B_2^2\,(T^{-1}CF)\,C^{-1}\,(TCF^{-1})$

6. Suponhamos que os dois cantos da diagonal secundária (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da diagonal principal.



Solução: $B_2\,(D^2CDC^2)\,(E^{-1}CD^2C^{-1}E)$

Esta sequência não preserva dois meios da segunda camada (os dois da frente).

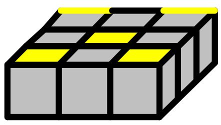
Se pretendermos permutar os dois cantos da diagonal secundária (mantendo os outros dois), basta substituir B_2 por B_2^{-1}.

3.3 Dois Amarelos Para Cima

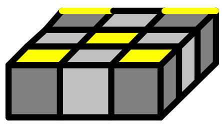
3.3.1 Dois amarelos para cima, na camada da frente

Vamos subdividir este caso em dois grupos. No primeiro grupo, temos os casos em que temos dois amarelos voltados para trás, enquanto que no segundo grupo, temos os casos em que temos um amarelo voltado para a esquerda e outro voltado para a direita (nos cantos da camada de trás).

Dois amarelos voltados para trás



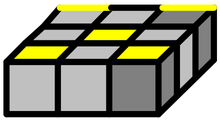
1. Suponhamos que todos os cantos estão nos lugares certos:



Solução: $(FD^{-1}FD^{-1})\,(CD^{-1}C^{-1})\,(D^2F^2C)$

Esta sequência não preserva um meio da segunda camada (meio em DT).

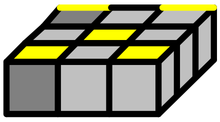
2. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da direita (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da esquerda.



Solução: $B_2\,(D^2B^{-1})\,(DC^2D^{-1})\,(BDC^2D)$

Esta sequência preserva as primeiras duas camadas.

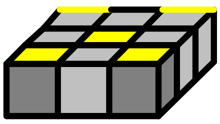
3. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da esquerda (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da direita.



Solução: $B_2^{-1}\,(E^2B)\,(E^{-1}C^2E)\,(B^{-1}E^{-1}C^2E^{-1})$

Esta sequência preserva as primeiras duas camadas.

4. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da frente (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos de trás.



Solução: $B_2^2\,(T^{-1}D^{-1}C^{-1})\,(DC^2)\,(FC^{-1}TCF^{-1})$

Esta sequência preserva as primeiras duas camadas.

5. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos de trás (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da frente.

Solução: $B_2^2\,(D^{-1}CF^{-1})\,(DTD^{-1})\,(FDT^{-1})$

Esta sequência não preserva o meio da segunda camada em EF.

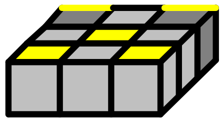
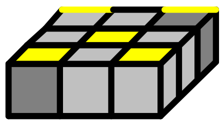


Figura 3.3:

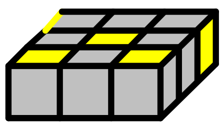
6. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da diagonal secundária (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da diagonal principal.



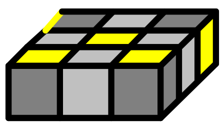
Solução: $B_2^{-1}\,(DCT)\,(C^{-1}T^{-1}D^{-1})$
Outra solução: $C_3B_2^{-1}\,(FCD)\,(C^{-1}D^{-1}F^{-1})$
Esta solução preserva as duas primeiras camadas.

Se quisermos permutar os cantos da diagonal secundária, basta substituir B_2^{-1} por B_2.

Nenhum amarelo voltado para trás



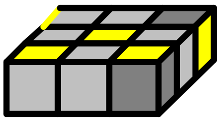
1. Suponhamos que todos os cantos estão nos lugares certos:



Solução: $(FD^{-1}FD^{-1})\,(CD^{-1}C^{-1})\,(D^2F^2C)$

Esta sequência não preserva um meio da segunda camada (meio em DT).

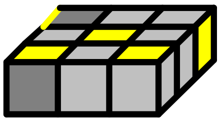
2. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da direita (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da esquerda.



Solução: $(E^{-1}C^{-1}EC)\,(FCF^{-1})$

Esta sequência não preserva um meio da segunda camada (meio EF).

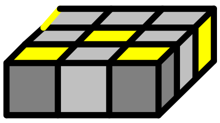
3. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da esquerda (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da direita.



Solução: $(DCD^{-1}C^{-1})\,(F^{-1}C^{-1}F)$

Esta sequência não preserva um meio da segunda camada (meio DF).

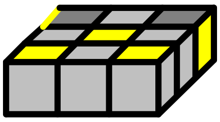
4. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos da frente (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos de trás.



Solução: $B_2^2\,(D^{-1}CD)\,C^2D^2\,(FDF^{-1}D)$

Esta sequência não preserva um meio da segunda camada (meio EF).

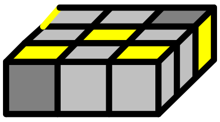
5. Suponhamos que pretendemos manter os dois cantos de trás (em cima) nos seus lugares e permutar os dois cantos da frente.



Solução: $B_2^2\,(F^{-1}DTD^{-1}F)\,(DT^{-1}CD^{-1})$

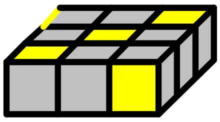
Esta sequência não preserva um meio da segunda camada (meio ET).

6. Suponhamos que os dois cantos da diagonal secundária (em cima) estão nos seus lugares e que queremos permutar os dois cantos da diagonal principal.

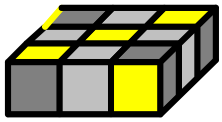


Solução: $B_2\,(D^{-1}FD)\,(F^2C^{-1}D^{-1}F^2)\,(DC^{-1}F)$
Esta sequência não preserva dois meios da segunda camada (na esquerda).
Se quiser permutar os cantos da diagonal secundária, basta substituir B_2 por B_2^{-1}.
Outra solução para trocar os dois cantos da diagonal secundária: $(EC)\,(FC^{-1}F^{-1})\,(EC^2E^{-1})\,(C^2E^2$

3.3.2 Dois amarelos em cima, na diagonal secundária



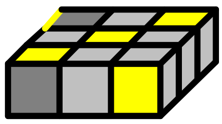
1. Suponhamos que os cantos (de cima) já estão no lugar certo.



Solução: $(D^{-1}C)\,(F^{-1}CF)\,(C^2D^2)\,(T^{-1}D^{-1}T)$

Esta solução não preserva um meio da segunda camada (meio DT).

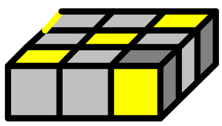
2. Suponhamos que os dois cantos da esquerda (em cima) estão no lugar certo e os outros dois têm de permutar.



Solução: $B_2\,(FC^2)\,(FBF^{-1})\,\left(C^2FB^{-1}\cancel{F}^2\right)$

Esta solução preserva as duas primeiras camadas.

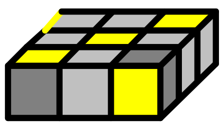
3. Suponhamos que os dois cantos da direita (em cima) estão no lugar certo e os outros dois têm de permutar.



Solução: $(T^{-1}CT)\,(CEC^{-1}E^{-1})$

Esta solução não preserva um meio da segunda camada (meio ET).

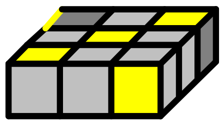
4. Suponhamos que os dois cantos da frente (em cima) estão no lugar certo e os outros dois têm de permutar.



Uma solução: $B_2^{-1}\,(E^{-1}C^2E^{-1})\,(B^{-1}EC^2E^{-1}B)\,E^2$

Esta solução preserva as duas primeiras camadas.

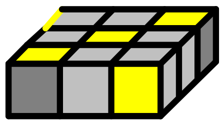
5. Suponhamos que os dois cantos de trás (em cima) estão no lugar certo e os outros dois têm de permutar.



Uma solução: $D\,(C^{-1}D^{-1}C^{-1})\,(F^{-1}CF)$

Esta solução não preserva um meio da segunda camada (meio DF).

6. Suponhamos que os dois cantos da diagonal secundária (em cima) estão no lugar certo e os dois cantos da diagonal principal têm de permutar.



Uma solução: $B_2^{-1}\,(E^{-1}C^2E^2)\,(F^{-1}E^{-1}F)\,(E^{-1}C^2E)$

Esta solução preserva as duas primeiras camadas.

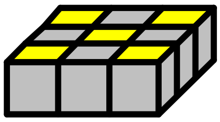
Observação

E se quisermos preservar os dois cantos da diagonal principal e permutar os dois cantos da diagonal secundária? Note-se que não podemos aplicar uma simetria, porque o amarelo da frente iria passar para o lado esquerdo. A solução é facílima: basta fazer B_2^2, para se passar para o caso anterior. Então, pode fixar a fórmula para este caso (embora a mesma não seja necessária):

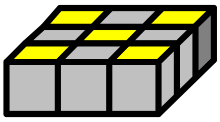
$$B_2\,(E^{-1}C^2E^2)\,(F^{-1}E^{-1}F)\,(E^{-1}C^2E)$$

3.4 Quatro Amarelos Para Cima

Se os quatro cantos ainda não estiverem certos, temos dois casos: permutar os dois cantos da frente, ou permutar dois cantos em diagonal.



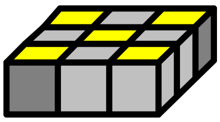
1. Suponhamos que os dois cantos de trás estão certos e pretendemos permutar os dois cantos da frente.



Solução: $(D^{-1}FD^{-1})\,T^2\,(DF^{-1}D^{-1})\,T^2D^2C^{-1}$

Note-se que este caso é bem conhecido (no método das camadas), omitindo-se o C^{-1} final, pois basta que os dois cantos de trás estejam bem alinhados entre si. No final, acertamos a última camada, consoante a posição obtida. A fórmula apresentada (com C^{-1} no fim) deixa os oito cantos alinhados.

2. Suponhamos que os dois cantos da diagonal secundária estão certos e pretendemos permutar os dois cantos da diagonal principal.



Soluções:

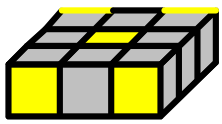
(**a**) $E^2\,(CT^{-1}CTC^{-1})\,E^2\,(C^{-1}T^{-1}C^{-1}T)$

(**b**) $(D^{-1}CD)\,(C^{-1}D^{-1}F^{-1}C^{-1})\,(FDC)\,(D^{-1}FD^{-1}F^{-1})\,(DC^{-1})$

3.5 Formulário

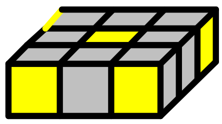
A seguir, apresentamos as várias fórmulas para a resolução dos cantos da camada superior (orientação e permutação dos cantos), acompanhadas do efeito produzido no cubo (relatiamente aos cantos). É claro que todas as fórmulas deixam os quatro cantos da terceira camada, com o amarelo voltado para cima, pelo que não vamos referir isso nos vários quadros que apresentamos. Além disso, só nos vamos referir aos amarelos dos cantos, esquecendo totalmente os meios. Para não complicar os quadros, vamos escrever, por exemplo, "permuta os dois cantos da frente"com o significado de "permuta os dois cantos da frente e fixa os dois cantos de trás", pois só apresentamos casos em que há uma permuta de dois cantos e dois ficam fixos, ou casos em que todos os cantos ficam fixos.

3.5.1 Dois amarelos para trás, dois amarelos para a frente



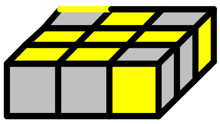
N^o	Fórmula	Efeito no cubo
1	$D^2C^2D^{-1}C^2D^2C^{-1}$	Fixa todos os cantos
2	$(FC)\,(D^{-1}FD)\,(F^2C^{-1})\,(F^{-1}EFE^{-1})\,C$	Permuta os dois cantos da direita
3	$B_2^{-1}\,(D^{-1}FDF^{-1})\,C^2D^2\,(T^{-1}D^{-1}TD^{-1})$	Permuta os dois cantos da frente
4	$B_2\,(F^2DC^2)\,(D^{-1}E^{-1})\,(C^2EF^2)$	Permuta os dois cantos da diagonal secundária

3.5.2 Dois amarelos para a frente, nenhum para trás



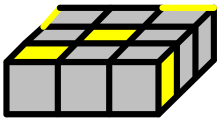
N^o	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$C_3 B_2^2 \, (DC^2D^2) \, (C^{-1}D^2C^{-1}) \, (D^2C^2D)$	Fixa todos os cantos
2	$(B_2F^2) \, (C^{-1}E^{-1}C^{-1}) \, (EC^2F^2) \, (E^{-1}C^2E)$	Permuta os dois cantos da direita
3	$B_2^{-1}F^2 \, (CDCD^{-1}) \, C^2F^2 \, (DC^2D^{-1})$	Permuta os dois cantos da esquerda
4	$C_3 \left(E_2C^{-1}DCD^{-1}E_2^{-1}\right) C^2 \, (FD^{-1}F^{-1}D) \, C$	Permuta os dois cantos da frente
5	$B_2^2 \, (FD^2C^2D) \, (C^2D^{-1}C^2D^{-1}) \, F^{-1}$	Permuta os dois cantos de trás
6	$C_3^{-1} \, (D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}) \, (CF^{-1}CFDC)$	Permuta os dois cantos da diagonal secund

3.5.3 Sonho



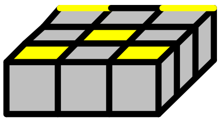
N^o	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$B_2^2 \, (D^{-1}C^2) \, (DCD^{-1}CD)$	Fixa todos os cantos
2	$B_2 \, (F^{-1}C^2FC^2) \, (FD^{-1}F^{-1}D)$	Permuta os dois cantos da esquerda
3	$B_2^2 \, (F^2EFE^2) \, C \, (E^2F^{-1}E^{-1}F^2)$	Permuta os dois cantos da direita
4	$B_2 \, (DT^{-1}D^{-1}T) \, (C^2TC^2T^{-1})$	Permuta os dois cantos de trás
5	$B_2^2 \, (TC^{-1}F^{-1}CT^{-1}) \, (C^{-1}F)$	Permuta os dois cantos da frente
6	$B_2^{-1} \, (E^2C^{-1}E^{-1}C^2) \, (DC^{-1}E^2CD^{-1})$	Permuta os dois cantos da diagonal secundária

3.5.4 Anti-Sonho



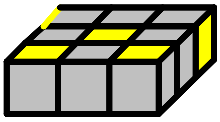
Nº	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$C^2\,(DC^2)\,(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1})$	Fixa todos os cantos
2	$B_2^2\,(F^2EFE^2)\,C^{-1}\,(E^2F^{-1}E^{-1}F^2)$	Permuta os dois cantos da esquerda
3	$B_2^{-1}\,(FC^2F^{-1}C^2)\,(F^{-1}EFE^{-1})$	Permuta os dois cantos da direita
4	$B_2^{-1}\,(E^{-1}TET^{-1})\,(C^2T^{-1}C^2T)$	Permuta os dois cantos de trás
5	$B_2^2\,(T^{-1}CF)\,C^{-1}\,(TCF^{-1})$	Permuta os dois cantos da frente
6	$B_2^{-1}\,(D^2CDC^2)\,(E^{-1}CD^2C^{-1}E)$	Permuta os dois cantos da diagonal secundária

3.5.5 Dois amarelos para trás e dois para cima



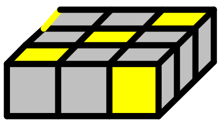
Nº	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$(FD^{-1}FD^{-1})\,(CD^{-1}C^{-1})\,(D^2F^2C)$	Fixa todos os cantos
2	$B_2\,(D^2B^{-1})\,(DC^2D^{-1})\,(BDC^2D)$	Permuta os dois cantos da esquerda
3	$B_2^{-1}\,(E^2B)\,(E^{-1}C^2E)\,(B^{-1}E^{-1}C^2E^{-1})$	Permuta os dois cantos da direita
4	$B_2^2\,(T^{-1}D^{-1}C^{-1})\,(DC^2)\,(FC^{-1}TCF^{-1})$	Permuta os dois cantos de trás
5	$B_2^2\,(D^{-1}CF^{-1})\,(DTD^{-1})\,(FDT^{-1})$	Permuta os dois cantos da frente
6	$C_3B_2^{-1}\,(FCD)\,(C^{-1}D^{-1}F^{-1})$	Permuta os dois cantos da diagonal principal

3.5.6 Dois amarelos para cima (na frente) e nenhum para trás



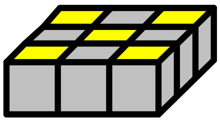
Nº	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$(FD^{-1}FD^{-1})\,(CD^{-1}C^{-1})\,(D^2F^2C)$	Fixa todos os cantos
2	$C_3^{-1}\,(F^{-1}C^{-1}FC)\,(DCD^{-1})$	Permuta os dois cantos da esquerda
3	$(DCD^{-1}C^{-1})\,(F^{-1}C^{-1}F)$	Permuta os dois cantos da direita
4	$B_2^2\,(D^{-1}CD)\,C^2D^2\,(FDF^{-1}D)$	Permuta os dois cantos de trás
5	$B_2^2\,(F^{-1}DTD^{-1}F)\,(DT^{-1}CD^{-1})$	Permuta os dois cantos da frente
6	$B_2\,(D^{-1}FD)\,(F^2C^{-1}D^{-1}F^2)\,(DC^{-1}F)$	Permuta os dois cantos da diagonal principal

3.5.7 Dois amarelos para cima (na diagonal secundária)



Nº	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$(D^{-1}C)\,(F^{-1}CF)\,(C^2D^2)\,(T^{-1}D^{-1}T)$	Fixa todos os cantos
2	$(T^{-1}CT)\,(CEC^{-1}E^{-1})$	Permuta os dois cantos da esquerda
3	$B_2\,(FC^2)\,(FBF^{-1})\,\big(C^2FB^{-1}\not{F}^2\big)$	Permuta os dois cantos da direita
4	$B_2^{-1}\,(E^{-1}C^2E^{-1})\,(B^{-1}EC^2E^{-1}B)\,E^2$	Permuta os dois cantos de trás
5	$D\,(C^{-1}D^{-1}C^{-1})\,(F^{-1}CF)$	Permuta os dois cantos da frente
6	$B_2^{-1}\,(E^{-1}C^2E^2)\,(F^{-1}E^{-1}F)\,(E^{-1}C^2E)$	Permuta os dois cantos da diagonal principal

3.5.8 Quatro amarelos para cima



Nº	Fórmula	Efeito no cubo (camada de cima)
1	$(D^{-1}FD^{-1})\,T^2\,(DF^{-1}D^{-1})\,T^2D^2C^{-1}$	Permuta os dois cantos da frente
2	$E^2\,(CT^{-1}CTC^{-1})\,E^2\,(C^{-1}T^{-1}C^{-1}T)$	Permuta os dois cantos da diagonal principal

Observação

Além dos 42 casos apresentados há mais um caso (trivial): todos os cantos têm o amarelo voltado para cima e estão nos seus lugares ou basta rodar a camada de cima para que isso aconteça.