O cubo de Rubik
O método de Fridrich

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Setembro de 2018

[1] egipereira@gmail.com

Conteúdo

Preface

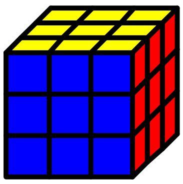
Prefácio

Capítulo 1

Considerações gerais

O cubo de Rubik é uma quebra cabeças tridimensional, constituído por 27 peças com a forma dum cubo. Um desses pequenos cubos fica no interior do cubo maior e não pode ser visto. A esse cubo ficam aparafusados 6 cubos que têm uma só cor e são as peças centrais das várias faces do cubo. Essas peças mantêm a sua posição relativa. Além dessas 6 peças que ficam no centro das 6 faces do cubo, há 8 peças de canto e 12 peças de meio.

As peças de canto têm 3 cores e as peças de meio têm duas cores. Vejamos um desenho em perspectiva dum cubo resolvido:

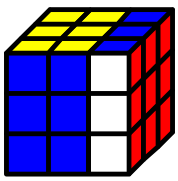


Podemos ver uma peça de canto com três cores: azul, vermelho e amarelo.

A face anterior é azul, a face superior é amarela e a face da direita é vermelha. Além destas três cores, há outras três que não estão visíveis.

A face posterior é verde, a face inferior é branca e a face da esquerda é laranja.

Todas as faces podem girar no sentido horário ou no sentido anti horário. Se girarmos a face vermelha 90 graus no sentido horário, as três peças que têm a cor vermelha e azul passam para a face superior do cubo e passamos a ver as três peças com vermelho e branco:



Convém que nos habituemos a rodar as várias faces quer no sentido horário quer no sentido anti horário e que saibamos a diferença entre as duas maneiras de rodar. A melhor maneira consiste em imaginar que colocamos a mão direita sobre uma face e rodamos como se fechássemos uma torneira. O movimento anti horário consiste em "abrir a torneira".

Observemos que na realidade os "cubos"que compõem o cubo de Rubik não são bem cubos, uma vez que são ocos, para permitirem que possam ser rodados. Mas o aspecto exterior é de um cubo para todos eles.

Seguidamente, vamos fazer algumas convenções para nos entendermos sem complicar muito a linguagem.

Começaremos pelas cores. Em português, temos verde e vermelho, azul e amarelo o que complica uma convenção. Por isso, vamos considerar os nomes das cores em inglês. Blue, Green, Orange, Red, White, Yellow. E, para facilitar, vamos considerar apenas a inicial.

Assim, quando quisermos rodar uma face, diremos a inicial da cor da peça central dessa face.

Na figura apresentada, se quisermos rodar a face amarela, diremos rode Y. Mas temos de indicar duas coisas: o sentido e quantos graus.

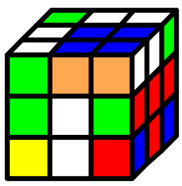
Podemos convencionar que Y significa rodar de 90 graus a face de centro amarelo (yellow), no sentido horário e que Y' significa rodar de 90 graus a face de centro amarelo (yellow), no sentido anti horário. Por vezes, escreveremos o texto em linguagem corrente. No entanto, vamos utilizar outra notação, pois a mesma é mais eficaz. Tal será feito um pouco mais adiante.

A resolução do cubo (previamente baralhado e com as cores todas misturadas) faz-se por etapas: começamos por conseguir uma face com uma só cor e depois vamos completando as sucessivas camadas.

Este pequeno livro baseia-se num tutorial de Carlos Alcântara colocado no YouTube. O link é http://www.cubomagicobrasil.com/

A parte final da resolução do cubo baseia-se em determinadas sequências que vão ter nomes para ser mais fácil fixarmos. Todos os nomes são da minha responsabilidade.

Vejamos um exemplo dum cubo baralhado:



Neste caso, não sabemos como são as outras três faces (que não estão visíveis). Vejamos alguns movimentos:

Y significa rodar (90 graus) a face da direita no sentido horário, passando as três peças da direita com vermelho, azul e amarelo para a face superior. É claro que as três peças com azul, verde e vermelho passam para a face posterior e deixam de ser vistas na perspectiva. E os nove quadrados da face da direita também rodam, embora o quadrado central continue no centro da face direita...

Embora, algumas peças subam e outras desçam, algumas vezes diremos "sobe a direita"para ser mais fácil de decorar uma série de movimentos.

R' significa rodar (90 graus) a face de centro vermelho (a face anterior) no sentido anti horário. Isso fará com que a "linha"vermelho, amarelo, amarelo passe para a esquerda, ficando vermelho, amarelo, amarelo (de baixo para cima). E analogamente para o restante...

Chamaremos centros opostos aos centros que ficam em faces paralelas. Os centros branco e amarelo são opostos e o mesmo acontece com os centros azul e verde e os centros vermelho e laranja. Note-se que nem todos os cubos têm as mesmas cores e a mesma orientação.

No método que vamos aprender, consideramos que a face branca (o centro branco) fica voltada para baixo. E isso acontecerá até ao fim da resolução.

O leitor deverá resolver todos os problemas, colocando o centro branco para baixo e o centro amarelo para cima. De resto, poderá girar todo o cubo à sua vontade, o que corresponde a olhá-lo de frente, da direita, da esquerda ou de trás.

Vejamos, alguns movimentos que serão necessários efectuar.

Na primeira camada, temos uma peça de meio com a cor branca. A outra cor desconhecemos (pois não está visível).

Se quisermos levar essa peça para a posição onde está a peça verde, fazemos dois movimentos: em primeiro lugar, rodamos a face anterior 90 graus no sentido anti horário, passando a peça de meio branca para o lugar da azul (da face anterior). Depois, rodamos a face da direita de 90 graus no sentido horário.

Esses dois movimentos codificados ficam R', Y. Obtemos, assim, uma maneira económica e rigorosa de explicitar os movimentos realizados ou a realizar. Note-se que poderemos eliminar a vírgula, ficando apenas R'Y.

Numa segunda fase, escreveremos expressões matemáticas, onde as letras têm um aspecto ligeiramente diferente. Além disso, substituiremos R' por expoente R^{-1}, Y' por Y^{-1}, etc..

Note-se que, habitualmente, as pessoas ligadas ao cubo escrevem R', bem como R2, para duas rotações consecutivas. Neste texto, escreveremos R^2, em vez de R2. Note-se que R^2 corresponde a uma rotação de 180 graus, no sentido horário e R^{-2} corresponde a uma rotação de 180 graus no sentido anti horário. Embora o resultado final seja o mesmo, a maneira como a rotação é feita é diferente.

Note-se que a notação dos movimentos R'Y, será substituída por $R^{-1}Y$.

O cubo virtual que eu possuo não admite outros movimentos, para além dos 12 já referidos: cada face pode girar 90 graus no sentido horário ou no sentido anti horário. Mas tudo depende do software.

Na literatura relacionada com o cubo mágico, aparecem outros movimentos. As notações não são uniformes, embora comece a surgir uma tentativa de unificação. Por exemplo, podemos querer rodar as duas camadas da direita, como se estivessem "coladas"uma na outra. Aqui, utilizaremos a notação D_2. Se quisermos rodar as duas camadas da direita de 180 graus, escreveremos D_2^2. Ou D_2^{-2}, se quisermos fazer a rotação no sentido anti horário, sendo que o efeito é o mesmo do anterior.

Outro movimento frequente é a rotação das camadas do meio. É claro que há 3 camadas de meio.

M significa rodar 90 graus a camada do meio, entre as faces direita e esquerda, de modo que as peças da face de cima passem para a frente. M^{-1} é o movimento contrário, M^2 consiste em aplicar M duas vezes e M^{-2} consiste em aplicar M^{-1} duas vezes.

Q significa rodar a camada de meio paralela às faces superior e inferior, de modo que as peças da frente dessa camada passem para a direita. Analogamente, ao caso anterior, teremos Q^{-1}, Q^2 e Q^{-2}.

S significa rodar a camada de meio paralela às faces da frente e de trás, de modo que as peças de cima dessa camada passem para a direita. Analogamente, ao caso anterior, teremos S^{-1}, S^2 e S^{-2}.

Se quiser uma maneira para fixar, pode ser esta: O movimento das camadas de meio tem o mesmo sentido da camada da esquerda, de baixo ou da frente, consoante o caso.

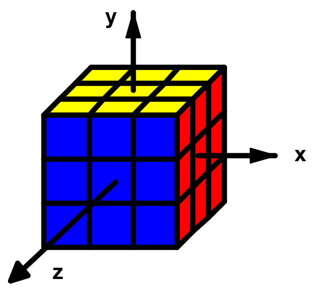
Note-se que é "mais fácil"rodar duas camadas e devolver a camada exterior. Assim, o movimento M pode ser substituído por $D_2^{-1}D$, ou seja, "trazemos"as duas camadas da direita e "levamos"a camada exterior (a da direita). Também poderemos fazer E_2E^{-1}. O mesmo se pode fazer com Q e com S. Repare que não utilizamos as notações habituais M, E e S, porque E é usado para "esquerda". Então, este "falso"E será substituído por Q, tendo-se $Q = C_2^{-1}C$. Note-se que também poderemos utilizar B_2B^{-1}.

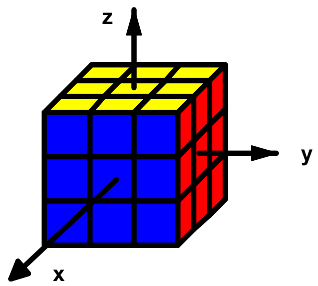
Quanto ao S, ele pode ser substituído por F_2F^{-1} ou por $T_2^{-1}T$, sendo que esta última maneira dá mais "trabalho".

Por fim, temos três rotações de todo o cubo, mantendo a posição relativa entre todas as peças.

Esses movimentos são representados, habitualmente, por x, x', y, y', z, z'. Esta notação não parece ter sido escolhida por matemáticos, mas não garanto. Nós vamos representá-los por x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, xz^{-1}ou por D_3, D_3^{-1}, C_3, C_3^{-1}, F_3, F_3^{-1}.

Observemos a figura seguinte:





No cubo da direita, estão representados três eixos na posição comum em Matemática.

No cubo da esquerda, estão colocados os três eixos numa posição nada usual, mas é aquela que torna inteligíveis os movimentos habituais, acima referidos.

Assim, x significa rodar todo o cubo em torno do eixo dos x, continuando a face vermelha à direita e passando a face azul para cima.

Sabendo o que é x, também sabemos o que é x^{-1} e, se fosse caso disso, x^2 e x^{-2}.

Analogamente, y significa rodar todo o cubo 90 graus em torno do eixo dos y. Ou seja, pomos a mão na face de cima e rodamos todo o cubo no sentido horário.

Por fim, z significa rodar todo o cubo em torno do eixo dos z, de modo que a face de cima passe para a direita.

Observação importante:

Todos os movimentos acima indicados estão referidos ao cubo da esquerda e não ao cubo da direita (na figura anterior). Note-se ainda que a rotação dum cubo virtual pode ser feita com o rato (mouse), que a rotação de duas camadas pode ser feita rodando a terceira camada (paralela a essas duas no sentido inverso, rodando convenientemente o cubo) e que a rotação das camadas de meio pode ser substituída pela rotação das camadas exteriores (de forma adequada) e pela rotação conveniente do cubo.

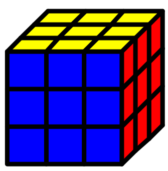
Por fim, note-se que a vantagem da utilização das rotações do cubo reside na simplificação de certas fórmulas, permitindo que sejam utilizados movimentos mais rápidos como, por exemplo, D e C.

Como vimos, em vez de x, y, z vamos utilizar as seguintes notações: D_3, C_3, F_3. D_3, por exemplo, significa rodar as 3 camadas da direita (ou seja, todo o cubo), no sentido horário.

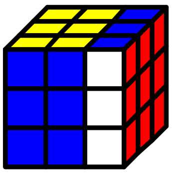
Esta notação é bastante conveniente em cubos "maiores", por exemplo, no cubo 5×5×5 ou mesmo no cubo 4×4×4.

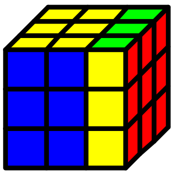
Vejamos as imagens dos vários movimentos, quando aplicados a um cubo resolvido, sendo que cada movimento se aplica ao cubo resolvido e não a posições entretanto obtidas.

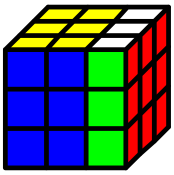
Vamos considerar que a situação inicial do cubo é a da figura seguinte, ou seja, centro azul, na frente e centro amarelo, em cima.

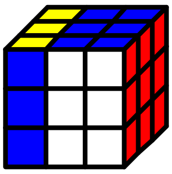


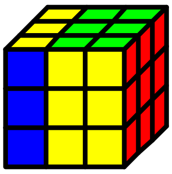
Movimentos no Cubo de Rubik 3×3×3

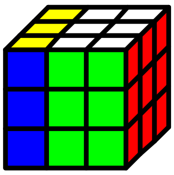

D

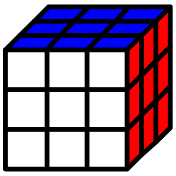

D^{-1}

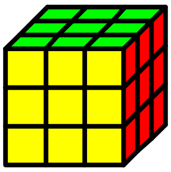

D^2

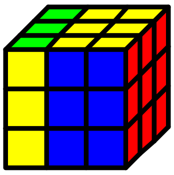

D_2

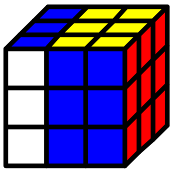

D_2^{-1}

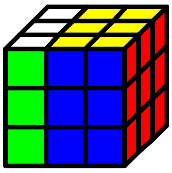

D_2^2

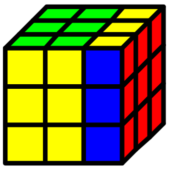

D_3

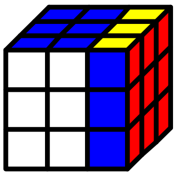

D_3^{-1}

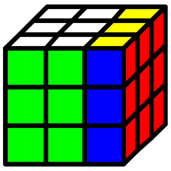

E

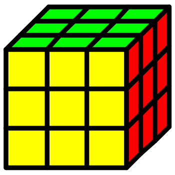

E^{-1}


E^2

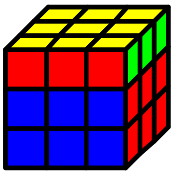

E_2

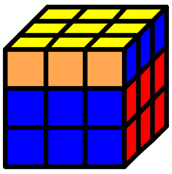

E_2^{-1}

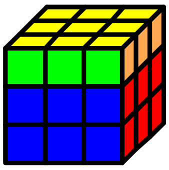

E_2^2

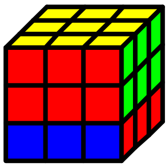

E_3

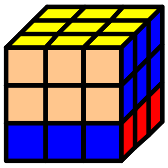
Note-se que não precisamos de E_3, pois este movimento é o mesmo que D_3^{-1}.

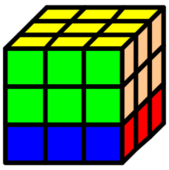

C

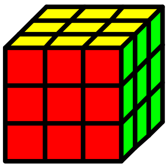

C^{-1}

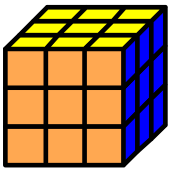

C^2

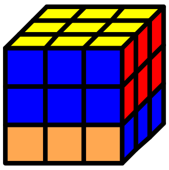

C_2

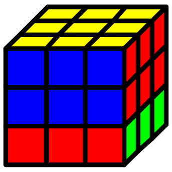

C_2^{-1}

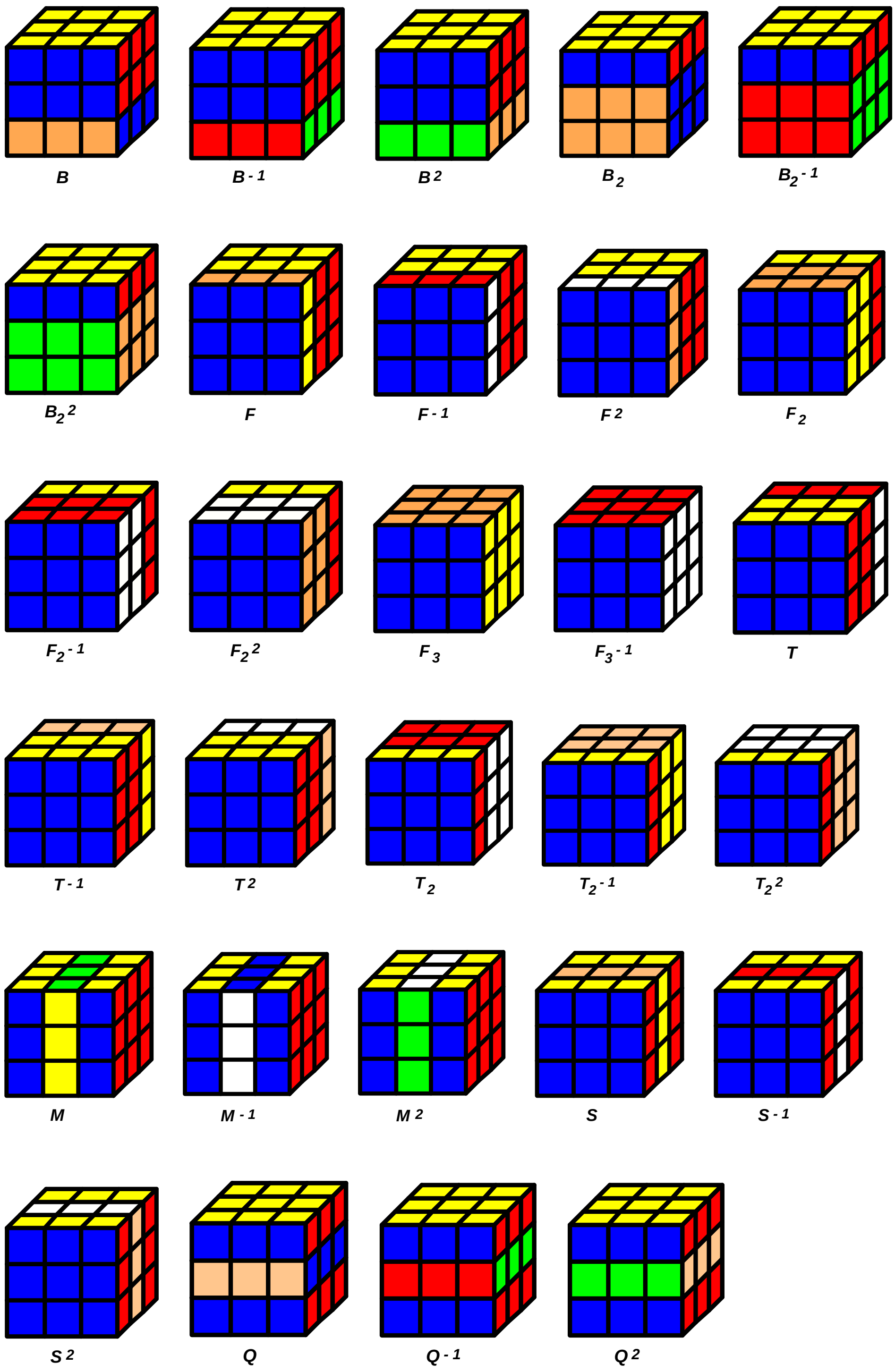

C_2^2


C_3


C_3^{-1}


B

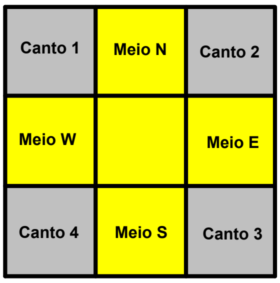

B^{-1}


B
B^{-1}
B^2
B_2
B_2^{-1}
B_2^2
F
F^{-1}
F^2
F_2
F_2^{-1}
F_2^2
F_3
F_3^{-1}
T
T^{-1}
T^2
T_2
T_2^{-1}
T_2^2
M
M^{-1}
M^2
S
S^{-1}
S^2
Q
Q^{-1}
Q^2

Note-se que $M = D_2^{-1}D$, $S = F_2F^{-1}$ e $Q = B_2B^{-1}$. A letra Q tem origem na palavra Equador e foi escolhida, porque usamos E para movimentar a camada Esquerda. Note-se que os movimentos M, S e Q são análogos a E, F e B.

Cantos e Meios

Neste texto, os cantos e os meios da camada de cima são identificados da seguinte maneira:



O Método Avançado de Camadas (Fridrich)

1. Cruz branca devidamente alinhada em torno do centro branco

2. Resolver as duas primeiras camadas, colocando canto e meio em simultâneo

3. Face superior amarela, com uma única sequência

4. Acertar cantos e meios da camada superior, com uma única sequência

Para acertar os cantos e os meios da terceira camada, só podemos usar fórmulas que mantenham todas as peças da terceira camada com a cor amarela voltada para cima; de qualquer modo, quem usa este método costuma saber todas as fórmulas necessárias.

A Cruz Branca

Quem pretende aprender o método de Fridrich tem de já saber resolver a cruz branca (convém que já saiba resolver todo o cubo), pelo que não vamos abordar este tema.

Capítulo 2

P2C ou F2L

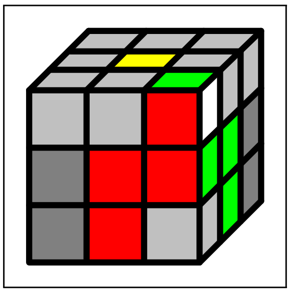
Note-se que P2C significa "primeiras duas camadas", tendo-se que F2L significa "first two layers".

Vejamos as fórmulas que utilizamos nas resolução das duas primeiras camadas (P2C, F2L em inglês).

Quando completamos a cruz branca, pode acontecer que algum dos cantos já esteja devidamente colocado. Até poderá acontecer que algum par de canto e meio esteja devidamente colocado.

Para colocar, em simultâneo, um canto (da primeira camada) e um meio (da segunda camada), podemos usar a nossa intuição ou podemos aplicar um algoritmo duma lista algo extensa. Eis essa lista (de algoritmos):

1. **A1**



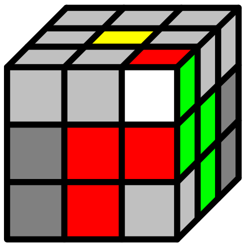
Soluções:

(**a**) $C^{-1}DC^2D^{-1}CDCD^{-1}$

(**b**) $CDCD^{-1}C^2DCD^{-1}$

(**c**) $EB^{-1}E^{-1}CEBE^{-1}$

2. A2



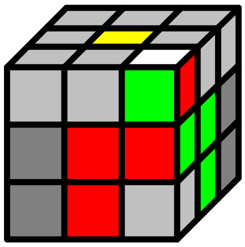
Soluções:

(**a**) $C^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C^{2}\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$

(**b**) $\left(T^{-1}BT\right)C^{-1}\left(T^{-1}B^{-1}T\right)$

(**c**) $DCD^{-1}C^{-1}F^{-1}C^{2}FC^{-1}DC^{-1}D^{-1}$

3. A3



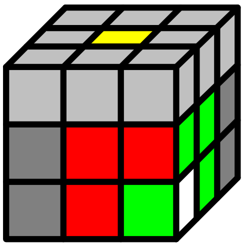
Soluções:

(**a**) $\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)\left(DCD^{-1}\right)=\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)^{2}\left(DCD^{-1}\right)$

(**b**) $\left(D^{2}C\right)\left(D^{2}C\right)\left(D^{2}C^{2}D^{2}\right)$

(**c**) $\left(DCD^{-1}\right)\left(C^{2}DC^{2}D^{-1}C^{2}\right)\left(DCD^{-1}\right)$

4. B1



Soluções:

(**a**) $DC^2DCD^{-1}CDC^2D^2$

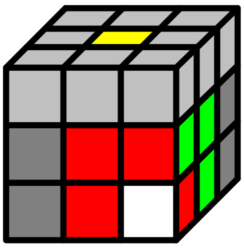
(**b**) $F\left(FC^2F\right)\left(CF^{-1}C\right)\left(FC^2F\right)$

(**c**) $DC^{-1}D^{-1}CDC^2D^{-1}CDC^{-1}D^{-1}$

(**d**) $C_3E^{-1}C^{-1}EC^2E^{-1}C^2EC^{-1}E^{-1}CEC^2E^{-1}C^{-1}E$

(**e**) $DC^{-1}D^{-1}CF^{-1}C^{-1}FC^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2DCD^{-1}$

5. B2

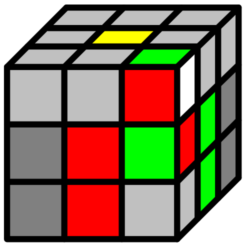


Soluções:

(**a**) $DC\left(D^{-1}C^{-1}D\right)C^2\left(D^{-1}C^{-1}D\right)CD^{-1}$

(**b**) $D^2C^2\left(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)C^2D^{-1}$

6. C1



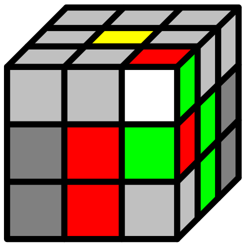
Soluções:

(**a**) $CF^{-1}C^{-1}FC^{-1}DCD^{-1}$

(**b**) $\left(DCD^{-1}\right)(CDC)\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)F$

(**c**) $C_3DE^{-1}C^{-1}EB_2ECE^{-1}$

7. C2



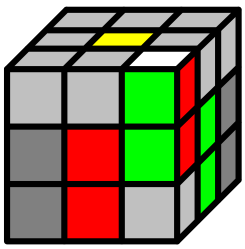
Soluções:

(**a**) $C^{-1}DCD^{-1}CF^{-1}C^{-1}F$

(**b**) $C^{-1}DCD^{-1}B_2D^{-1}C^{-1}D$

(**c**) $\left(DCD^{-1}C\right)\left(F^{-1}C^2FC^2\right)\left(F^{-1}C^{-1}F\right)$

8. C3



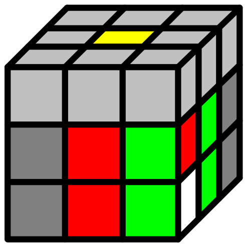
Soluções:

(**a**) $DC^{-1}D^{-1}CF^{-1}CF$

(**b**) $DC^{-1}D^{-1}F^{-1}C^2F$

(**c**) $DC^{-1}E_2C^{-1}D^{-1}CE_2^{-1}$

9. D1



Soluções:

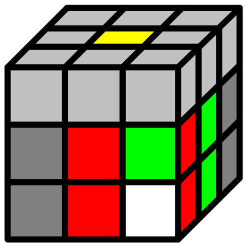
(**a**) $DC^{-1}D^{-1}C^2C_3^{-1}D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}CD$

(**b**) $DCD^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}CB_2D^{-1}C^{-1}D$

(**c**) $\left(F^{-1}CF^{-1}\right)\left(C^{-1}E^{-1}\right)(CE)\,F^2$

(**d**) $\left(F^{-1}CFC^{-1}\right)\left(DCD^{-1}\right)C\left(DCD^{-1}\right)$

10. D2



Soluções:

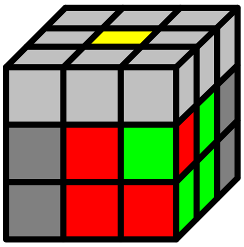
(**a**) $DC^{-1}D^{-1}B_2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^{-1}D$

(**b**) $D\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)B_2\left(D^{-1}C^{-1}D\right)$

(**c**) $F^2\left(E^{-1}C^{-1}E\right)\left(CFC^{-1}F\right)$

(**d**) $F^{-1}CFDC^{-1}D^{-1}C^2DCD^{-1}$

11. D3



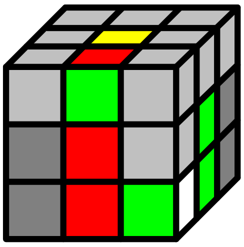
Soluções:

(**a**) $\left(DC^2D^{-1}\right)C\left(DC^2D^{-1}\right)B_2\left(D^{-1}C^{-1}D\right)$

(**b**) $DC^{-1}D^{-1}B_2D^{-1}C^2DC^2D^{-1}CD$

(**c**) $F^{-1}CF^{-1}C^2D^{-1}F^2DC^2F^2$

12. E1



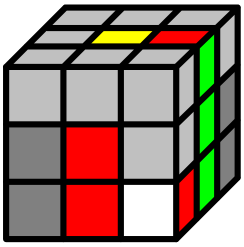
Soluções:

(**a**) $\left(C^{-1}DCD^{-1}\right)\left(C^{-1}DCD^{-1}\right)$

(**b**) $\left(C^{-1}DCD^{-1}\right)^2$

(**c**) $CF^{-1}CFDCD^{-1}$

13. E2



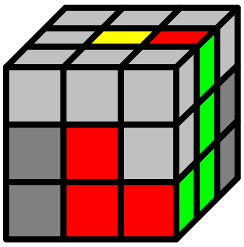
Soluções:

(**a**) $D\left(C^{-1}D^{-1}\right)(CD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)$

(**b**) $DC^{-1}D^2C^{-1}FDF^{-1}$

(**c**) $F^{-1}C^{-1}FC^2DC^{-1}D^{-1}$

14. E3

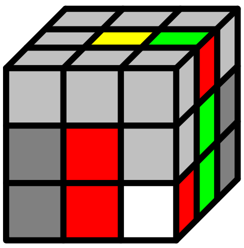


(**a**) $C^{-1}F^{-1}C^{-1}FCDCD^{-1}$

(**b**) $C^{-1}D^{-1}FDF^{-1}DCD^{-1}$

(**c**) $DC^{-1}D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}CBCD^{-1}$

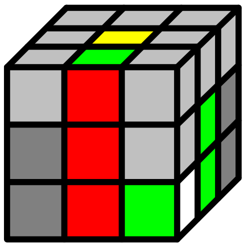
15. F1



Soluções:

(**a**) $C^{-1}DC^{-1}D^{-1}F^{-1}C^{-1}F$
(**b**) $CC_3^{-1}\left(D^{-1}C^{-1}D\right)C\left(D^{-1}C^{-1}D\right)$
(**c**) $C_3C\left(E^{-1}C^{-1}E\right)C\left(E^{-1}C^{-1}E\right)$

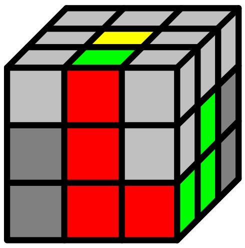
16. F2



Soluções:

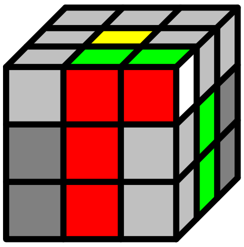
(**a**) $C_3E^{-1}CEC^{-1}E^{-1}CE$
(**b**) $F^{-1}CF^2D^{-1}F^{-1}D$

17. F3



(**a**) $(CDC)\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)F$
(**b**) $CDC^{-1}D^{-1}B_2^{-1}E^{-1}CE$
(**c**) $D^{-1}C^2T^{-1}DTC^2D$

18. **I1** – Par perfeito



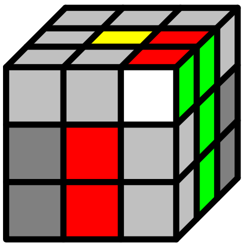
Soluções:

(**a**) $C^{-1}F^{-1}CF$

(**b**) $B_2^{-1}E^{-1}CE$

(**c**) $C_3C^{-1}E^{-1}CE$

19. **I2** – Par perfeito



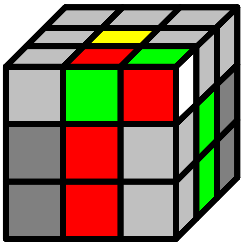
Soluções:

(**a**) $CDC^{-1}D^{-1}$

(**b**) $D^{-1}FDF^{-1}$

(**c**) B_2TCT^{-1}

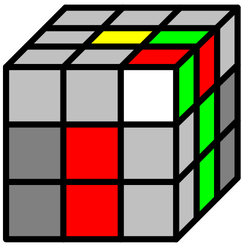
20. **J1**



Soluções:

(**a**) $D^{-1}C^2D^2CD^2CD$
(**b**) $C_3CE^{-1}C^2EB_2^{-1}ECE^{-1}$
(**c**) $CF^{-1}C^2FC^{-1}DCD^{-1}$
(**d**) $\left(DCD^{-1}\right)\left(CF^{-1}C^{-1}FC\right)\left(DCD^{-1}\right)$

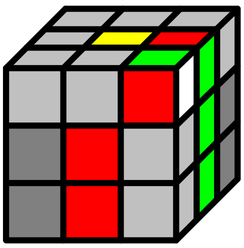
21. J2



Soluções:

(**a**) $C^{-1}DC^2D^{-1}B_2D^{-1}C^{-1}D$
(**b**) $C_3EC^2E^2C^{-1}E^2C^{-1}E^{-1}$
(**c**) $C^{-1}DC^2D^{-1}CF^{-1}C^{-1}F$

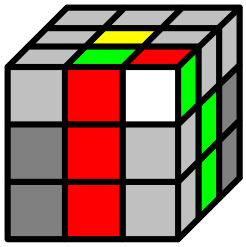
22. K1



Soluções:

(**a**) $C^{-1}DC^{-1}D^{-1}CDCD^{-1}$
(**b**) $F^{-1}C^{-1}F^2D^{-1}F^{-1}D^2CD^{-1}$

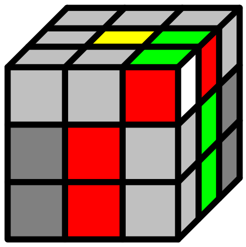
23. K2



Soluções:

(**a**) $\left(CF^{-1}CF\right)\left(C^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)F$
(**b**) $B_2D^{-1}\left(CD\right)\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)D$
(**c**) $C_3\left(CE^{-1}CE\right)\left(C^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)E$

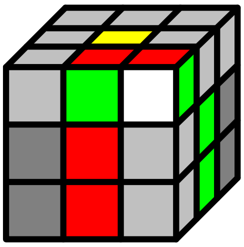
24. L1



Soluções:

(**a**) $DC^{-1}D^{-1}C^2F^{-1}C^{-1}F$
(**b**) $DC^{-1}D^{-1}CB_2D^{-1}C^{-1}D$
(**c**) $DC^{-1}D^{-1}C^2C_3E^{-1}C^{-1}E$

25. L2



Soluções:

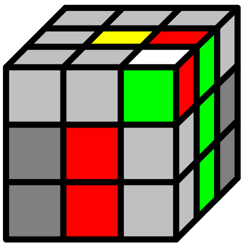
(**a**) $F^{-1}CFC^2DCD^{-1}$

(**b**) $\left(DCD^{-1}\right)C^2\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$

(**c**) $C_3E^{-1}CEC^2C_3^{-1}DCD^{-1}$

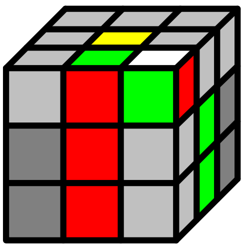
(**d**) $DCD^{-1}C^2F^{-1}C^{-1}FC^2DC^{-1}D^{-1}$

26. M1



Solução: $DC^2D^{-1}C^{-1}DCD^{-1}$

27. M2

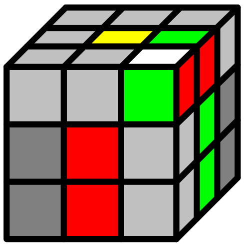


Soluções:

(**a**) $F^{-1}C^2FCF^{-1}C^{-1}F$

(**b**) $C_3E^{-1}C^2ECE^{-1}C^{-1}E$

28. **N1**



Soluções:

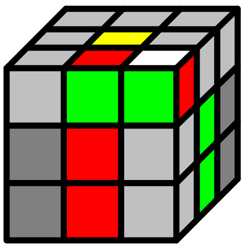
(**a**) $\left(F^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)\left(EFE^{-1}\right)C^2F$

(**b**) $C_3\left(C^2E^2C^2\right)\left(ECE^{-1}C\right)E^2$

(**c**) $C_3\left(C^{-1}E^{-1}C\right)\left(ECE^{-1}\right)\left(CEC^{-1}\right)\left(E^{-1}CE\right)$

(**d**) $\left(DC^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)\left(F^{-1}C^{-1}F\right)\left(C^2F^{-1}CF\right)$

29. **N2**



(**a**) $\left(C^2D^2C^2\right)\left(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}\right)D^2$

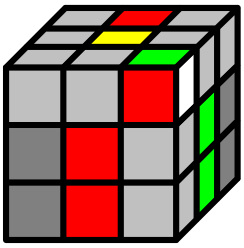
(**b**) $C\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$

(**c**) $\left(CDC^{-1}D^{-1}\right)\left(C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)\left(CDC^{-1}D^{-1}\right)$

(**d**) $DCDT^{-1}D^{-1}TC^2D^{-1}$

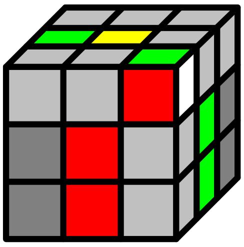
(**e**) $DCD^{-1}CDC^2D^{-1}C^2DCD^{-1}$

30. **Pesca direita** DCD^{-1}



31. **Pesca frente-esquerda** $F^{-1}C^{-1}F$

32. **Q1**



Soluções:

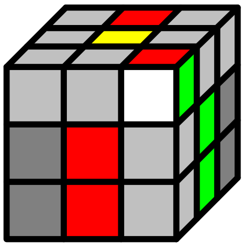
(**a**) $B_2D^{-1}C^{-1}DC^2D^{-1}CD$

(**b**) $C_3CE^{-1}C^{-1}EC^2E^{-1}CE$

(**c**) $CF^{-1}C^{-1}FC^2F^{-1}CF$

(**d**) $C_3^{-1}CD^{-1}C^{-1}DC^2D^{-1}CD$

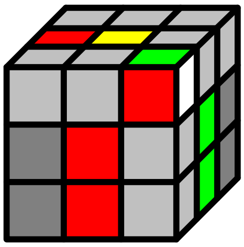
33. **Q2**



Soluções:

(**a**) $C^{-1}DCD^{-1}C^2DC^{-1}D^{-1}$
(**b**) $F^2E^{-1}C^{-1}ECF^2$

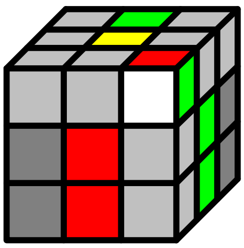
34. R1



Soluções:

(**a**) $C^{-1}\left(DCD^{-1}\right)C\left(DCD^{-1}\right)$
(**b**) $CF^{-1}CFC^{-1}DCD^{-1}$

35. R2

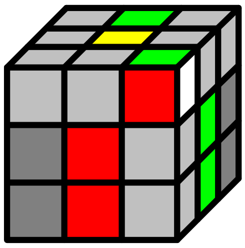


(**a**) $B_2\left(D^{-1}C^{-1}D\right)C^{-1}\left(D^{-1}C^{-1}D\right)$

(**b**) $C^{-1}DC^{-1}D^{-1}B_2D^{-1}C^{-1}D$

(**c**) $F^{-1}CE^{-1}C^{-1}EC^2F$

36. S1



Soluções:

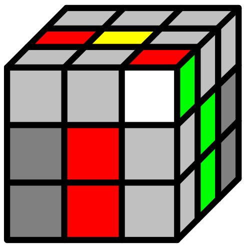
(**a**) $C_3CE^{-1}C^2EC^2D_2^{-1}FD_2$

(**b**) $C_3CE^{-1}C^2EC^2E^{-1}CE$

(**c**) $F^{-1}C^{-1}E^{-1}C^2EC^{-1}F$

(**d**) $CF^{-1}C^2FC^2F^{-1}CF$

37. S2

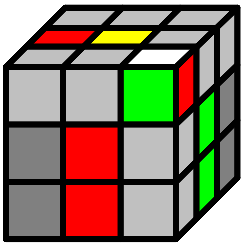


Soluções:

(**a**) $C^{-1}DC^2D^{-1}C^2DC^{-1}D^{-1}$

(**b**) $DCD^{-1}CF^{-1}C^2FC^{-1}DC^{-1}D^{-1}$

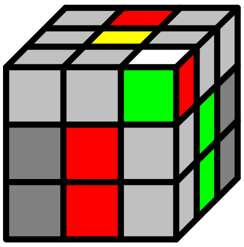
38. Split 1,1



Soluções:

(**a**) $DTC^2T^{-1}D^{-1}$
(**b**) $DC^{-1}D^{-1}C^2DCD^{-1}$
(**c**) $C^2DCD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}$

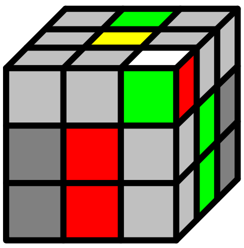
39. Split 1,2



Soluções:

(**a**) $CDC^2D^{-1}CDC^{-1}D^{-1}$
(**b**) $CDCT^{-1}DTD^2$

40. Split 2,1



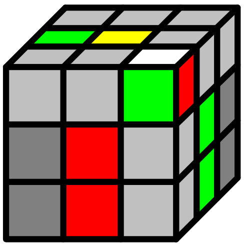
Soluções:

(**a**) $F^{-1}E^{-1}C^2EF$

(**b**) $C_3E^{-1}CEC^2E^{-1}C^{-1}E$

(**c**) $C_3C^2E^{-1}C^{-1}EC^{-1}E^{-1}CE$

41. **Split 2,2**



Soluções:

(**a**) $\left(C^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)\left(EF^{-1}E^{-1}\right)F^2$

(**b**) $\left(C^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)E^2\left(E^{-1}F^{-1}E^{-1}\right)F^2$

(**c**) $B_2^{-1}E^{-1}C^2EC^{-1}E^{-1}CE$

(**d**) $C_3C^{-1}E^{-1}C^2EC^{-1}E^{-1}CE$

Note-se que, para colocar os quatro cantos da primeira camada, basta-nos raciocinar e um pouco de treino. Em alternativa, temos que decorar a lista anterior.

Capítulo 3

Face Amarela (OLL ou OUC)

Neste capítulo, aprenderemos a resolver a face superior do cubo. Para isso, temos de orientar as peças da Terceira Camada, para o que existe outra lista de algoritmos. ´Tratase da lista conhecida por OLL (com as iniciais das palavras portuguesas, seria algo como OUC – Orientar a Última Camada).

Quando comecei a escrever este capítulo, pretendendo resolver a terceira camada num só passo, embora começando por querer resolver a face amarela e ver o que acontecia depois, nunca imaginei que houvesse um tão grande número de possibilidades para a camada superior. Muito mais tarde, cheguei à conclusão que o número de casos em que a cruz da face superior já estava resolvida, era assustador: cerca de 5 centenas! Foi nessa altura que abandonei a ideia de resolver a terceira camada num só passo.

Quanto terminamos a resolução das duas primeiras camadas, temos uma de 57 posições essencialmente diferentes. Logo, vamos ter que saber 57 fórmulas, para conseguirmos resolver a face superior do cubo duma só vez. Nas 57 posições, não estamos a contar com o caso em que a face superior ficou resolvida.

Vejamos, então, as várias possibilidades para a camada superior. Nas imagens que aprentamos, apenas vamos mostrar a segunda e terceira camadas, porque a primeira camada é óbvia.

Vamos dividir os casos a resolver por secções, consoante o número de amarelos voltados para cima. Note-se que contaremos com o centro, pelo que o número de amarelos voltados para cima varia entre 1 e 7. É claro que o caso em que temos 9 amarelos voltados para cima já está resolvido. Além disso, dizemos que uma peça (da camada de cima) está orientada se essa peça tiver o amarelo voltado para cima.

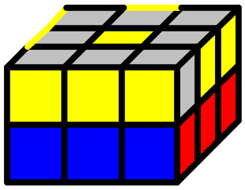
Observação

Nas figuras deste Capítulo, só vamos usar duas camadas, omitindo-se a primeira camada ("igual"à segunda). Com isso, poupou-se trabalho e "espaço".

3.1 Um só amarelo voltado para cima

Há dois casos diferentes em que apenas um amarelo está voltado para cima.

1. Três amarelos para a frente, dois amarelos para a esquerda, dois para a direita e um para trás:

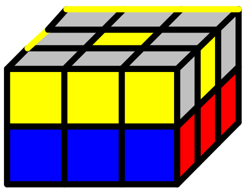


Soluções:

(a) $EF^{-1}E^{-1}FCF^2D^{-1}F^{-1}DC^{-1}F^{-1}$

(b) $C_3\left(FDCD^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)F_2\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)F_2^{-1}$

2. Três amarelos para a frente e três para trás:



Soluções:

(a) $FCD^{-1}FDF^2C^{-1}F^{-1}EFE^{-1}$

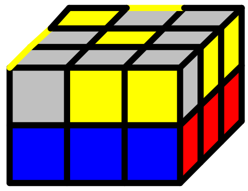
(b) $C_3DC^2D^2FDF^{-1}C^2D^{-1}FDF^{-1}$

(c) $C_3DCD_3^{-1}C^{-1}DCE_2^{-1}D^{-1}C^{-1}E_2^{-1}CE_2F^{-1}$

3.2 Dois amarelos voltados para cima

Há dois casos com dois amarelos voltados para cima.

1. Canto Noroeste orientado, dois amarelos na face esquerda, dois na da frente, dois na da direita e um na de trás.

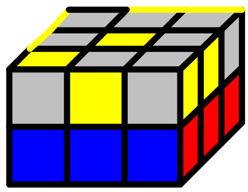


Soluções:

(a) $C_3D^{-1}EFE^{-1}C^2EFD^{-1}FD^2E^{-1}$

(b) $C_3^{-1}DE^{-1}T^{-1}EC^2E^{-1}T^{-1}DT^{-1}D^2E$

2. Canto Sudoeste orientado, dois amarelos na face esquerda, dois na de trás, dois na da direita e um na da frente.



Soluções:

(a) $C_3D^{-1}EF^{-1}DC^2D^{-1}F^{-1}EF^{-1}DE^2$

(b) $C_3^{-1}D_2^{-1}DC^{-1}D_2C^2D_2^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^2D_2$

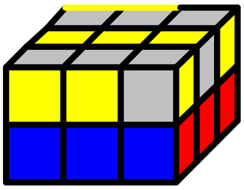
(c) $C_3^{-1}E_2E^{-1}C^{-1}D_2C^2D_2^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^2D_2$

3.3 Três amarelos voltados para cima

Há treze casos com três amarelos voltados para cima. Vamos começar pelos casos em que temos o centro e dois meios opostos com o amarelo voltado para cima.

3.3.1 Centro e dois meios

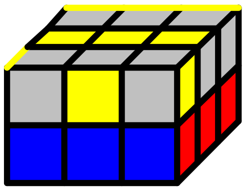
1. Traço (com dois amarelos na frente, dois atrás e dois na direita):



Soluções:

(**a**) $\left[(FCD)\left(C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)\right]^2$
(**b**) $(FCD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)(CD)\left(C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)$
(**c**) $C_3^2F_2\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)^2F_2^{-1}\left(C_3^2\right)$
(**d**) $C_3^2F_2\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)F_2^{-1}\left(C_3^2\right)$

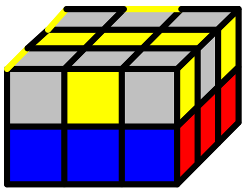
2. Traço (com um amarelo na esquerda, um na frente, um na direita e três amarelos atrás):



Soluções:

(**a**) $C_3\left(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)B_2\left(D^{-1}CD\right)T$
(**b**) $C_3\left(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)\left(CF^{-1}CFD\right)\left(C_3^{-1}\right)$

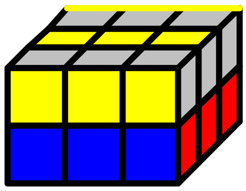
3. Traço (com um amarelo na frente, um atrás, dois na esquerda e dois na direita):



Soluções:

(**a**) $(EFD)\left(F^{-1}E^2FC\right)\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)E$
(**b**) $\left(E^{-1}T^{-1}E\right)\left(C^{-1}D^{-1}CD\right)\left(C^{-1}D^{-1}CD\right)\left(E^{-1}TE\right)$
(**c**) $(FDC)\left(D^{-1}C^{-1}DF^{-1}\right)D_2\left(CD^{-1}C^{-1}\right)D_2^{-1}$
(**d**) $\left(E^{-1}T^{-1}D^{-1}\right)\left(TE^2T^{-1}C^{-1}\right)(DCT)E^{-1}$
(**e**) $\left(D^{-1}F^{-1}E^{-1}\right)\left(FD^2F^{-1}C^{-1}\right)(ECF)D^{-1}$

4. Traço (com três amarelos na frente e três amarelos atrás):

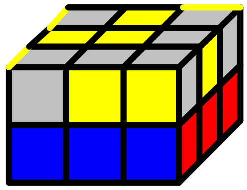


Soluções:

(**a**) $C_3D^{-1}C^2D^2CD^{-1}CDC^2D_3^{-1}C^{-1}D^{-1}C\,(D_3)\,(C_3^{-1})$
(**b**) $C_3D^{-1}C^2D^2CD^{-1}CDC^2T^{-1}D^{-1}T(C_3^{-1})$
(**c**) $C_3DC^2D^2C^{-1}DC^{-1}D^{-1}CB_2DTD^{-1}$
(**d**) $C_3EFC^{-1}DCD^2F^{-1}E^{-1}FDF^{-1}(C_3^{-1})$

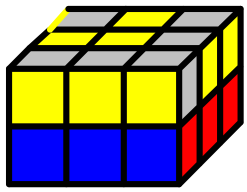
Note-se que, nos 4 casos apresentados, podemos (e devemos) colocar o centro e os dois meios de perfil, de modo a eliminarmos aquele C_3 que aparece no início de todas as fórmulas. Não foi isso que fizemos, pois a posição apresentada é aquela que todos conhecem (do método básico). Já agora, sempre que colocamos um movimento de todo o cubo, no final da fórmula, é para que se possa reverter a sequência e obtermos a posição indicada, partindo duma posição do cubo em que já temos a face superior resolvida (e as duas primeiras camadas). É o caso da primeira fórmula do caso anterior em que temos, no final, (D_3). É claro, que para resolvermos o cubo, não precisamos de fazer esse (D_3).

5. Nove horas (dois amarelos na frente, dois na esquerda, um na direita e um atrás):



Solução: $(FDC)\left(D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)$

6. Nove horas (três amarelos na frente, um na esquerda e dois na direita):



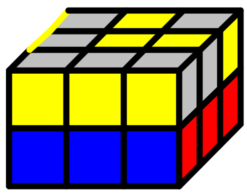
Soluções:

(**a**) $FE^{-1}C^2EC^2EF^2E^{-1}F$

(**b**) $D_3CD^{-1}C^2E_2C^2DC^2E_2^{-1}C\left(D_3^{-1}\right)$

(**c**) $C_3^{-1}DT^{-1}D^2FD^2TD^2F^{-1}D\,(C_3)$

7. Três horas (três amarelos na frente, dois na esquerda e um na direita):



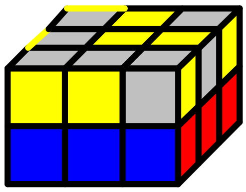
Soluções:

(**a**) $F^{-1}EF^2E^{-1}C^2E^{-1}C^2EF^{-1}$

(**b**) $C_3D_2^{-1}CD_2^2C^{-1}D_2^2C^{-1}D_2^2CD_2^{-1}\left(C_3^{-1}\right)$

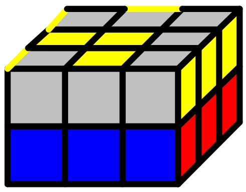
(c) $C_3E_2C^{-1}DCD^{-1}E_2^{-1}C^2FD^{-1}F^{-1}D\left(C_3^{-1}\right)$

8. Três horas (dois amarelos na frente, dois na direita, um na esquerda e um atrás):



Solução: $\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)(EC)\left(E^{-1}C^{-1}\right)(ECF)$

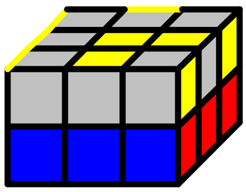
9. Nove horas e meia (três amarelos na direita, dois na esquerda e um atrás):



Soluções:

(**a**) $C_3^2D_2CD^{-1}CDC^{-1}D^{-1}CDC^2D_2^{-1}\left(C_3^2\right)$
(**b**) $\left(FD^{-1}F^{-1}D\right)C^2F^2\left(EFE^{-1}F\right)$
(**c**) $E_2CE^{-1}CEC^{-1}E^{-1}CEC^2E_2^{-1}$

10. Três horas e meia (três amarelos na esquerda, dois na direita e um atrás):



Soluções:

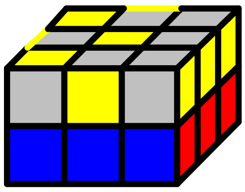
(**a**) $D_2^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}CDC^{-1}D^{-1}C^2D_2$

(**b**) $\left(F^{-1}EFE^{-1}\right)C^2F^2\left(D^{-1}F^{-1}DF^{-1}\right)$

(**c**) $C_3^2E_2^{-1}C^{-1}EC^{-1}E^{-1}CEC^{-1}E^{-1}C^2E_2\left(C_3^2\right)$

3.3.2 Centro e dois cantos

1. Sinal $>$ (com 3 amarelos, na direita):

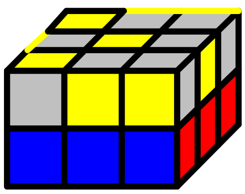


Soluções:

(**a**) $C_3^{-1}D_2^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D_2^2CD^{-1}CDC^2D_2^{-1}\left(C_3\right)$

(**b**) $C_3^2\left(DC^2D^2\right)\left(FDF^{-1}\right)C^2\left(D_2D^{-1}CDC^{-1}D_2^{-1}\right)$

2. Sinal $>$ (com 1 amarelo, na direita):

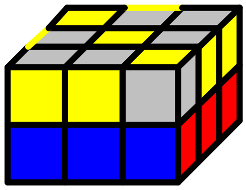


Soluções:

(**a**) $C_3D_2^{-1}\left(DCDC\right)\left(D^{-1}C^{-1}\right)D_2D^2\left(FDF^{-1}\right)\left(C_3^{-1}\right)$

(**b**) $\left(FC^2\right)\left(F^{-1}E^{-1}T^{-1}\right)\left(CD^{-1}C^2\right)\left(DTE\right)$

3. Diagonal principal (com dois amarelos na frente e dois na direita):



Soluções:

(a) $C_3^2\left(DCD^{-1}CD^{-1}\right)\left(FDF^{-1}\right)C^2\left(D^{-1}FDF^{-1}\right)$

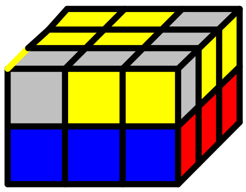
(b) $\left(EF^{-1}E^{-1}F\right)C^2\left(FC^{-1}DC^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)$

Repare-se no bloco $\left(FC^{-1}DC^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)$, quase igual ao que chamamos de Facada.

3.4 Quatro amarelos voltados para cima

Há doze casos com quatro amarelos voltados para cima.

1. Quadrado Noroeste, 2 amarelos voltados para a frente, 2 para a direita e 1 para a esquerda.



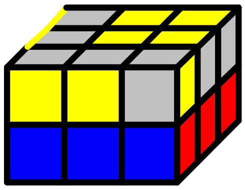
Soluções (produzem os mesmos efeitos):

(a) $D^{-1}F^2EFE^{-1}FD$

(b) $E_2^{-1}C^2ECE^{-1}CE_2$

(c) $C_3^2D_2^{-1}C^2DCD^{-1}CD_2$

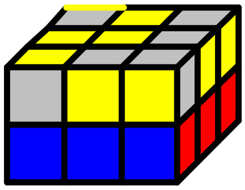
2. Quadrado Nordeste, 2 amarelos voltados para a frente, 2 para a esquerda e 1 para a direita.



Soluções (produzem os mesmos efeitos):

(**a**) $D_2C^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D_2^{-1}$
(**b**) $EF^2D^{-1}F^{-1}DF^{-1}E^{-1}$
(**c**) $C_3^2E_2C^2E^{-1}C^{-1}EC^{-1}E_2^{-1}$

3. Escada estreita ascendente 1–2–1 (e dois amarelos na frente, dois na direita e um atrás):

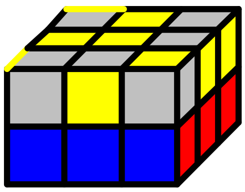


Note-se que Escada 1–2–1 significa que, na face de cima, temos 1 amarelo na camada da frente, 2 na camada intermédia e 1 na camada de trás.

Soluções (produzem os mesmos efeitos):

(**a**) $D_2CD^{-1}CDC^2D_2^{-1}$ (quase igual ao Sonho...)
(**b**) $EFD^{-1}FDF^2E^{-1}$

4. Seta a 135°

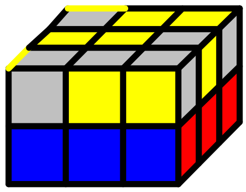


Soluções:

(**a**) $C_3^{-1}DC\left(D^{-1}CD^{-1}\right)\left(FDF^{-1}\right)\left(DC^2D^{-1}\right)$

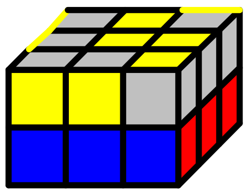
(**b**) $C_3^{-1}DCD^{-1}D_3F_3^{-1}D^{-1}CDT^{-1}D^{-1}C^{-1}E_2$

5. Escada ascendente 0–2–2 (dois amarelos na frente e um em cada uma das outras faces laterais):



Solução: $C_3^2D_2^{-1}D^2\left(CD^{-1}C\right)DC^2\left(D^{-1}CD^{-1}\right)D_2$

6. Escada estreita descendente 1–2–1 (dois amarelos na esquerda, dois na frente e um atrás):



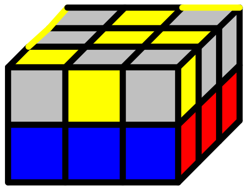
Soluções (fazem a mesma coisa):

(**a**) $D^{-1}F^{-1}EF^{-1}E^{-1}F^2D$

(**b**) $E_2^{-1}C^{-1}EC^{-1}E^{-1}C^2E_2$

(**c**) $C_3^2D_2^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D_2\left(C_3^2\right)$

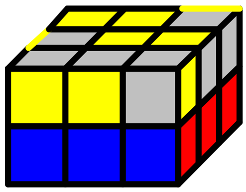
7. Seta a 45°:



Soluções (fazem quase a mesma coisa, pois apenas muda a posição final do cubo):

(**a**) $\left(F^{-1}C^{-1}\right)(FE)\left(F^{-1}E^{-1}\right)(CEF)\,E^{-1}$
(**b**) $C_3^{-1}D^{-1}C^{-1}DC_3^{-1}D_3^{-1}DC^{-1}D^{-1}FDCE_2^{-1}\left(C_3^2\right)$
(**c**) $C_3^{-1}D^{-1}C^{-1}E_2F_3^{-1}DC^{-1}D^{-1}FDCD^{-1}\,(D_3)$

8. Escada descendente 0–2–2 (dois amarelos na frente e um em cada uma das outras faces laterais):

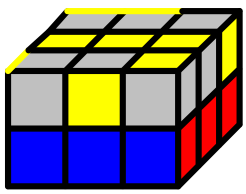


Soluções (fazem o mesmo):

(**a**) $D_2D^2C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2DC^{-1}DD_2^{-1}$
(**b**) $C_3^2E_2E^2C^{-1}EC^{-1}E^{-1}C^2EC^{-1}D_2D^{-1}$

9. Martelo $\mathbf{D_1}$

A face superior lembra um martelo (ou um machado) virado para a direita e há um amarelo na frente:

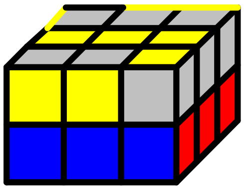


Soluções:

(**a**) $\left(E^{-1}T^{-1}E\right)\left(D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(E^{-1}TE\right)$
(**b**) $\left(D_2^{-1}C^{-1}D_2\right)\left(D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(D_2^{-1}CD_2\right)$

10. Martelo $\mathbf{D_2}$

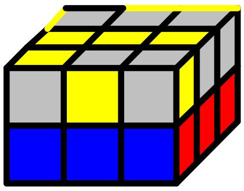
A face superior lembra um martelo virado para a direita e há dois amarelos na frente:



Soluções:

(**a**) $D^{-1}(FDC)\left(E_2^{-1}C^{-1}E_2\right)C_3^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}\right)(C_3)$
(**b**) $D^{-1}(FDC)\left(E_2^{-1}C^{-1}E_2\right)\left(FC^{-1}F^{-1}\right)$
(**c**) $D^{-1}(FDC)\left(D^{-1}F^{-1}\right)(DF)\left(C^{-1}F^{-1}\right)$
(**d**) $C_3^2E_3E^{-1}(CEF)\left(E^{-1}C^{-1}E\right)E_3^{-1}C_3^{-1}\left(EC^{-1}E^{-1}\right)\left(C_3^{-1}\right)$

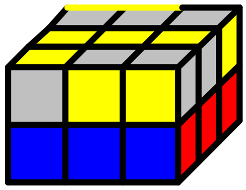
11. Martelo $\mathbf{E_1}$



Soluções:

(**a**) $\left(DTD^{-1}\right)(EC)\left(E^{-1}C^{-1}\right)\left(DT^{-1}D^{-1}\right)$
(**b**) $\left(E_2CE_2^{-1}\right)(EC)\left(E^{-1}C^{-1}\right)\left(E_2C^{-1}E_2^{-1}\right)$

12. Martelo $\mathbf{E_2}$



Soluções:

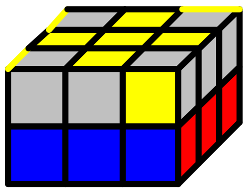
(**a**) $E\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)(EF)\left(E^{-1}F^{-1}\right)(CF)$
(**b**) $C_3^2D_3^{-1}D\left(C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)\left(DCD^{-1}\right)D_3C_3\left(D^{-1}CD\right)(D_3)$
(**c**) $E\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)\left(D_2CD_2^{-1}\right)C_3\left(E^{-1}CE\right)\left(C_3^{-1}\right)$
(**d**) $E\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)\left(D_2CD_2^{-1}\right)\left(F^{-1}CF\right)$

3.5 Cinco amarelos voltados para cima

Há vinte e um casos com cinco amarelos voltados para cima, sendo que dois casos têm a cruz pronta, um caso só tem o centro da cruz e os restantes 18 casos têm dois meios e dois cantos com o amarelo voltado para cima.

3.5.1 Cruz amarela

1. Cruz (2,1,0,1) – dois amarelos na esquerda, um na frente, nenhum na direita e um atrás:

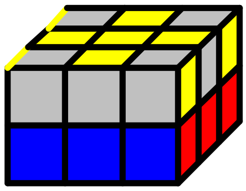


Soluções:

(**a**) $\left(DC^2\right)\left(D^2C^{-1}D^2C^{-1}D^2\right)\left(C^2D\right)$
(**b**) $\left(DCD^{-1}CDC^2D^{-1}\right)C^{-1}\left(DCD^{-1}CDC^2D^{-1}\right)$

(**c**) SonhoC^{-1}Sonho

2. Cruz (2,0,2,0) – dois amarelos na esquerda e dois na direita:



(**a**) $\left(DCD^{-1}CD\right)\left(C^{-1}D^{-1}\right)(CD)\left(C^2D^{-1}\right)$

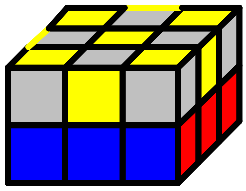
(**b**) $C_3\left(DC^2\right)\left(D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)$

(**c**) $C_3\left(DC^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)\left(DC^2D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}\right)$

(**d**) $C_3\left[(\text{Sonho})^{-1}\right]^2$

3.5.2 Centro e quatro cantos

1. Quina – centro e quatro cantos com o amarelo voltado para cima:



Soluções:

(**a**) $(MC)^4\left(M^{-1}C\right)^4$

(**b**) $\left(D_2^{-1}DC\right)^4\left(D_2D^{-1}C\right)^4$

(**c**) $D_2^{-1}(DC)(DC)\left(D^{-1}C^{-1}\right)D_2^2D^2\left(CDC^{-1}\right)D_2^{-1}$

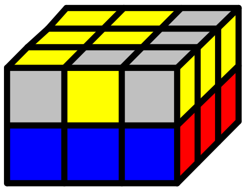
3.5.3 Dois meios e dois cantos

Vamos dividir os 18 casos em dois grupos.

Quadrado 2×2 e um canto

Temos 6 casos, com um quadrado 2×2 e um canto amarelos

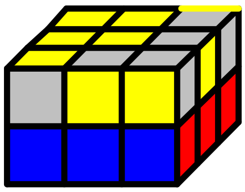
1. Caso **pI** – temos uma espécie de **p** amarelo (na face superior) e um I (ou l) amarelo, na face da direita:



Soluções:

(**a**) $FCDC^{-1}D^{-1}F^{-1}$
(**b**) $C_3^2F_2DCD^{-1}C^{-1}F_2^{-1}\left(C_3^2\right)$
(**c**) $(C_3ECC_3)\,E\left(C^{-1}E^{-1}T^{-1}\right)\left(C_3^2\right)$

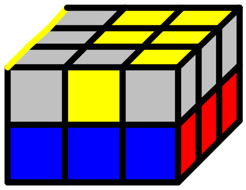
2. Caso **p2** – temos o **p** amarelo e dois amarelos na face da frente:



Soluções:

(**a**) $C_3^{-1}D_3^{-1}\left(C^{-1}DC\right)E_2^{-1}\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(D^{-1}CD\right)$
(**b**) $E\left(B_2D^{-1}B_2^{-1}\right)\left(E^{-1}CEFE^{-1}\right)$
(**c**) $C_3^2E_2F\left(C^{-1}F^{-1}D^{-1}\right)(FDC)\,E_2^{-1}\left(C_3^2\right)$
(**d**) $(EC)\left(F^{-1}C^{-1}E^{-1}\right)(CEF)\,E^{-1}$

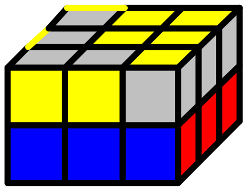
3. Caso **Iq** – temos uma espécie de **q** amarelo (na face superior) e um I (ou l) amarelo, na face da esquerda:



Soluções:

(**a**) $\left(F^{-1}C^{-1}E^{-1}\right)(CEF)$
(**b**) $C_3^2 F_2^{-1}\left(E^{-1}C^{-1}\right)(EC)\,F_2\left(C_3^2\right)$
(**c**) $\left(C_3^{-1}D^{-1}C^{-1}C_3^{-1}D^{-1}\right)(CDT)\left(C_3^2\right)$

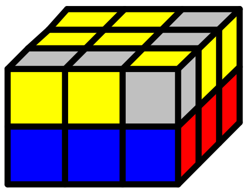
4. Caso **q2** – temos o **q** amarelo e dois amarelos na face da frente:



Soluções:

(**a**) $C_3 D_3^{-1}\left(CE^{-1}C^{-1}\right)D_2\,(CEC)\left(E^{-1}C^{-1}\right)\left(EC^{-1}E^{-1}\right)(C_3)$
(**b**) $\left(D^{-1}B_2^{-1}\right)(EB_2)\,D\left(C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)D$
(**c**) $C_3^2 D_2^{-1}F^{-1}\,(CFE)\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)D_2\left(C_3^2\right)$
(**d**) $\left(D^{-1}C^{-1}\right)\left(FCDC^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)D$

5. Caso **Q(2,2)** – temos uma espécie de **Q** amarelo na face superior, dois amarelos na face da frente e outros dois na face da direita:

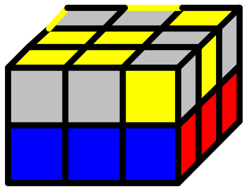


Soluções:

(**a**) $(FD)\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(D^{-1}F^{-1}\right)$

(**b**) $\left(FD^{-1}F^{-1}\right)(DCD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)$

6. Caso **O'(1,1,1,1)** – temos uma espécie de **O'** amarelo na face superior, e um amarelo em cada face lateral. Na realidade, a figura amarela da face superior lembra mais o sinal de masculino, mas eu não disponho desse sinal. Também podemos rodar todo o cubo de 90°, no sentido horário, formando-se o **Q** do caso anterior, mas com os amarelos laterais diferentes. Essa será a solução para quem não goste do **O'**. Nas soluções apresentadas, bastará acrescentar C_3^{-1}, antes das fórmulas apresentadas.

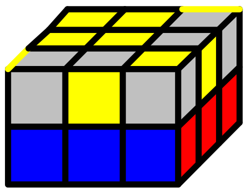


(**a**) $\left(E^{-1}C^{2}\right)E^{2}\left(F^{-1}E^{-1}FE^{-1}\right)\left(C^{2}E\right)$

(**b**) $C_3^{-1}\left(DC^{2}D^{2}\right)\left(FDF^{-1}\right)\left(DC^{2}D^{-1}\right)$

(**c**) $C_3^{2}\left(D^{-1}C^{2}E_2\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C\left(E_2^{-1}C^{2}D\right)$

Caso **Q(1,1,1,1)** – se optarmos pela seguinte posição padrão, as soluções serão:



(**a**) $C_3^{-1}\left(E^{-1}C^{2}\right)E^{2}\left(F^{-1}E^{-1}FE^{-1}\right)\left(C^{2}E\right)$

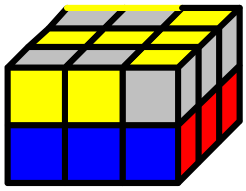
(**b**) $C_3^{2}\left(DC^{2}D^{2}\right)\left(FDF^{-1}\right)\left(DC^{2}D^{-1}\right)$

(**c**) $C_3\left(D^{-1}C^{2}E_2\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)C\left(E_2^{-1}C^{2}D\right)$

Dois meios opostos e dois cantos

Há seis casos em que os dois meios com amarelo para cima ficam nas posições oeste e leste.

1. Caso **T(0,2,0,2)** – a face superior lembra um **T** caído para a direita, com dois amarelos voltados para trás e dois voltados para a frente:

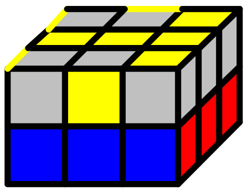


Soluções:

(**a**) $(DC)\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)\left(FDF^{-1}\right)$

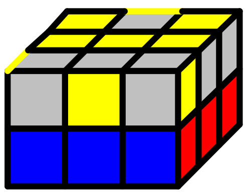
(**b**) $(FD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)(CDC)\left(D^{-1}F^{-1}\right)$

2. Caso **T(2,1,0,1)** – a face superior lembra um **T** caído para a direita, com dois amarelos voltados para a esquerda, um para a frente e um para trás:



Solução: $(FDC)\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)$

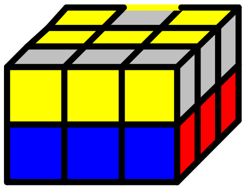
3. Caso **U(1,1,1,1)** – a face superior lembra um **U** com um amarelo dos cantos em cada uma das faces laterais (esquerda e direita):



Soluções:

(**a**) $\left(D^{-1}C^{-1}\right)(DCFD)\left(T^{-1}D^{-1}TF^{-1}\right)$
(**b**) $\left(D^{-1}C^{-1}DC\right)C_3^{-1}\left(E_2CE^{-1}C^{-1}D_2\right)D^{-1}$
(**c**) $D_3\left(C^2E^2C^{-1}\right)D_3^{-1}(DC)\left(D^{-1}C^{-1}\right)D_3\left(CE^2C^2\right)D_3^{-1}$

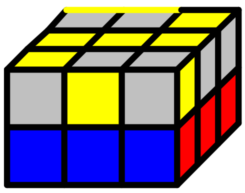
4. Caso **U(0,3,0,1)** − a face superior lembra um **U** com três amarelos voltados para a frente e um para trás:



Soluções:

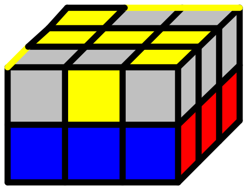
(**a**) $C_3^{-1}(DC)D_3^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}C\right)D_3\left(C^{-1}D^{-1}\right)(C_3)$
(**b**) $C_3^{-1}\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)\left(FDF^{-1}\right)(CD)(C_3)$
(**c**) $C_3^{-1}\left(D^{-1}C^{-1}\right)\left(E_2^{-1}CE_2\right)\left(F^{-1}CD\right)(C_3)$

5. Torneira voltada para a esquerda (ou uma chave de parafusos...):



Solução: $E\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)(ECF)\left(C^{-1}E^{-1}\right)$

6. Torneira voltada para a direita:

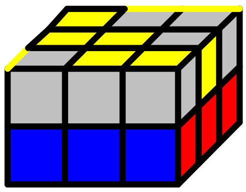


Solução: $D^{-1}(FDC)\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)(CD)$

Dois meios adjacentes e dois cantos (sem formar quadrado)

Há seis casos em que os dois meios com amarelo para cima ficam em posições adjacentes (formando uma pequena diagonal). Vamos chamá-los de cadeiras (4 deles) e escadas. As cadeiras poderão estar voltadas para a direita (CD) ou para a esquerda (CE) e indicaremos o número de amarelos nas faces laterais por esta ordem: esquerda, frente, direita, trás. No entanto, é capaz de ser mais fácil chamar-lhes, apenas, CD0, CD1, CE1 e CE2, consoante o número de amarelos na face direita. Quanto às duas escadas, chamar-lhe-emos escada ascendente e escada descendente. No primeiro caso, os degraus sobem, da esquerda para a direita; no segundo caso, os degraus descem, da esquerda para a direita. Vamos começar pelas escadas, por serem apenas dois casos.

1. Escada descendente:



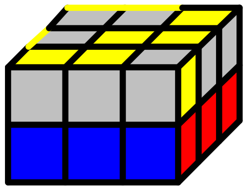
Soluções:

(**a**) $C_3\left(DCD^{-1}CD\right)\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)\left(FDF^{-1}\right)$

(**b**) $FDCD^2C^{-1}F^{-1}CFDF^{-1}$

(**c**) $\left[FDC\left(D^{-1}\right)D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right](CFD)\,F^{-1}$

2. Escada ascendente:

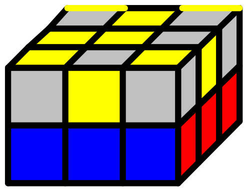


Soluções:

(**a**) $\left(F^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)\left(E^{2}CF\right)\left(C^{-1}F^{-1}E^{-1}\right)F$

(**b**) $C_3^{-1}\left(E^{-1}C^{-1}EC^{-1}E^{-1}\right)(CECE)\left(F^{-1}E^{-1}F\right)$

3. **CE(0,1,1,2)** ou **CE1**:

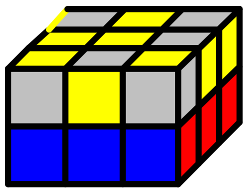


Soluções:

(**a**) $ED^2\left(B^{-1}F^{-1}\right)(BFD)\left(F^{-1}DE^{-1}\right)$

(**b**) $C_3^2D\left(C^{-1}D^{-1}\right)\left(C^2DC\right)C_3D\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)(C_3)$

4. **CE(1,1,2,0)** ou **CE2**:

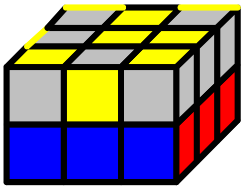


Soluções:

(**a**) $\left(FCDC^{-1}TD^{-1}F^{-1}\right)\left(DT^{-1}D^{-1}\right)$

(**b**) $\left[FCDC^{-1}(T)D^{-1}F^{-1}\right]\left(DT^{-1}D^{-1}\right)$
(**c**) $C_3^2\left(D^2C\right)\left(D^{-1}T^{-1}\right)\left(DC^{-1}\right)\left(D^2C\right)\left(E_2CE_2^{-1}\right)\left(C_3^2\right)$
(**d**) $C_3^{-1}E_2CD^{-1}BDF_3^{-1}D_3D_2^2FD_2C^2E_2^{-1}\left(C_3^2\right)$
(**e**) $\left(D_3C^2E^2C^{-1}D_3^{-1}\right)\left(CDC^{-1}\right)E_2^{-1}CE^2C^2D_3^{-1}$

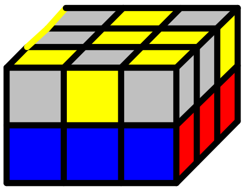
5. **CD(1,1,0,2)** ou **CD0**:



Soluções:

(**a**) $\left(D^{-1}CDC^2D^{-1}C^{-1}\right)C_3^{-1}\left(D^{-1}CDCT\right)$
(**b**) $\left(D^{-1}CD\right)C^2\left(D^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)(CFCD)$
(**c**) $D^{-1}E^2BFB^{-1}F^{-1}E^{-1}FE^{-1}D$

6. **CE(2,1,1,0)** ou **CD1**:



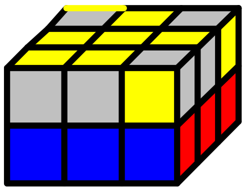
Soluções:

(**a**) $\left(F^{-1}C^{-1}E^{-1}\right)\left(CT^{-1}\right)(EF)\left(E^{-1}TE\right)$
(**b**) $C_3^{-1}D_2\left(CD^{-1}C^{-1}\right)E^2E_2\left(CDC^{-1}D^{-1}\right)E$
(**c**) $D_3C^2D^2CD_3^{-1}C^{-1}E^{-1}CD_2C^{-1}D^2C^2\left(D_3^{-1}\right)$
(**d**) $C_3^2T^{-1}DT^{-1}D^2CDCD^{-1}C^{-1}DT^2\left(C_3^2\right)$
(**e**) $F^{-1}EF^{-1}C_3^2D^2CDCD^{-1}C^{-1}DT^2\left(C_3^2\right)$

3.6 Seis amarelos voltados para cima

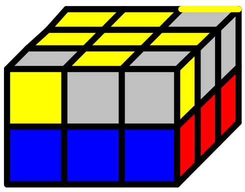
Há dois casos com seis amarelos voltados para cima. Em ambos, temos a cruz amarela formada, havendo um canto com o amarelo para cima. Para resolver a camada de cima, colocamos o cubo de modo que não haja nenhum amarelo na face da esquerda. O canto com amarelo para cima ficará na camada da esquerda, à frente ou atrás. No primeiro caso, aplicamos a sequência **Sonho** e, no segundo caso, aplicamos a sequência **anti-Sonho**.

1. Cruz amarela pronta e o canto "sudoeste"orientado, sem amarelos na face da esquerda:



Solução: $DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$

2. Cruz amarela pronta e o canto "noroeste"orientado, sem amarelos na face da esquerda:



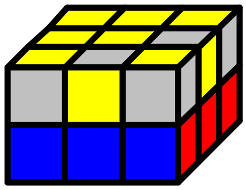
Solução: $D^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^2D$

Note-se que, em ambos os casos, há outras soluções, mas as duas apresentadas são bem conhecidas daqueles que aprenderam o método básico das camadas, razão pela qual não apresentamos mais soluções.

3.7 Sete amarelos voltados para cima

Há cinco casos com sete amarelos voltados para cima: dois casos com dois meios errados e três casos com dois cantos errados.

1. Dois meios adjacentes errados:



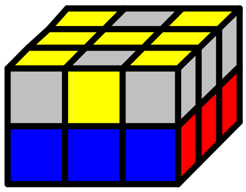
Soluções:

(**a**) $\left(MCM^{-1}\right)C^2\left(MCM^{-1}\right)$ ou $D_2^{-1}DCD^{-1}D_2C^2D_2^{-1}DCD^{-1}D_2$

(**b**) $\left(D_2CD^{-1}C^{-1}D_2^{-1}\right)(DCD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)$

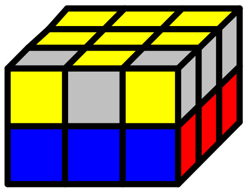
(**c**) $EF^{-1}EF^2D^{-1}FDF^2E^2$

2. Dois meios opostos errados, formando um H amarelo:



Solução: $DCD^{-1}C^{-1}D_2D^{-1}CDC^{-1}D_2^{-1}$

3. Dois cantos com o amarelo para a frente:

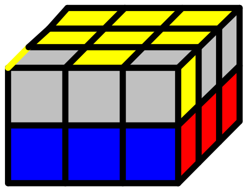


Soluções:

(**a**) $E^{-1}C^2ET\left(C^{-1}E^{-1}C^{-1}\right)ECT^{-1}$

(**b**) $C_3^2 D^{-1} C^2 DF \left(C^{-1} D^{-1} C^{-1}\right) DCF^{-1}$
(**c**) $D^2 BD^{-1} C^2 DB^{-1} D^{-1} C^2 D^{-1}$
(**d**) $C_3^2 D^2 B^{-1} DC^2 D^{-1} BDC^2 D$
(**e**) $F^{-1} C^2 \left(FCF^{-1}\right) (CFT)\, C^2 \left(T^{-1} C^{-1} TC^{-1} T^{-1}\right)$
(**f**) $C^2 D^2 B^{-1} DC^2 D^{-1} BDC^2 D$

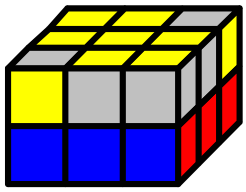
4. Um canto com o amarelo para a esquerda e outro com o amarelo para a direita (na camada da frente):



Soluções:

(**a**) $C_3^{-1} E_2^{-1} C^{-1} ECDC^{-1} D_2^{-1} F$
(**b**) $TCT^{-1} CTC^2 T^{-1} F^{-1} C^{-1} FC^{-1} F^{-1} C^2 F$
(**c**) $\left(C^{-1} D^{-1}\right) \left(F^{-1} EF\right) D \left(F^{-1} E^{-1} F\right)$
(**d**) $E_2 CD^{-1} BDC^{-1} E_2^{-1} F^{-1}$

5. Dois cantos errados, na diagonal secundária, com um amarelo para a frente e outro para a direita:



Soluções:

(**a**) $\left(D^{-1} FD\right) \left(T^{-1} D^{-1} F^{-1}\right) DT$
(**b**) $C_3^2 E_2^{-1} C^{-1} E^{-1} CDC^{-1} EC \left(D_3^{-1}\right)$
(**c**) $C_3 D_3^{-1} \left(C^{-1} D^{-1} B^{-1}\right) DCE_2^{-1} FD$

Capítulo 4

PLL (PUC)

Vamos apresentar algumas das fórmulas que permitem resolver a terceira camada duma única vez, depois de obtida a face amarela (face superior). Há vários casos a considerar: só falta ordenar meios, só falta ordenar cantos e falta ordenar cantos e meios.

4.0.1 Só meios

1. **Valsa esquerda**: $F^2CED^{-1}F^2E^{-1}DCF^2$

2. **Valsa direita**: $F^2C^{-1}ED^{-1}F^2E^{-1}DC^{-1}F^2$

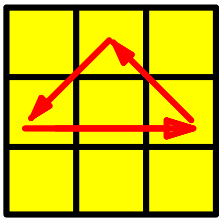
3. **H**: $M^2CM^2C^2M^2CM^2$

4. **Z**: $D_3^{-1}DC^{-1}D^{-1}CBD^{-1}C^{-1}BD^{-1}CDF_3^{-1}D^{-1}D_3D^{-1}C$

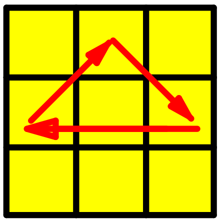
Observação

Habitualmente, é costume utilizar-se as sequências U_1 e U_2, em vez das **Valsas** acima referidas. A **Valsa** (esquerda ou direita) tem o mesmo número de movimentos das sequências U_1 e U_2. E faz praticamente a mesma coisa, pois mantém um meio e triangula os outros três. A única diferença é que o meio que fica inalterado é o da frente e não o de trás. Como as Valsas são sequências que estão perfeitamente assimiladas, basta decorar os dois outros casos, sendo que o caso H é relativamente fácil de decorar. De qualquer modo, aqui fica o registo de U_1 e U_2, além de H e Z:

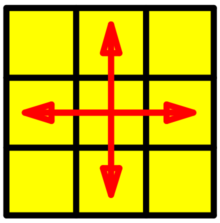
$\mathbf{U_1}$



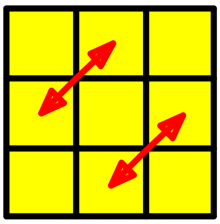
Solução: $D^2\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)(DCDCD)\left(C^{-1}D\right)$
U_2



Solução: $\left(D^{-1}C\right)\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)\left(CDCD^2\right)$
H:



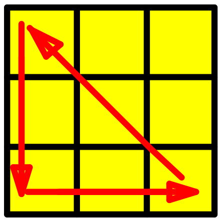
Solução: $\left(M^2CM^2\right)C^2\left(M^2CM^2\right)$
Z:



Solução: $D_3^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}C\right)\left(BD^{-1}C^{-1}B\right)\left(D^{-1}CD\right)\left(B^2F\right)(D_3)$

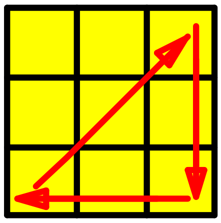
4.0.2 Só cantos

1. $\mathbf{A_1}$



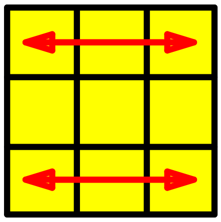
Solução: $D_3^{-1}E^2B^2\left(ECE^{-1}\right)B^2\left(EC^{-1}E\right)(D_3)$

2. $\mathbf{A_2}$



Solução: $D_3^{-1}D^2B^2\left(D^{-1}C^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CD^{-1}\right)(D_3)$

3. **E**



Solução: $\left(EC^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CE^{-1}\right)\left(DC^{-1}E\right)B^2\left(E^{-1}CD^{-1}\right)$

Observação
Das três sequências anteriores, só a terceira interessa verdadeiramente, porque já sabemos uma sequência que resolve uma das situações e a sua inversa resolve a outra situação.

Trata-se da sequência Tango (e da sua inversa), sequências essas que preservam os quatro meios e um canto (o canto que está na frente à esquerda).

Em resumo, existem as seguintes sequências que trocam cantos entre si:

1. **Tango**: $D^{-1}FD^{-1}T^2DF^{-1}D^{-1}T^2D^2$
2. **Inversa do Tango**: $D^2T^2DFD^{-1}T^2DF^{-1}D$
3. $\mathbf{A_1}$: $D_3^{-1}E^2B^2\left(ECE^{-1}\right)B^2\left(EC^{-1}E\right)(D_3)$
4. $\mathbf{A_2}$: $D_3^{-1}D^2B^2\left(D^{-1}C^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CD^{-1}\right)(D_3)$
5. **E**: $\left(EC^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CE^{-1}\right)\left(DC^{-1}E\right)B^2\left(E^{-1}CD^{-1}\right)$

Numa primeira fase, o leitor deve acertar os meios e os cantos independentemente, para não ter que decorar muitas fórmulas duma vez. Apenas necessitará de três fórmulas: as que correspondem aos casos **H**, **Z** e **E**. Decorar três fórmulas é algo manifestamente simples.

Vamos colocar essas três fórmulas juntas:

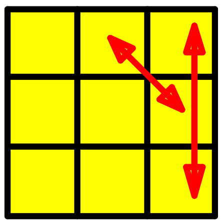
1. **H**: $M^2CM^2C^2M^2CM^2$
2. **Z**: $D_3^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}C\right)\left(BD^{-1}C^{-1}\right)\left(BD^{-1}C\right)\left(DF_3^{-1}D^{-1}\right)\left(D_3D^{-1}C\right)$
3. **E**: $\left(EC^{-1}D\right)B^2\left(D^{-1}CE^{-1}\right)\left(DC^{-1}E\right)B^2\left(E^{-1}CD^{-1}\right)$

Recordamos uma mnemónica para o caso **E**: EsCaDa, DoCE DoCE, EsCaDa. Excluindo B^2, os expoentes são alternadamente 1 e -1.

Numa segunda fase, acertará cantos e meios simultaneamente, para o que vai necessitar de decorar as fórmulas seguintes.

4.0.3 Dois cantos e dois meios

1. $\mathbf{J_1}$



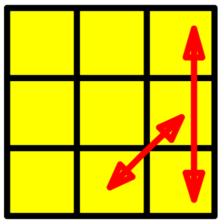
Solução 1: $D_3C^2D_2^{-1}C^{-1}D_2C^2E_2^{-1}CD^{-1}C^{-1}D^2D_3^2$

Solução 2: $\left(EC^{-1}D^{-1}CE^{-1}\right)\left(C^2D\right)\left(C^{-1}D^{-1}\right)\left(C^2D\right)$

Solução 3: $C^{-1}D^{-1}C^{-1}D^2TD^{-1}C^{-1}D^{-1}CDT^{-1}D^{-1}CD$

Solução 4: $D^{-1}C^{-1}DTD^{-1}C^{-1}DCDT^{-1}D^2CDC$

2. $\mathbf{J_2}$



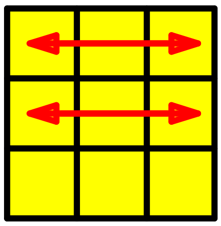
Solução 1: $\left(E^{-1}CDC^{-1}E\right)\left(C^2D^{-1}\right)\left(CD\right)\left(C^2D^{-1}\right)$

Solução 2: $CDCD^2F^{-1}DCDC^{-1}D^{-1}FDC^{-1}D^{-1}$

Solução 3: $C_3^2D_3C^2E_2CE_2^{-1}C^2D_2C^{-1}ECE^2$

Solução 4: $D_3^{-1}C^2D_2CD_2^{-1}C^2E_2C^{-1}DCD^2D_3^2$

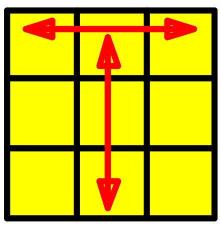
3. **F**



Solução 1: $\left(D^{-1}CDC^{-1}\right)D^2C_3^{-1}\left(D^{-1}C^{-1}DC\right)$

Solução 2: $C_3D_3\left(DCD^{-1}C^{-1}\right)D^2D_3^{-1}C^{-1}$

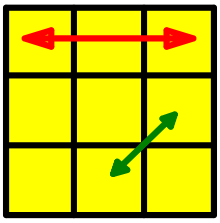
4. **T**



Solução 1: $\left(CD^2C^{-1}D^2\right)\left(BT^2\right)\left(E^2CE^2\right)\left(B^{-1}T^2\right)$

Solução 2: $C_3\,(DC)\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}\right)FD^2\left(C^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)(DC)\left(D^{-1}F^{-1}\right)$

5. **$\mathbf{R_1}$**

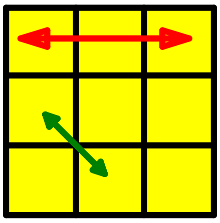


Solução 1: $\left(D^{-1}C^2DC^2D^{-1}\right)(FDC)\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)D^2C^{-1}$

Solução 2: $(FEC)\left(E^{-1}FEC^{-1}\right)(FCF)\left(C^{-1}F^{-1}E^{-1}\right)F^2$

Solução 3: $F^2\,(EFC)\left(F^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)\left(CE^{-1}F^{-1}E\right)\left(C^{-1}E^{-1}F^{-1}\right)$

6. **$\mathbf{R_2}$**

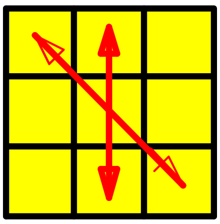


Solução 1: $C_3^2\left(DC^2D^{-1}C^2D\right)\left(T^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)\left(DCE_2CD^2F\right)D_3C_3^2$

Solução 2: $\left(F^{-1}D^{-1}C^{-1}\right)D\left(F^{-1}D^{-1}\right)C\left(F^{-1}C^{-1}F^{-1}\right)(CFD)\,F^2$

Solução 3: $F^2\left(D^{-1}F^{-1}C^{-1}\right)(FCF)\,C^{-1}\,(DF)\,D^{-1}\,(CDF)$

7. **$\mathbf{N_1}$**



Sol. 1: $\left(EC^{-1}DC^2E^{-1}CD^{-1}\right)\left(EC^{-1}DC^2E^{-1}CD^{-1}\right)C$

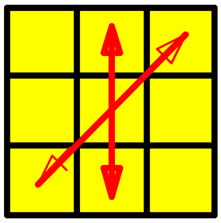
Sol. 1: $\left(EC^{-1}DC^2E^{-1}CD^{-1}\right)^2 C$

Sol. 2: $F_3D^{-1}\left(CD^{-1}BD^2C^{-1}DB^{-1}\right)\left(CD^{-1}BD^2C^{-1}DB^{-1}\right)\left(F_3^{-1}\right)$

Sol. 2: $F_3D^{-1}\left(CD^{-1}BD^2C^{-1}DB^{-1}\right)^2\left(F_3^{-1}\right)$

Sol. 3: $F_3BD^{-1}CD^2B^{-1}DC^{-1}BD^{-1}CD^2B^{-1}DC^{-1}DF_3^{-1}$

8. $\mathbf{N_2}$



Sol. 1: $E^{-1}CD^{-1}F_3D^2CD^{-1}C^{-1}BDB^{-1}D^2CD^{-1}F_3^{-1}DC^{-1}$

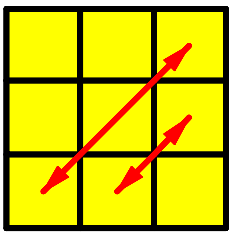
Sol. 2: $\left(D^{-1}CE^{-1}C^2DC^{-1}E\right)\left(D^{-1}CE^{-1}C^2DC^{-1}E\right)C^{-1}$

Sol. 2: $\left(D^{-1}CE^{-1}C^2DC^{-1}E\right)^2 C^{-1}$

Sol. 3: $F_3D\left(C^{-1}DB^{-1}D^2CD^{-1}B\right)\left(C^{-1}DB^{-1}D^2CD^{-1}B\right)\left(F_3^{-1}\right)$

Sol. 3: $F_3D\left(C^{-1}DB^{-1}D^2CD^{-1}B\right)^2\left(F_3^{-1}\right)$

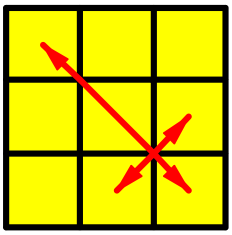
9. V



Sol. 1: $E^{-1}CDC^{-1}ECE^{-1}CD^{-1}C^{-1}EC^2DC^2D^{-1}$

Sol. 2: $C_3^{-1}D^{-1}CD^{-1}C^{-1}C_3D_3^2D^{-1}CD^{-1}C^{-1}D^2C_3D_3D^{-1}C^{-1}DCD\left(D_3C_3\right)$

10. Y

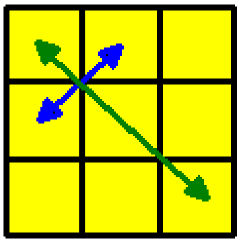


Sol. 1: $E^{-1}C^{-1}EF^2D^{-1}BDCD^2B^{-1}D^2C^{-1}F^2$

Sol. 2: $C_3^2FDC^{-1}D^{-1}C^{-1}DCD^{-1}F^{-1}DCD^{-1}C^{-1}D^{-1}FDF^{-1}$

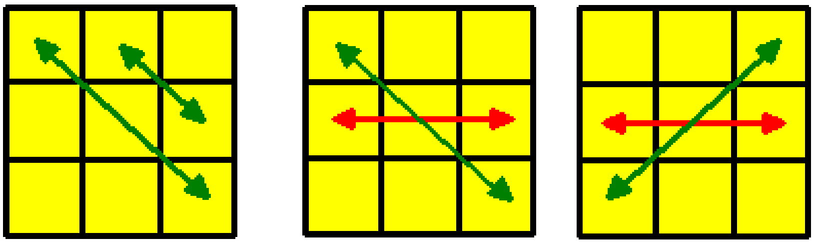
Sol. 3: $C_3^2D^2C^{-1}D^{-1}CDC^{-1}C_3^{-1}D_3^{-1}E^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^{-1}EC\left(D_3C_3^{-1}\right)$

Há outra maneira de resolver a situação anterior, modificando ligeiramente a posição padrão:



Neste caso, as soluções podem ser as seguintes:
Sol. 1: $C_3^2E^{-1}C^{-1}EF^2D^{-1}BDCD^2B^{-1}D^2C^{-1}F^2\left(C_3^2\right)$
Sol. 2: $FDC^{-1}D^{-1}C^{-1}DCD^{-1}F^{-1}DCD^{-1}C^{-1}D^{-1}FDF^{-1}$
Sol. 3: $\left(FD^{-1}F^{-1}\right)(DCD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)(FD)\left(C^{-1}D^{-1}\right)(CDC)\left(D^{-1}F^{-1}\right)$
Sol. 4: $D^2C^{-1}D^{-1}CDC^{-1}C_3^{-1}D_3^{-1}E^{-1}C^{-1}DC^{-1}D^{-1}C^{-1}EC\,(D_3C_3)$
Agora, é uma questão de gosto: escolhemos a fórmula e a posição.

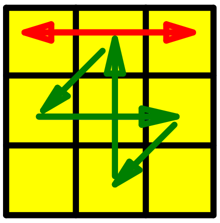
Em outros casos, também há variações na posição padrão, como, por exemplo nas posições seguintes



4.0.4 Dois cantos e quatro meios

Se não quiser decorar as sequências seguintes, pode trocar os meios e os cantos em duas etapas. É mais fácil, numa primeira fase.

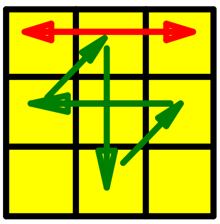
1. $\mathbf{G_1}$



Solução 1: $\left(EC^{-1}DC^{-1}\right)\left(C^{-1}E^{-1}C\right)\left(D^{-1}F^{-1}T^{-1}\right)C^2\left(FTC\right)$

Solução 2: $C_3\left(DCD^{-1}\right)C_3^{-1}D^2C_2^{-1}\left(DC^{-1}D^{-1}CD^{-1}\right)C_2D^2C^{-1}C_3$

2. $\mathbf{G_2}$



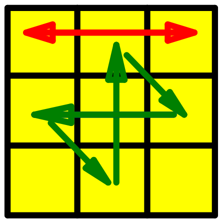
Solução 1: $\left(C^{-1}F^{-1}T^{-1}\right)C^2\left(TFD\right)C^{-1}EC^2\left(D^{-1}CE^{-1}\right)$

Solução 2: $\left(C^{-1}F^{-1}T^{-1}\right)C^2\left(TFD\right)\left(C^{-1}EC\right)\left(CD^{-1}CE^{-1}\right)$

Solução 3: $\left(C_3D^2C_2^{-1}\right)\left(DC^{-1}DCD^{-1}\right)\left(C_2D^2C_3\right)\left(DC^{-1}D^{-1}C\right)$

Solução 4: $\left(C_3D^2C_2^{-1}\right)\left(DC^{-1}DCD^{-1}\right)\left(C_2D^2F_2D^{-1}F_2^{-1}C\right)C_3^{-1}$

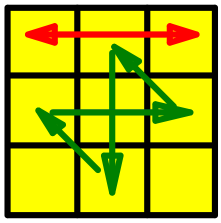
3. **G$_3$**



Solução 1: $\left(D^{-1}CE^{-1}\right)\left(C^2DC^{-1}\right)(EFT)\,C^2\left(F^{-1}T^{-1}C^{-1}\right)$

Solução 2: $\left(D^{-1}C^2DC^2D^{-1}\right)(FDC)\,C^2\left(D^{-1}C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)\left(D^2C^{-1}\right)$

4. **G$_4$**



Solução 1: $\left(CTFC^2\right)\left(T^{-1}F^{-1}E^{-1}\right)\left(CD^{-1}\right)C^2\left(EC^{-1}D\right)$

1. **Solução 2**: $\left(CD^2\right)(FDCD)\left(C^{-1}D^{-1}F^{-1}\right)\left(DC^2D^{-1}C^2D\right)$

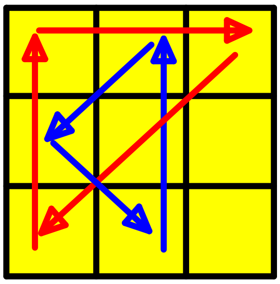
Solução 3: $\left(C_3D^2C_2\right)\left(D^{-1}CD^{-1}C^{-1}D\right)\left(C_2^{-1}D^2T_2^{-1}DT_2\right)$

4.0.5 Três cantos e três meios

As quatro posições anteriores podem ser substituídas por outras ligeiramente diferentes, onde temos que permutar três cantos e três meios.

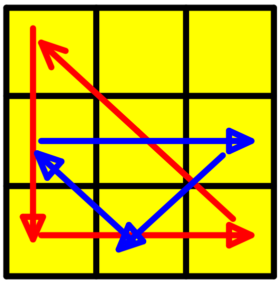
A escolha é do leitor que pode encontrar outras soluções (para além daquela que é apresentada em cada caso), transformando estes casos nos anteriores.

1. **G$_1$**



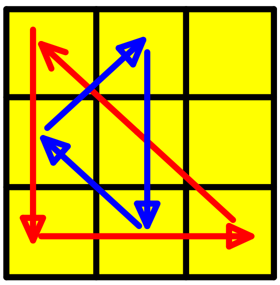
Solução: $\left(DCD^{-1}\right)\left(C_3^{-1}D^2C_2^{-1}\right)\left(DC^{-1}D^{-1}CD^{-1}\right)C_2D^2$

2. **G$_2$**



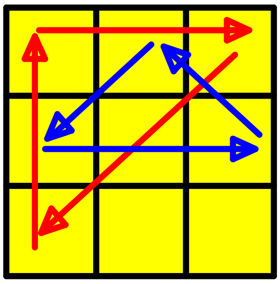
Solução: $\left(D^2C_2^{-1}\right)\left(DC^{-1}DCD^{-1}\right)\left(C_2D^2C_3\right)\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$

3. **G$_3$**



Solução: $\left(D^{-1}C^{-1}D\right)\left(C_3D^2C_2\right)\left(D^{-1}CDC^{-1}D\right)\left(C_2^{-1}D^2\right)$

4. $\mathbf{G_4}$



Solução: $\left(D^2C_2\right)\left(D^{-1}CD^{-1}C^{-1}D\right)\left(C_2^{-1}D^2C_3^{-1}\right)\left(D^{-1}CD\right)$