# O cubo de Rubik 4×4×4

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Janeiro de 2016

[1]egipereira@gmail.com

# Conteúdo

## Preface

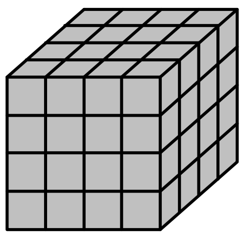
Although this text is tagged as the Abstract in the Front Matter, it will appear in the typeset document as the Preface. Replace this text with your preface.

# Capítulo 1

# Os centros do cubo 4×4×4

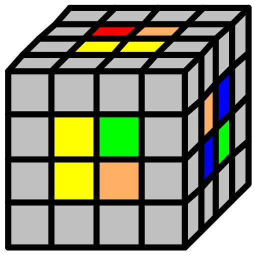
## 1.1 Introdução

O cubo mágico 4×4×4 é semelhante ao cubo mágico 3×3×3, mas é constituído por mais peças, como podemos ver na figura seguinte, onde temos o cubo sem as cores coladas nos diferentes quadrados que constituem as faces.



Neste caso, temos 16 quadrados (elementares) em cada face. Assim, teremos 16 "adesivos"de cada cor, num total de 96 "adesivos".

Neste cubo, não temos casas centrais nas várias faces. Eis um exemplo com alguns "adesivos colados"nas peças interiores.



Num cubo 4×4×4, continuamos a ter 8 peças de canto, cada uma com 3 cores, mas temos 24 peças interiores, cada uma com uma cor, e 24 peças de borda (também chamadas peças de meio), cada uma com 2 cores. Fazendo os cálculos, temos $8 \times 3 + 24 \times 1 + 24 \times 2 = 96$ adesivos.

Observemos que o cubo 4×4×4 é construído duma maneira muito diferente do cubo 3×3×3. No cubo 3×3×3, temos 6 centros fixos, aparafusados a um núcleo central. Temos 26 cubinhos e o tal cubo central.

No cubo 4×4×4, a situação é muito diferente. Existe uma esfera interior na qual se escavaram 3 "circunferências"perpendiculares duas a duas, como se tivéssemos um equador, um meridiano num plano perpendicular ao equador e um terceiro meridiano existente num plano perpendicular aos dois anteriores. As camadas interiores giram ao longo dessas ranhuras, enquanto que as camadas exteriores giram aproveitando as peças das camadas interiores.

Se o seu cubo se desfizer por algum motivo, não se aborreça. Desmonte-o totalmente e monte-o já resolvido (por camadas).

Primeiro monte o centro branco, depois as peças de meio (com branco), tendo em atenção a ordem das cores) e, por fim os cantos.

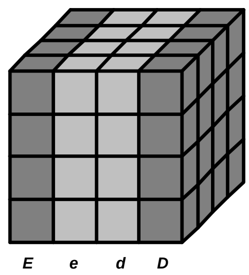
Curiosamente, na última camada, comece pelo centro, continue com os cantos e acabe pelas peças do meio.

A melhor forma de fixar a ordem das cores é a seguinte:

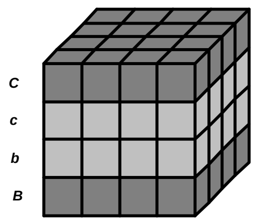
Suponha que tem o branco em baixo e o amarelo em cima. As 4 cores que faltam são (por ordem alfabética): azul, laranja, verde e vermelho. Essa é a ordem das cores. Se o azul estiver para a frente (e o amarelo para cima), o laranja fica à esquerda do azul e assim sucessivamente.

Observemos que nas figuras apresentadas, substituimos o laranja pelo rosa, para se conseguir uma melhor distinção com o vermelho. Mantivemos o amarelo e o branco, embora em certas condições, possa ser difícil distinguir as duas cores (por exemplo, à noite). No entanto, julgamos que o amarelo apresentado é fácil de distinguir do branco. O mesmo não acontece com alguns cubos reais.

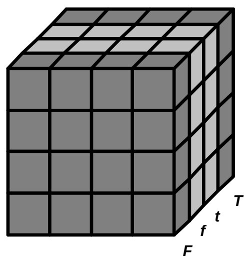
Vejamos algumas noções importantes. Na figura seguinte, a cinzento mais escuro, temos as camadas (ou fatias) da direita que é representada por $D$ e da esquerda (representada por $E$). A cinzento mais claro, temos as camadas $d$ e $e$.




Analogamente, temos as camadas horizontais, Cima ($C$) e Baixo ($B$). As camadas interiores (a cinzento claro) são representadas por $c$ e $b$.




E, por fim, temos as camada da frente ($F$) e de trás ($T$) bem como as camadas $f$ e $t$.



Se quisermos rodar a camada da frente de 90°, no sentido horário, escrevemos $F$. Se quisermos rodar a camada da frente de 90°, no sentido anti horário, escrevemos $F^{-1}$. Embora seja mais frequente escrever $F'$, preferimos escrever $F^{-1}$.

Rodar a camada da frente de 180°, no sentido horário, será representado por $F^2$. E rodar a camada da frente de 180°, no sentido anti horário, será representado por $F^{-2}$. Note-se que o efeito de rodar 180° no sentido horário é o mesmo que rodar 180° no sentido anti horário.

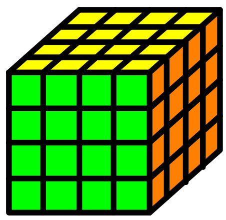
Uma curiosidade: quando comecei a escrever este texto, não sabia resolver os centros nem unir os meios, embora já soubesse resolver o cubo 3×3×3.

Fui aprendendo e escrevendo em simultâneo. É claro que se eu escrevesse tudo de novo, sairia algo de muito diferente. Só que eu achei que seria mais fácil para o leitor, se eu estivesse na posição dele: não sabia resolver o cubo. Ou melhor, tinha uma ideia de como se resolvia, mas nunca tinha resolvido.

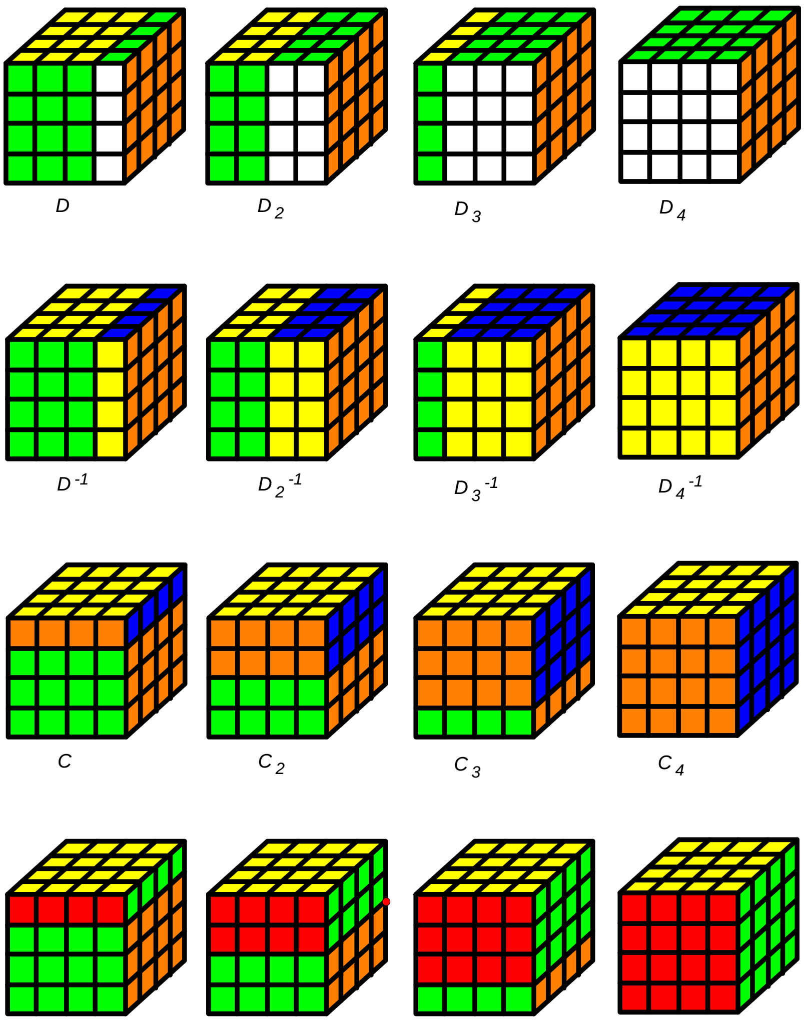
Note-se que a própria notação foi evoluindo. A certa altura, achei que era mais fácil usar uma notação como $D_2$, $D_2^2$, $F_2^2$, $E_2^{-1}$, etc., em vez de usar letras minúsculas como $d$.

## 1.2 Movimentos

Os movimentos que se indicam, a seguir, são realizados partindo dum cubo resolvido, com a face amarela, em Cima e a face verde, na Frente.



Vamos começar pelos movimentos na Direita.

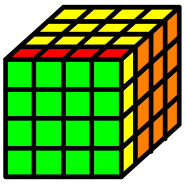


$D$ $D_2$ $D_3$ $D_4$

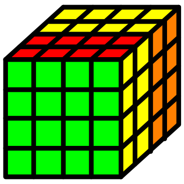
$D^{-1}$ $D_2^{-1}$ $D_3^{-1}$ $D_4^{-1}$

$C$ $C_2$ $C_3$ $C_4$

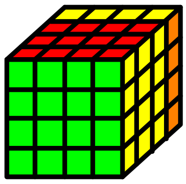
$C^{-1}$ $C_2^{-1}$ $C_3^{-1}$ $C_4^{-1}$



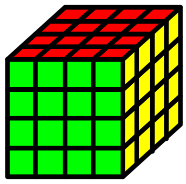
$F$



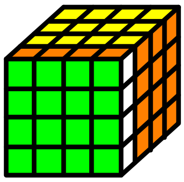
$F_2$



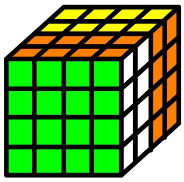
$F_3$



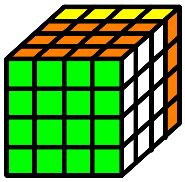
$F_4$



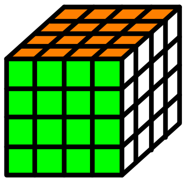
$F^{-1}$



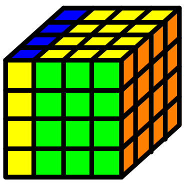
$F_2^{-1}$



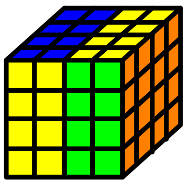
$F_3^{-1}$



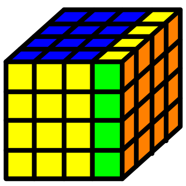
$F_4^{-1}$



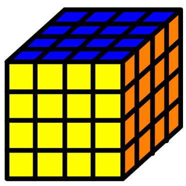
$E$



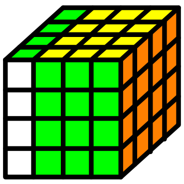
$E_2$



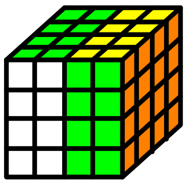
$E_3$



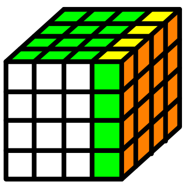
$E_4$



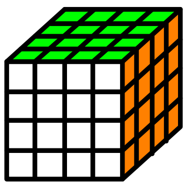
$E^{-1}$



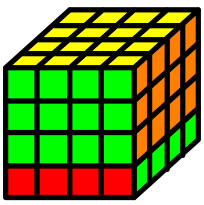
$E_2^{-1}$



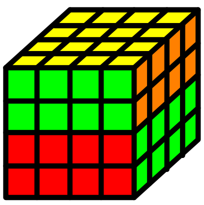
$E_3^{-1}$



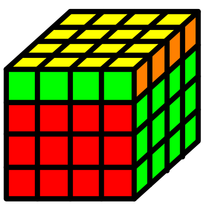
$E_4^{-1}$



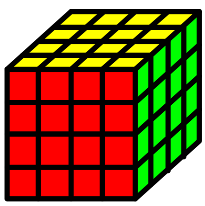
$B$



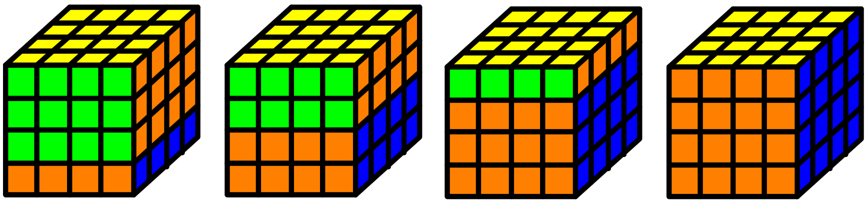
$B_2$



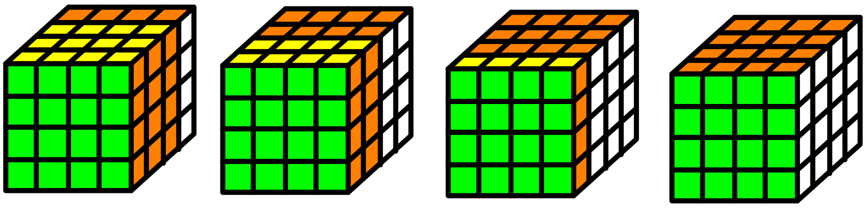
$B_3$



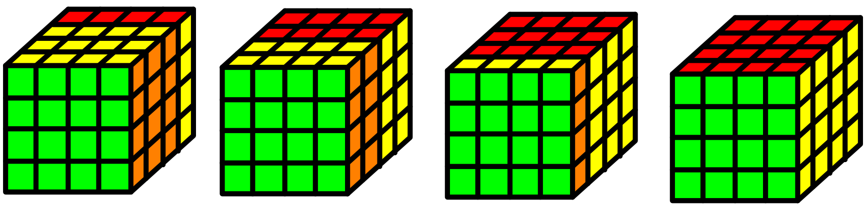
$B_4$



$B^{-1}$ $B_2{}^{-1}$ $B_3{}^{-1}$ $B_4{}^{-1}$



$T$ $T_2$ $T_3$ $T_4$



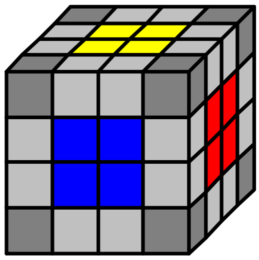
$T^{-1}$ $T_2{}^{-1}$ $T_3{}^{-1}$ $T_4{}^{-1}$

Note-se que $E_4^{-1} = D_4$, pelo que não precisamos de $E_4$ nem de $E_4^{-1}$. Analogamente, não precisamos de $B_4$, nem de $T_4$.

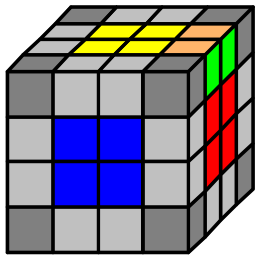
Além dos movimentos apresentados, há outros muito simples. Assim, do mesmo modo que temos $C^2 = CC$, então $C_2^2 = C_2C_2$, ou seja, damos meia volta, na camada de cima. E analogamente para os restantes casos.

## 1.3 Os primeiros quatro centros do cubo

Para resolvermos o cubo 4×4×4, temos de percorrer várias etapas. A primeira etapa consiste em obter os centros das seis faces com uma única cor em cada uma delas, como na figura seguinte:



Depois de construídos os 6 centros, temos de colocar, lado a lado, as peças de meio como na figura seguinte, onde estão juntas as duas peças de meio verde e laranja:



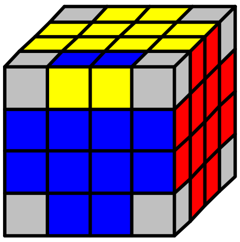
Depois de devidamente colocadas as 24 peças de meio, ficamos com um cubo deformado 3×3×3.

A seguir, fazemos o mesmo que no cubo 3×3×3. Contruimos a cruz branca e, depois, colocamos as peças de meio (cada duas peças contam como uma).

As duas primeiras camadas (do cubo 3×3×3) acabam por ser as primeiras 3 camadas do cubo 4×4×4.

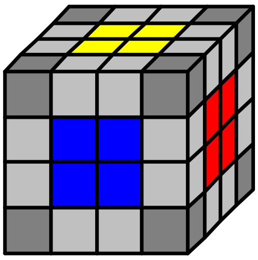
Para a última camada, temos uma ligeira diferença, relativamente ao cubo 3×3×3. Isso tem a ver com o número de peças de meio que têm o amarelo para cima. Neste caso, pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4, enquanto que no cubo 3×3×3 só pode ser 0, 2 ou 4. Isso pode provocar algum trabalho extra.

Uma situação que pode aparecer é a seguinte:



No caso da figura anterior, todas as peças de meio estão bem colocadas, com exceção dos meios azuis e amarelos que estão orientados ao contrário do que pretendemos. Mais adiante, aprenderemos a resolver esta situação (um único meio mal orientado, na camada de cima).

Como já vimos, para resolvermos o cubo 4×4×4, temos de percorrer várias etapas. A primeira etapa consiste em obter os centros das seis faces com uma única cor em cada uma delas, como na figura seguinte:

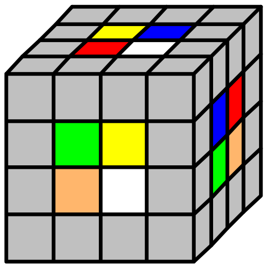


É claro que na face inferior, ficam as 4 peças interiores brancas, na face da esquerda, ficam as 4 peças laranja e, na face de trás, as 4 peças verdes.

Quando construimos os centros, temos de ter cuidado com a posição das 4 cores laterais, supondo que o amarelo está para cima e o branco para baixo. Pode fixar a posição indicada na figura anterior: amarelo em cima, azul em frente e vermelho na direita. É conveniente saber esta ordem. No entanto, há cubos com outra orientação das cores. Se o seu cubo está baralhado e não tem a certeza da orientação das cores, analise as peças de canto. Um só canto mostra a orientação de três das cores, pelo que só precisa de analisar dois cantos.

A construção dos centros é relativamente fácil, com exceção das últimas duas faces.

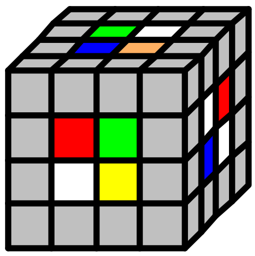
Consideremos a figura seguinte:



Podemos começar pelo centro amarelo (ou pelo centro branco, ou por qualquer outro). Se começarmos pelo centro branco, podemos rodar as duas camadas da direita, no sentido horário. Então o branco que está ao lado do laranja, vai ficar ao lado do vermelho da face superior, onde estava o outro branco. Então, não conseguimos nenhuma evolução (relativamente ao branco, embora fiquem dois amarelos juntos). Mas, se rodarmos a camada superior no sentido horário, o branco vai para o lugar do vermelho, pelo que em seguida, podemos rodar as duas camadas da direita e ficar com dois quadrados brancos lado a lado.

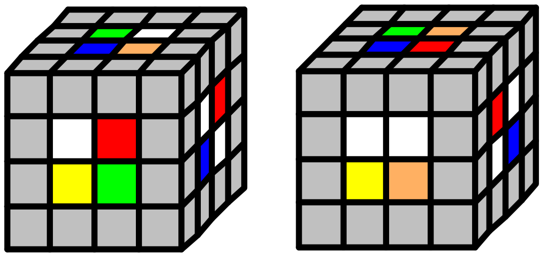
Neste caso, era mais fácil rodar as duas camadas da direita (no sentido horário) e obter dois quadrados amarelos, formando um rectângulo na face superior. Com um único movimento, conseguimos juntar duas peças interiores amarelas. Depois, iríamos juntar as outras duas peças interiores amarelas e, depois, colocá-las junto dos dois amarelos da face de cima.

Vejamos outro exemplo, agora com mais passos:

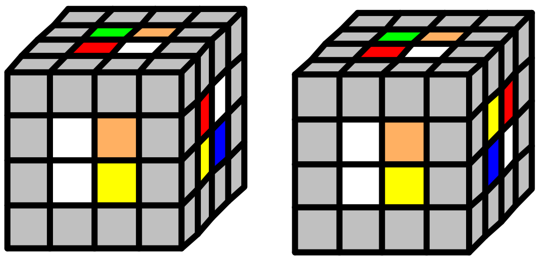


Na figura anterior, podemos ver as quatro peças brancas que vão formar o centro branco.

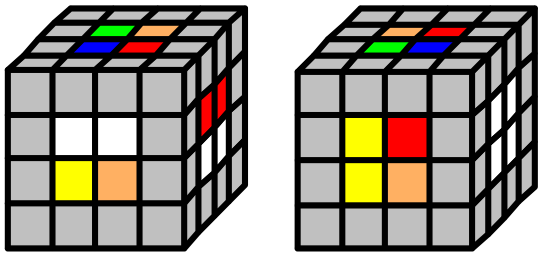
Podemos começar por juntar as duas peças brancas que estão na Frente (uma) e em Cima (a outra). Se rodarmos as duas camadas da direita, no sentido anti horário, o branco de cima vem para a face da frente, mas fica ao lado do vermelho. Então, começamos por rodar a camada da frente no sentido horário e, depois, rodamos as duas camadas da direita (no sentido anti horário). Eis o que acontece:



O próximo passo consiste em juntar os dois brancos da face direita. Para isso, rodamos as duas camadas da frente, no sentido anti horário, para continuarmos a ver as peças brancas. Agora, podemos rodar a camada da direita, no sentido horário.

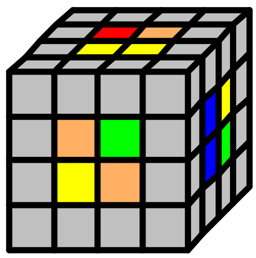


Agora, basta rodar as duas camadas da frente, no sentido horário, formando um segundo bloco de dois brancos. E, por fim, juntamos os 4 brancos, rodando as duas camadas de cima, no sentido anti horário (também poderíamos ter rodado as duas camadas de baixo).



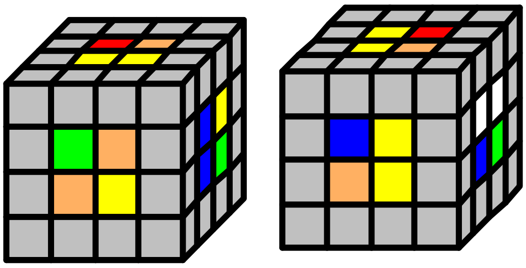
E conseguimos formar o centro branco, constituído por 4 peças interiores. O próximo passo consiste em formar o centro oposto (o centro amarelo). Por acaso, já temos duas peças interiores amarelas juntas. Temos de juntar as outras duas e formar o centro amarelo.

Olhando para o cubo de outro ponto, temos a seguinte vista, com o centro branco na face de trás:



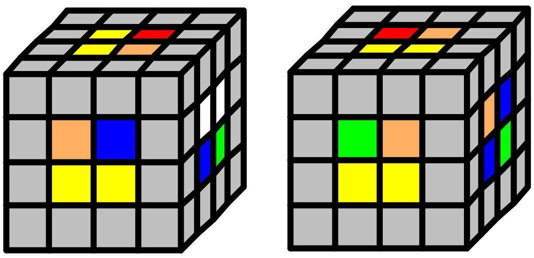
Como o centro branco está na face posterior, temos de construir o centro amarelo na face da frente, embora isso não seja muito importante, porque podemos construi-lo em qualquer face (menos na face de trás, onde está o centro branco) e, depois, passá-lo para a face da frente.

No entanto, é mais fácil tentar construi-lo diretamente (na face da frente). Se rodarmos as duas camadas de cima (no sentido horário), a peça amarela que está na face da direita, passa para a frente, indo ocupar a posição da peça verde que está lá. Então, antes disso, convém rodar a camada da frente (no sentido anti horário) e, depois, rodamos as duas camadas de cima, para que os dois amarelos fiquem juntos.



Agora, há que ter cuidado, porque o centro branco ficou desfeito, pelo que vamos ter que voltar com as duas peças brancas para a face posterior.

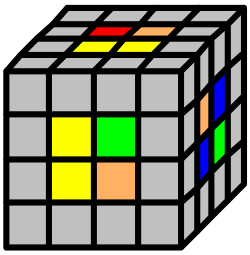
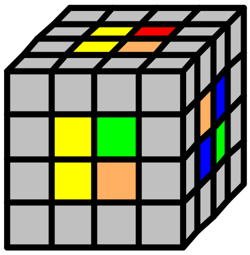
A solução é rodar a camada da frente, de modo que os dois amarelos fiquem na segunda camada (do cubo) e os dois brancos na terceira. Depois, reconstruímos o centro branco.



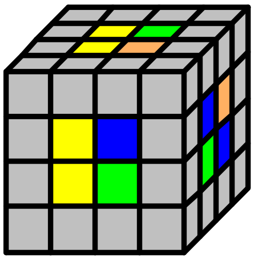
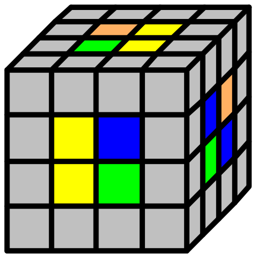
E obtivemos dois blocos amarelos 2×1. Agora, é bastante fácil construir o centro amarelo. Mas temos de tomar cuidado para não desfazermos o centro branco. Isso altera a questão. Se rodarmos a camada da frente, os dois amarelos ficam na vertical.

Então, rodamos a camada da frente e a camada de cima, de modo que os 4 amarelos fiquem na mesma camada paralela à face da direita.

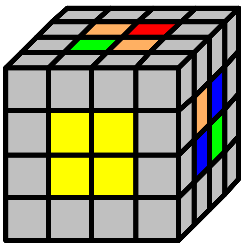
Assim, se rodarmos a camada da frente no sentido horário, teremos de rodar a camada superior no sentido horário:

Recordamos que o centro branco está na face posterior. O que pretendemos é trazer os dois amarelos da face de cima para o lugar do verde e do laranja, da face da frente. Isso faz-se duma maneira mais fácil do que possa parecer. Se rodarmos as duas camadas da direita, no sentido horário, há duas peças do centro branco que passam para a face de baixo. Então, damos meia volta, na face de cima e, quando acertarmos o centro branco, fica pronto o centro amarelo.

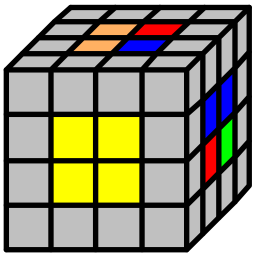
E, agora, rodamos as duas camadas da direita, no sentido anti horário.



Na realidade, nós fomos buscar o bloco de dois amarelos. Há outra maneira de resolver a mesma questão que consiste em trazer as duas faces da esquerda, dar meia volta na frente e levar as duas camadas da esquerda, acertando o centro amarelo e o centro branco.

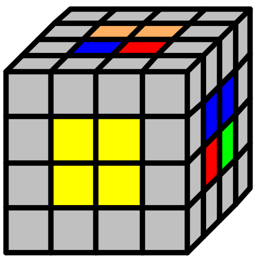
Agora, restam-nos 16 peças interiores, com as quais faremos 4 centros. O próximo centro pode ser de qualquer cor, consoante o que nos seja favorável.

Neste caso, podemos rodar as duas camadas da frente no sentido anti horário, formando um bloco de duas peças laranja. Por acaso, na face inferior já temos um bloco constituído por dois vermelhos, mas vamos ignorar isso. Rodemos, então, as duas camadas da frente (no sentido anti horário).

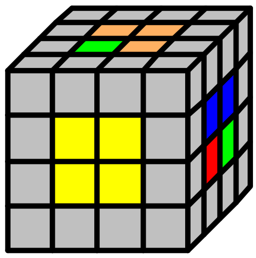


E obtivemos um bloco laranja (e outro azul). Mas continuemos com o laranja.

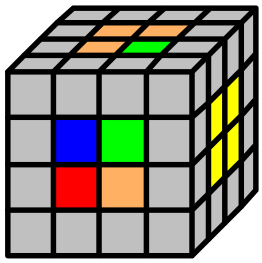
Coloquemos o bloco laranja paralelamente às faces com os centros branco e amarelo, rodando a camada de cima.



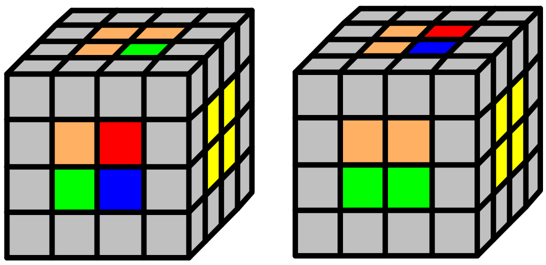
Agora, precisamos de saber onde estão as outras duas peças laranja, de modo a colocar uma das peças na mesma camada que tem as duas peças laranja e a outra peça na outra camada. Se rodarmos as duas camadas da frente (no sentido horário), obtemos a figura seguinte.



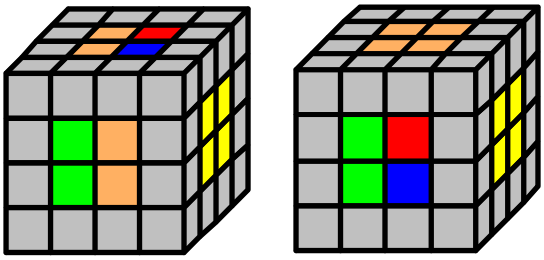
Repare-se que não é importante que o laranja fique junto das outras duas peças. A peça só foi colocada lá, para vermos onde ela está. Mas ainda nos falta a quarta peça laranja. Alterando o ponto de vista, temos o mesmo cubo, onde vemos o quarto laranja:



Agora, rodamos a camada da frente , de modo a obtermos 3 peças laranja numa camada paralela à face de centro amarelo e numa posição que permita formar um segundo bloco laranja, quando trazemos o quarto laranja. Então, vamos começar por dar meia volta na frente e, depois, juntamos as duas peças com laranja:

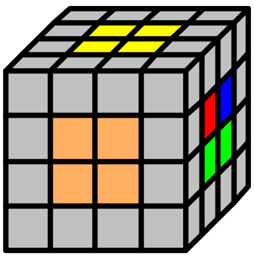


Agora, basta rodar convenientemente a camada da frente e colocar as duas peças laranja junto das outras duas.



E estão prontos 3 centros (branco, amarelo e laranja). O próximo centro a construir não deve ser o vermelho (oposto ao centro laranja). Logo, pode ser o azul ou o verde. Mas temos de ter cuidado com a orientação, embora um eventual erro possa ser facilmente corrigido.

Aqui chegados, convém colocar o amarelo para cima, o branco para baixo e o laranja para a frente, por ser a forma tradicionalmente utilizada.

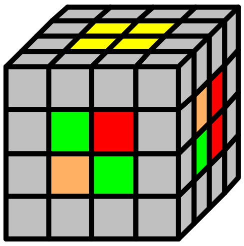


Habitualmente (nem todos os cubos têm as cores dispostas da mesma maneira), à direita ficará a face (e o centro) azul. Logo, o nosso próximo objectivo é construir o centro azul na face da direita (ou o centro verde na face da esquerda), relativamente à última figura apresentada. O próximo centro tem de ser construído, evitando destruir os que já estão feitos (branco, amarelo e laranja).

Chegado a esta posição, lamentavelmente saltaram várias peças do cubo. Por essa razão, tive de desmontar o cubo e montá-lo de novo, pelo que não é possível obter a posição em que estava o cubo, uma vez que eu baralhei o cubo ao acaso, para obter a posição inicial. Mas isso não é problema, pois vamos dar um exemplo da resolução do quarto centro, partindo duma outra posição com três centros resolvidos (situação em que estávamos).

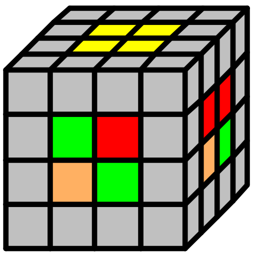
Consideremos o cubo representado na figura seguinte, que já tem prontos os centros azul (face da esquerda), branco (face de baixo) e amarelo.

Então, na face de trás, temos um verde, um vermelho e dois laranjas.



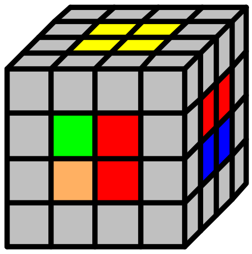
Repare-se que o centro vermelho tem de ser construído na face da frente e o centro laranja na face de trás. Este é um caso fácil, pois já temos dois vermelhos juntos. Por isso, vamos começar por construir o centro vermelho. Para isso, colocamos os dois vermelhos da face da direita na terceira camada (porque os centros de cima e de baixo estão prontos. Refira-se que eles podiam ser colocados na segunda camada. No entanto, quando colocamos os dois vermelhos na terceira camada, temos a certeza que já existe um vermelho nessa camada (na face da frente). O objetivo é colocar três vermelhos na terceira camada e o outro vermelho na segunda. Por acaso, neste exemplo, o quarto vermelho também está na terceira camada, pelo que teremos de passar um deles para a segunda camada.

Então, começamos por rodar a face da direita no sentido anti horário, deixando os três vermelhos visíveis, na terceira camada.

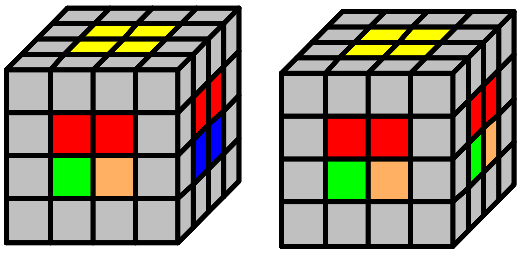


E, depois, rodamos a face de trás (o que não provoca alterações na figura apresentada, pois só os centros estão devidamente coloridos).

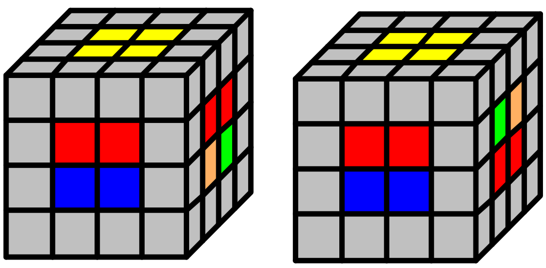
Note que a face de trás deve ser rodada convenientemente, de modo que, ao rodarmos as duas faces de baixo de 180°, o vermelho fique por baixo do vermelho da face da frente, como se indica na figura seguinte:



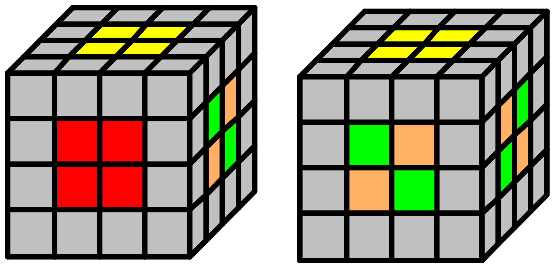
E agora, colocamos todos os vermelhos na terceira camada, para podermos refazer o centro azul.



Na figura da direita, o centro azul está pronto e está na face da esquerda. Agora, temos de colocar os dois vermelhos da face da direita por baixo dos dois vermelhos da face da frente. Então, rodamos as duas faces de baixo no sentido horário e damos meia volta na face da direita.



Agora, refazemos o centro azul, construindo, ao mesmo tempo, o centro vermelho. Eis duas vistas do cubo obtido:

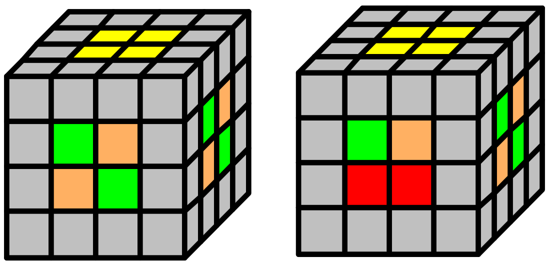


Observe-se que, teria sido útil verificar o que acontecia na face posterior, pois poderámos ter formado blocos horizontais monocolores.

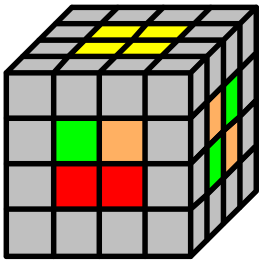
Falta-nos, agora, resolver os dois últimos centros, o que (em geral) é um pouco mais complicado. A seguir, vamos fazer um estudo exaustivo das várias possibilidades que podem ocorrer, mas vamos resolver o caso da figura anterior.

Se rodarmos as duas camadas de baixo, no sentido horário, vamos formar um bloco laranja e um bloco verde, na face da direita. Colocando esses dois blocos na horizontal, conseguimos colocar um bloco em cada face. E passamos a ter tês cores certas e uma errada em cada face. E essa posição poderia ser resolvida. Mas há maneiras mais fáceis.

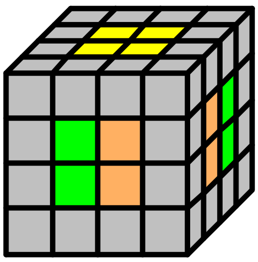
Partindo da posição da direita, na figura anterior, começamos por rodar a camada da direita, de modo a obtermos um xadrez "igual"ao da face da frente. Depois, rodamos as duas camadas de baixo, continuando a face da direita com o mesmo xadrez:



Agora, rodamos a camada da direita, invertendo as cores do xadrez:

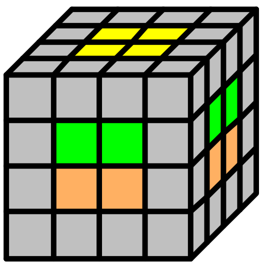


Perfeito! Agora, ao refazermos o centro vermelho, todas as peças dos dois últimos centros ficam com as cores a combinar:



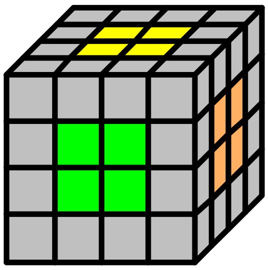
E obtivemos a situação mais favorável de todas, para a resolução dos dois últimos centros.

Agora, colocamos as peças verdes numa camada e as peças laranja na outra:

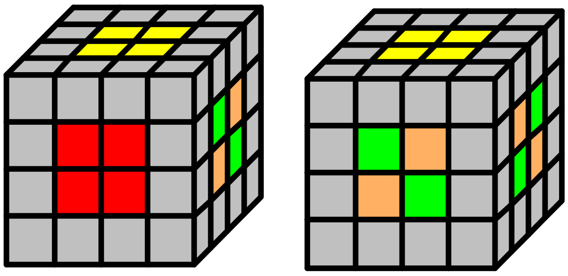


Note-se que o centro vermelho está na face da esquerda, pelo que o centro verde tem de ficar na face da frente.

Agora, basta rodar as duas camadas de baixo (no sentido horário), dar meia volta na camada da direita e trazer as duas camadas de baixo de volta.



Observemos que há outra solução (para a questão anterior):



Como já referido, se rodarmos as duas camadas de baixo, ficamos com um bloco vertical laranja e outro verde, na face da direita. Se dermos meia volta, na camada da direita, os dois blocos trocam de posição, ficando o bloco verde, à esquerda e o bloco laranja, à direita.

Trazendo as duas camadas de baixo de volta, para refazermos os centros vermelho e azul, vamos criar, na face da frente, dois blocos verticais, sendo um verde e outro laranja. E o mesmo vai acontecer na face da direita. Depois, é só trocar convenientemente os blocos, para resolvermos todos os centros.

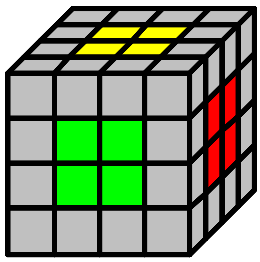
Note-se que resolvemos esta questão dos últimos centros, colocando os dois centros paralelos resolvidos, em baixo e em cima. No entanto, é costume colocá-los na esquerda e na direita, como fazemos nos exemplos seguintes.

## 1.4 Os dois últimos centros

Passemos, então, à resolução dos dois últimos centros, estudando todos os casos possíveis.

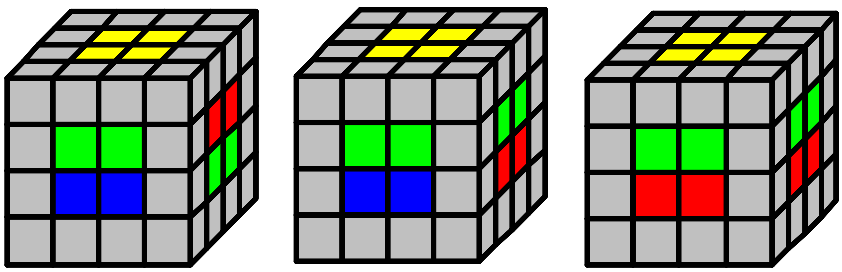
Se todos os centros tiverem ficado corretamente resolvidos, nada mais há a fazer.

Por vezes, acontece que todos os centros têm uma só cor, mas a ordem das cores está errada. No caso seguinte, o centro azul está na face da esquerda e o centro branco está na face de baixo, pelo que vamos trocar o centro verde com o centro vermelho (também poderia ser o centro azul com o centro laranja).

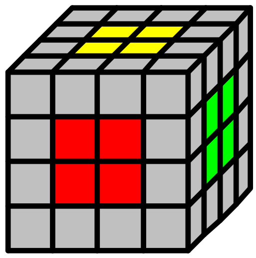


Então, temos que trocar as quatro peças verdes com as quatro peças vermelhas. Isso é feito em duas etapas: começamos por trocar duas vermelhas com duas verdes e, depois, trocamos as restantes.

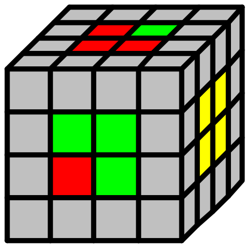
Então, giramos as duas camadas de baixo, no sentido horário, damos meia volta na camada da direita e desfazemos o movimento das duas camadas de baixo.



Para terminar, continuando a rodar as duas camadas de baixo, rodamos as mesmas no sentido anti horário, damos meia volta na camada da frente e rodamos as duas camadas de baixo no sentido horário, ficando os seis centros prontos.



Suponhamos que temos 4 centros resolvidos corretamente e dois errados, como na figura seguinte:

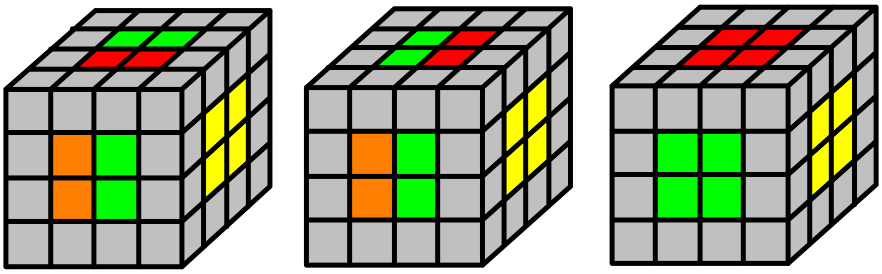


Suponhamos que o centro azul está atrás, o centro laranja está em baixo e o centro branco está na esquerda. Logo, o centro verde tem de ficar na face da frente e o vermelho na face de cima.

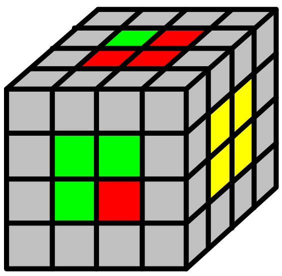
Neste caso, temos, em cada um dos dois últimos centros, três peças certas e uma errada. Mas, se fosse uma certa e três erradas, procedíamos da mesma maneira ou trocávamos um bloco verde com um bloco vermelho.

A posição indicada é uma posição correta para resolvermos os dois centros que faltam (embora haja outras).

A maneira mais fácil de resolvermos os dois centros, consiste em levarmos as duas camadas da esquerda, de modo a obtermos um bloco verde e um bloco vermelho, na camada de cima. Depois, rodamos a camada de cima, de modo a deixarmos o bloco verde, na esquerda, e trazemos as duas camadas da esquerda, de volta.



Há outras maneiras de resolver a situação, mas a solução apresentada é a mais simples, embora possa ser feita no lado direito:

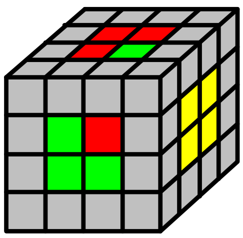


A solução é a bem conhecida sequência "sobe, gira, desce".

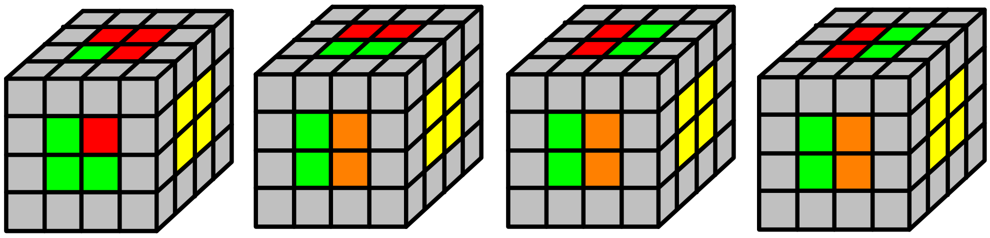
Note-se que o raciocínio é o mesmo se tivermos 1 peça certa e três peças erradas, como já referimos.

**Observação**

A posição padrão mais utilizada é aquela em que as duas peças "isoladas"ficam "próximas":



No caso da figura anterior, a solução mais lógica consiste em "levar"verde e um vermelho e "trazer"dois verdes. Para isso, rodamos a camada de cima, no sentido horário, rodamos as duas camadas da direita, rodamos em cima, no sentido anti-horário, e "trazemos as duas camadas da direita, de volta:

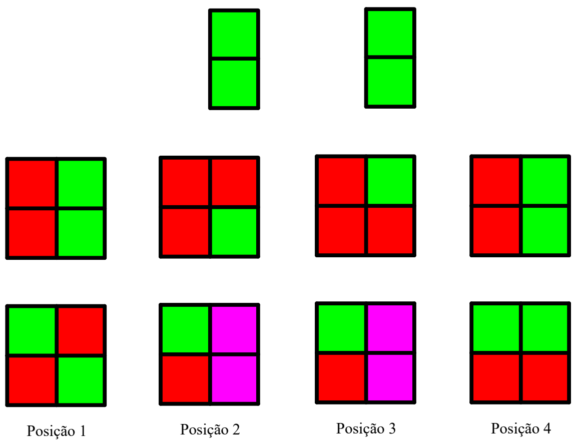


Sequência apresentada na figura anterior: $CD_2C^{-1}D_2^{-1}$.

Para cubos maiores (com mais camadas), existe um algoritmo muito semelhante ao Sonho e que pode ser aplicado no caso do cubo $4 \times 4 \times 4$.

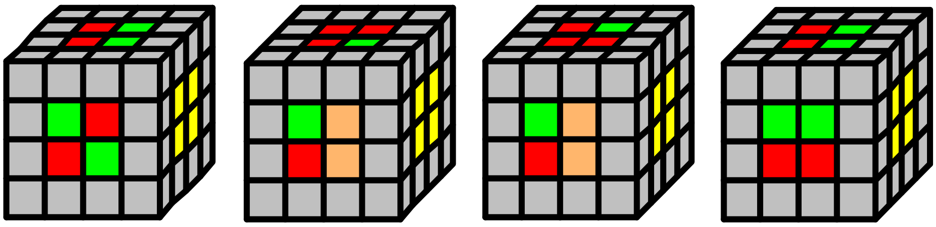
Voltemos à resolução dos dois últimos centros. Resta-nos analisar dois casos, com duas peças certas e duas erradas (em cada face).

Primeiro caso (um só xadrez ou Xadrez Simples):



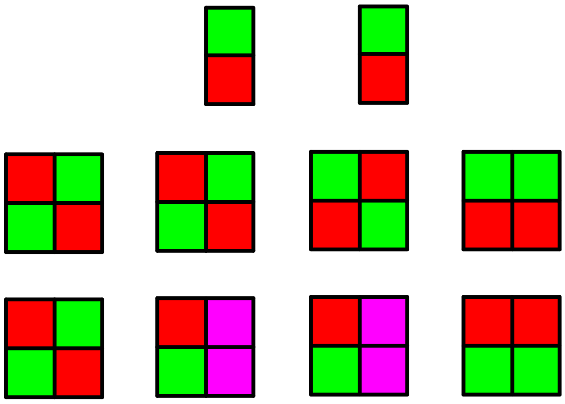

Repare que os pares prontos da camada de cima ficam de frente para quem está resolvendo o cubo.

Se os pares resolvidos estiverem na camada da frente e os pares que formam um xadrez estiverem na camada de cima, reoriente o cubo ou descubra a maneira de resolver. Sugere-se que reoriente o cubo, para não estar a decorar coisas desnecessárias.



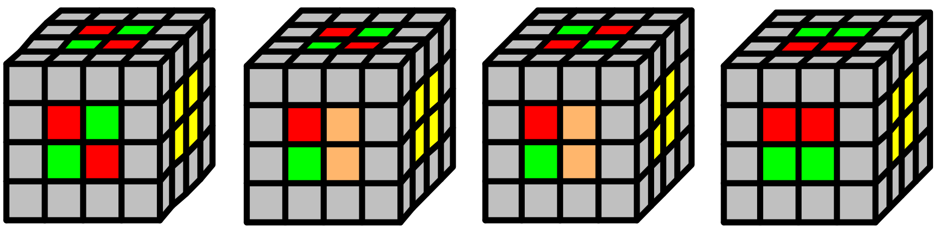
E obtivemos o caso simples de resolver.

Segundo caso (xadrez em ambas as faces, frente e cima, ou Xadrez Duplo). Note-se que este caso já foi resolvido num exemplo apresentado.



Posição 1 Posição 2 Posição 3 Posição 4

No cubo:



E obtivemos uma posição muito simples de resolver.

Agora, é só fixar as posições favoráveis ou resolver por tentativa e erro.

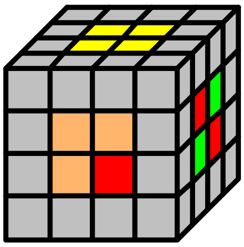
Depois de algumas tentativas, todos aqueles que sabem resolver o cubo 3×3×3 sabem resolver os centros sem qualquer dificuldade.

Note-se que há outras maneiras de resolver o problema. O que interessa é saber uma maneira e aplicá-la.

Por vezes acontece que, no fim da resolução do quarto centro, os dois últimos ficam (aparentemente) resolvidos. Mas convém verificar se a ordem dos centros está correta. Se não estiver, há que trocar dois dos centros, o que é bastante fácil.

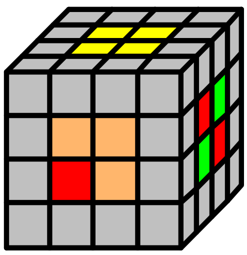
Observemos que é importante que o leitor se familiarize com a resolução dos centros, antes de continuar na resolução do cubo.

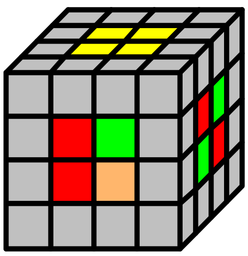
Vejamos mais um caso de resolução dos 3 últimos centros.



No cubo da figura anterior, o centro azul está na face da esquerda, o centro branco está na face de baixo e o amarelo está em cima, faltando resolver 3 centros. Comecemos por construir o centro vermelho na face da frente, com a informação de que a quarta peça vermelha está na terceira camada.

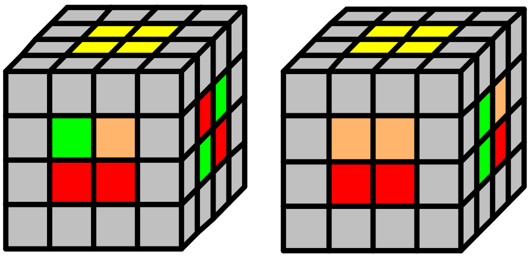
Então, rodamos a camada da frente, no sentido horário e as duas faces de cima no sentido horário:



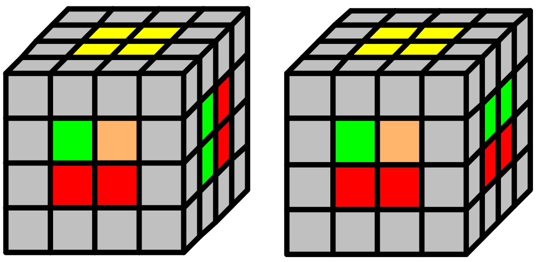


E obtivemos dois vermelhos juntos, na face da frente. Note-se que poderíamos ter rodado a face de trás, de modo que os outros dois vermelhos ficassem na posição favorável, embora isso não seja visível.

Agora, colocamos os dois vermelhos da frente na segunda camada, para refazermos o centro azul.

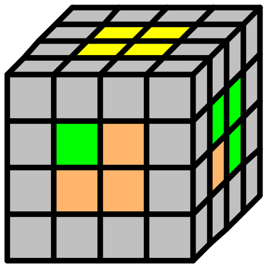


Agora, temos de colocar o vermelho que está na face de trás na posição correta, para que, ao rodarmos as duas faces de cima, os dois vermelhos fiquem bem posicionados. E, depois, colocamos os dois vermelhos na segunda camada (passam a ficar 4 vermelhos, na segunda camada). Rodar a camada de trás não altera em nada o cubo, pois só temos os centros assinalados a cor. Os outros dois movimentos são os seguintes:



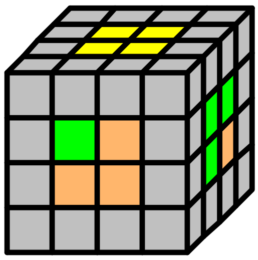
Agora, refazemos o centro azul, rodando as duas camadas de cima, no sentido anti horário.

Para juntar os 4 vermelhos, voltamos a rodar as duas camadas de cima, no sentido anti horário, damos meia volta na camada da direita e rodamos as duas camadas de cima, no sentido horário, formando quatro centros. Posição obtida, com o centro vermelho na esquerda e o azul atrás:



Note-se que o centro verde tem de ficar na frente, embora isso seja irrelevante, por enquanto.

Na posição anterior, podemos rodar a camada da direita no sentido anti horário, obtendo-se a posição:



E agora, é fácil completar os dois últimos centros. Não vamos continuar, para não fazer mais confusão.

O leitor deve decidir como prefere resolver os 4 últimos centros. Eu, normalmente, coloco os dois centros resolvidos na face esquerda e na face direita, mas podemos colocá-los em cima e em baixo, como neste exemplo. O importante é que se siga sempre o mesmo processo, para ganharmos rotinas.

**Observação**

Quando o leitor souber resolver bem os seis centros, pode seguir qualquer ordem, ou seja, pode deixar para o fim duas cores opostas, por exemplo, vermelho e laranja. Nesse caso, a maneira de resolver os dois últimos centros é a mesma, com a diferença de ter que girar duas vezes, para ir buscar as peças à face oposta. Claro que se torna pior para fazer os desenhos, porque só podemos ver uma dessas faces, e também é mais difícil para quem resolve, pois só consegue ver uma face não resolvida.

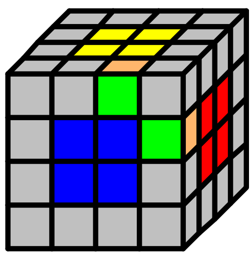
# Capítulo 2

# Juntando as peças de meio

Suponhamos que o cubo representado na figura seguinte tem os centros devidamente colocados e que temos as duas peças de meio verde e laranja nas posições indicadas. Estas duas posições são fulcrais na resolução que apresentamos, pelo que deve fixá-las.

Este processo de resolução foi descoberto por mim próprio, mas é bem possível que alguém o descobrisse antes. Muito mais tarde, descobri um processo semelhante no youtube. Mas tem uma diferença: embora junte dois pares de peças, coloca as peças de modo que, no primeiro movimento, já forma um par. É algo que eu também sabia e que refiro algures, mais adiante. Embora eu não o soubesse, de início, o método aqui referido é preferível no caso do cubo 5×5×5, pois vamos procurar a peça central da aresta e não um das duas adjacentes a essa peça central. Ambos os processos têm a vantagem de não ser necessário o "armazenamento"de peças. Mais adiante, veremos que este processo pode ser melhorado (isto tem ver com a observação anterior).

Relativamente à figura seguinte, o nosso objetivo é juntar as duas peças com verde e laranja.

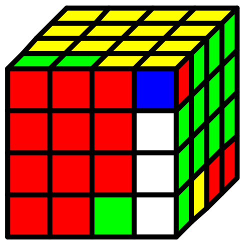


Comecemos por reparar que, se rodarmos a camada da frente no sentido anti horário, a peça da coluna da direita passa para a posição pretendida. O problema é que a outra peça também roda. A solução é afastá-la da camada da frente, rodando a camada $d$. Só que vamos criar um problema: ao rodarmos a camada da frente, alteramos a posição das peças do centro (que seria metade azul e metade branco), de modo que ao trazermos de volta a camada $d$, fazendo $d^{-1}$, ficamos com um branco no centro azul. Mas a solução é fácil, bastando afastar as duas camadas da direita ($d$ e $D$), rodar a camada da frente no sentido horário, trazer a camada da direita de volta e rodar a camada da frente no sentido anti horário. Agora, ao fazermos $d^{-1}$, os centros ficam certos.

Notemos que podemos (ou não) trazer a camada da direita de volta. É uma questão de gosto e facilidade. Eu costumo rodar as duas camadas em simultâneo, mas não adianta estar a complicar a fórmula.

Vejamos o efeito num cubo resolvido da seguinte sequência:

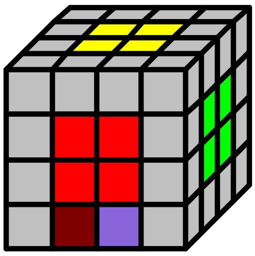
$$DdFD^{-1}F^{-1}d^{-1}$$



Quatro cantos mudaram de posição, a peça vermelha e verde foi para o local "pretendido"e uma peça vermelha e amarela permaneceu no seu lugar.

A outra peça vermelha e verde (a que estava na segunda camada horizontal) passou para a camada da frente (verde na face da frente, vermelho na face de baixo). Foram desfeitos 3 pares de meios, os dois que pretendíamos e os dois meios da primeira camada, voltados para a frente.

Isso quer dizer que, antes de aplicarmos a sequência anterior, devemos ter o cuidado de colocar um par não resolvido nas posições assinaladas na figura seguinte (duas cores diferentes, castanho e roxo).



Se possível, é altamente recomendável, colocar, no lugar da peça castanha, a peça conveniente para acertar com a que vai ser colocada ao lado dela.

No início, é fácil de juntar pares, mas há situações em que temos de proceder de maneira diferente, como veremos oportunamente.

Recordemos que a sequência alternativa é

$$DdFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$$

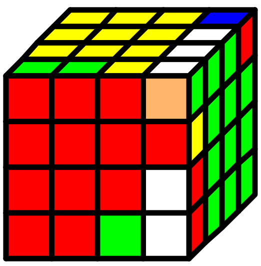
Esta última tem a vantagem de ser mais fácil de aplicar (é mais fácil rodar as duas camadas do que só a camada interior). No entanto, mais vale fixar a outra fórmula e aplicar esta, ou seja, no fim, rodamos as duas camadas da direita.

Note-se que talvez fosse mais correto escrever $DdFD^{-1}F^{-1}\left(Dd\right)^{-1}$, uma vez que as duas camadas rodam em conjunto.

Eu nem decorei a fórmula, uma vez que fixei os movimentos no cubo...

Para uma melhor observação dos efeitos, será melhor aplicar a seguinte fórmula a um cubo resolvido:

$$DdFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D, \text{ ou seja, } DdFD^{-1}F^{-1}\left(Dd\right)^{-1}D^2$$



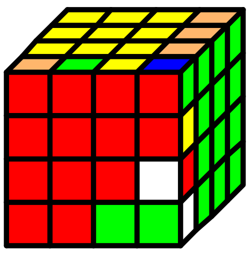
A posição anterior é importantíssima e permite-nos resolver o problema de forma rápida. Reparemos que a nossa sequência desfez três pares de meios da face da frente, manteve todos os restantes meios unidos corretamente e, claro, preservou os centros. É claro que os cantos não nos interessam nesta fase.

Analisemos com mais cuidado o que aconteceu. A peça vermelha e verde da terceira camada trocou com a peça vermelha e amarela. A outra peça vermelha e verde passou para a camada inferior (aquele verde da frente). E a peça vermelha e branca (que estava no lugar daquele verde da frente) passou para a segunda camada, com as cores invertidas.

Então, se aplicarmos novamente a sequência $DdFD^{-1}F^{-1}d^{-1}$, vamos conseguir resolver os três meios duma vez só. Trata-se duma situação pouco frequente (a não ser no fim). Mas, em geral, aproveitamos para resolver dois blocos de meio (dois meios longos), duma só vez, embora haja casos em que isso não é possível (veja a observação no final do exemplo seguinte).

Observemos que, em vez da sequência $DdFD^{-1}F^{-1}d^{-1}$, podemos usar $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, sequência esta que tem um significado um pouco diferente (as duas camadas da direita giram em simultâneo, no final). Mas, isso só provoca alterações nas camadas exteriores, o que não nos preocupa, nesta fase. Por isso, é indiferente usar uma sequência ou outra, embora seja mais rápido rodar as duas camadas ($d$ e $D$) em simultâneo. Note-se que a notação evoluiu, desde que comecei a escrever este texto, pois achei mais interessante "dizer"quantas camadas rodam em conjunto. Daí a notação $D_2$, por exemplo.

Note-se, ainda, que em vez da fórmula utilizada, é mais conveniente utilizar a sua inversa, para vermos o que a fórmula (direta) vai corrigir:

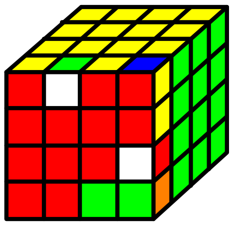


Agora, quando aplicarmos uma das fórmulas, vamos unir as duas peças com vermelho e amarelo, as duas peças com verde e vermelho e as duas peças com vermelho e branco, resolvendo três aresta duma vez só.

Mais tarde, pensando melhor, cheguei à conclusão óbvia que, para obter uma imagem adequada, era preferível ter utilizado a sequência inversa, ou seja, a seguinte:

$$D^{-1}D_2FDF^{-1}D_2^{-1}D$$

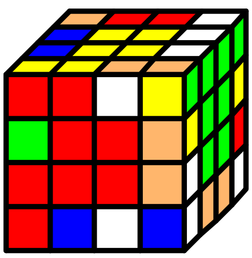
Aplicando a sequência anterior a um cubo resolvido, com a face amarela, em cima, e a face vermelha, na frente, obtemos



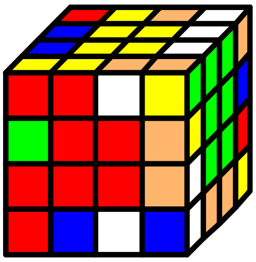
Agora, é muito simples verificar que houve três arestas "destruídas". Então, ao aplicar a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, reconstruímos as três arestas, sendo que, para voltarmos ao cubo resolvido, falta um movimento: $D$

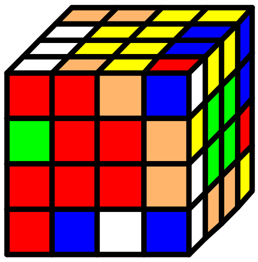
Habitualmente, não conseguimos resolver três arestas, mas (apenas) duas. No entanto, isso acontecerá, se obtivermos um caso em que temos nove arestas resolvidas e três arestas por resolver. Também pode acontecer noutras circunstâncias, mas isso não depende da nossa vontade (só depende do acaso e de termos obtido uma posição análoga à da figura anterior).

**Example 1** *Consideremos a seguinte posição dum cubo com os centros resolvidos e 7 pares de peças de meio erradas:*



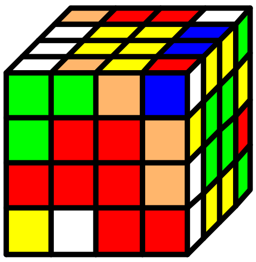
O primeiro passo é conseguir colocar duas peças de meio com as mesmas cores na posição ideal. A peça amarela e laranja já está lá colocada. A outra peça amarela e laranja está na camada de baixo e na camada de trás. Se dermos meia volta na camada de trás, ela aparece. E se dermos meia volta na camada de cima, temos o problema resolvido. Note-se que era mais fácil rodar a camada da direita, colocando as peças com laranja e branco na posição ideal.





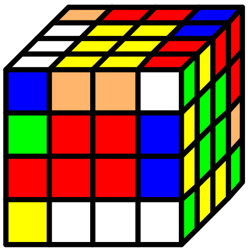
Antes de aplicarmos a sequência, verifiquemos que o azul e branco (frente, primeira camada) estão bem colocados (não deve estar nessa posição um par já formado). Além disso, a peça laranja e branca vem para o lugar do branco (branco para o lugar do branco e laranja para baixo). O ideal é colocar a outra peça branca e laranja no lugar do azul. Na figura da direita, a peça laranja e branca está em cima e atrás, pelo que é fácil trazê-la para a posição pretendida. É claro que queremos fazer isso, sem desmanchar as duas peças com laranja e amarelo. Então, basta dar meia volta atrás e meia volta em baixo.

Eis a nova posição:

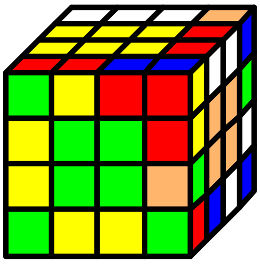


Reparemos que a peça branca e laranja da camada inferior tem o branco na face da frente.

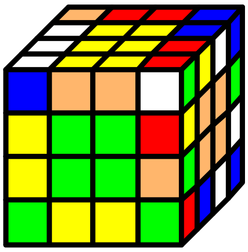
Agora, ao aplicarmos a sequência $DdFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$, vamos acertar dois pares de meios. Eis a posição obtida:



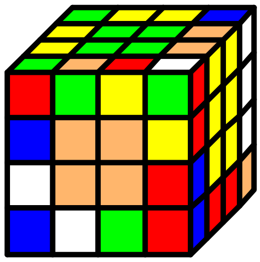
Agora, temos 5 pares de meios errados. Mudando a maneira como olhamos para o cubo, temos a seguinte vista:



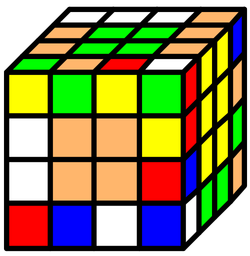
Se rodarmos a camada superior no sentido anti horário, temos o problema de juntar duas peças de meio resolvido (ou quase).



Colocando o centro laranja para a frente e o centro amarelo para cima, podemos resolver o nosso problema, aplicando uma fórmula semelhante à que vimos aplicando. Mas podemos reorientar o cubo da seguinte maneira:

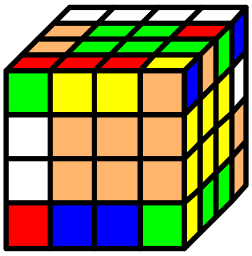


Agora, já podemos aplicar a nossa sequência. Mas, o ideal seria colocar a outra peça azul e vermelha no lugar conveniente. Ora essa peça azul e vermelha é aquele azul que está na face da frente (na terceira camada). Então, basta rodar a face da esquerda no sentido horário e rodar a face de baixo no sentido horário. Só que desafortunadamente, ela fica na posição errada (no lugar do verde). Será preciso executar umas manobras adicionais. Então, damos meia volta, na camada de esquerda, rodamos a face de trás no sentido horário, de modo a que a peça azul e vermelha fique na camada de baixo e damos meia volta, na camada inferior. Eis a posição obtida:



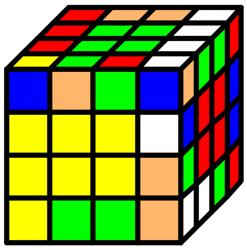
Note-se que poderíamos fazer $F^{-1}B^{-1}FB$, para acertar a outra peça de meio azul e vermelha.

Agora, ao juntarmos os pares amarelos e vermelhos, também juntamos os pares azuis e vermelhos.

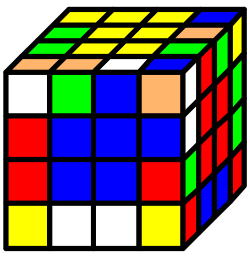


Agora, temos três pares de meios errados, sendo que na figura anterior, vemos dois.

Vejamos o mesmo cubo com outra orientação, onde podemos ver os três pares de meios errados:



Vamos ter que colocar meios das mesmas cores nas posições favoráveis para a aplicação da sequência. Neste caso, basta rodar a camada da frente no sentido horário e os meios azuis e brancos ficam devidamente colocados. Eis a nova posição, com outro ponto de vista:

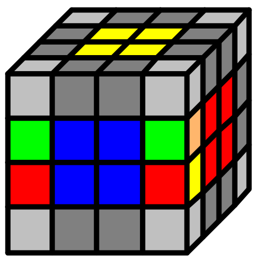


Todos os pares de meios da camada de baixo estão resolvidos, pelo que temos de colocar um par errado no lugar daqueles dois brancos (da camada da frente). O ideal será colocar a outra peça vermelha e verde na primeira camada, para resolvermos os três pares duma só vez. Como fazer isso, sem estragar as peças azuis e brancas?

Reparemos que a peça de meio verde e vermelha tem de ser colocada com o verde para a frente. Se déssemos meia volta na camada da direita, a peça verde e vermelha ficaria na camada de baixo, mas com o verde voltado para baixo e o vermelho para o lado. Ora, nós pretendemos o contrário, pelo que fazemos $D$, deixando essa peça com o verde voltado para trás. Depois, fazemos $T^{-1}$, colocando essa peça na primeira camada, com o verde para trás e o vermelho para baixo, enquanto que a peça laranja e verde fica com o laranja voltado para a trás e o verde voltado para baixo. A seguir, trazemos a camada da direita, com $D^{-1}$. Depois, damos meia volta na camada de baixo e obtemos a posição que nos permite resolver três arestas duma única vez.

**Observação 1:**

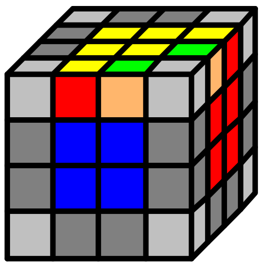
Por vezes, obtemos uma posição em que temos os centros resolvidos e 20 meios devidamente alinhados dois a dois e falta juntar dois pares, como na figura seguinte.



Estamos a supor que as peças a cinzento mais escuro estão devidamente alinhadas e que que só falta alinhar os dois pares de meios da figura. Na camada da esquerda temos o meio verde e laranja e o meio vermelho e amarelo.

Como já sabemos, a sequência que permite juntar os meios, dois a dois, é $bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1}$.

Outra situação que aparece, por vezes, é termos os 4 meios não alinhados, numa mesma camada, como na figura seguinte:

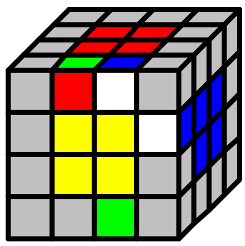


Este caso pode facilmente ser transformado no anterior. Para isso, basta fazer $DCD^{-1}$.

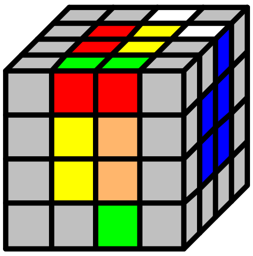
Finalmente, registe-se que, por vezes, há vantagem em aplicar a fórmula $bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1}$, mesmo que faltem mais do que dois pares de meios para serem unidos, pois conseguimos obter dois pares de meios alinhados. Isso acontece, sempre que tenhamos uma posição análoga a uma das duas anteriores, mesmo que faltem outros pares para serem unidos. Desta maneira, resolvemos sempre, no mínimo, dois meios (longos) de cada vez.

**Observação 2:**

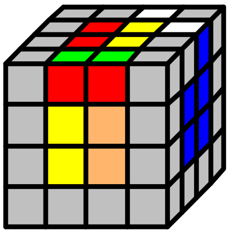
Uma situação que é muito fácil de perceber é a que está indicada na figura seguinte:

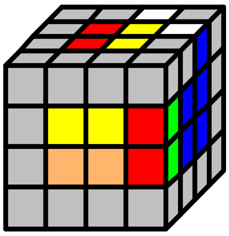


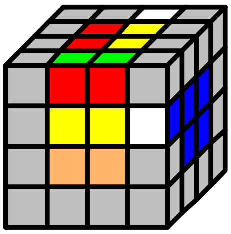
A peça da primeira camada que tem o verde para a frente, tem o vermelho para baixo. Agora, quando aplicamos o primeiro movimento, os dois meios com vermelho e verde ficam logo unidos, como podemos ver na figura seguinte:

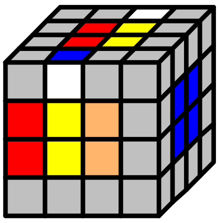


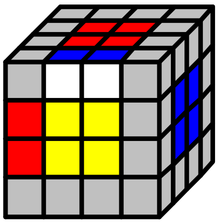
Continuando, obtemos:











Desta maneira, unimos duas peças (no início) e outras duas peças, no fim. Cabe ao leitor decidir como quer proceder. É possível que o leitor prefira este último processo, pois começa por ver a união de dois meios. Eu prefiro o outro método, sendo que esse outro método é mais útil no caso do cubo 5×5×5.

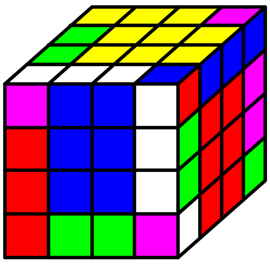
Para ganhar rotinas, deve resolver muitas vezes esta questão (união dos meios, de forma a obter um cubo 3×3×3).

# Capítulo 3

# Fim da Resolução

Depois de termos resolvido os centros e as arestas, o cubo 4×4×4 pode ser interpretado como um cubo 3×3×3, em que as camadas interiores estão "coladas", duas a duas. Por isso, a resolução é a mesma do cubo 3×3×3, embora possam ocorrer algumas situações que não ocorrem no cubo 3×3×3, em sentido estrito. Passemos à resolução.

## A cruz branca



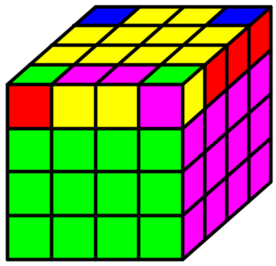
A cruz branca consegue-se como no cubo 3×3×3. Podemos fazer a cruz branca em torno do centro amarelo, sem nos preocuparmos com os centros, mas é mais rápido fazer a cruz branca diretamente em torno do centro branco. Aqui, não há diferença nenhuma em relação ao cubo 3×3×3, pelo que passamos adiante.

## As primeiras 3 camadas

Na resolução das primeiras três camadas do cubo 4×4×4, também nada há a acrescentar ao que fazemos no cubo 3×3×3.

## A cruz amarela

A resolução da camada superior tem algumas particularidades diferentes do cubo 3×3×3. Uma posição que pode aparecer é a seguinte:



Só falta uma peça de meio para completar a cruz amarela. As duas peças estão no lugar devido mas com as cores trocadas. Na realidade, o que vamos fazer é trocar as duas peças com laranja e amarelo entre si.

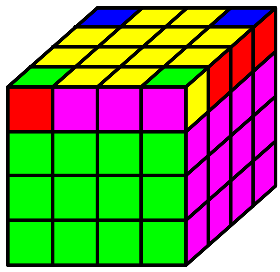
Com as duas peças de meio com amarelo e laranja, na posição da figura anterior, efectuamos a seguinte longa sequência:

$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

É preciso ter muita atenção para não falhar nenhum movimento. Por isso, deve fixar a fórmula e treinar bastante.

Neste caso, é mais fácil decorar a fórmula anterior do que a correspondente fórmula sem letras minúsculas. No entanto, eu fixei a sequência, com "palavras"e não símbolos.

No final da aplicação da sequência, temos a posição da figura seguinte:



E temos a cruz amarela resolvida.

A grande diferença, relativamente ao cubo 3×3×3, é o número de peças de meio da cruz (que pretendemos amarela) com o amarelo voltado para cima.

Quando terminamos as três primeiras camadas, podemos ter 0, 1, 2, 3 ou 4 peças de meio já colocadas na cruz. No cubo 3×3×3, só podemos ter 0, 2 ou 4 peças de meio já colocadas na cruz amarela. O modo de resolver é o mesmo, mas no fim, podemos chegar à posição referida acima (uma peça de meio por acertar). O problema resolve-se, recorrendo à sequência (ou fórmula) apresentada:

$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

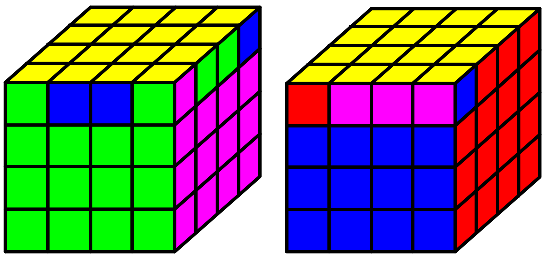
Talvez ajude a fixar a fórmula anterior, se acompanharmos a resolução com uma "lengalenga", misturada com alguns pedaços da sequência: $(d^2T^2)$, $C^2$ esquerda vem, $C^2$ direita vem, $C^2$ direita vai, $C^2$, $F^2$ direita vai, $F^2$ esquerda vai, $(T^2d^2)$.

Note-se que esta fórmula pode ser aplicada, quando temos uma só peça de meio com o amarelo voltado para cima, de modo a ficarmos com duas. É claro que não adianta modificar a peça que já tem o amarelo voltado para cima.

## A face amarela

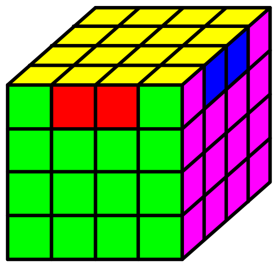
Quem conhecer as mais de 100 fórmulas, pode resolver rapidamente o cubo (embora seja necessário saber um pouco mais do que no caso do cubo 3×3×3). Quem não souber de cor essas fórmulas (como eu não sei), segue o método das camadas.

A posição obtida, após duas aplicações do "sobe, gira, desce, gira, sobe, gira, gira, desce", foi a seguinte:



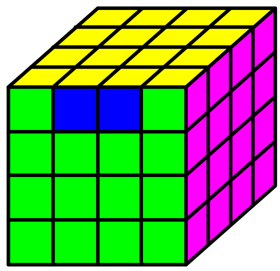
## A última camada

Para teminar a resolução do cubo, falta acertar as faces laterais da última camada. Começamos por acertar os cantos, usando a sequência que eu chamei de Tango. Como os verdes já estavam bem colocados, bastou aplicar a sequência uma vez, obtendo-se a seguinte posição:



Ainda não temos nenhuma face lateral pronta. Então, temos que aplicar a Valsa duas vezes, a menos que tenhamos uma surpresa.

Posição obtida, após uma aplicação da Valsa:



Tudo parece normal, mas há um problema: a face vermelha também ficou resolvida. Ora, isto não acontecia no cubo 3×3×3.

Que fazer?

Felizmente, alguém encontrou a solução (fácil de decorar):

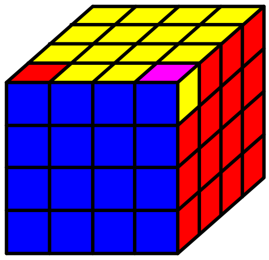
$$\left(d^2C^2\right)\left(d^2C^2\right)\left(c^2d^2c^2\right)$$

E o cubo ficou pronto.

Por vezes, temos só duas faces laterais prontas, mas elas são adjacentes. Nesse caso, aplicamos a mesma fórmula, mas o cubo não fica pronto. É preciso voltar a resolver, como no caso do cubo 3×3×3.

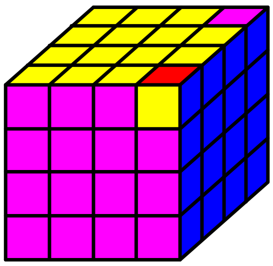
Resumindo, o cubo 4×4×4 é transformado num cubo 3×3×3, mas há duas questões suplementares (pelo menos): pode ficar uma peça de meio da cruz amarela com as cores invertidas e, no fim, podem ficar duas faces laterais resolvidas e duas por resolver.

Por vezes, chegamos a uma situação análoga à da figura seguinte, com dois cantos no lugar errado:



Então, vamos ter que permutar os dois cantos. Há duas fórmulas do cubo $3{\times}3{\times}3$ que permitem resolver esta questão. Uma das fórmulas mantém o cubo sempre na mesma posição, enquanto que a outra altera a orientação do cubo várias vezes. Por isso vamos utilizar a fórmula para o primeiro caso referido.

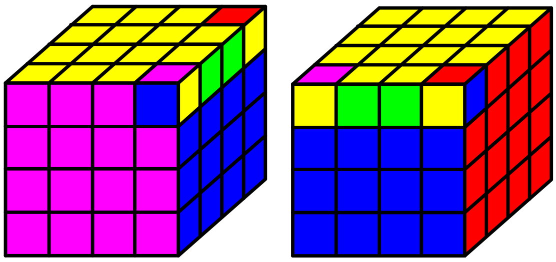
Essa fórmula é aplicada com os dois cantos errados na direita da face superior, pelo que vamos rodar todo o cubo, colocando a face azul para a direita.



A fórmula a aplicar é $DCD^{-1}C^{-1}D^{-1}FD^2C^{-1}D^{-1}C^{-1}DCD^{-1}F^{-1}$. Esta sequência permuta os dois cantos errados e o meio azul e amarelo com o meio verde e amarelo. Numa segunda fase, vamos ter que permutar esses dois meios, mas já sabemos fazer isso.

Apliquemos a sequência indicada e verifiquemos se os cantos ficam bem orientados. Se ficarem mal orientados, ainda teremos que acertá-los.

Eis a posição obtida, com o cubo visto de duas maneiras diferentes:

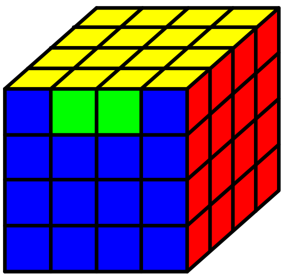


Neste caso, temos dois problemas para resolver: temos que orientar as cores dos dois cantos errados e permutar os dois meios errados.

Para orientar os dois cantos da frente (figura da direita), utilizamos uma de duas fórmulas:

$$\begin{cases} TCT^{-1}CTC^2T^{-1}F^{-1}C^{-1}FC^{-1}F^{-1}C^2F \\ F^{-1}C^2FCF^{-1}CFTC^2T^{-1}C^{-1}TC^{-1}T^{-1} \end{cases}$$

Neste caso, aplicamos a segunda fórmula (para que os amarelos da frente passem para cima). E obtivemos a seguinte posição com dois meios da camada de cima errados (o que tem verde e o que tem azul).



Relembramos que a solução é $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$.

Outra maneira (muito mais simples) consiste em começar por aplicar a fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$ e ver o que acontece.

Uma outra situação que pode aparecer, é termos dois cantos opostos errados e os outros dois certos. Neste caso, podemos trocar esses dois cantos e dois meios opostos. Os cantos ficarão na posição correta e ficaremos com dois meios opostos errados. Teremos que permutar esses dois meios e poderemos ter que orientar as cores dos cantos. Ou ainda, podemos aplicar a mesma fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$.

Outra situação que pode ocorrer, é termos o cubo resolvido, mas com dois meios adjacentes trocados. Nesse caso, aplicamos a sequência $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$ e resolvemos o cubo de novo (devem aparecer três meios errados).

No entanto, o mais fácil é resolver "normalmente"e aplicar as duas fórmulas apresentadas sempre que necessário.

Registe-se o efeito da aplicação da fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$:

Aparentemente, há uma troca de meios na face superior e tudo o resto fica igual. A sequência troca o meio da frente com o meio de trás (na face superior e fixa tudo o resto. Por que motivo está escrito aquele "aparentemente"? A razão é simples: nada nos garante que, por exemplo, as duas peças vermelhas e amarelas não tenham trocado de posição. Para termos a certeza absoluta que só os dois meios tinham mudado de posição, teríamos de numerar as peças e verificar se havia mais alterações. No entanto, trata-se duma questão irrelevante para a resolução do cubo.

Uns dias depois, resolvi aplicar a fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$ a um cubo baralhado, tomando nota das cores das várias faces. E cheguei à conclusão que, para além das alterações que já conhecemos, há mudanças em três dos centros do cubo. Claro que isso não se nota, quando o centro está resolvido, pois todas as peças são da mesma cor. O mesmo acontece com a sequência $(d^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2d^2)$. Esta sequência permuta as peças dum dos centros.

Seguidamente, vamos escrever os dois algoritmos anteriores, na notação definida no início do primeiro Capítulo:

**1.** Em vez de $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$, vamos escrever

$$\left(D_2^2D^2C^2\right)\left(D_2^2D^2C_2^2\right)\left(D_2^2D^2\right)\left(C_2^2C^2\right)$$

O algoritmo pode parecer que está errado, mas não está. Consegue-se simplificar a escrita, juntando dois "movimentos"num só. Repare-se que $Cc = C_2$, pelo que $C^2c^2 = C_2^2$, uma vez que $C$ comuta com $c$.

**2.** E, em vez de $(d^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2d^2)$, temos

$$\left(D_2^2D^2T^2\right)\left(C^2E_2E^{-1}C^2D_2^{-1}DC^2D_2D^{-1}C^2\right)\left(F^2D_2D^{-1}F^2E_2^{-1}E\right)\left(T^2D_2^2D^2\right)$$

Este algoritmo, quando aplicado numa fase inicial do cubo, pode ser simplificado omitindo-se $D^2$, no início da fórmula e no fim. Mas, tal não acontece no caso do cubo $4 \times 4 \times 4$.

Aproveitamos a oportunidade, para recordar dois algoritmos que se aplicam no cubo $4 \times 4 \times 4$ e não se aplicavam no cubo $3 \times 3 \times 3$.

**1**. Algoritmo para a formação das arestas

$$D_2 F D^{-1} F^{-1} D_2^{-1}$$

**2**. Algoritmo para a formação das duas últimas arestas

$$B_2 D F^{-1} C D^{-1} F B_2^{-1}$$

Em cubos com mais de quatro camadas, vamos precisar dum algoritmo semelhante a $D_2 F D^{-1} F^{-1} D_2^{-1}$. Trata-se do algoritmo simétrico, em que são movidas as duas camadas da esquerda e não as duas camadas da direita. No caso do cubo $4 \times 4 \times 4$, não precisamos desse algoritmo. No entanto, ele pode ser útil para quem mova o cubo com a mão esquerda.

Para essas pessoas, há que modificar muitos algoritmos e não apenas este último.

# Capítulo 4

# Resolução Completa

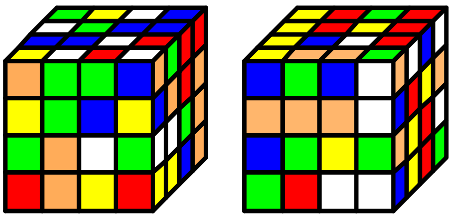
Neste Capítulo, vamos apresentar dois exemplos de resolução completa dum cubo 4×4×4.

**Example 2** *Coloque um cubo 4×4×4 resolvido com a face amarela para cima e com a face azul para a frente. Baralhe o cubo da seguinte forma:*

$DCeb^2BT^2CD^2b^{-1}dE^2cB^2TD^2BETCdctb^2D^2c^{-1}Eb^2d^2EFDF^2E^{-1}fE^2Dd^2$

**Resolução**

A posição obtida está representada na figura seguinte, apresentando-se duas posições que mostram as 6 faces, para que possa confirmar a posição que obteve no seu cubo:



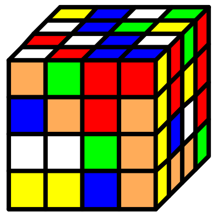
A posição da esquerda corresponde à posição final do cubo, depois de baralhado, enquanto que a posição da direita corresponde ao mesmo cubo, mas visto de outro ponto de vista.

Baralhar o cubo com outra notação:

$$DCE_2E^{-1}B_2^2B^{-1}T^2CD^2B_2^{-1}BD_2D^{-1}E^2C_2C^{-1}B^2TD^2BETCD_2D^{-1}$$
$$C_2C^{-1}T_2T^{-1}B_2^2B^2D^2C_2^{-1}CEB_2^2B^2D_2^2D^2EFDF^2E^{-1}F_2F^{-1}E^2D_2^2D^{-1}$$

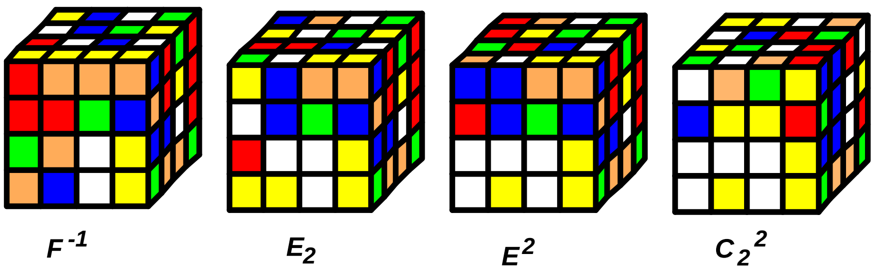
## Os centros

Rodemos todo o cubo, fazendo $C_4$, para termos a noção de onde se encontram as quatro peças que vão formar o centro branco:

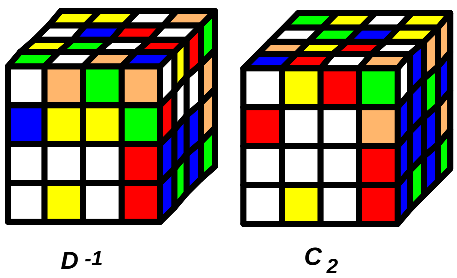


A quarta peça do centro branco está na face da esquerda.

Vamos partir da posição anterior, para construir a face branca. Primeiros 4 movimentos: $F^{-1}E_2E^2C_2^2$

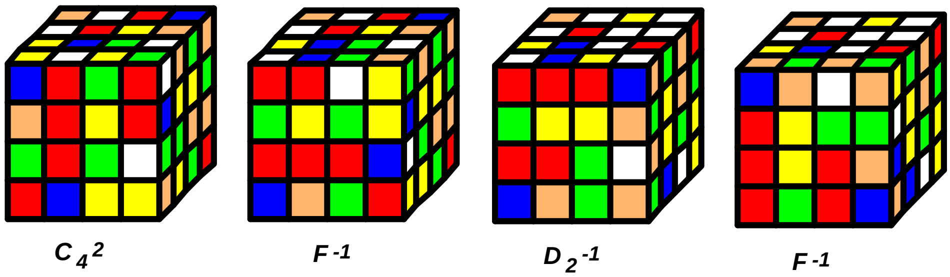



Agora, fazemos $D^{-1}C_2$, para construirmos o centro branco.



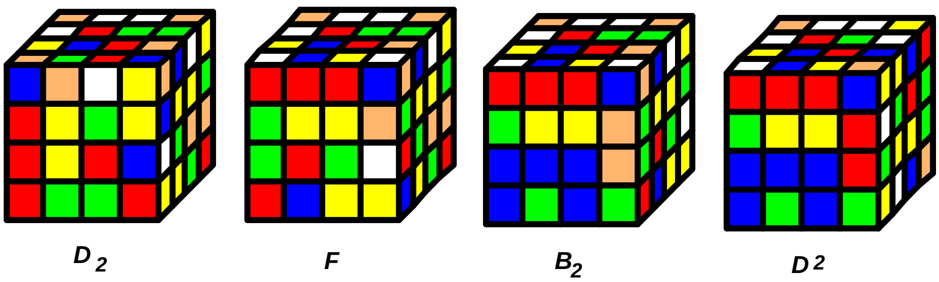
Segue-se o centro amarelo. Na face esquerda, já temos um bloco de dois amarelos. Há muitas maneiras de construir o centro amarelo. Até podemos construí-lo numa face adajacente ao centro branco e, depois, mudá-lo.

Vamos começar por colocar o centro branco atrás, rodando o cubo em torno do eixo vertical ($C_4^2$). Depois, formamos um segundo bloco de dois amarelos, fazendo (por exemplo) $F^{-1}D_2^{-1}$, ou se preferir, $F^{-1}(dD)^{-1}$. E temos de desviar os dois amarelos com $F^{-1}$.

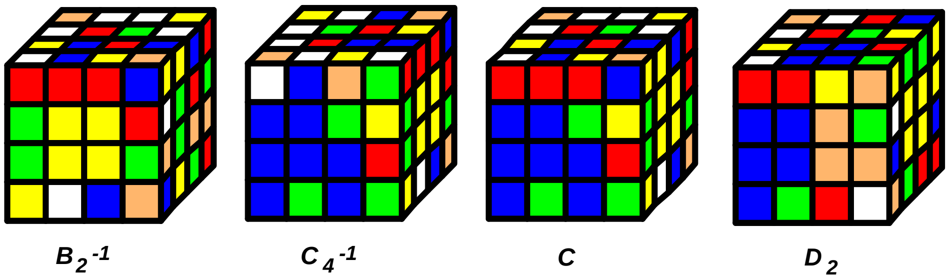



Agora, vamos ter que voltar com os dois brancos, com $D_2$, após o que temos de formar o centro amarelo. Para isso, fazemos $F$, colocando os quatro amarelos do centro, na terceira camada.

Depois, temos duas alternativas, sendo que uma delas consiste em "ir buscar"o bloco de dois amarelos que está na face errada, trazendo-o para a face certa. Isso faz-se com $B_2D^2B_2^{-1}$. O último movimento não vai ficar na próxima figura, mas sim na outra a seguir.

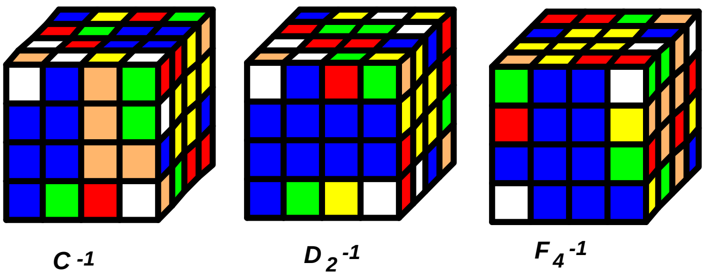



Como dissemos antes, a primeira posição da figura seguinte corresponde ao movimento $B_2^{-1}$, já registado anteriormente e que não "cabia"na figura anterior. Depois, façamos $C_4^{-1}$, de modo a vermos as quatro peças azuis que vão formar o centro (azul). Segue-se $CD_2$, formando-se dois blocos de dois azuis.




É muito fácil construir o centro azul: $C^{-1}D_2^{-1}$. E obtivemos dois blocos resolvidos na face superior (um verde e um vermelho). Por coincidência, também obtivemos um bloco de dois verdes na face posterior.

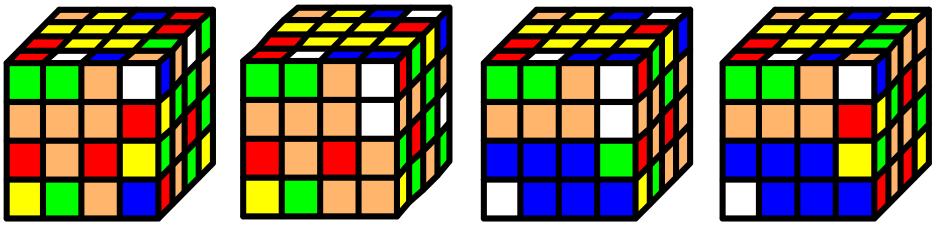
Agora, colocamos o centro amarelo para cima e o centro azul para a frente, com $F_4^{-1}$:




O centro laranja tem de ficar à esquerda do azul. Infelizmente, ficaram 3 peças laranja à direita (e uma atrás). Podemos construir o centro laranja à direita do azul e, depois, acertar esses dois centros.

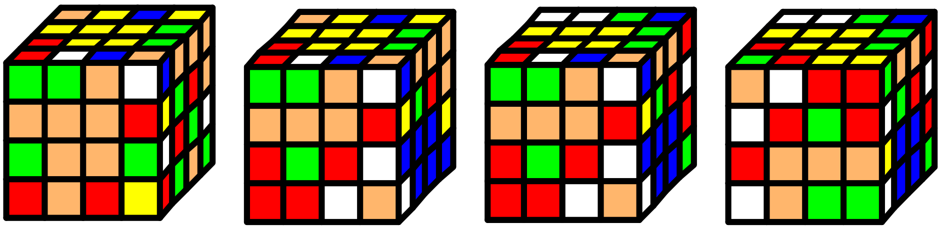
Também poderíamos construir o centro vermelho, ou mesmo o centro verde, nas faces adequadas.

Façamos $C_4DB_2D^{-1}$:



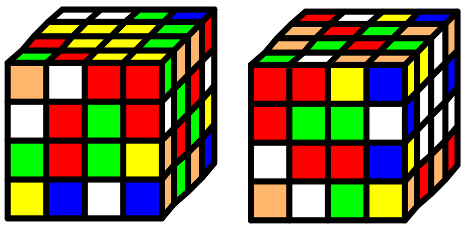
$C_4$ $D$ $B_2$ $D^{-1}$

Agora, refazemos o centro azul e construir o centro laranja, com $B_2^{-1}$. Só que o centro laranja está numa face errada. Então, fazemos $B_2^2 T^2 F^2$.



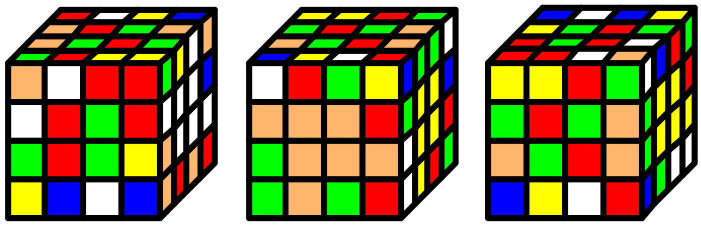
$B_2^{-1}$ $B_2^2$ $T^2$ $F^2$

Agora, quando refizermos o centro azul, com $B_2^2$, o centro laranja também fica pronto. Depois, coloquemos o centro azul em baixo e o centro laranja atrás, com $F_4^{-1}$.



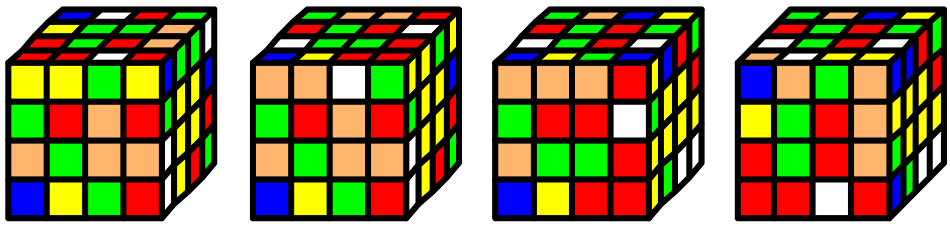
$B_2^2$ $F_4^{-1}$

Temos dois centros por resolver (Xadrez Simples). Comecemos por fazer $F$, seguindo-se $C_4^2 D_4^{-1}$.



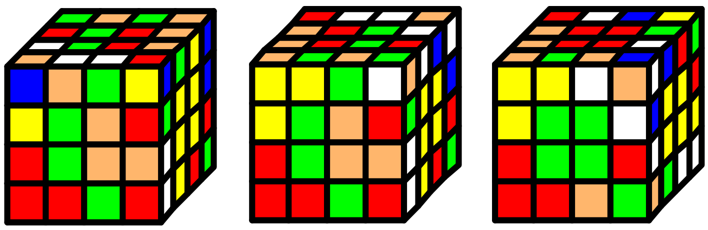
$F$ $C_4{}^2$ $D_4{}^{-1}$

Agora, basta aplicar a fórmula do Xadrez Simples: $D_2C^{-1}D_2^{-1}F$



$D_2$ $C^{-1}$ $D_2{}^{-1}$ $F$

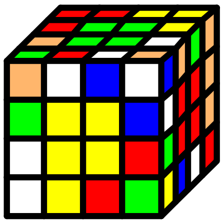
E acabar com $D_2C^2D_2^{-1}$.



$D_2$ $C^2$ $D_2{}^{-1}$

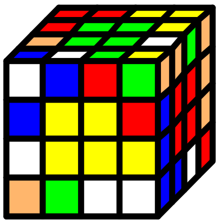
## As arestas

Agora, temos de juntar os meios, dois a dois, formando blocos de duas cores a combinar (arestas). Os dois meios com azul e branco já estão numa boa posição para serem unidos, bastando girar todo o cubo para chegarmos à posição padrão. Então, fazemos $C_4F_4$.

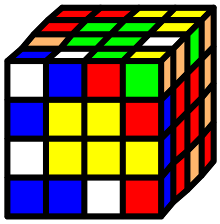


$C_4F_4$

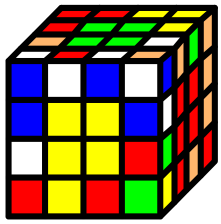
O outro meio verde e vermelho está na terceira camada e desse meio vemos o verde. Fazendo $F^{-1}$, ele fica na posição pretendida, mas desalinhamos os azuis e brancos. Então, seguimos com $B^{-1}FB$:



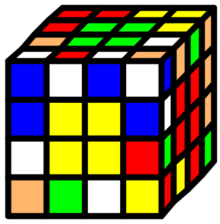
$F^{-1}$



$B^{-1}$

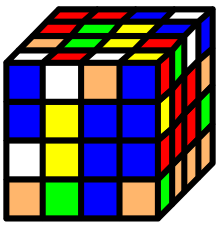


$F$

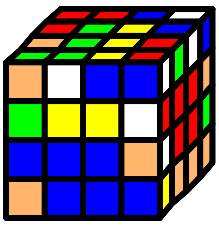


$B$

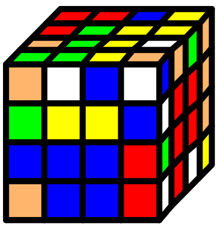
Agora, basta aplicarmos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, obtendo-se as seguintes posições:



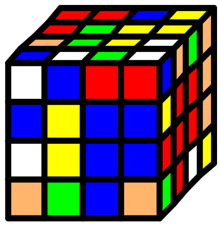
$D_2$



$F$

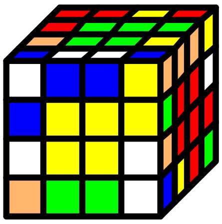


$D^{-1}$



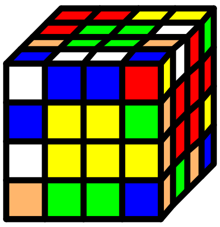
$F^{-1}$

A posição final é:

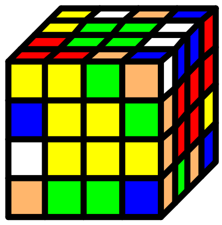


$D_2^{-1}$

E já temos duas arestas formadas.
Agora, podemos fazer $D^{-1}C^{-1}$, obtendo-se:



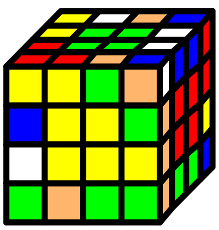
$D^{-1}$



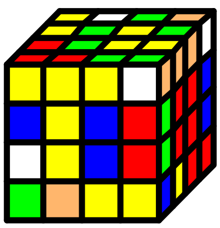
$C^{-1}$

Agora, temos de encontrar a outra peça amarela e laranja (ou a outra peça vermelha e amarela). Neste caso, basta fazer $B$, ficando a peça amarela e laranja bem colocada, pelo que aplicamos a sequência que resolve esta questão:

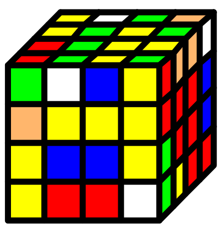
$$D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$$



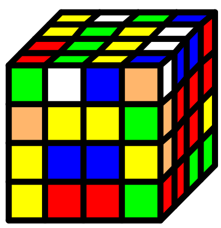
$B$



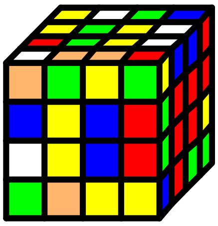
$D_2$



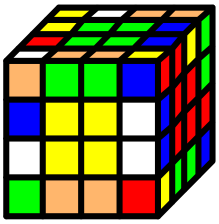
$F$



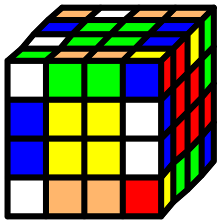
$D^{-1}$



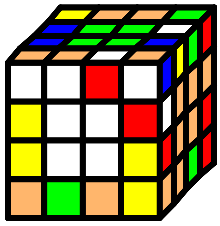
$F^{-1}$



$D_2^{-1}$

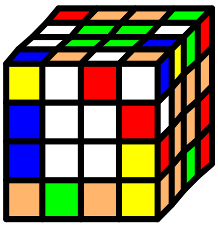


$E^{-1}$

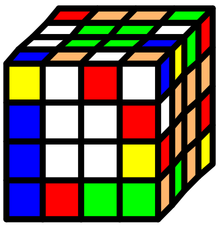


$C_4^2$

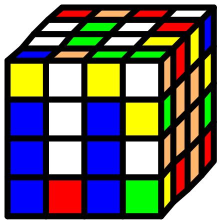
Com os dois últimos movimentos da figura anterior, ou seja, $E^{-1}C_4^2$, as duas peças vermelhas e brancas já ficam devidamente posicionadas. Agora, há que posicionar a peça amarela e vermelha (ou a peça branca e laranja). Neste caso, a outra peça amarela e vermelha está na camada da frente (na segunda camada), pelo que basta fazermos $EB$ e seguimos com $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$.



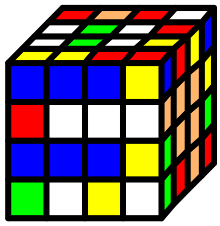
$E$



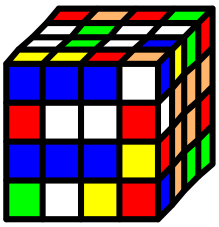
$B$



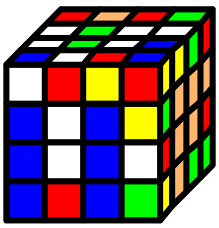
$D_2$



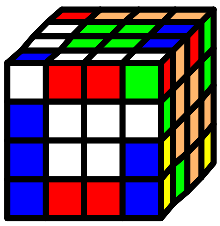
$F$



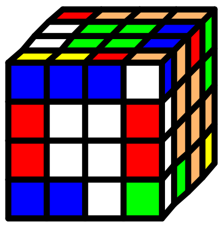
$D^{-1}$



$F^{-1}$



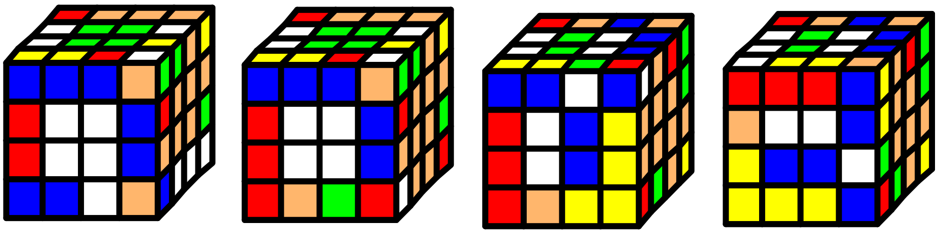
$D_2^{-1}$



$F$

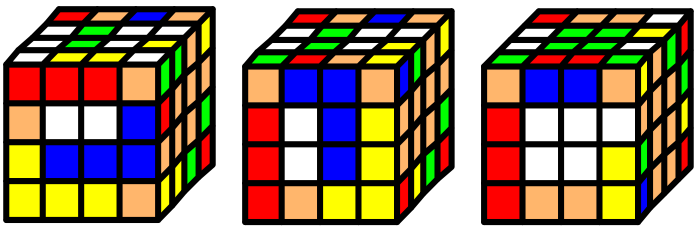
O último movimento da figura anterior ($F$) destina-se a aproximar as duas peças azuis e vermelhas. Segue-se $D^{-1}B^2$, para obtermos a posição favorável para a união de dois pares de meios, formando-se duas novas arestas.

Logo, fazemos $D_2F$:



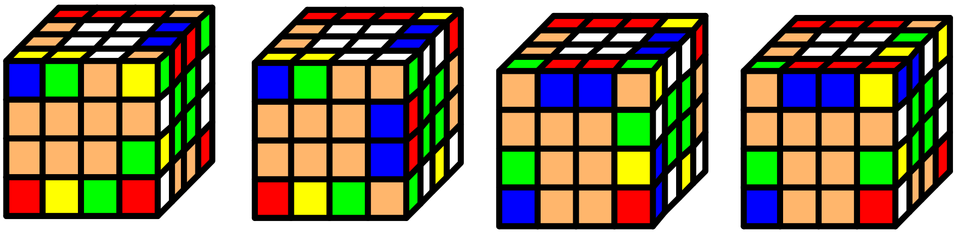
$D^{-1}$ $B^2$ $D_2$ $F$

E continuamos com $D^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$.



$D^{-1}$ $F^{-1}$ $D_2^{-1}$

Agora, há que escolher duas peças de borda com as mesmas cores. O mais fácil é fazermos $C_4F_4$, deixando as duas peças com laranja e branco na desejada posição. Só que as outras duas peças (com verde e amarelo) estão na camada da frente, numa posição em que o processo que temos vindo a seguir, não permite resolver as duas arestas. Então, vamos seguir o processo que é utilizado na resolução das duas últimas arestas, para o que temos de alterar ligeiramente a posição das referidas quatro peças, fazendo $D^{-1}F^{-1}D$.

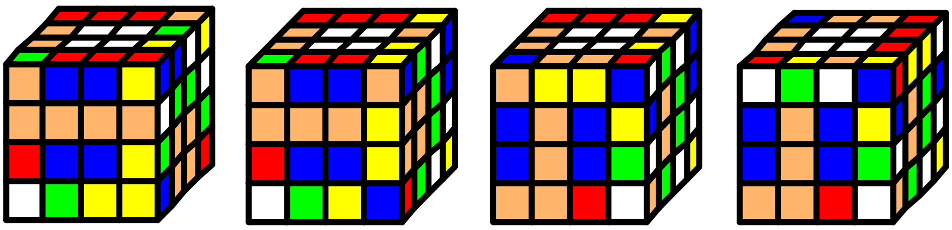


$C_4F_4$ $D^{-1}$ $F^{-1}$ $D$

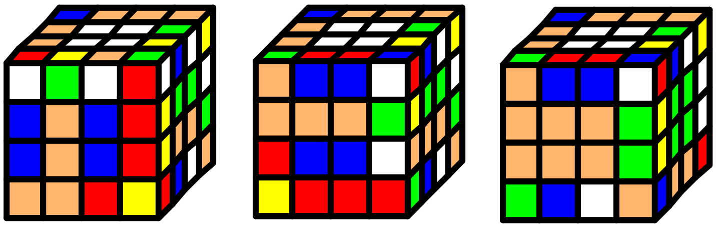
Chegados à posição anterior, conseguimos resolver duas arestas com a sequência

$$B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$$

E obtemos as seguintes posições:



$B_2$ $D$ $F^{-1}$ $C$



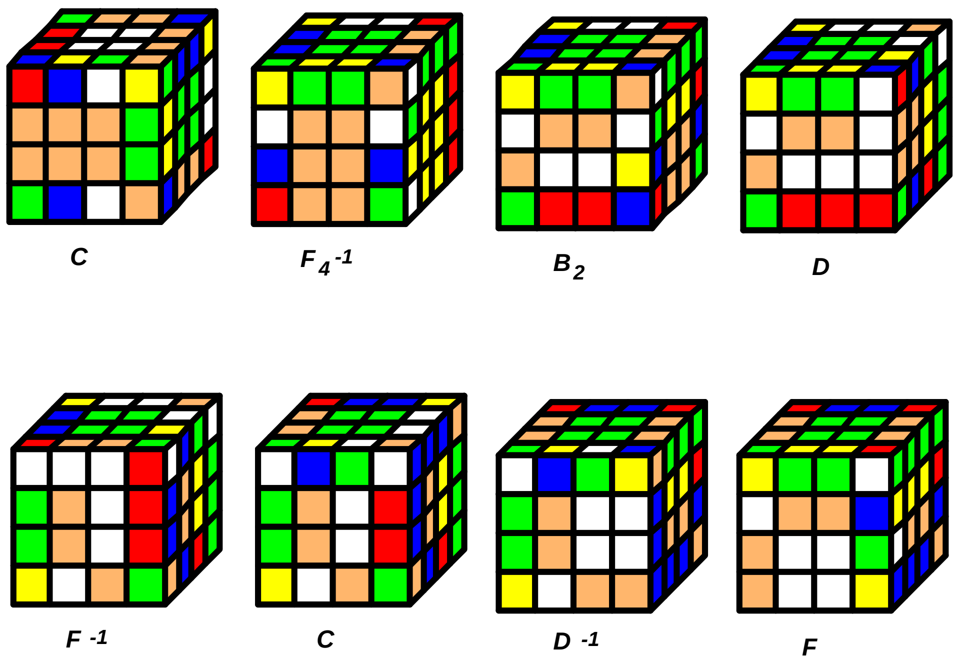
$D^{-1}$ $F$ $B_2^{-1}$

E já temos dez arestas resolvidas, pelo que só falta resolver as últimas duas. Isso faz-se da mesma maneira que as duas anteriores.

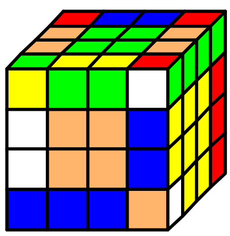
Observemos que, se tivéssemos contado as arestas já resolvidas, antes da resolução das duas arestas anteriores, poderíamos ter resolvido uma única aresta, deixando três arestas para o fim, pelo que não seria necessário aplicar a sequência anterior, pois resolveríamos as três últimas arestas duma só vez.

As duas arestas não resolvidas estão visíveis na última posição apresentada, bastando fazer $CF_4^{-1}$, para obtermos a posição padrão. E voltamos a aplicar a sequência

$$B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$$



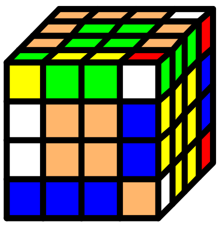

E falta apresentar a última posição, com todas as arestas e todos os centros resolvidos (correspondente ao movimento $B_2^{-1}$):



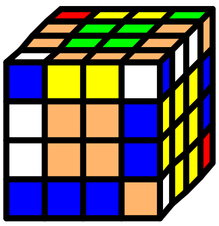
Agora, vamos o resolver o cubo, como se ele fosse do tipo 3×3×3. As duas peças de meio com amarelo da camada da direita já estão bem posicionadas entre elas.

## Cruz Amarela

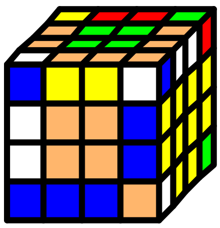
Fazendo $T^{-1}C^2T^{-1}C^{-1}D^{-1}$, obtemos a cruz amarela na face da direita, após o que fazemos $F_4$, deixando-a na face de baixo.



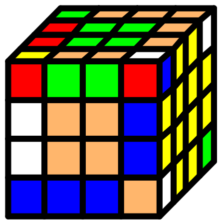
$T^{-1}$



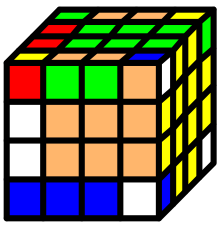
$C^{2}$



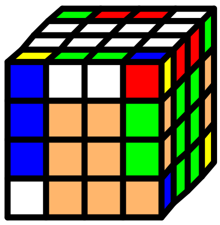
$T^{-1}$



$C^{-1}$



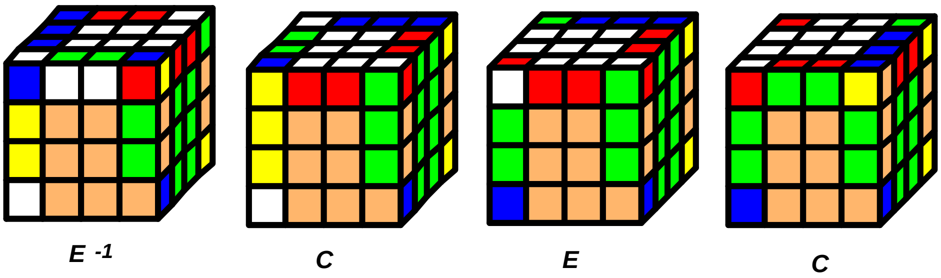
$D^{-1}$



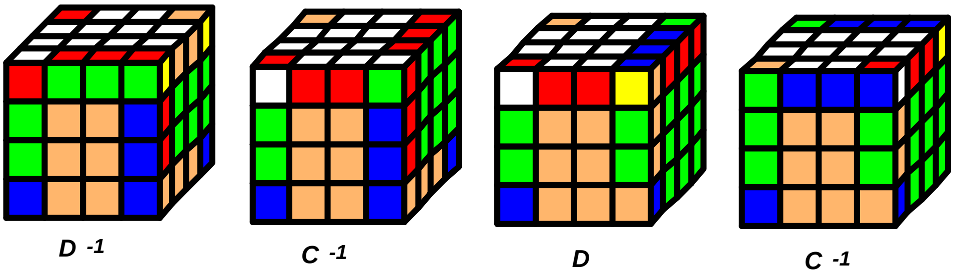
$F_4$

## Cantos e Meios (P3C)

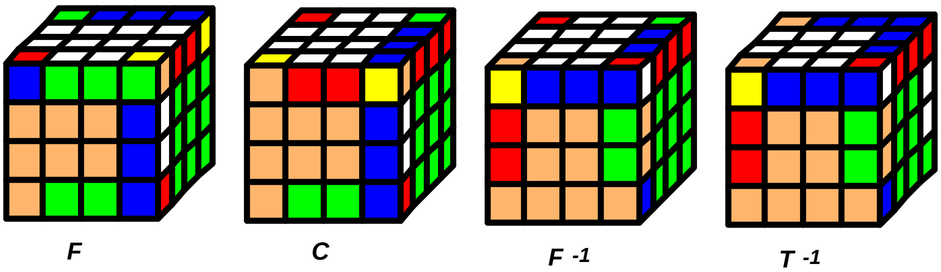
Agora, vamos ter que colocar os pares de canto e meio das três primeiras camadas (do cubo $4 \times 4 \times 4$). Façamos $E^{-1}CEC$:



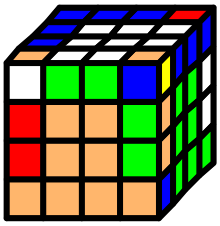

Para poupar no desenho da figura, façamos $D^{-1}C^{-1}DC^{-1}$, deixando um par de canto e meio pronto (e avançando um pouco):



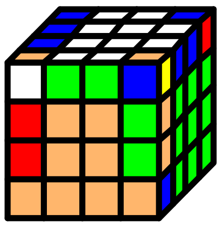

E continuamos com $FCF^{-1}T^{-1}$, formando um "par perfeito"de canto e meio.



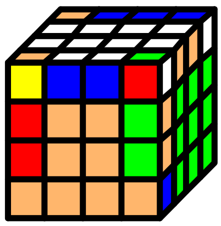

Agora, basta colocar o par de canto e meio no seu devido lugar, para o que fazemos $C^{-1}T$. E avançamos com $C$.



$C^{-1}$

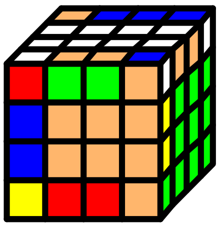


$T$

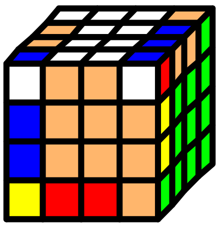


$C$

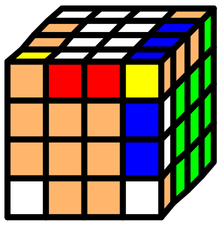
Seguimos com $F^{-1}CF^2CF^{-1}$



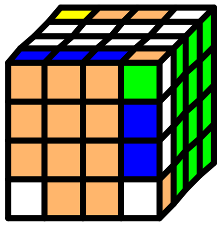
$F^{-1}$



$C$



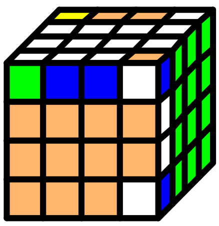
$F^2$



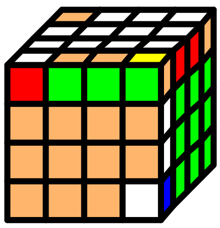
$C$

E ficou colocado o terceiro par de canto e meio, sendo que a última posição está na figura seguinte.

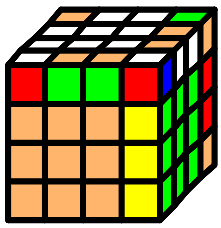
Para colocarmos o último par, fazemos $C^2DC$.



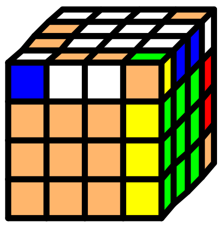
$F^{-1}$



$C^2$

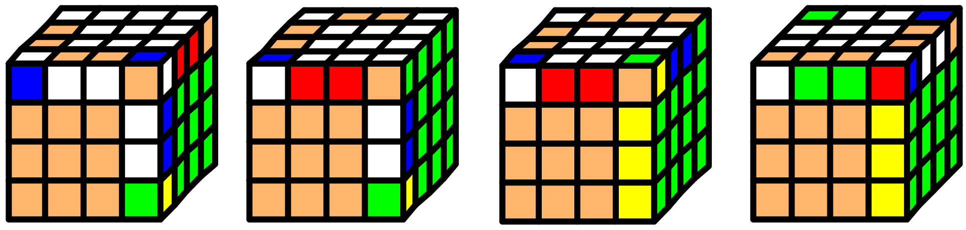


$D$



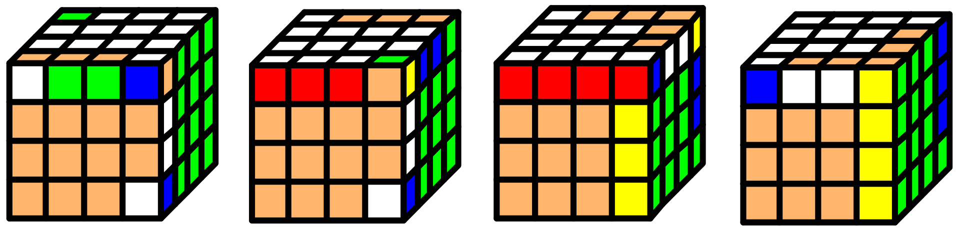
$C$

E continuamos com $D^{-1}CDC^2$.



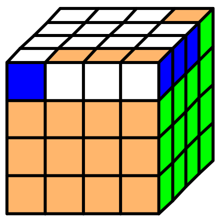
$D^{-1}$ $C$ $D$ $C^2$

Agora, fazemos $D^{-1}C^2DC$



$D^{-1}$ $C^2$ $D$ $C$

E completamos as primeiras três camadas com $D^{-1}$.



$D^{-1}$

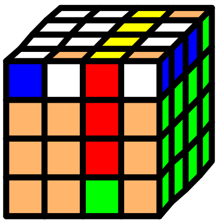
## Cruz Branca

Terminadas as três primeiras camadas, vemos que falta uma peça para termos a cruz branca pronta, coisa que não acontece no cubo 3×3×3.

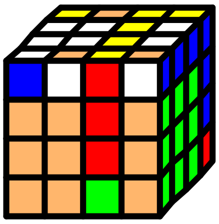
A solução é um pouco longa:

$$d^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2d^2$$

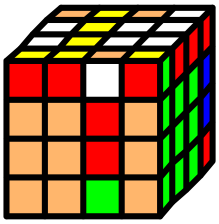
Imagens:



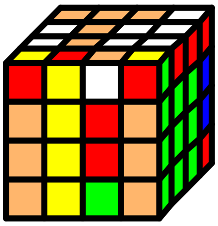
$d^2$



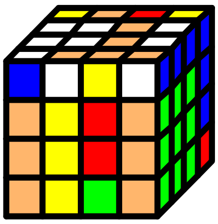
$T^2$



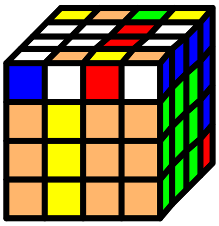
$C^2$



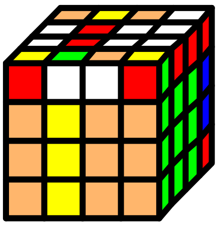
$e$



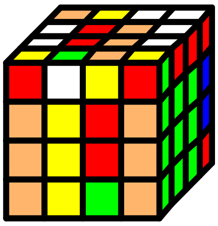
$C^2$



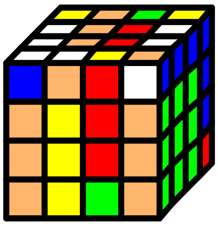
$d^{-1}$



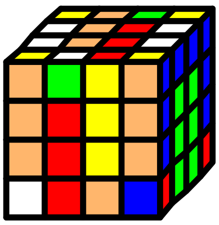
$C^2$



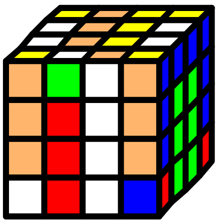
$d$



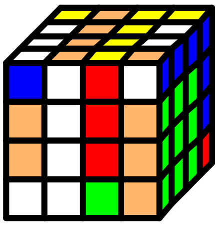
$C^2$



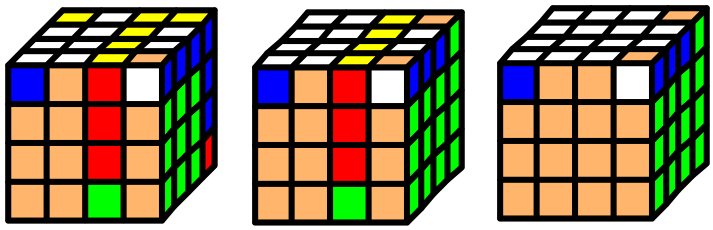
$F^2$



$d$



$F^2$



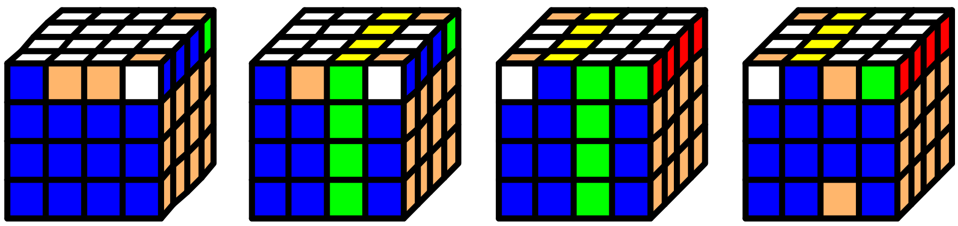
$e^{-1}$ $T^2$ $d^2$

E está terminada a cruz da face superior.

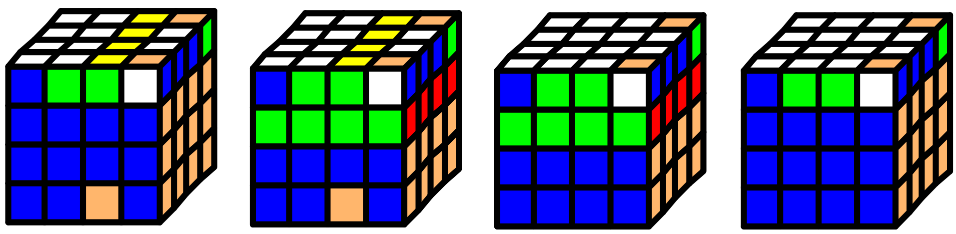
## Quarta Camada

Analisando a última posição, vemos que os quatro cantos estão certos entre si, embora dois deles estejam mal orientados. Se fizermos $B_3$, verificamos que todos os cantos ficam certos bem como dois dos meios, ficando dois meios errados.

Então, vamos aplicar a sequência $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$, pois a situação descrita não acontece no cubo 3×3×3.



$B_3$ $d^2$ $C^2$ $d^2$



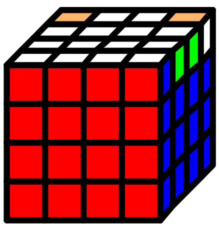
$C^2$ $c^2$ $d^2$ $c^2$

Começamos por fazer $C_4^{-1}$, para deixarmos o cubo na posição padrão. Agora, temos quatro cantos certos e três meios errados, sendo que o único meio certo é o meio da esquerda (meio Oeste).

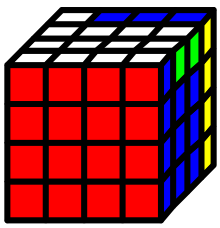
Então, o meio Norte vai para Leste, o meio Leste vem para Oeste e o meio Oeste vai para Norte. Ou seja, queremos deixar os cantos nos lugares onde estão e queremos permutar os meios da seguinte maneira: (NEW). E além disso, queremos acertar a cor de cima de dois cantos.

Embora eu não a saiba de cor, existe uma sequência que faz tudo isso duma só vez:

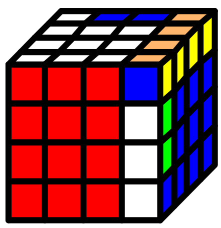
$$TD^{-1}F^2E^2BF^{-1}B^{-1}FE^2F^2DT^{-1}C^2$$



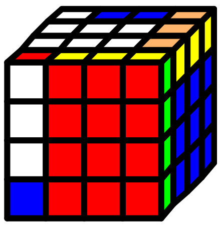
$C_4{}^{-1}$



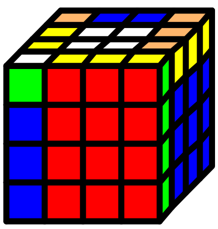
$T$



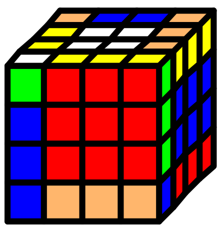
$D^{-1}$



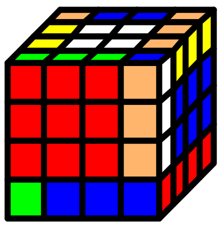
$F^2$



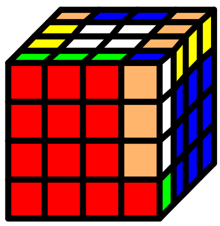
$E^2$



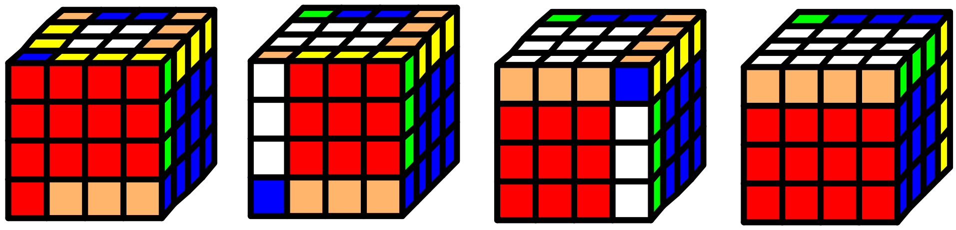
$B$



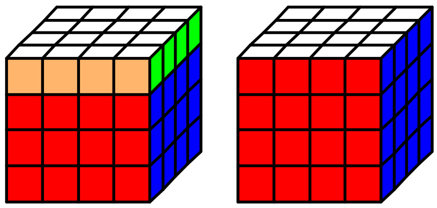
$F^{-1}$



$B^{-1}$



$F$ $E^2$ $F^2$ $D$



$T^{-1}$ $C^2$

E o cubo ficou pronto, com uma única sequência, sem termos que aplicar as duas sequências habituais (OLL e PLL).

Resumindo, só com os movimentos:

**1**. $C_4F^{-1}E_2E^2C_2^2D^{-1}C_2$

**2**. $C_4^2F^{-1}D_2^{-1}F^{-1}$

**3**. $D_2FB_2D^2B_2^{-1}$

**4**. $C_4^{-1}CD_2C^{-1}D_2^{-1}$

**5**. $F_4^{-1}C_4DB_2D^{-1}$

**6**. $B_2^{-1}B_2^2T^2F^2B_2^2F_4^{-1}$

**7**. $FC_4^2D_4^{-1}D_2C^{-1}D_2^{-1}F$

**8**. $D_2C^2D_2^{-1}C_4F_4F^{-1}B^{-1}FB$

**9**. $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$

**10**. $D^{-1}C^{-1}B$

**11**. $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$

**12**. $E^{-1}C_4^2EB$

**13**. $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$

**14**. $FD^{-1}B^2$

**15**. $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$

**16**. $C_4F_4D^{-1}F^{-1}D$

**17**. $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$

**18**. $CF_4^{-1}$

**19**. $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$

**20**. $T^{-1}C^2T^{-1}C^{-1}D^{-1}F_4$

**21**. $E^{-1}CE\dot{C}D^{-1}C^{-1}D$

**22**. $C^{-1}FCF^{-1}T^{-1}C^{-1}TC$

**23**. $F^{-1}CF^2CF^{-1}C^2DC$

**24**. $D^{-1}CDC^2D^{-1}C^2DCD^{-1}$

**25**. $d^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2d^2$

**26**. $B_3d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$

**27**. $C_4^{-1}$

**28**. $TD^{-1}F^2E^2BF^{-1}B^{-1}FE^2F^2DT^{-1}C^2$

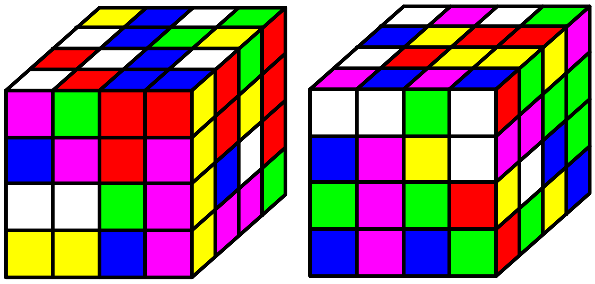
**Example 3** *Considere um cubo resolvido com a face amarela para cima e a face azul para a frente. Baralhe o cubo da seguinte forma:*

$DCeb^2BT^2CD^2b^{-1}dE^2cB^2TD^2BETCdctb^2D^2c^{-1}Eb^2d^2EFDF^2E^{-1}fE^2Dd^2$

**Resolução**

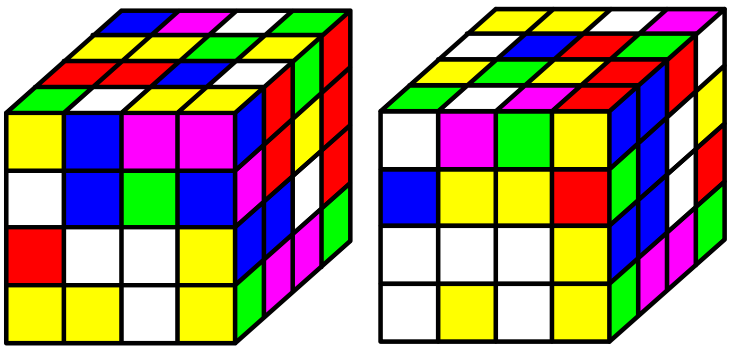
Neste exemplo, não vamos apresentar as imagens, passo a passo.

A posição obtida está representada na figura seguinte, apresentando-se duas posições que mostram as 6 faces, para que possa confirmar a posição que obteve no seu cubo.:



## Os centros

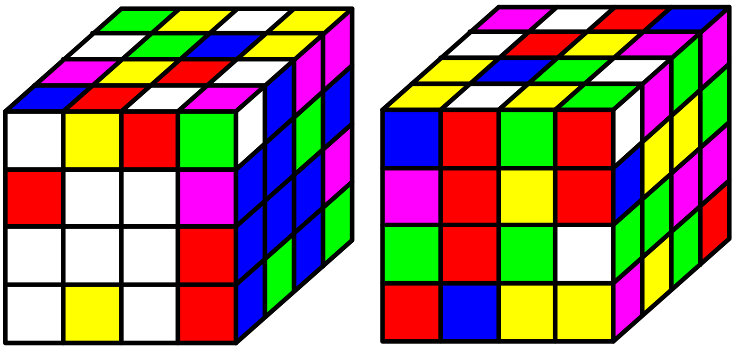
Vamos partir da posição da esquerda, para construir a face branca. Vamos apresentar uma figura a cada "dois movimentos"e colocamos duas posições do cubo em cada imagem. Primeiros 4 movimentos: $F^{-1}(eE)E^2(cC)^2$



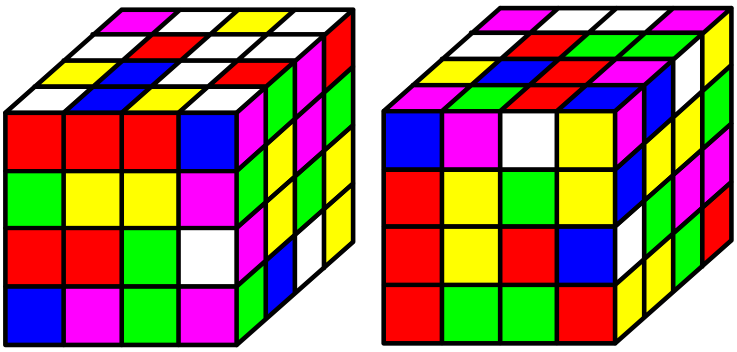
Agora, fazemos $D^{-1}(Cc)$, para fazermos o centro branco. Segue-se o centro amarelo. Na face esquerda, já temos um bloco de dois amarelos.

Há muitas maneiras de construir o centro amarelo. Até podemos construí-lo numa face adajacente ao centro branco e, depois, mudá-lo.

amos começar por colocar o centro branco atrás, rodando o cubo em torno do eixo vertical.à direita, temos a nova posição do cubo.

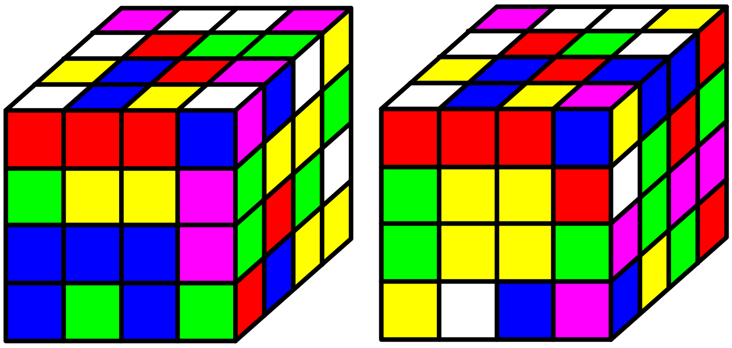


Neste caso, o melhor é juntar os dois amarelos que estão na camada $d$, formando dois blocos de dois amarelos na camada $c$. Só que vamos ter que voltar com os dois brancos. Eis os movimentos: $F^{-1}(d^{-1}D^{-1})F^{-1}(dD)$.



Agora, rodando a face da frente, no sentido horário, formamos dois blocos de dois amarelos na camada $c$, em faces adjacentes.Os dois amarelos da face da frente, estão certos, pelo que basta colocar os outros dois amarelos no lugar do verde e do vermelho (da face da frente). Isso faz-se muito facilmente, rodando a camada $b$, dando meia volta na face da direita e trazendo os amarelos.

Movimentos: $F(bB)D^2(b^{-1}B^{-1})$



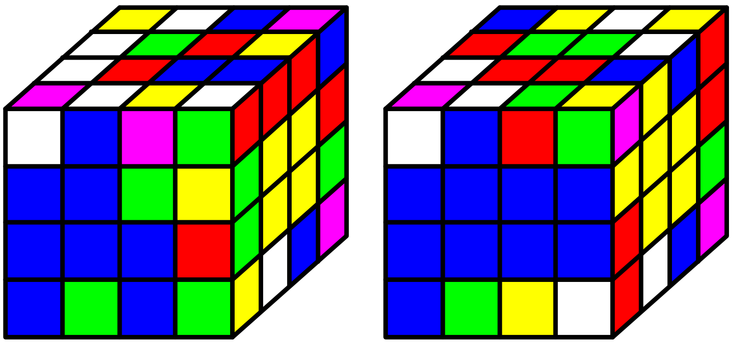
Agora, vamos construir o centro azul em qualquer face (distinta das duas que têm os centros amarelo e branco). Temos muita liberdade para isso.

Podemos colocar a face branca para a esquerda e a amarela para a direita, ou podemos deixar como está (uma na frente e outra atrás).

Na face da esquerda (figura anterior, cubo à direita) temos 3 peças centrais azuis, pelo que vamos colocar essa face para a frente.

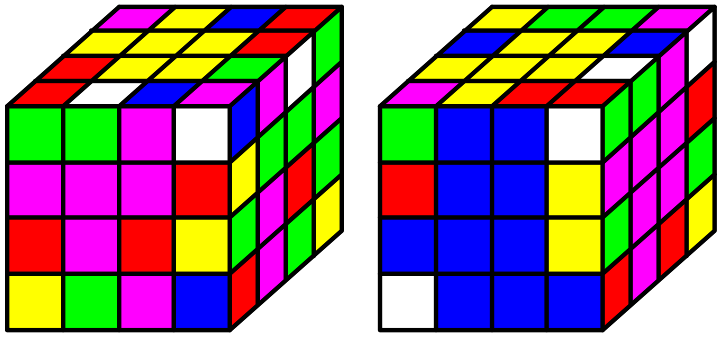
agora, podemos rodar livremente as camadas exteriores e as camadas interiores $e$ e $d$. É muito f´scil construir o centro azul.

Movimentos: $C(dD)C^{-1}(d^{-1}D^{-1})$.

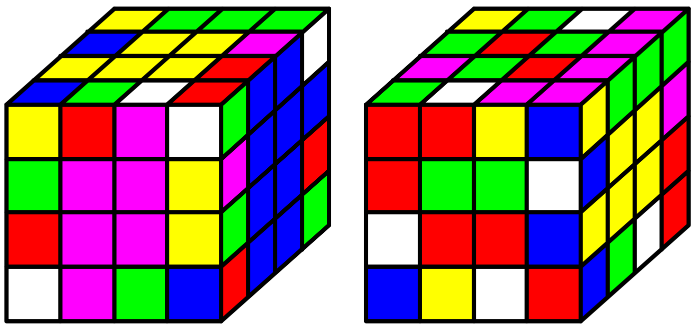


Agora, colocamos o centro amarelo para cima e o centro azul para a frente. O centro laranja tem de ficar à esquerda do azul. Infelizmente, ficaram 3 peças laranja à direita. Mas podemos construir o centro laranja à direita do azul e, depois, permutar esses dois centros. Coloquemos o centro azul para a esquerda e façamos os seguintes movimentos: $D(bB)D^{-1}(b^{-1}B^{-1})$.

Só fizemos os últimos movimentos anteriores por motivos didácticos. Eis a posição do cubo:



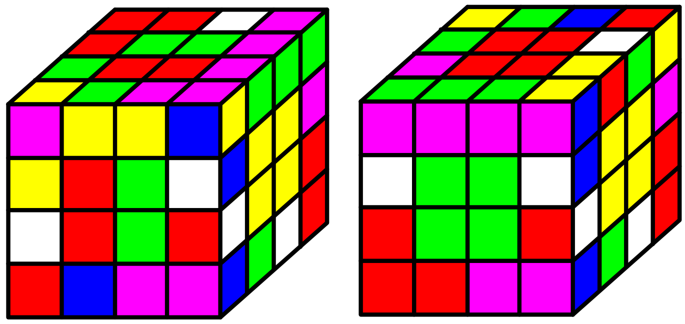
Mas os centros azul e laranja estão trocados, pelo que temos de permutá-los. Fazendo $(cC)F^2(c^2C^2)D^2(cC)$, obtemos a seguinte posição do cubo (visto de duas maneiras diferentes).



À direita, o centro azul fica para trás, pelo que o centro verde tem de ficar para a frente (e o vermelho para cima).

Convém fixar a maneira de resolver as duas últimas faces. Mas podemos raciocinar. Se rodarmos a camada $d$, no sentido horário, temos de deixae na face de cima um verde e um vermelho ao contrário da posição actual. Isso consegue-se levando um verde à frente da camada $d$. Resta saber se levamos dois verdes ou um verde e um vermelho. Se levarmos dois verdes, acabamos trazendo dois verdes, pelo que começamos por rodar a camada da frente, no sentido horário. Movimentos a efectuar: $F(dD)C^{-1}(d^{-1}D^{-1})$. A posição obtida é a da figura da esquerda, com dois blocos vermelhos e dois verdes em cada face.

E, agora, é fácil resolver os dois últimos centros: $C(eE)F^2(e^{-1}E^{-1})$.

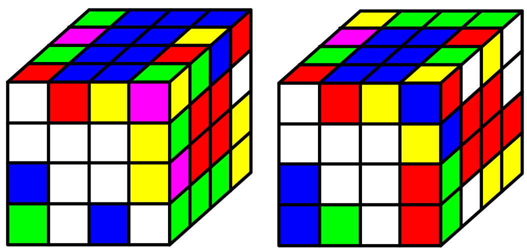


## As arestas

Na figura anterior, podemos ver dois meios convenientemente agrupados, formando um meio mais longo. São os meios com verde e laranja.

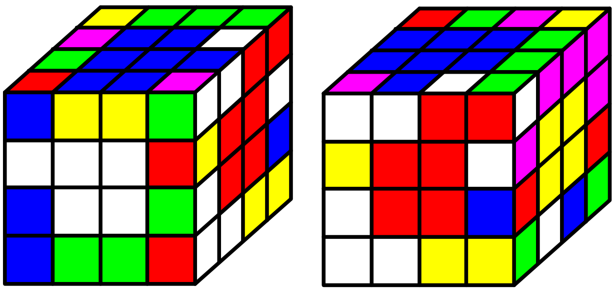
Agora, temos de juntar os meios, dois a dois, formando blocos longos de duas cores, como no caso dos meios referidos.

Na figura seguinte, à esquerda, temos a mesma posição do cubo, mas visto de outra maneira. Rodando a camada da direita, no sentido anti horário, ficamos com os dois meios azuis e amarelos na posição que pretendemos. Só que convém colocar o outro meio verde e vermelho na camada inferior com o verde voltado para a frente. Em primeiro lugar, procuramos esse meio verde e vermelho. Ele está na camada $b$, por baixo do verde do canto de cima, com o verde voltado para trás. Como queremos o verde voltado para a frente, rodamos a camada de trás no sentido horário e damos meia volta na camada de baixo, obtendo-se a posição da direita. Movimentos efectuados: $D^{-1}TB^2$. Repare que foram necessários poucos movimentos (4, contando a meia volta como 2 movimentos).



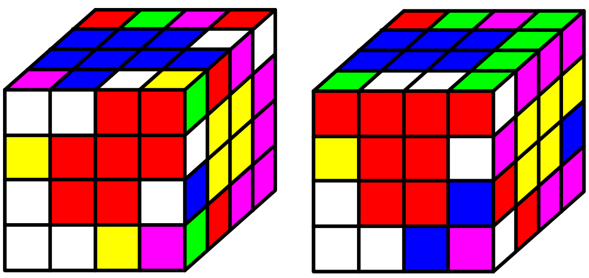
Chegados a esta posição, aplicamos a sequência $dDFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$. Note-se que não é necessário fazer $D^{-1}$, mas é mais fácil rodar as camadas $d$ e $D$ ao mesmo tempo.

A seguir, temos o cubo obtido visto de duas maneiras diferentes. Na figura da direita, o branco da camada da direita e em baixo, também é vermelho, pelo que basta rodar a camada da direita, para que ele fique "perto"do vermelho e branco da camada de cima.



Por baixo da peça vermelha e branca rodada, fica um meio azul e branco, pelo que temos de procurar o outro meio azul e branco e trazê-lo para a camada da frente, com o azul para o lado (e branco para baixo). Infelizmente, o outro azul e branco está numa posição desfavorável (à esquerda do outro vermelho e branco). Então, aplicamos a sequência desta secção, verificando que o par de meios da camada da frente e em baixo não está resolvido.

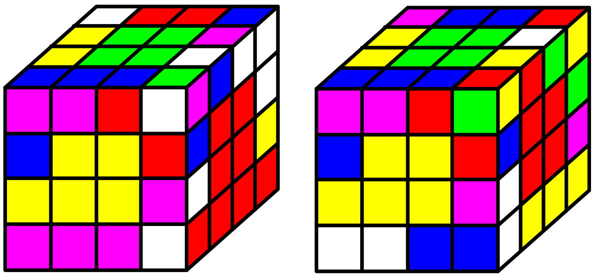
Então, aplicamos a sequência $dDFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$, obtendo-se a posição da direita (figura seguinte).



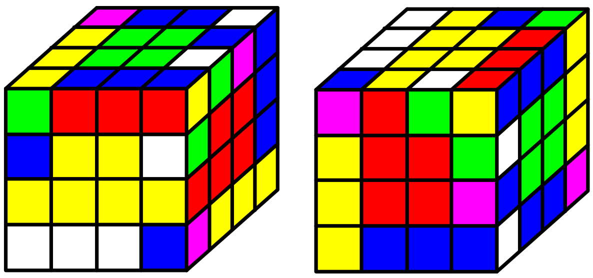
Os meios azuis e vermelhos já estão em posição (basta olhar o cubo de outra maneira).

Por baixo do meio azul e vermelho (da camada da direita), temos um meio branco e laranja, sendo que o outro meio branco e laranja está na camada de cima. Temos de trazê-lo para a camada de baixo com o laranja para o lado, mas sem desfazer os dois vermelhos e azuis. Rodamos a camada de cima no sentido anti horário, a camada de trás no sentido horário e trazemos de volta o azul e vermelho, rodando em cima no sentido horário.

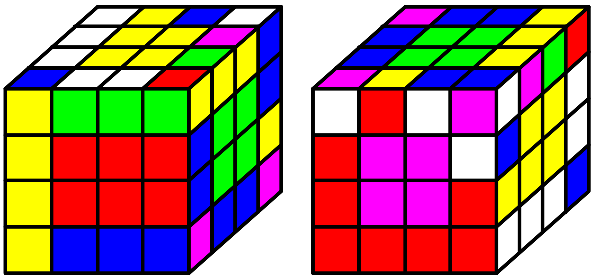
Como a peça laranja e branca tem o branco para trás, rodamos a camada de trás no sentido horário (podíamos ter dado meia volta no início) e damos meia volta na camada de baixo: $C^{-1}TCTB^2$.



Agora, aplicamos a sequência $dDFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$, obtendo-se a posição da figura seguinte.



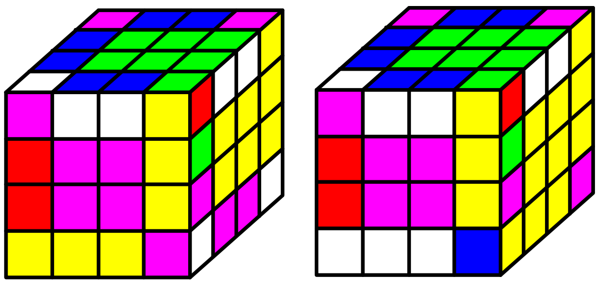
Na figura da direita, os meios verdes e brancos já estão colocados na posição favorável, faltando colocar o outro meio azul e laranja. Por coincidência, ele já está colocado no lugar certo, pelo que é só aplicar a fórmula $dDFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$, obtendo-se a posição da figura seguinte (esquerda):



As peças azuis e brancas já estão colocadas e as peças vermelhas e amarelas estão na posição desfavorável. E há um bloco pronto onde não pode ficar. Convém verificar quantos meios já estão prontos. Neste caso, ainda há mais peças por juntar. Então, damos meia volta na camada de baixo, para afastar aquele bloco pronto (vermelho e branco) da frente. Agora, aplicamos a fórmula $dDFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$, juntando os dois meios azuis e brancos.

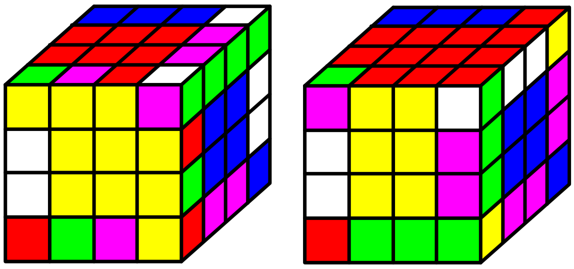
Rodemos a camada de baixo no sentido horário, para que todos os meios por juntar fiquem nna camada da direita ($B$).

Note-se que podíamos colocar as quatro peças de modo a podermos aplicar a fórmula $bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1}$, conseguindo-se completar dois meios em vez de um.



Agora, vejamos o cubo com o centro amarelo para a frente e o vermelho para cima (figura da esquerda). Os meios que pretendemos juntar (vermelhos e amarelos, verdes e amarelos) estão em posição para serem unidos e vamos ter como bónus que o terceiro par vai ficar unido.

Fórmula a aplicar: $dDFD^{-1}F^{-1}d^{-1}D^{-1}$

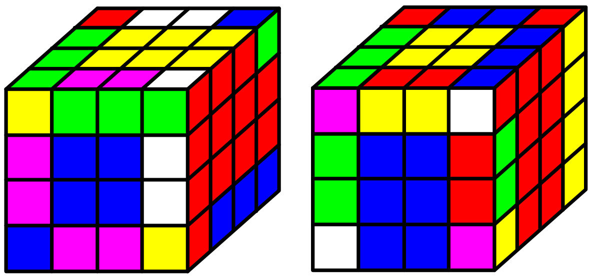


Assim, todos os meios ficaram resolvidos, formando blocos de dois que podem ser considerados uma peça única. Então, daqui para a frente, vamos resolver o cubo como se ele fosse um cubo 3×3×3.

## Cruz branca

Coloquemos o centro branco para baixo e o azul para a frente (figura da esquerda).

Como os meios verde e branco e vermelho e branco já estão alinhados, basta acertar esses meios com o centro branco. Depois, colocam-se os outros dois meios. Sequência a aplicar: $D^{-1}T^2BF^{-1}BT^{-1}B^2$.



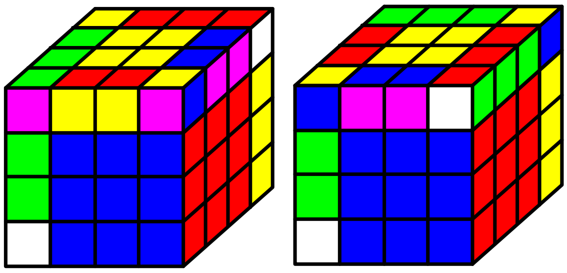
## P3C

As primeiras três camadas do cubo 4×4×4 resolvem-se da mesma maneira que o cubo 3×3×3. Então, podemos colocar cada canto com o meio respectivo, completando as três camadas ao mesmo tempo.

Na figura anterior (cubo da direita), podemos ver que já temos as três peças com azul e vermelho prontas para a sua colocação.

Sequência: $CDC^{-1}D^{-1}$. Curiosamente, temos os meios vermelhos e verdes e o canto vermelho, verde e branco prontas para colocar.

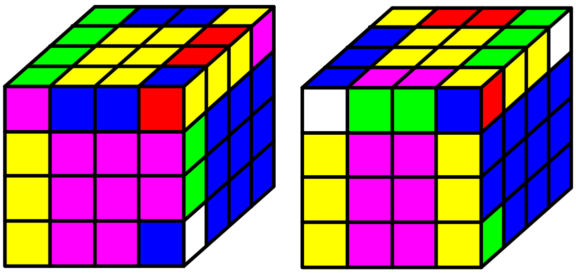
Vamos rodar a face de cima no sentido horário, para acertarmos a face de cima e para vermos melhor a situação (imagem da direita).



É claro que poderíamos ter colocado o centro vermelho para a frente, mas só quisemos fazer um movimento.

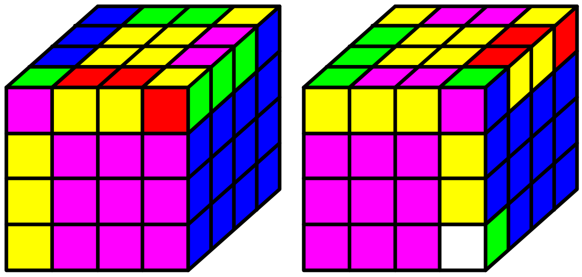
Sequência a aplicar, incluindo o movimento da face de cima: $CTC^{-1}T^{-1}$.

À esquerda da figura seguinte, temos a nova posição do cubo, com o centro laranja para a frente:



O canto azul laranja e branco está na camada da frente (vemos o azul e o branco). Agora, damos meia volta em cima e rodamos a camada da direita, juntando as três peças. Roda-se em cima no sentido horário, afastando as três peças e trazemos de volta o meio do centro branco, obtendo-se a posição da direita, na figura anterior.

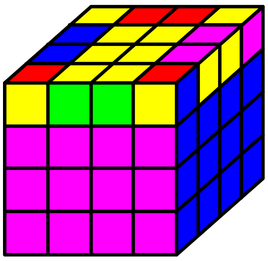
Sequência aplicada: $C^2DCD^{-1}$. Ainda nos falta colocar o canto e o meio na coluna respectiva. Temos de dar meia volta em cima, alinhando a cor laranja com o centro azul. O resto é fácil. Sequência utilizada: $C^2F^{-1}CF$, obtendo-se a posição da figura seguinte (esquerda):



Agora, falta-nos um canto e um meio. O canto que nos falta é o que está na camada de cima, à frente daqueles três azuis. Vamos ter que pescar o meio verde e laranja que tem de ir para o lugar daqueles dois verdes de trás. Mas antes, temos de "afundar"o canto. Para isso, podemos fazer $C^{-1}F$ (figura anterior, à direita).

Agora, rodamos a camada de cima, no sentido anti horário, trazemos o canto para a camada de cima e rodamos a camada de cima, no sentido horário, acertando o laranja do canto com o centro laranja. Segue-se a Pesca à esquerda.

Sequência (incluindo a Pesca): $C^{-1}F^{-1}CE^{-1}C^{-1}E$. E obtivemos a seguinte posição:

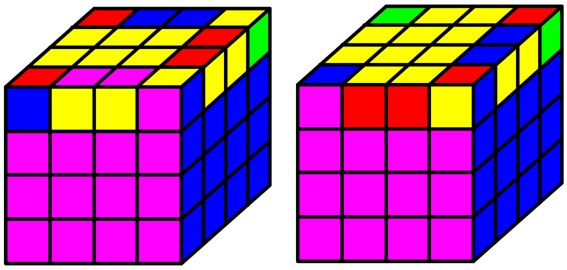


E a terceira camada ficou pronta.

## A cruz amarela

A posição obtida é impossível num cubo 3×3×3. Para facilitar o próximo desenho, vamos rodar a camada de cima no sentido horário ($C$), colocando o meio com o amarelo para cima, na camada da esquerda. Depois, aplicamos a fórmula do cubo 3×3×3.

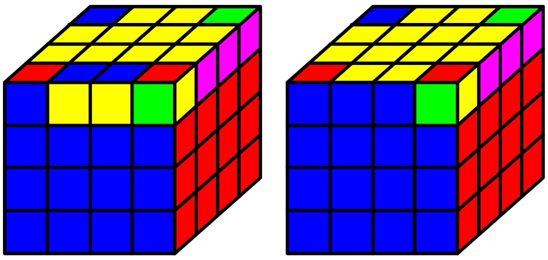
Sequência, incluindo o $C$ inicial: $CFCDC^{-1}D^{-1}F^{-1}$. Obteve-se o cubo da direita (figura seguinte).



Agora, temos de inverter as cores dos meios azuis e amarelos. A fórmula que temos de aplicar é a mais complicada de toda a resolução do cubo. Em primeiro lugar, colocamos as peças azuis e amarelas na camada da frente (podemos rodar todo o cubo) e aplicamos a fórmula

$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

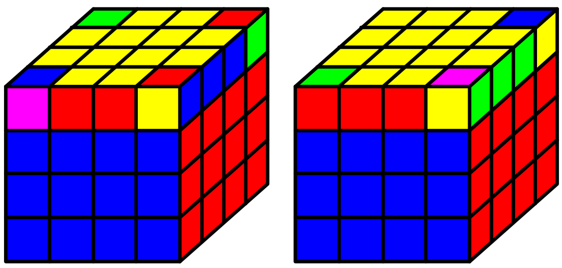
E obtemos a posição da direita da figura seguinte, com a cruz amarela pronta:



## A face amarela

Se rodarmos a camada de cima no sentido anti horário, ficamos na posição requerida para começarmos a resolver a face amarela.

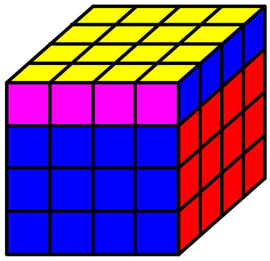
Sequência, incluindo o $C^{-1}$ inicial: $C^{-1}DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$.



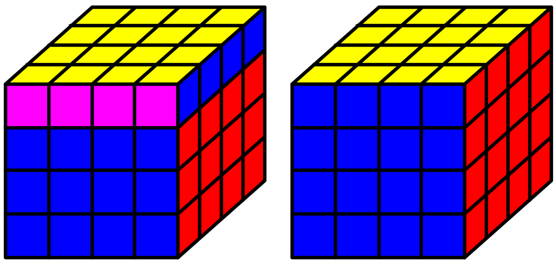
E obtivemos a posição da direita (na figura anterior).

Agora, rodamos a camada de cima no sentido anti horário e aplicamos a fórmula de novo.

Sequência, incluindo o $C^{-1}$ inicial: $C^{-1}DCD^{-1}CDC^2D^{-1}$.



A face amarela ficou pronta. Neste caso, tivemos sorte, bastando rodar a face de cima, no sentido horário, para que o cubo fique resolvido.



Em casos mais complicados, poderíamos ter que aplicar mais três fórmulas (para acertar os cantos, os meios e para resolver a situação de termos duas faces laterais prontas e duas por resolver).

Espero não me ter enganado nas figuras apresentadas (nem nos algoritmos).

# Capítulo 5

# Conclusão

Para a resolução dum cubo 4×4×4, seguimos as seguintes etapas:

1. Construção dos seis centros
2. União dos meios das mesmas cores
3. Construção da cruz branca
4. Resolução das três primeiras camadas
5. Construção da cruz amarela
6. Resolução da face amarela
7. Resolução da quarta camada

## Os seis centros

Aqui, segue-se a seguinte ordem:

1. Centro branco
2. Centro amarelo, na face oposta ao branco
3. Centro azul
4. Centro laranja à esquerda do azul (com o amarelo para cima e o azul para a frente)

**5**. Resolução simultânea dos dois últimos centros

Note-se que pode acontecer os dois últimos centros ficarem resolvidos, quando se constrói o centro laranja. E pode acontecer que os dois últimos estejam "resolvidos", mas na posição errada. Neste caso, há que trocá-los.

A resolução dos dois últimos centros faz-se por tentativa e erro, até descobrirmos como se faz, nos casos um pouco mais complicados.

Registe-se que o terceiro e o quarto centros são construídos praticamente da mesma maneira que o primeiro e o segundo, embora de maneira mais rápida, pois os centros que faltam estão em duas camadas paralelas.

E não há muito mais a dizer sobre a construção dos centros.

# Construção dos meios

Aqui, há que treinar um pouco, para conseguirmos juntar dois pares de cada vez. Se faltarem apenas 3 pares de meios para serem unidos, podemos resolver todos duma vez. Por vezes, temos de aplicar uma fórmula, depois dos meios serem colocados na posição conveniente. A fórmula é a seguinte

$$bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1}$$

Há casos em que convém aplicar esta fórmula várias vezes. Em outros casos, não temos que aplicá-la.

Uma vez formados todos os pares de meios com cores iguais, o cubo $4\times4\times4$ fica transformado num cubo $3\times3\times3$.

E nada mais há a acrescentar sobre a construção dos meios.

# Cruz branca

A cruz branca constrói-se da mesma maneira que no cubo $3\times3\times3$.

# Primeiras 3 camadas (P3C)

Faz-se da mesma maneira que as duas primeiras camadas, no cubo $3\times3\times3$.

# Cruz amarela

Há uma diferença importante, relativamente ao cubo 3×3×3. Podemos ter 3 meios prontos e o quarto meio estar com as cores invertidas.

Há que inverter essas duas cores com a fórmula

$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

Esta é a única fórmula algo complicada, mas temos de sabê-la. A fórmula pode ser aplicada para construirmos a cruz amarela, logo de imediato, ou podemos deixar para o fim a sua aplicação. No meu caso, eu prefiro deixar para o fim, por uma questão de visualização das várias posições que vamos obtendo. Se aplicarmos a sequência de imediato, perdemos essa maneira de vizualizarmos as várias posições. Mas é uma questão de gosto.

A fórmula anterior pode ser decorada através duma "lenga lenga". Vejamos: "meia volta na camada $d$, meia volta atrás, meia volta em cima, camada $e$ vem, meia volta em cima, camada $d$ vem, meia volta em cima, camada $d$ vai, meia volta em cima, meia volta na frente, camada $d$ vai, meia volta na frente, camada $e$ vai, meia volta atrás, meia volta na camada $d$.

# Resolução da face amarela

Terminada a cruz amarela, deve resolver-se a face amarela da mesma maneira que se reolvia no cubo 3×3×3. Eventualmente, pode surgir algum problema, mas isso fará parte das permutações de cantos e meios.

# Conclusão da quarta camada

A quarta camada resolve-se da mesma maneira que no cubo 3×3×3, mas podemos ter algumas singularidades. Por exemplo, podemos ter duas faces laterais paralelas resolvidas e as duas outras com os meios trocados. Ou duas faces laterais perpendiculares resolvidas e as duas outras com os meios trocados. Ou podemos ter dois cantos trocados. A fórmula que permite resolver o problema é

$$d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$$

Após a aplicação da fórmula anterior, resolvemos o cubo "normalmente".

Note-se o seguinte: se já temos a face de cima pronta, passamos à colocação dos cantos e, depois, dos meios. Pode acontecer que, ao permutarmos os meios, haja um problema que não surgia no cubo 3×3×3. Então, devemos aplicar a fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$, após o que continuamos normalmente, sem mais nenhuma diferença. Também podemos acertar os cantos, aplicando o Tango (uma ou duas vezes) e verificar se haverá algum problema com a permutação dos meios. Se, ao aplicarmos a Valsa, não resolvermos nenhuma aresta, vamos ter um problema, mas podemos continuar, desde que se aplique a mesma sequência, sem rodar todo o cubo. Nesses casos, obteremos duas arestas resolvidas e duas arestas por resolver, pelo que aplicamos a sequência anterior.

# Resumo

Na resolução do cubo 4×4×4, podemos ter que aplicar 3 fórmulas que não aplicávamos no cubo 3×3×3. Essa fórmulas são

$$\begin{cases} bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1} = b\,(DF^{-1})\,C\,(D^{-1}F)\,b^{-1} \\ (d^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2d^2) \\ d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2 = (d^2C^2)\,(d^2C^2)\,(c^2d^2c^2) \end{cases}$$

A primeira serve para juntar convenientemente dois pares de meios, a segunda para inverter as cores dum par de meios já formado e a terceira serve para resolver o problema de termos dois meios certos e dois errados ou dois cantos certos e dois errados.

Então, depois de alguma prática, o cubo 4×4×4 é quase tão fácil quanto o cubo 3×3×3.

Eis uma maneira de fixar a primeira fórmula:

Começamos por escrever $bDFCDFb$. A expressão anterior está errada, mas pode ser corrigida facilmente: quer as letras minúsculas quer as maiúsculas, têm alternadamente expoentes 1 e $-1$. Então:

$$bDFCDFb \longrightarrow b^1D^1F^{-1}C^1D^{-1}F^1b^{-1} \longrightarrow bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1}$$

Claro que o expoente 1 não necessita ser escrito.

Uma maneira de fixar a terceira fórmula:

$$(dCdC)\,(cdc) \longrightarrow \left(d^2C^2d^2C^2\right)\left(c^2d^2c^2\right)$$

Repare-se que todos os expoentes são iguais a 2. Se lhe interessar, repare que $dC$ é depois de Cristo e $cdc$ pode correspender a uma palara como "codeco"pequeno. Digamos: depois de Cristo duas vezes, codeco pequeno. Tudo com expoente 2. Mas acho que a fórmula é bem fácil de fixar sem mais nada.

Quanto à segunda fórmula, a situação é pior, mas tentemos uma maneira. Dividindo a fórmula em 4 blocos, temos que o primeiro e o último são simétricos: $(d^2T^2)$ e $(T^2d^2)$. Resta-nos os outros dois blocos, onde, em cada bloco, as letras maiúsculas têm expoente 2 e as minúsculas têm expoente alternadamente 1 e $-1$, começando (em cada bloco) sempre por 1. Além disso, no segundo bloco só aparece a letra maiúscula $C$ e, no terceiro, a letra maiúscula $F$. Em todos os casos, os expoentes das letras maiúsculas são iguais a 2.

$$\left(C^2e^1C^2d^{-1}C^2d^1C^2\right)\left(F^2d^1F^2e^{-1}\right)$$

Se preferirmos:

$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2e^1C^2d^{-1}C^2d^1C^2\right)\left(F^2d^1F^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

Se juntarmos as maiúsculas, numa linha e as minúsculas noutra linha, temos (mantendo os 4 blocos):

$$\begin{cases} (T^2)\,(C^2C^2C^2C^2)\,(F^2F^2)\,(T^2) \\ (d^2)\,(e^1d^{-1}d^1)\,(d^1e^{-1})\,(d^2) \end{cases}$$

Agora, é só encaixar uma linha na outra.

O pior que pode acontecer é a sugestão não ter adiantado de muito. Nesse caso, fixe como achar melhor.

Por fim, registe-se que a fórmula $(d^2C^2)\,(d^2C^2)\,(c^2d^2c^2)$ pode ser apresentada da seguinte maneira: $(d^2C^2d^2)\,(C^2c^2)\,(d^2c^2)$, onde $C^2c^2$ são feitas em simultâneo.