O cubo de Rubik 5×5×5

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Setembro de 2018

[1]egipereira@gmail.com

Conteúdo

Preface

Este texto começou a ser escrito em 2014 (ou 2013), tendo sido revisto em 2018, de forma breve. Não tenho a certeza que o mesmo não tenha erros, mas parece-me que dá para aprender a resolver o cubo $5 \times 5 \times 5$, de maneira relativamente fácil. Qualquer erro que venha a ser encontrado, pode ser comunicado para o email indicado.

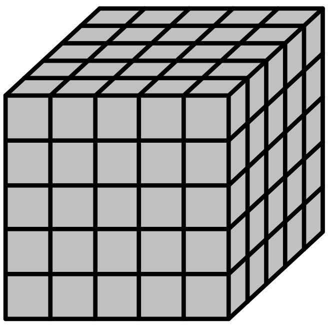
Funchal, Setembro de 2018

Egídio Gonçalves Pereira

Capítulo 1

Introdução

O cubo mágico 5×5×5 é semelhante aos cubos mágicos 3×3×3 e 4×4×4, mas tem mais peças, como podemos ver na figura seguinte, onde temos o cubo sem as cores coladas nos diferentes quadrados que constituem as faces.



Neste caso, temos 25 quadrados (elementares) em cada face. Assim, teremos 25 "adesivos"de cada cor, num total de 150 "adesivos".

No cubo 5×5×5, temos uma casa central em cada face, pelo que a cor de cada face fica definida pela cor da casa central da face.

Num cubo 5×5×5, continuamos a ter 8 peças de canto, cada uma com 3 cores, temos 54 peças interiores, cada uma com uma cor, e 36 peças de borda, cada uma com 2 cores.

Fazendo os cálculos, temos $8 \times 3 + 54 \times 1 + 36 \times 2 = 150$ adesivos.

Observemos que o cubo 5×5×5 é construído duma maneira muito diferente do cubo 4×4×4. No cubo 5×5×5 (como no cubo 3×3×3), temos 6 centros fixos, aparafusados a um núcleo central.

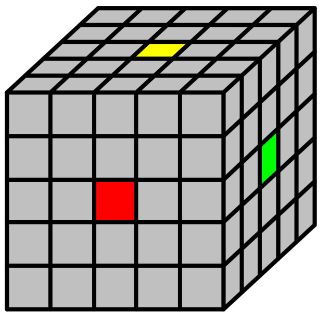
Se o seu cubo se desfizer por algum motivo, não se aborreça demasiado. Desmonte o cubo totalmente e monte-o já resolvido (por camadas).

Primeiro monte o centro branco, depois as peças de meio (com branco), tendo em atenção a ordem das cores) e, por fim os cantos.

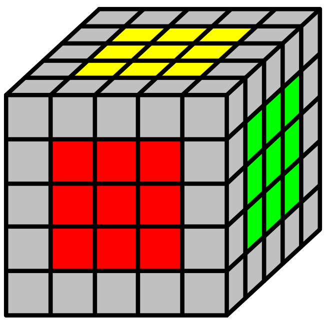
Curiosamente, na última camada, comece pelo centro, continue com a peça central da aresta, um canto e a peça adjacente a esse canto, faltando duas peças. Coloque o último canto e termine com a peça adjacente ao mesmo.

Observemos que nalgumas figuras que apresentamos, substituímos o laranja pelo rosa, para se conseguir uma melhor distinção com o vermelho. Mantivemos o amarelo e o branco, embora em certas condições, possa ser difícil distinguir as duas cores (por exemplo, à noite). No entanto, julgamos que o amarelo apresentado é fácil de distinguir do branco. O mesmo não acontece com alguns cubos reais. Note-se que embora utilizemos o "rosa", continuaremos a escrever "laranja", por ser essa a cor que, habitualmente, aparece nos cubos.

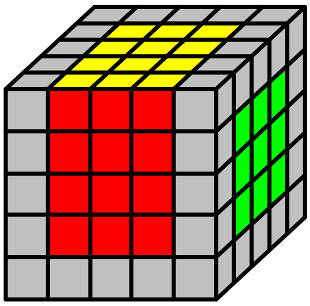
Eis o cubo 5×5×5, com a casa central de cada face colorida:



Como no caso do cubo 4×4×4, o primeiro objetivo é construir os 6 centros, conforme podemos ver na imagem seguinte:



O segundo objetivo é conseguir formar as arestas, como podemos ver com a aresta com as cores vermelho e amarelo:

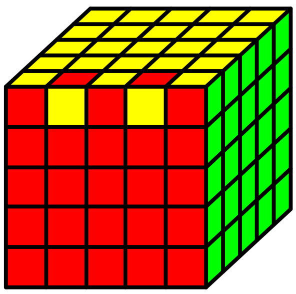


Quando todas as arestas estiverem resolvidas, obteremos um cubo 3×3×3, o qual será resolvido como o cubo 3×3×3 propriamente dito, sem nenhuma diferença.

Para formar as últimas arestas, precisaremos de algumas das fórmulas que usávamos no cubo 4×4×4, nas chamadas (im)paridades.

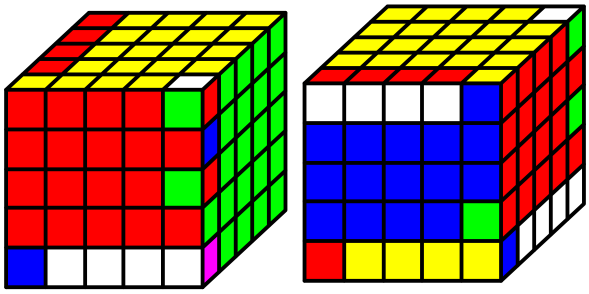
A fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$ não serve, porque não mantém os centros (nem precisamos dela).

A fórmula $(d^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2d^2)$ faz praticamente o mesmo que fazia no cubo 4×4×4, ou seja, troca duas peças da camada de cima, conforme a figura seguinte (a fórmula foi aplicada a um cubo resolvido):



Esta fórmula é importante na resolução das arestas do cubo.

A fórmula $(Bb)\,DF^{-1}CD^{-1}F\,(Bb)^{-1}$ produz o seguinte efeito, quando aplicada a um cubo resolvido:



Na figura anterior, estão apresentadas duas vistas diferentes do mesmo cubo. Apenas duas arestas foram modificadas, além dos cantos.

Quando obtivermos uma posição análoga a esta, basta-nos aplicar a sequência inversa da anterior.

Retomaremos esta questão no Capítulo referente às arestas.

1.1 Notação

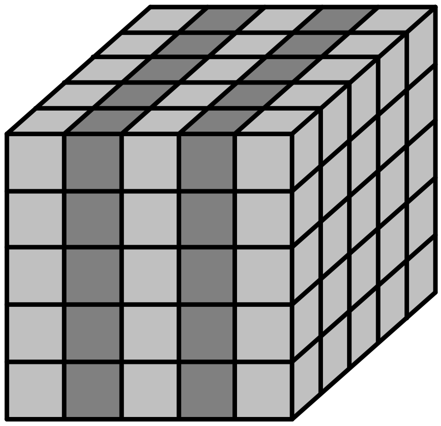
Vejamos algumas noções importantes. Na figura seguinte, a cinzento mais claro, temos a camada (ou fatia) da direita que é representada por D e a camada da esquerda (representada por E). A cinzento mais escuro, temos as camadas d e e.

À camada central, não atribuímos "nome", embora ela seja "conhecida"por M. Analogamente, temos as camadas horizontais, Cima (C), Baixo (B) e, ainda, as camadas c e b.

Por fim, temos as camada da frente (F) e de trás (T) bem como as camadas f e t. Se quisermos rodar a camada da frente de 90°, no sentido horário, escrevemos F.

Se quisermos rodar a camada da frente de 90°, no sentido anti horário, escrevemos F^{-1}. Embora seja mais frequente escrever F', preferimos escrever F^{-1}.

Rodar a camada da frente de 180°, no sentido horário, será representado por F^2. E rodar a camada da frente de 180°, no sentido anti horário, será representado por F^{-2}. Note-se que o efeito de rodar 180° no sentido horário é o mesmo que rodar 180° no sentido anti horário.



Muitas vezes, ao rodarmos d, dá-nos jeito também rodar D, ou seja, fazemos Dd em vez de d. Rodar as duas camadas da direita, no sentido horário, será representado por D_2. Se pretendermos rodar as três camadas da direita, escreveremos D_3. E, analogamente, para D_4 e D_5.

Repare-se que D_5 significa rodar de $90\,^\circ$, no sentido horário, as cinco camadas da direita, ou seja rodar todo o cubo, de modo que a face da direita continua na direita (também a esquerda continua na esquerda) e a face da frente passa para cima.

Note-se que $E_5 = D_5^{-1}$.

Analogamente, C_5 significa rodar todo o cubo, de modo a manter a face de cima voltada para cima e passar a face da direita para a frente.

Por fim, F_5 significa rodar todo o cubo, de modo a manter a face da frente voltada para a frente e passar a face de cima para a direita. Deste modo, evita-se a notação x, y, z.

Repare-se que esta notação pode ser usada em qualquer cubo, mesmo no cubo mais pequeno (o cubo 2×2×2).

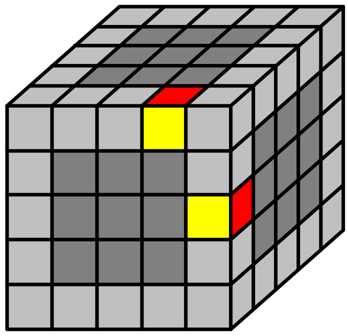
Então, D_3 significa rodar as três camadas da direita no sentido horário, D_2 significa rodar as duas camadas da direita, no sentido horário, ou seja, $D_2 = Dd = dD$. Analogamente, teremos C_3, C_2, B_3, B_2, E_3, E_2, F_3, F_2, T_3 e T_2.

Evidentemente, poderemos escrever D_3^2, o que significa rodar duas vezes as três camadas da direita. E poderemos escrever, por exemplo, C_3^{-1}, o que significa rodar uma vez as três camadas de cima no sentido anti horário.

Se tem dificuldade em entender a notação, consulte o texto que escrevemos sobre o cubo $4 \times 4 \times 4$, onde estão definidos os vários movimentos. No cubo $5 \times 5 \times 5$, tudo funciona de maneira semelhante.

1.2 Uma Sequência Fundamental

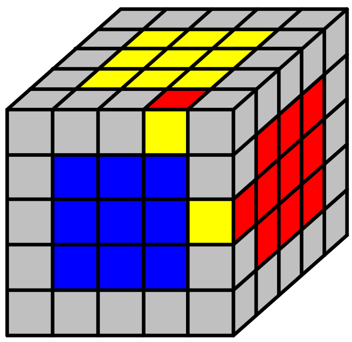
Consideremos a seguinte posição dum cubo 5×5×5, com os centros resolvidos:



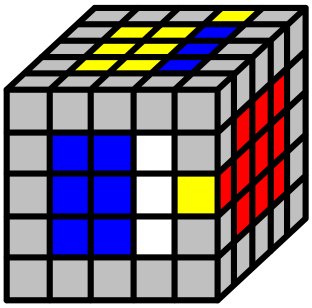
Pretendemos, com é óbvio, unir as duas peças com vermelho e amarelo, ou seja, temos que fazer com que a peça que está no centro da aresta da direita (frente), "salte"por cima da outra peça com as mesmas cores.

Isso pode ser feito, rodando a camada d, no sentido horário, após o que se faz F^{-1}, para colocar a peça vermelha e amarela no centro da aresta de cima/frente. E trazemos a camada d de volta, fazendo d^{-1}. Só que há um problema grave: alguns centros ficaram desfeitos.

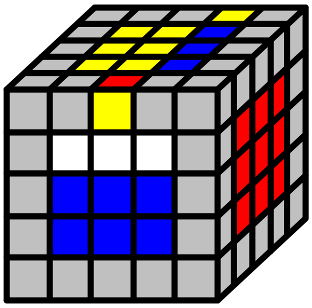
Vejamos um exemplo, com mais detalhe:



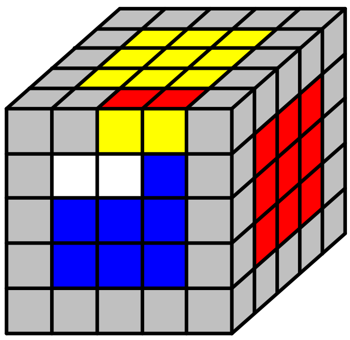
Vejamos, passo a passo, o que vai acontecendo. O primeiro movimento é d:



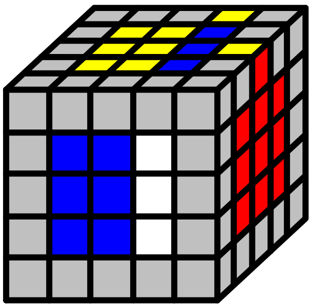
Agora, quando fazemos F^{-1}, alteramos a configuração do centro da frente:



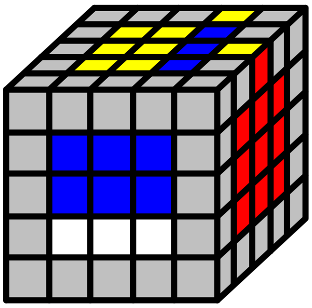
Agora, quando trouxermos a camada d de volta, fazendo d^{-1}, o centro azul e o centro branco ficam desarranjados:



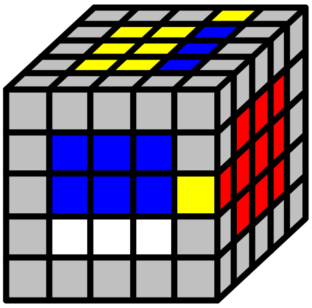
A solução para esse problema é fácil: partindo da posição inicial, começamos por D_2, fazendo com que as duas peças a unir vão para a camada de cima:



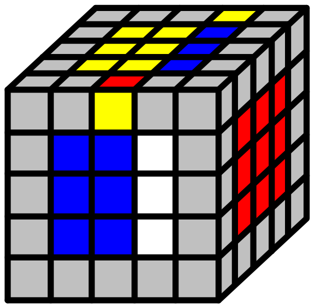
Agora, fazemos F, para compensar o movimento F^{-1} que iremos fazer mais adiante.



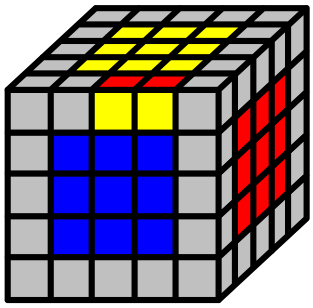
Em seguida, trazemos a camada da direita de volta, com D^{-1}:



Agora, vamos colocar a peça vermelha e amarela que está na camada da direita, na camada superior (continuando na camada da frente). Para isso, fazemos F^{-1}:



E as peças azuis e brancas ficaram em posição para refazermos os centros e unirmos as duas peças vermelhas e amarelas.



Recordemos, agora, que a sequência que utilizávamos para unir os meios do cubo 4×4×4, era precisamente:

$$D_2 F D^{-1} F^{-1} D_2^{-1}$$

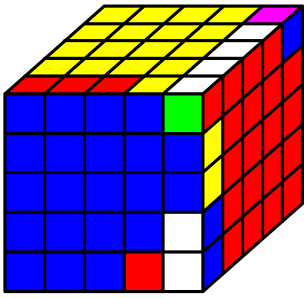
Esta sequência vai ser aplicada no cubo 5×5×5 e facilita bastante a resolução dos meios.

Para verificarmos os efeitos desta sequência, apliquemo-la a um cubo resolvido. Para que os efeitos sejam mais visíveis, vamos acrescentar um último movimento que não faz nada de relevante, mas traz-nos uma certa aresta para a frente.

A fórmula modificada é

$$D_2 F D^{-1} F^{-1} D_2^{-1} D^2$$

Consideremos um cubo resolvido, com a face amarela para cima e a face azul para a frente e apliquemos a fórmula anterior. A posição obtida é a seguinte:



A fórmula, alterou vários cantos, mas manteve os centros (3×3) e manteve unidas nove das 12 arestas do cubo. Para além disso, desfez três das arestas do cubo, todas da camada da frente (nesta camada, apenas manteve a aresta da esquerda).

Analisemos as mudanças nessas três arestas: duas peças azuis e vermelhas trocaram (diretamente) com duas vermelhas e amarelas. A terceira peça azul e amarela ficou no lugar onde se encontrava, o mesmo acontecendo com duas peças azuis e brancas. E houve uma troca duma peça azul e branca com uma peça vermelha e azul. Só que esta última troca foi feita com inversão das cores.

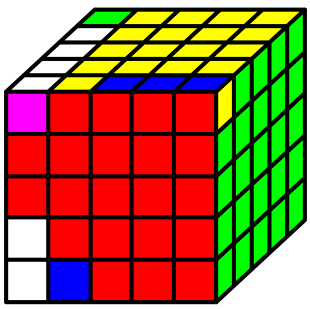
Os factos descritos vão ajudar-nos a resolver o problema dos meios, duma forma bastante fácil.

Observemos que podemos aplicar a um cubo resolvido a fórmula inversa da anterior, para verificarmos o que a fórmula referida vai resolver.

Enquanto que, no cubo 4×4×4, só necessitamos da fórmula anterior para unirmos os meios (numa primeira fase, entenda-se), no caso do cubo 5×5×5, é útil conhecer uma fórmula análoga para o caso simétrico do anterior:

$$E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$$

Se aplicarmos a fórmula anterior, seguida de E^2, a um cubo resolvido, obtemos:



Agora, a aresta da direita da camada da frente fica inalterada, enquanto que as outras três arestas se modificam. Neste caso, a peça vermelha e azul troca com a peça vermelha e branca, com as cores invertidas, enquanto que as duas peças azuis e vermelhas trocam com as duas peças vermelhas e amarelas, mantendo o vermelho voltado para a frente.

Estas duas fórmulas acabadas de apresentar, são importantíssimas para a resolução do cubo 5×5×5, pois conduzem a uma maneira fácil de unir as arestas (unir os meios), transformando o cubo 5×5×5 num cubo 3×3×3.

Vamos escrever as duas fórmulas em conjunto, para que possam ser comparadas mais facilmente:

$$\begin{cases} D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1} \\ E_2^{-1}F^{-1}EFE_2 \end{cases}$$

Observação

A fórmula $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$ pode ser substituída por outra, em que rodamos as três camadas da direita, no sentido anti horário, em vez de rodarmos as duas camadas da esquerda (também no sentido anti horário). Depois, em vez de C^{-1}, fazemos B^{-1} e continuamos com EBD_3. Então, a fórmula será

$$D_3^{-1}B^{-1}EBD_3$$

A fórmula $D_3^{-1}B^{-1}EBD_3$ faz exatamente o mesmo que $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, sendo que eu prefiro esta última, devido à simetria existente com a fórmula $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$. Aliás, eu nunca cheguei a decorar nenhuma das fórmulas, pois tenho bem presente a sequência dos movimentos, talvez por ter sido eu próprio a descobrir essa sequência.

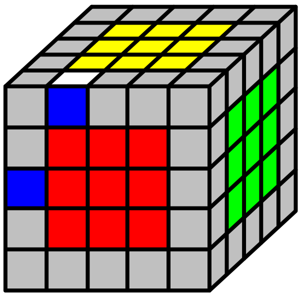
Convém chamar a atenção para as sequências inversas das duas sequências apresentadas acima:

$$\begin{cases} D_2FDF^{-1}D_2^{-1} \\ E_2^{-1}F^{-1}E^{-1}FE_2 \end{cases}$$

Atenção, estas duas últimas sequências são aplicadas se, por algum motivo, quisermos "voltar atrás". No entanto, elas provocam efeitos semelhantes aos provocados pelas fórmulas de que derivam. Têm a vantagem de, ao serem aplicadas a um cubo resolvido, verificarmos qual o efeito que as fórmulas originais provocarão no cubo.

Talvez que o melhor seja mesmo esquecer toda esta observação, desde que se saiba que podemos aplicar, em todas as situações, a fórmula da "direita". Para isso, basta fazer uma pequena modificação no cubo, como se segue:

Suponhamos que temos a seguinte posição:

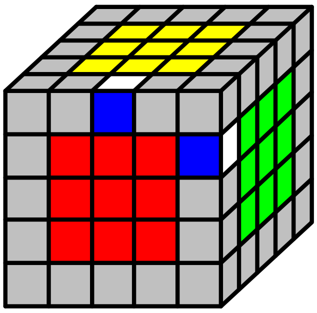


Estamos a supor que os centros estão resolvidos e que a peça azul da camada da esquerda tem o branco na face da esquerda.

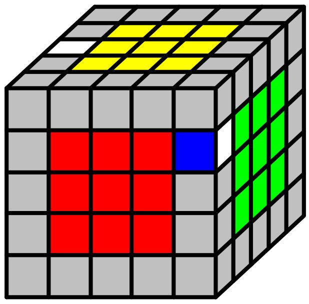
É bastante fácil fazer com que as duas peças fiquem na posição adequada, mas no lado direito. Neste caso, as duas peças têm o azul para a frente, pelo que basta fazer com que as duas peças fiquem com o branco numa mesma face e passar essa face para a frente. Se rodarmos a frente, no sentido horário, o branco da peça da camada da esquerda fica voltado para cima. Então, basta afastar essa peça da camada da frente, fazendo C e retornar com a camada da frente, fazendo F^{-1}. Ou seja, fazemos FCF^{-1}. Facílimo...

Eis a sequência de imagens:

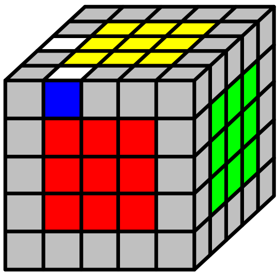
1. F



2. C



3. F^{-1}



Agora, basta reorientar o cubo, colocando o centro amarelo para a frente e o centro vermelho para cima.

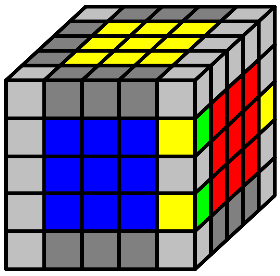
Assim, quem tiver problemas com a questão da simetria, pode apenas aplicar a fórmula "do lado direito". Mas aconselho vivamente a todos que resolvam as duas situações. Só terão a lucrar com isso.

1.3 Processo alternativo

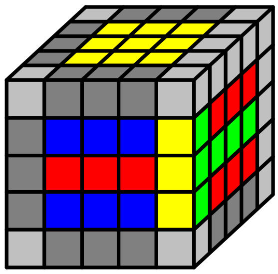
Existe um outro processo para unir as peças de borda (meios). Esse processo é mais complicado e não traz vantagens, nos cubos 4×4×4 e 5×5×5.

A possível vantagem é que, às vezes, permite unir as três peças de meio (no cubo 5×5×5) de uma vez só. Trata-se duma vantagem aparente, porque no processo anterior, unimos duas peças a outras duas, pelo que colocamos corretamente duas peças. Claro que há casos em que só conseguimos colocar uma peça, mas isso acontece poucas vezes. E o raciocínio é mais fácil, havendo menos possibilidades de erro.

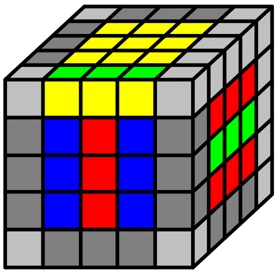
Vejamos em que consiste esse processo alternativo. Uma situação que ocorre algumas vezes, é a seguinte:



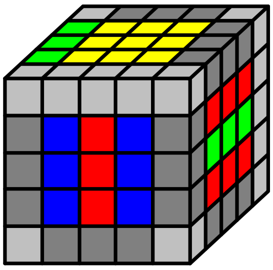
Os centros e os meios a cinzento mais escuro estão resolvidos e a peça da camada de trás de que vemos o amarelo tem como outra cor o verde. Então, podemos rodar a terceira camada, de modo a unir as três peças com verde e amarelo. Esse movimento pode ser representado por $C_3C_2^{-1}$.



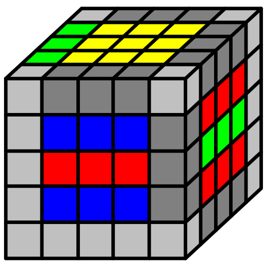
Chegados à posição anterior, temos de colocar as três peças com verde e amarelo na camada de cima ou na camada de baixo. Vamos colocá-las na camada de cima, para vermos o que acontece. Temos duas opções para colocar essas peças em cima: podemos rodar a direita ou podemos rodar a frente. Uma das opções é boa e a outra é má. A opção boa consiste em rodar a camada da frente (no sentido anti horário), de modo a que os três meios não resolvidos continuem em cima.



Agora, rodamos a camada de cima, no sentido horário, de modo a que os meios não resolvidos (de cima) fiquem na camada da frente.

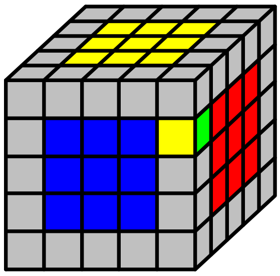


Seguidamente, rodamos a camada da frente, para que os centros fiquem de maneira a poderem ser reconstituídos. Neste caso, podemos fazer C ou C^{-1}, mas devemos fazer o movimento inverso do inicial, ou seja, fazemos F, pois o inicial foi F^{-1}. E podemos reconstruir os centros.

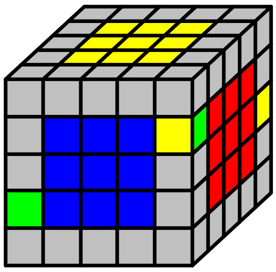


Na realidade, quem utiliza este segundo processo, não volta a formar os centros, preferindo deixá-los com as várias camadas horizontais que serão alinhadas quando estiverem unidos os quatro meios da camada de cima e os quatro meios da camada de baixo. Os últimos quatro meios serão resolvidos de forma diferente.

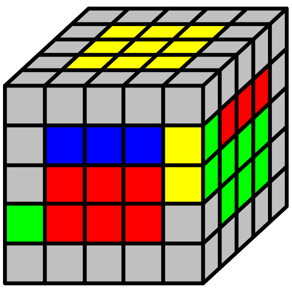
Este processo pode ser utilizado, quando não temos duas peças já devidamente colocadas, como na figura seguinte:



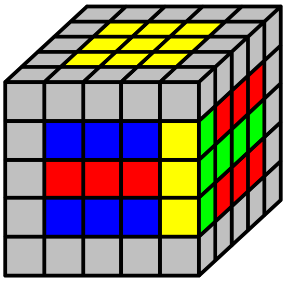
Como os centros estão completamente resolvidos, torna-se fácil colocar as outras duas peças verdes e amarelas nas devidas posições. Claro que há muitas possibilidades, mas elas terão de ficar na segunda e na terceira camadas, por exemplo, como se mostra na figura seguinte:



Fazendo B_3^{-1}, vem



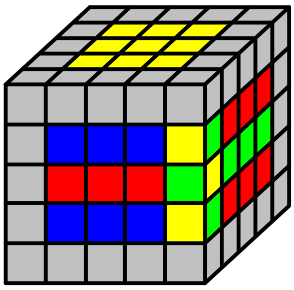
E seguimos com B_2:



A seguir, colocamos o meio (longo) verde e amarelo na camada de cima (ou na camada de baixo), trocando com um meio que ainda não esteja resolvido, procedendo-se como no exemplo anterior.

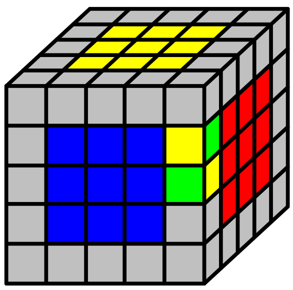
Observação

Não há nenhum problema se as cores das três peças de meio não estiverem alinhadas, como no seguinte exemplo:



Aliás, nem sabemos qual das duas situações é preferível. Tudo vai depender da posição final.

Então, se tivermos a situação da próxima figura, nem adianta fazer manobras para colocar as duas peças com as cores alinhadas:



Agora, basta colocar a terceira peça verde e amarela na segunda camada e juntá-la às duas peças que já estão unidas. No final, até poderá acontecer que não seja necessário trocar as peças verdes e amarelas, como veremos oportunamente.

Capítulo 2

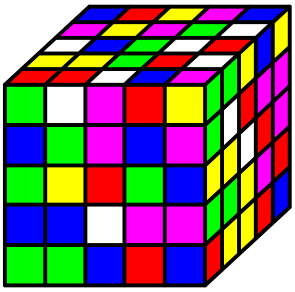
Construção dos Centros

Para quem sabe resolver o cubo 4×4×4, a construção dos centros do cubo 5×5×5 é relativamente fácil. Embora possamos começar por qualquer cor, vamos começar por construir o centro branco. Para isso, vamos ter que colocar 8 peças brancas à volta do centro branco. A maneira habitual de começar, consiste em colocar duas peças ao lado do centro branco, formando uma fila branca com três peças. Eu costumo colocar essa fila paralelamente à camada D.

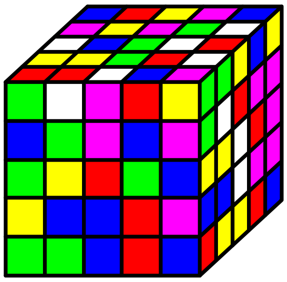
Depois, construimos outra fila de 3, noutra face e, em seguida, juntamos as duas filas na mesma face. Por fim, construimos outra fila de 3 peças brancas que colocamos ao lado das outras duas.

2.1 O primeiro centro

Vejamos um exemplo.

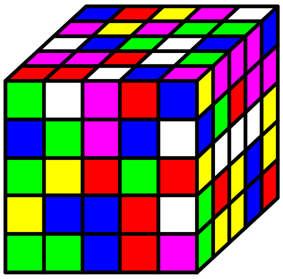


Neste caso, basta rodar a camada b, no sentido horário, obtendo-se dois brancos unidos.

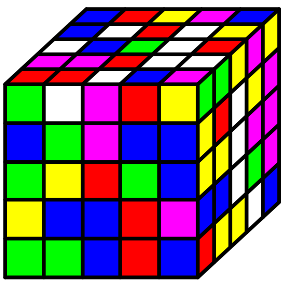


Embora não se veja na figura, há um branco da camada f que pode ser colocado no lugar do amarelo que está à esquerda do centro branco. Então, se colocarmos os dois brancos na horizontal (um branco à direita do centro), podemos formar uma fila de três brancos que inclui o centro.

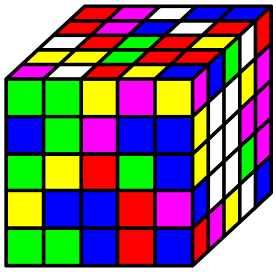
Após esses dois movimentos, obtemos a seguinte posição:



É claro que, no desenho, apenas estamos a ver três faces, pelo que temos de ver o que acontece no cubo real. Por acaso, se rodarmos a camada t, no sentido anti-horário, ou seja, se fizermos t^{-1}, há um branco da face esquerda que vem completar uma fila de brancos na face superior. Embora não seja obrigatório, é preferível colocar os três brancos da coluna da direita na vertical. Então, fazemos Dt^{-1}, após o que obtemos a seguinte posição:

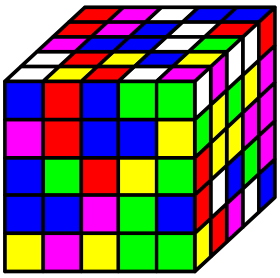


Agora, basta-nos fazer Cf, para ficarmos com duas filas de três brancos unidas:

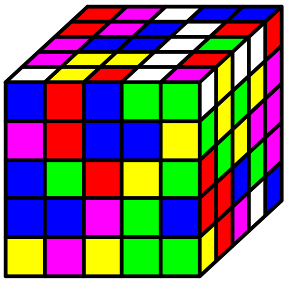


Agora, falta-nos obter uma nova fila de três brancos e trazê-la para o lado dos seis brancos que já estão juntos.

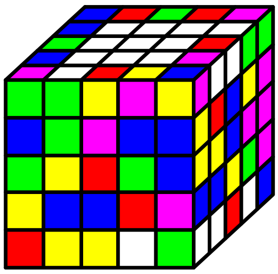
Se rodarmos duas vezes (ou seja $180\,^{\circ}$) a camada t, unimos dois brancos na face inferior (que não é visível). Então, vamos fazer F_3^2, o que vai levar os 6 brancos para a face da esquerda.



Agora, vemos que o último branco está em posição de ser colocado ao lado dos outros dois brancos, formando a última fila de três brancos. Só que ao fazermos f^{-1}, as duas filas de brancos que estavam unidas separam-se. Mas isso não vai causar nenhum problema, porque podemos voltar a uni-las. Então, vamos fazer $f^{-1}C^{-1}$, após o que obtemos:



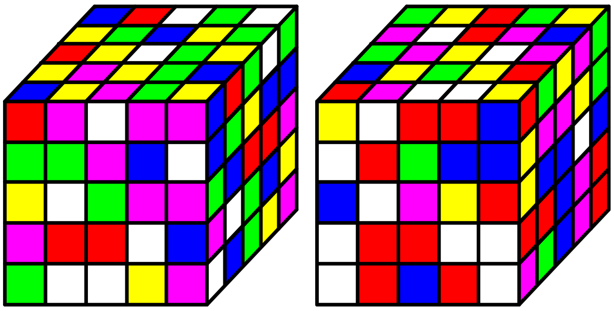
Agora, fazemos com que a fila de três brancos da face de cima passe para a camada t, fazendo C^{-1}. E as três filas de brancos podem unir-se formando um quadrado que será o centro branco. Para isso, fazemos F_3F_2.



Está, assim, terminado o centro branco. O próximo passo é construir o centro amarelo (centro oposto ao branco). É claro que isso tem de ser feito sem desfazer o centro branco.

O leitor menos familiarizado com o cubo mágico deve repetir várias vezes a construção do centro branco, até achar que já está em condições de o construir em qualquer situação.

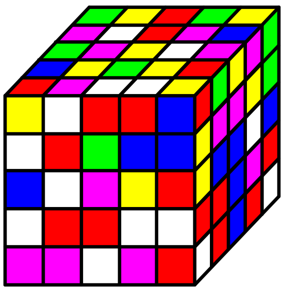
Consideremos um cubo mágico 5×5×5, baralhado da seguinte maneira (onde se mostram as seis faces do cubo):



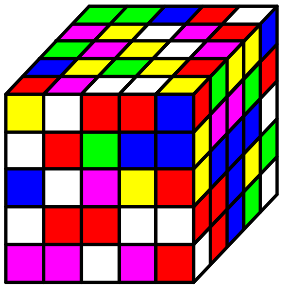
A melhor maneira de se conseguir esta posição é colocar novos adesivos sobre os iniciais. Mas duvidamos que alguém faça isso, pelo que esperamos que o leitor possa acompanhar a evolução da resolução pois apresentaremos uma figura para cada movimento. Para este efeito, vamos apresentar uma única figura para movimentos como D_2 ou D_2^2.

Vamos partir do cubo na posição da direita: centro amarelo para cima e centro laranja para a frente, pois já temos um azul junto com o centro da mesma cor. O primeiro passo consiste em juntar uma nova peça azul às duas que estão unidas, formando um primeiro bloco de 3. As duas vistas apresentadas não ajudam muito para sabermos onde estão as peças pretendidas.

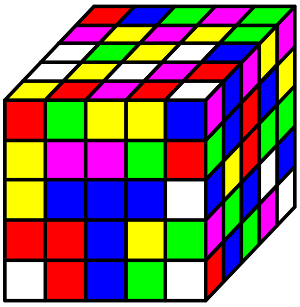
1. O primeiro movimento consiste em rodar ("uma vez") a camada de baixo (no sentido horário), ou seja, fazemos B.



2. Rodamos as duas camadas de trás, no sentido horário (T_2)

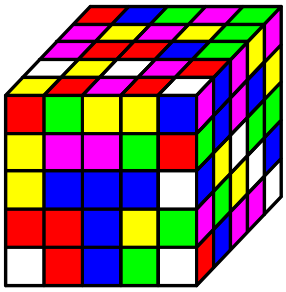


3. Obtivemos, assim, uma primeira fila de três peças azuis (fila essa que inclui o centro azul propriamente dito). Vamos rodar todo o cubo, colocando o centro azul para a frente, para uma melhor visualização:

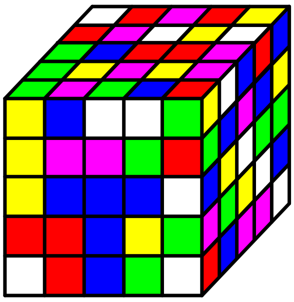


Uma maneira interessante de continuar seria rodar a terceira camada a partir da frente, de modo que o centro vermelho ficasse em cima (o azul que está por baixo do centro vermelho acompanharia o vermelho). Depois, dávamos meia volta em cima, de modo que o tal azul ficasse na posição do verde que está à esquerda do centro amarelo. Também poderíamos rodar as duas camadas de cima, rodar a camada da direita e voltar atrás com as duas camadas de cima, obtendo-se um bloco de dois. Vamos seguir o primeiro processo:

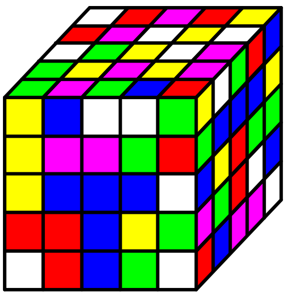
4. Para rodar a camada do meio, podemos fazer $T_3T_2^{-1}$.



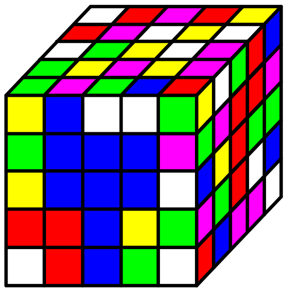
5. Rodamos duas vezes a camada de cima (meia volta em qualquer sentido): C^2



6. Agora, trazemos a camada do meio de volta (podemos fazer $F_3 F_2^{-1}$), obtendo-se uma nova fila de três azuis

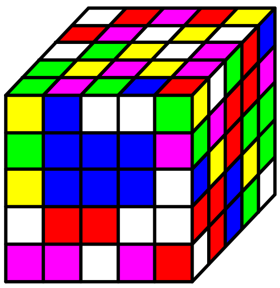


7. Agora, basta rodar as duas camadas de cima, para juntarmos duas filas de três azuis. No entanto, por uma questão de poupar trabalho com as figuras, vou rodar a penas a camada c (se preferir, $C_2 C^{-1}$)

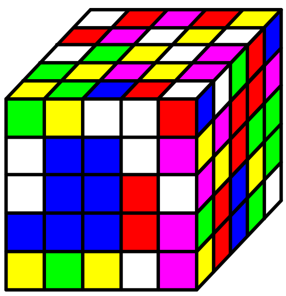


Nesta posição, podemos ver que é possível colocar o azul por baixo do centro vermelho, mas isso não nos serve de muito. É claro que há muitas maneiras de continuarmos, sendo que uma delas consiste em colocar os outros dois azuisna face da direira, quarta camada (onde estão as peças laranja) e o azul por baixo do centro vermelho. Depois, procedemos como anteriormente, para juntar as três peças que faltam para o centro azul.

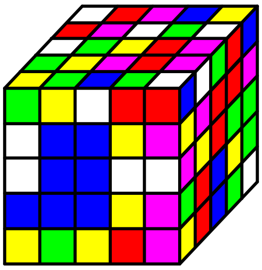
8. Rodamos as duas camadas de baixo, no sentido horário (B_2).



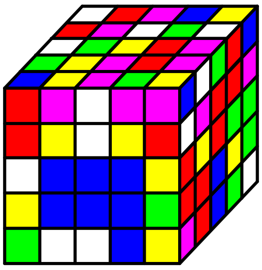
Embora não sejam visíveis as outras duas peças azuis que vão formar o (grande) centro azul, elas estão em boa posição. Como vamos ter que rodar a camada d, é preferível comçar por rodar a camada da frente no sentido anti horário. ou seja, F^{-1}.



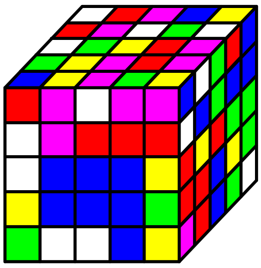
9. Agora, podemos movimentar livremente as duas camadas da direita ou apenas uma. Neste caso, vamos fazer b:



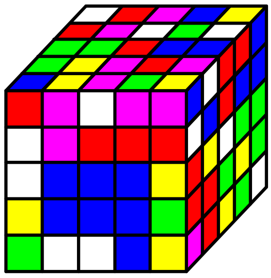
10. Como as duas peças azuis estão na quarta camada, vamos voltar a rodar a camada da frente no sentido anti horário



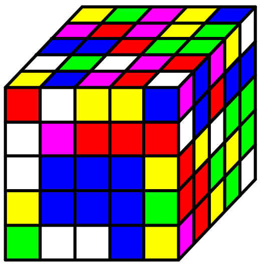
11. Agora, rodamos a camada c, para que as duas peças azuis fiquem visíveis:



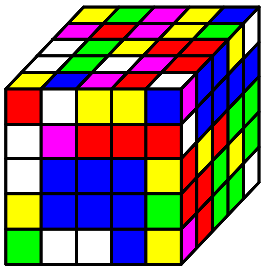
12. Agora, vamos rodar a camada do meio, levando o azul para a face superior, o que pode ser representado por $F_3^{-1}F_2$



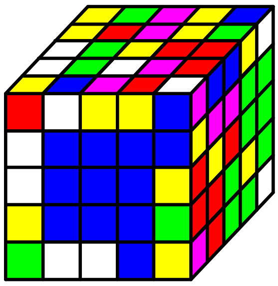
13. Agora, temos duas alternativas: damos meia volta na camada de cima ou damos meia volta na camada da direita. Como os dois azuis vão ter que ficar na quarta camada, vamos dar meia volta na camada de cima, isto é, C^2



14. Agora, rodamos a camada do meio, o que pode ser representado por $F_3F_2^{-1}$



15. Agora, basta-nos unir os azuis, o que pode ser feito com c, ou seja, C_2C^{-1}

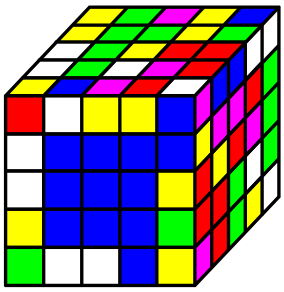


Está, assim, terminado o primeiro centro, neste caso, o centro azul.

2.2 O segundo centro

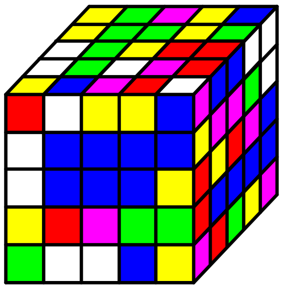
O segundo centro a resolver deve ser o centro oposto ao primeiro centro resolvido, ou seja, neste caso, vamos resolver o centro verde. A partir de agora, temos de tomar cuidado para não desfazermos o centro azul. Melhor dizendo, de cada vez que desfizermos o centro azul, temos de refazê-lo.

1. Vamos continuar, rodando as duas camadas de trás, obtendo-se uma fila de três verdes. Para facilitar o desenho, vamos rodar t (ou T_2T^{-1}).

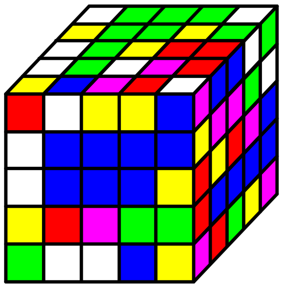


Obtivemos assim, uma fila de três verdes, embora eles estejam na face de centro amarelo. Note-se que, para quem começa, talvez seja preferível começar por fazer um bloco de três verdes que inclua o centro (verde).

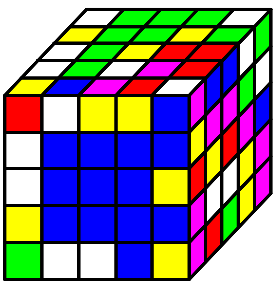
2. Olhando para a figura anterior, vemos que o centro verde está na face de trás e que, rodando a camada b, a peça verde vai alinhar com o centro. Para fazermos isso, desfazemos o centro azul, mas não há hipótese: vamos ter que desfazer o centro azul muita vez, na condição de o refazermos. Rodemos, então, a camada b.



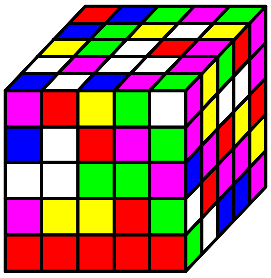
3. Agora, rodamos a camada de trás, para que os dois verdes fiquem na terceira camada (T)



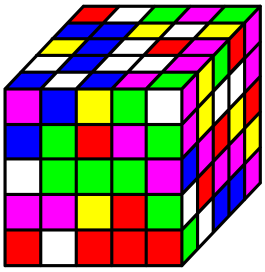
4. Claro que agora, trazemos os azuis de volta :b^{-1}, ou seja, $B_2^{-1}B$.



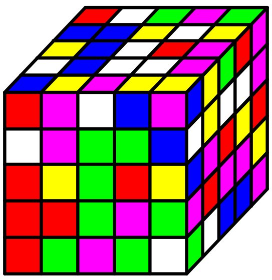
5. Agora, vamos rodar todo o cubo, passando o centro branco para cima e mantendo o centro vermelho à direita:



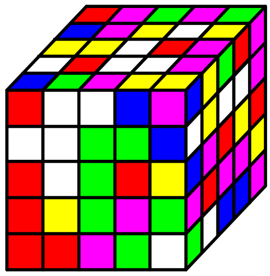
6. Se rodarmos a camada e, há um verde que em unir-se ao centro verde, formando um novo bloco de três verdes. Isso irá desfazer o centro azul, mas não faz mal, se o refizermos. Então, fazemos e, ou seja, E_2E^{-1}.



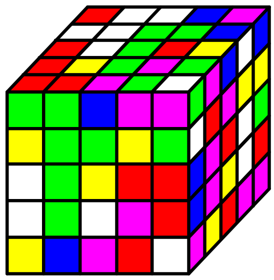
7. Como vamos ter de voltar com os azuis para trás, vamos rodar a camada da frente, para que o bloco de três verdes fique na vertical e não seja desfeito, pelo que fazemos F



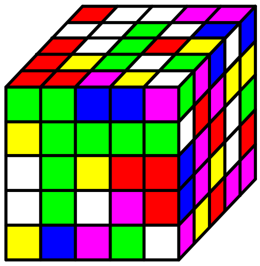
8. E, agora, fazemos e^{-1}, ou seja, $E_2^{-1}E$.



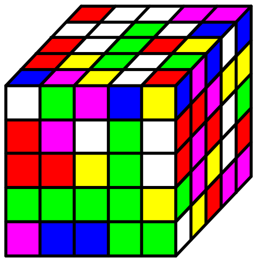
9. O centro azul continua resolvido e já temos dois blocos verdes, os quais devem ser unidos.Vamos olhar para o cubo de outro ponto de vista:



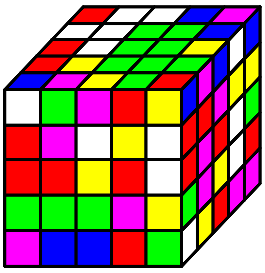
10. Podemos unir os dois blocos verdes, mas iremos desfazer o centro azul. No entanto, temos de unir os centros verdes. Há duas maneiras de conseguir isso: uma delas consiste em levar os verdes, dar meia volta em cima, afastando os verdes e trazendo de volta os azuis. A outra maneira consiste em trocar o bloco verde-vermelho-laranja (de cima) pelo bloco verde: descemos o bloco verde-vermelho-laranja para a face da frente, damos meia volta na frente e levamos o bloco verde para a face de cima. Como iremos precisar de fazer esta manobra muitas vezes, vamos seguir o segundo processo, começando por d^{-1}, ou seja, $D_2^{-1}D$.



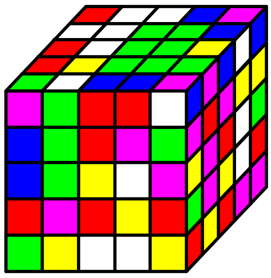
11. Damos meia volta na camada da frente, ou seja, F^2.



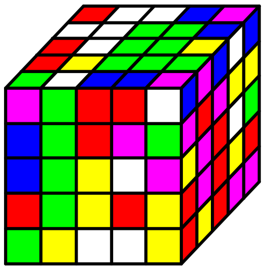
12. Agora, juntamos os dois blocos verdes e, ao mesmo tempo, refazemos o centro azul. Então, fazemos d, ou seja, $D_2 D^{-1}$.



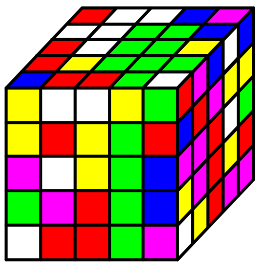
13. O bloco de dois verdes poderia ser levado para junto dos outros seis verdes, mas isso não traz vantagem nenhuma. Agora, vamos precisar de unir o verde que falta com os dois verdes da face da frente, para formarmos um novo bloco de três verdes que irão completar o centro verde. O outro verde está na segunda camada, de modo que se rodarmos as duas camadas de baixo, ele vem para o lugar do verde entre o vermelho e o azul. Então, rodamos a camada da frente no sentido horário, de modo que, ao trazermos o verde, formemos o bpretendido bloco com três verdes.



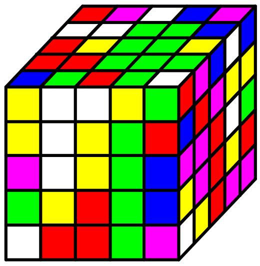
14. E agora, fazemos b, ou seja, B_2B^{-1}.



15. Agora, temos de trocar o bloco branco-branco-amarelo pelo bloco de três verdes. Isso consegue-se, começando por dar meia volta na camada da frente.

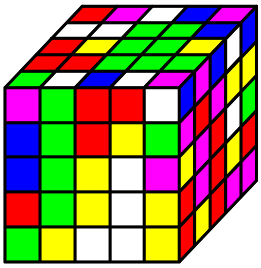


16. Na posição anterior, o centro azul ainda está alinhado. Então, trazemos o bloco branco-branco-amarelo para a face da frente, ou seja, $e = E_2E^{-1}$.

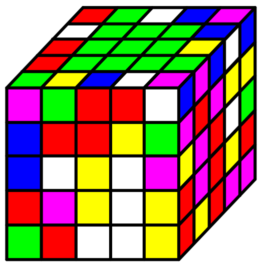


Repare-se que, com este movimento, desalinhamos o centro azul.

17. Agora, damos meia volta na camada da frente, F^2.



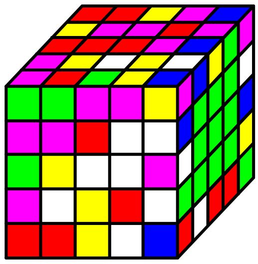
18. E, finalmente, fazemos $e^{-1} = E_2^{-1}E$, completando o segundo centro.



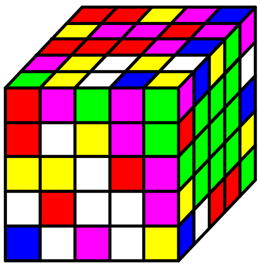
2.3 O terceiro centro

Resolvidos os dois primeiros centros, é costume colocá-los, um, na esquerda, e o outro, na direita. Feito isso, podemos movimentar livremente a camada de baixo, a camada de cima, a da frente e a de trás, bem como qualquer camada paralela à face da direita (e da esquerda). Repare-se que as peças que vão formar os restantes centros não estão na camada da direita nem na camada da esquerda, pelo que estão nas três camadas entre essa duas (camadas). Podemos construir o centro de qualquer das quatro cores que faltam, mas vamos optar por construir o centro vermelho.

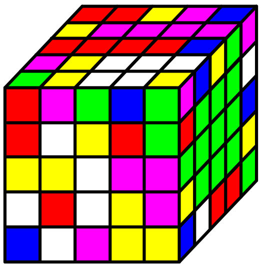
1. Coloquemos o cubo com o centro vermelho para cima e o centro branco para a frente.



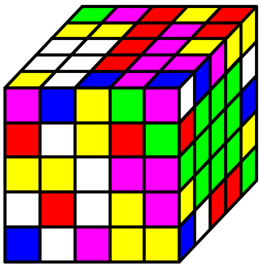
2. Agora, vamos rodar a camada da frente (F), para que o vermelho da quarta camada fique em posição de ser unido ao bloco de dois vermelhos da face superior, formando um bloco de três vermelhos.



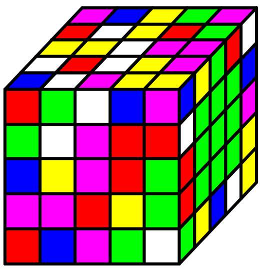
3. Agora, numa situação real, rodaríamos as duas camadas da direita. Mas, para que eu não tenha muito trabalho a colorir o cubo, rodo (apenas) a camada d, ou seja, faço D_2D^{-1}.



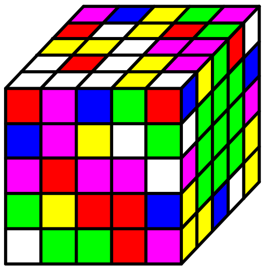
4. Curiosamente, obtivemos um bloco de três peças cor de laranja. Agora, é conveniente rodar a face superior (C), de modo que o bloco de três vermelhos fique paralelo à face da direita, o que permite movimentar livremente as camadas c e d, bem como a camada entre essas duas.



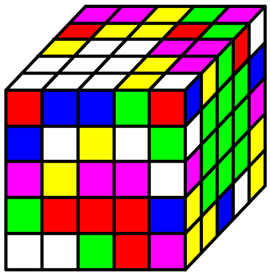
5. Modifiquemos a posição do cubo, colocando o centro branco para cima e o centro verde para a direita. Claro que isso tem a ver com este caso concreto. Noutro caso, teremos de analisar o cubo e tomar uma decisão sobre quais peças vermelhas do centro a unir



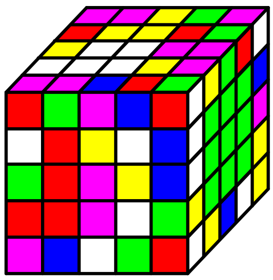
6. Agora, temos duas alternativas: podemos rodar a frente no sentido horário ou no sentido anti horário e trazer um dos dois vermelhos de cima, formando um bloco de três vermelhos. Rodemos a frente no sentido horário:



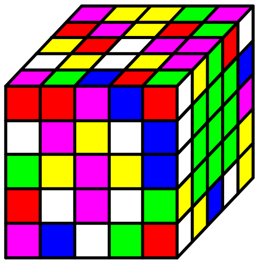
7. Agora, basta rodar a camada e, ou se preferirmos, E_2E^{-1}.



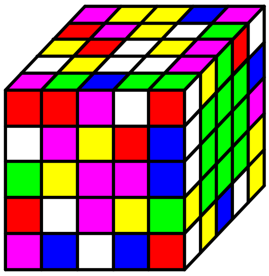
8. E vamos ter que rodar a camada da frente, para que o bloco vermelho fique na vertical e possa ser colocado ao lado do outro bloco vermelho (que se encontra na face de trás). Rodemos F:



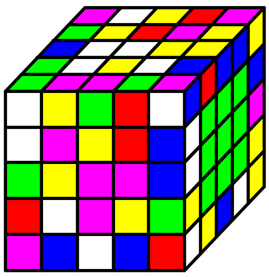
9. Agora, rodamos a camada e duas vezes (180°), o que pode ser representado por e^2, ou por $E_2^2E^2$. Note-se que já temos dois blocos de três peças vermelhas formados.



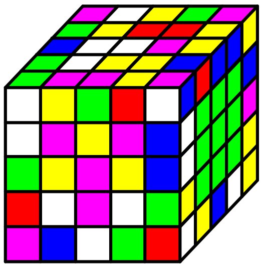
10. Agora, podemos rodar a camada d, rodamos a camada C e trazemos de volta as duas camadas da direita, formando um bloco de dois vermelhos. Façamos isso separadamente, começando por rodar a camada d (D_2D^{-1}):



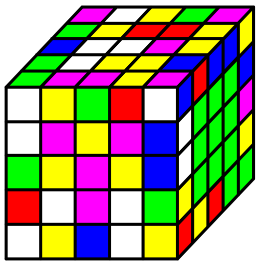
11. Rodamos a camada de cima (C):



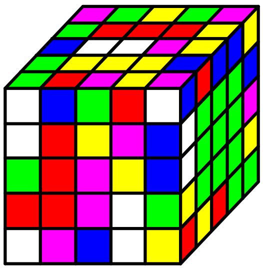
12. Agora, trazemos de volta o vermelho, fazendo d^{-1}, ou seja, $D_2^{-1}D$:



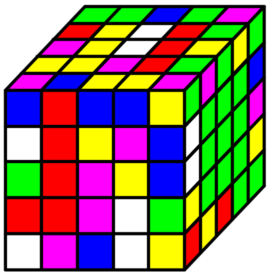
13. E falta-nos unir o último vermelho aos dois vermelhos obtidos, para conseguirmos o último bloco de três vermelhos. Nesta posição, não devemos juntar os dois vermelhos aos outros seis vermelhos do centro, porque isso só vai complicar. O nosso objetivo é colocar o último vermelho na camada e, na posição adequada, para que possamos unir os três vermelhos. Esse último vermelho está na camada d, na face de baixo e na camada f. Podemos rodar a camada de baixo e trazê-lo para a camada e, de duas maneiras, mas apenas uma dessas maneiras ai fazer com que as três peças vermelhas fiquem unidas. Vamos rodar uma vez no sentido anti horário, de modo que o vermelho continue na camada f:



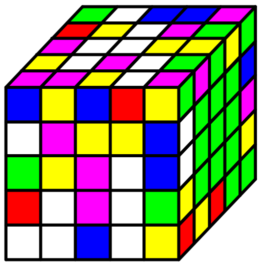
14. E rodamos duas vezes a camada, isto é, e^2, ou $E_2^2E^2$. Note-se que poderíamos ter "desviado"os vermelhos da face de trás da camada e, mas isso não é necessário.



15. Agora, temos que rodar a camada de cima (C):



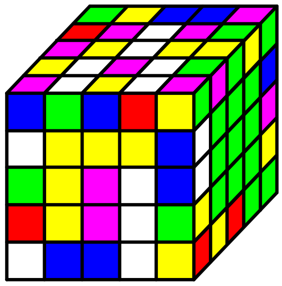
16. Agora, fazemos de^2, ou seja, $D_2D^{-1}E_2^2E^2$, completando-se o centro vermelho.



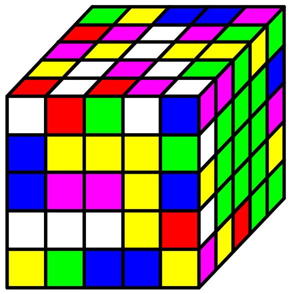
2.4 O quarto centro

1. O próximo passo é construir o centro de uma cor diferente do laranja (cor oposta ao vermelho). Logo, podemos optar por construir o centro branco ou o centro

amarelo. Como já temos um bloco de três amarelos, devemos aproveitá-lo. Para isso, vamos colocá-lo numa face que não tenha o centro amarelo (porque esse bloco não contém o centro amarelo). Vamos colocá-lo na face da frente, fazendo e^{-1}.

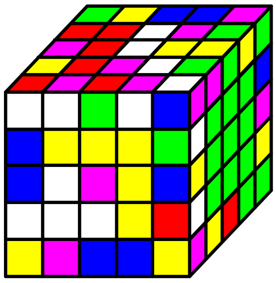


2. Agora, teríamos de rodar duas vezes a camada da frente, deixando o bloco amarelo na vertical (no lado direito) e refazendo o centro vermelho. Neste caso, basta fazer F, porque deixaremos nessa posição outro bloco de três peças amarelas:

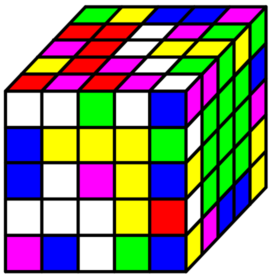


Note-de que nem era preciso fazer F, porque já tínhamos um bloco amarelo vertical.

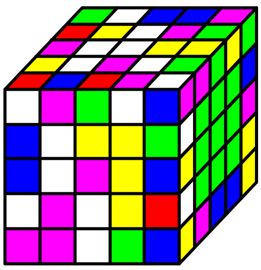
3. Agora, convém refazer o centro vermelho, fazendo e. Só que, fazendo e^2, o amarelo que se encontra na face de cima, camada e, passa para o lado do centro amarelo, ficando os três vermelhos na camada de cima. Façamos, então, e^2.



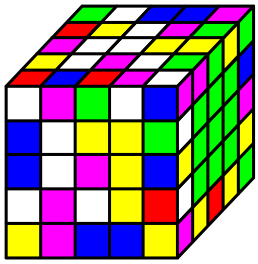
4. Agora, rodamos a camada de baixo, no sentido horário, para que os dois amarelos não se separem, quando refizermos o centro vermelho.



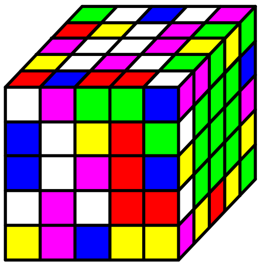
5. Agora, fazemos e^{-1}, refazendo o centro vermelho.



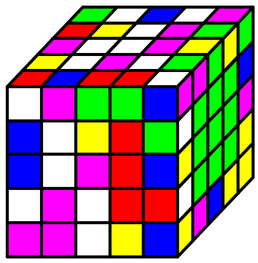
6. Analisando o cubo, vemos que se fizermos d^2, o amarelo que está em cima (na camada d) passa para a face inferior e pode completar um evenual bloco de dois amarelos que lá esteja devidamente posicionado. Para isso, basta-nos fazer B^{-1}, posicionando devidamente os dois amarelos.



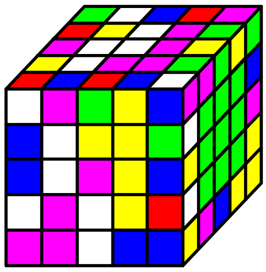
7. Agora, fazemos d^2.



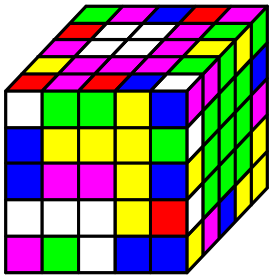
8. Agora, fazemos B, para que o bloco amarelo fique de perfil.



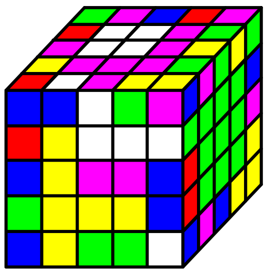
9. Rodamos d^2, refazendo o centro vermelho:



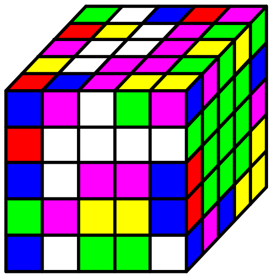
10. Na posição anterior, temos dois blocos de três amarelos que devem ser unidos. Como fazer isso? É uma manobra muito comum que consiste em trazer para a face da frente um bloco multicolorido que está na face de baixo, à esquerda do bloco amarelo, seguindo-se meia volta na camada da frente, levando os amarelos para o lugar desse bloco multicolor e refazendo os centros vermelhos. Começamos por e^{-1}:



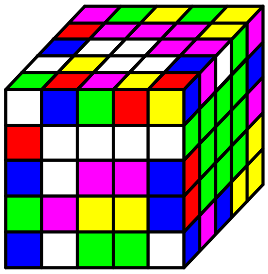
11. Continuamos com C^2, embora fosse possível C^{-1}, por termos dois blocos amarelos



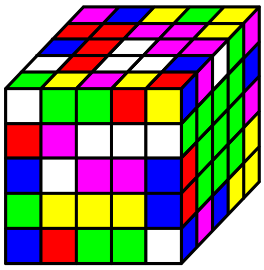
12. E refazemos o centro vermelho (também os dois blocos amarelos ficam juntos), movendo e.



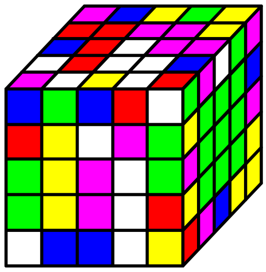
13. Agora, falta-nos unir os três últimos amarelos. Isso é fácil, pois basta-nos colocar o amarelo de cima na camada f, fazendo C^{-1} e juntá-lo aos outros dois, fazendo e. Depois, há que colocar o bloco de três amarelos na vertical e refazer o centro vermelho. Por fim, há que completar o centro amarelo. Vamos fazer isso, passo a passo, começando por C^{-1}.



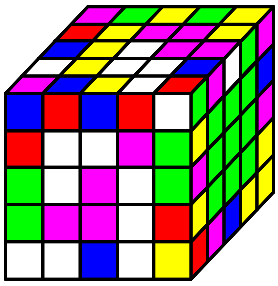
14. Rodemos a camada e:



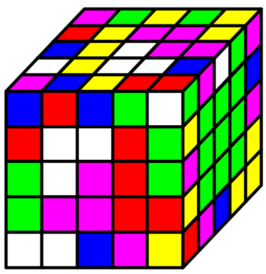
15. Agora, vamos colocar o bloco amarelo da face da frente na vertical, havendo duas hipóteses. Vamos colocá-lo na camada e, rodando F.



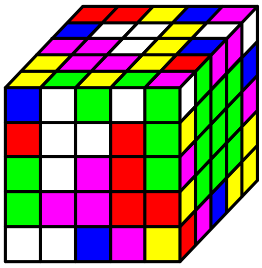
16. Agora, rodamos e^{-1}, para refazermos o centro vermelho.



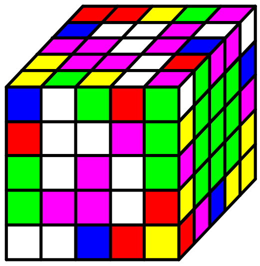
17. Na face inferior do cubo, temos dois blocos amarelos, sendo que o bloco que não tem amarelo está na camada d. Então, começamos por dar meia volta na camada d, trazendo esse bloco para a face de cima:



18. E damos meia volta, na face de cima, deixando o bloco amarelo no lugar daquele bloco laranja-laranja-branco:



19. Fazendo d^2, refazemos o centro vermelho e construimos o centro amarelo, pelo que estão construídos quatro centros.



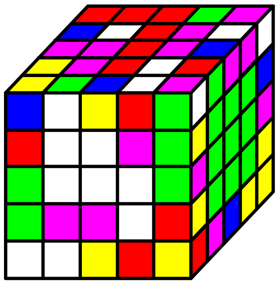
2.5 Os dois últimos centros

É óbvio que, ao resolvermos o quinto centro, o sexto fica resolvido. Curiosamente, a fórmula que utilizamos mais vezes, na resolução dos dois últimos centros, é a conhecidíssima "Pesca"(à direita), ou seja, "sobe, gira e desce". Só que, agora, o "sobe"e "desce"são aplicados às duas camadas da direita. Então, a fórmula que vamos aplicar muitas vezes, é $D_2CD_2^{-1}$. Note-se que, em princípio, não necessitamos da correspondente fórmula para o lado esquerdo. No entanto, pode ser útil "subir"as duas camadas da direita e as duas camadas da esquerda.

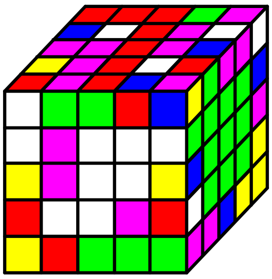
Resolvidos quatro centros, há que resolver os dois centros que faltam, sem desfazer os centros já construídos. É claro que vamos ter que desfazê-los, durante algum tempo, mas tendo em atenção que temos de os refazer.

No caso da figura anterior, a situação é perfeitamente análoga, pelo que podemos começar por qualquer das duas cores. Se rodarmos a camada central, paralela à face da direita, de modo que as peças de cima passem para a face da frente, conseguimos formar um bloco branco que inclui o centro.

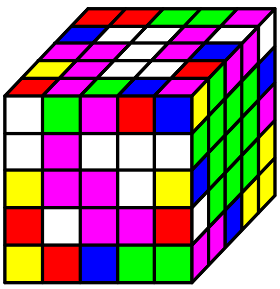
1. $D_3^{-1}D_2$



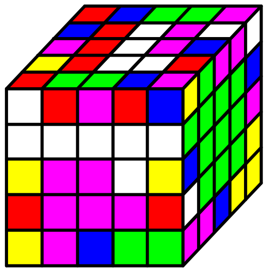
2. Agora, rodamos a frente, no sentido horário, para que o bloco de três peças brancas (do futuro centro) fique na vertical:



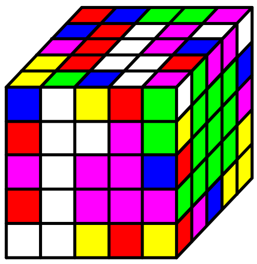
3. Agora, voltamos com o bloco vermelho, da face de cima, para a face de trás:



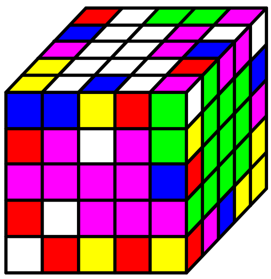
4. Rodando a camada e, no sentido horário, formamos um bloco de três brancos, na face da frente



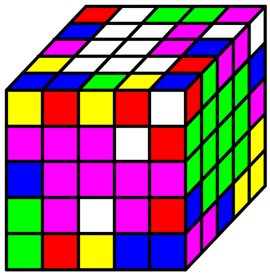
5. Rodamos a frente no sentido anti horário:



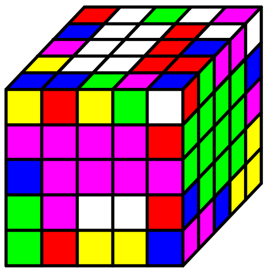
6. Agora, quando refizermos o centro vermelho (e^{-1}), o bloco branco vai para a face de cima, formando dois blocos brancos.



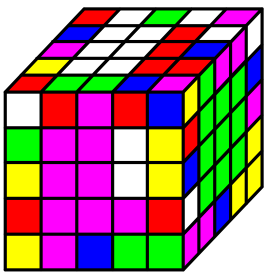
7. Agora, temos de criar um bloco de dois brancos, na face da frente. Se trouxermos o branco que está na face de cima, ele vem para a segunda camada, pelo que convém dar meia volta, na face da frente, antes disso. Rodando F^2, obtemos:



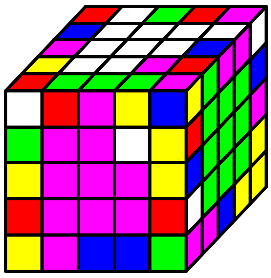
8. Agora, fazemos d^{-1}, unindo duas peças brancas:



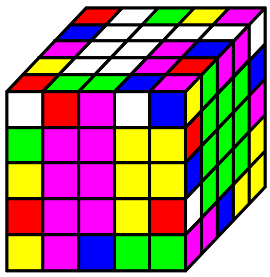
9. Agora, temos de rodar o bloco com dois brancos, de modo que ele vá para a face de cima, quando refizermos o centro vermelho (e o amarelo...). Então, fazemos F^{-1}:



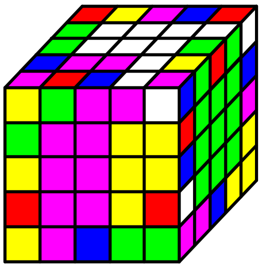
10. Agora, fazemos d:



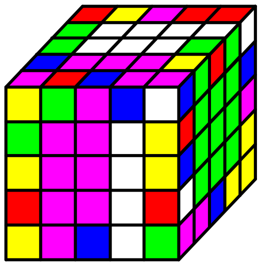
11. E, agora, falta-nos trocar a peça branca com a peça laranja, para termos todos os centros resolvidos. Curiosamente, a posição obtida é uma das posições tipo, em que as duas últimas peças estão na camada d, o mais próximo possível uma da outra. Por vezes, há que fazer alguma manobra para colocá-las na posição que nós obtivemos. Repare-se que a última peça que falta colocar é uma peça de canto, relativamente ao centro, mas podia ser uma peça de meio. Então, vamos ter que fixar duas fórmulas, uma para cada situação. Ou resolver por tentativa e erro. Neste caso, como estamos a escrever um texto sobre o cubo 5×5×5, vamos apresentar as fórmulas. Mas é muito fácil de perceber a sequência.Se rodarmos d, obtemos a seguinte posição:



12. Aparentemente, a situação piorou, mas rodemos a face de cima (C):

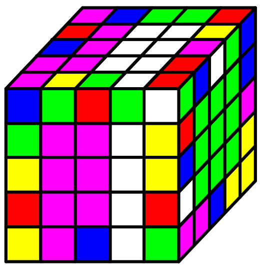


13. Ainda pode parecer que estamos pior, mas... façamos d^{-1}:

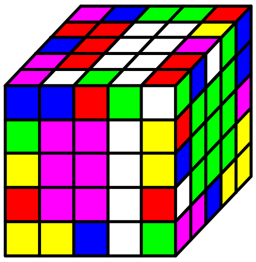


Então, basta fixar a fórmula dCd^{-1}, porque, agora, temos 4 centros resolvidos e, nos outros dois, só temos blocos de três.

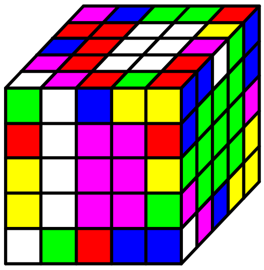
14. Então, para acabarmos a resolução, rodamos a face de cima, para ficarem dois blocos brancos na camada d:



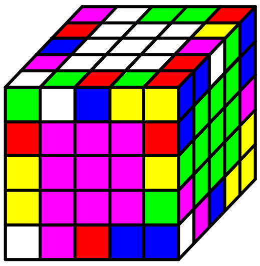
15. Agora, trazemos o bloco laranja de cima, para ser trocado com o bloco branco. Rodemos e:



16. Damos meia volta, na frente:



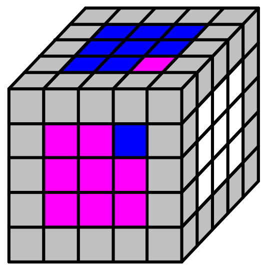
17. Agora, levamos o bloco branco para cima, ficando todos os centros resolvidos. Para isso, rodamos e^{-1}.



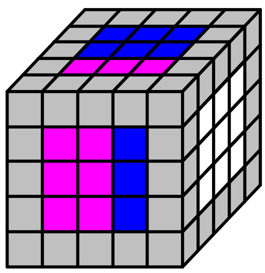
A resolução deste cubo continua no próximo capítulo.

2.5.1 Os dois últimos centros, casos especiais

1. Uma só peça errada (canto). Preste atenção à posição padrão:



Aqui, aplicamos a fórmula dCd^{-1} ou $D_2CD_2^{-1}$ e obtemos uma situação fácil de resolver:

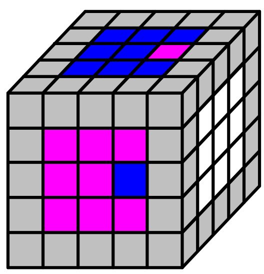


No entanto, é útil saber de cor toda a sequência.

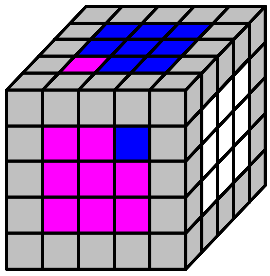
$$D_2CD_2^{-1}CD_2C^2D_2^{-1}$$

A sequência anterior é muito semelhante ao Sonho (tem D_2, em vez de D).

2. Uma só peça errada (meio)

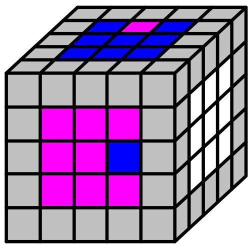


Neste caso, aplicamos a sequência (ou fórmula) $C^{-1}D_2CD_2^{-1}$ e obtemos a posição anterior (ligeiramente modificada):



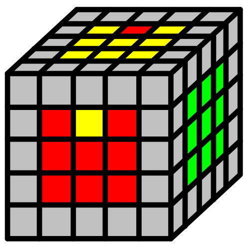
E, agora, basta aplicar $C^{-1}dCd^{-1}$ ou $C^{-1}D_2CD_2^{-1}$, para obtermos uma situação trivial. Note-se que o movimento inicial C^{-1} destina-se a obter a posição que já sabemos resolver.

Note-se que mais vale fixar a seguinte posição inicial:



Aplicando a sequência $D_2CD_2^{-1}$, obtemos uma situação que já sabemos resolver.

No entanto, existe um algoritmo diferente, para resolver a mesma situação. Esse algoritmo é importante para a resolução de cubos com mais do que 5 camadas:

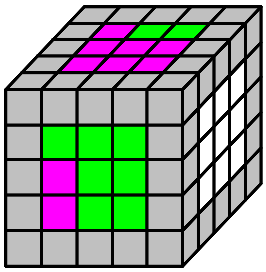


$$D_3 D_2^{-1} C D_2 C^{-1} D_3^{-1} D_2 C D_2^{-1}$$

Breve descrição do algoritmo anterior:

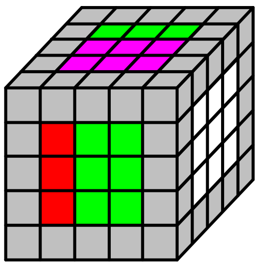
"Levamos a camada do meio, de modo que a peça errada, da frente, vá para o lugar onde queremos que ela fique; rodamos, em Cima; "levamos"as duas camadas da direita; rodamos a camada de Cima, no sentido anti-horário; "trazemos"a camada do meio; rodamos em Cima e "trazemos"as duas camadas da direita.

3. Duas peças erradas



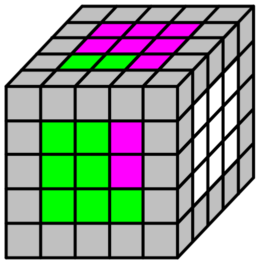
Este terceiro caso é facílimo, pois, ao rodarmos as duas camadas da esquerda, no sentido anti horário, as peças que vão da frente para a face de cima, acertam perfeitamente com as que lá estavam.

Então, fazemos E_2^{-1}, após o que obtemos a seguinte posição, cuja resolução é trivial:



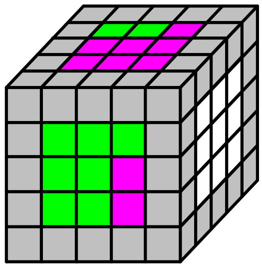
A conclusão dos centros faz-se com $C^{-1}E_2$.

4. Este exemplo pode ser transformado no anterior, rodando meia volta nas faces de cima e da frente:



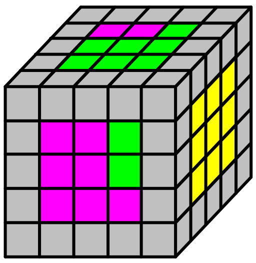
Mas, podemos resolvê-lo diretamente, fazendo $D_2C^{-1}D_2^{-1}$.

5. Duas peças erradas

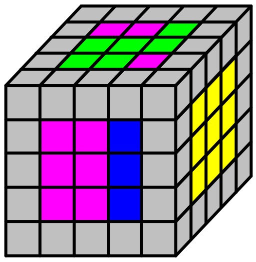


Neste caso, fazemos $D_2CD_2^{-1}$. Também podemos dar meia volta nas faces de cima e da frente e resolver, rodando as duas camadas da esquerda, etc...

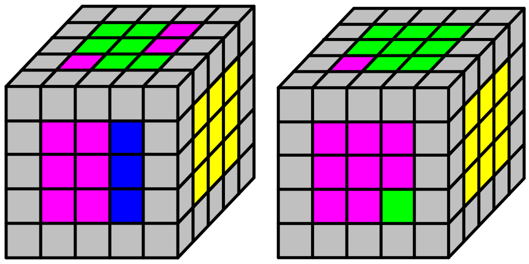
6. Este caso, embora parecido com os anteriores, é mais difícil.



Ao rodarmos a camada d, as cores não acertam:

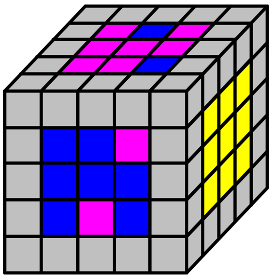


Agora, fazendo $C\ D_2^{-1}$, obtemos:



Eu costumo pensar assim: "levo"uma peça cor de laranja e "trago"duas. E obtivemos um caso que sabemos resolver.

7. Ainda duas peças erradas



Neste caso, podemos trocar uma peça, de cada vez, ou podemos resolver por tentativa e erro, ficando com uma só peça errada, em cada centro.

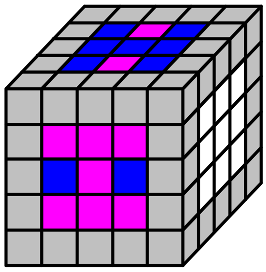
Normalmente, eu levo dois cantos certos e um meio errado, da Frente para Cima.

Podemos fazer $F^{-1}D_2CD_2^{-1}CFD_2C^2D_2^{-1}$, obtendo-se uma posição que já sabemos resolver:

$$CF^{-1}D_3D_2^{-1}CD_2C^{-1}D_3^{-1}D_2CD_2^{-1}$$

Como podemos ver, é mais fácil resolver intuitivamente, do que andar a decorar sequências desnecessárias. Em último caso, mais vale permutar as peças, uma a uma.

8. Duas peças erradas (Caso HI)



Eu fixei este caso, pensando que temos um H (azul), na face superior, e um I (rosa), na face da frente. A solução é bastante fácil. Ao fazermos D_2, as duas peças cor de rosa ficam alinhadas com as duas da face superior e, ao fazer E_2^{-1}, formam-se duas filas cor de rosa, na face superior, mantendo-se uma fila azul. Então, o problema está quase resolvido. A solução completa é

$$D_2E_2^{-1}CD_2^{-1}E_2$$

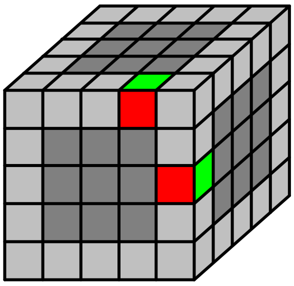
Trata-se duma posição bastante fácil, mas, infelizmente, é uma situação pouco comum.

Capítulo 3

Construção dos Meios

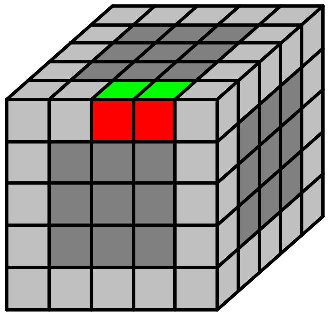
Para transformarmos o cubo 5×5×5 num cubo 3×3×3, temos de unir as peças de borda que têm as mesmas duas cores, formando blocos 3×1 que funcionarão como os meios do cubo 3×3×3.

Consideremos a figura seguinte, onde os centros já estão resolvidos:

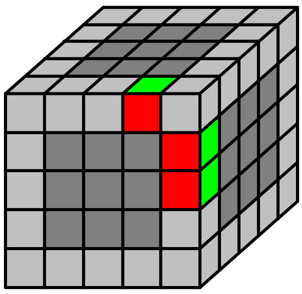


Para unirmos as duas peças com vermelho e verde, rodamos as duas camadas da direita no sentido horário (D_2), rodamos a camada da frente no sentido horário (F), trazemos a camada da direita de volta (D^{-1}), rodamos a camada da frente no sentido anti horário (F^{-1}) e, por fim, trazemos de volta as duas camadas da direita (D_2^{-1}). Este processo é o mesmo que utilizávamos na resolução do cubo 4×4×4.

Após a aplicação da sequência descrita, obtemos a seguinte posição:



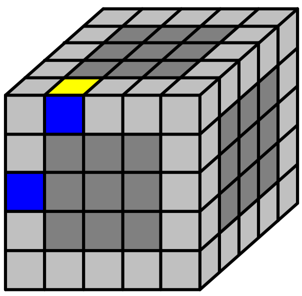
O passo seguinte consiste em juntar as duas peças com verde e vermelho à terceira peça com as mesmas cores, obtendo-se um meio longo do cubo 3×3×3. Para conseguir isso, tentamos obter a seguinte posição:



Agora, basta aplicar a mesma sequência, para que as três peças fiquem unidas.
Sequência a utilizar:

$$D_2 F D^{-1} F^{-1} D_2^{-1}$$

Por vezes, não é possível chegar à posição indicada. Para unir os dois primeiros meios, podemos ter a seguinte posição:

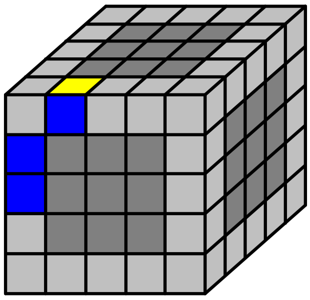


Trata-se duma posição simétrica da que foi apresentada antes, pelo que apresentamos uma sequência muito semelhante, trabalhando com as camadas da esquerda. Rodamos as duas camadas da esquerda, no sentido anti horário, rodamos a camada da frente no sentido anti horário, trazemos a camada da esquerda de volta, rodamos a frente, no sentido horário, e trazemos de volta as duas camadas da esquerda.

Então, a sequência a aplicar é a seguinte:

$$E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$$

A mesma sequência de movimentos é aplicada na seguinte situação:

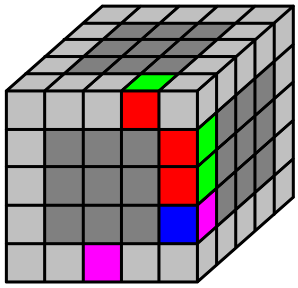


Para resolver o cubo 5×5×5, não é necessário saber resolver o cubo 4×4×4, embora ajude saber. Se o leitor sabe resolver o cubo 4×4×4, mas utiliza outro processo para unir os meios, deve familiarizar-se com este processo apresentado, embora possa seguir outro processo. Em primeiro lugar, deve treinar a fórmula que movimenta as camadas da direita. Depois, deve treinar a fórmula que mobvimenta as camadas da esquerda, até que execute essa sequência de forma rápida e natural. Repare que a mudança da direita para a esquerda pode provocar alguma confusão inicial.

Analogamente ao caso do cubo 4×4×4, convém ir juntando mais peças de cada vez que aplicamos a fórmula.

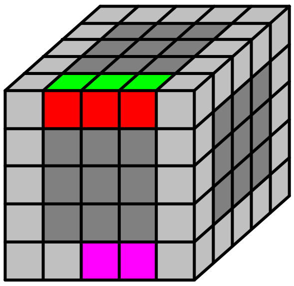
Para isso, teremos de saber o que acontece, quando aplicamos a fórmula a um cubo resolvido ou teremos de acreditar no que eu escrevo (e que pode ser confirmado pelos leitores).

Consideremos o caso da "direita":



Evidentemente, estamos a considerar que a peça laranja da camada da frente tem o azul voltado para baixo.

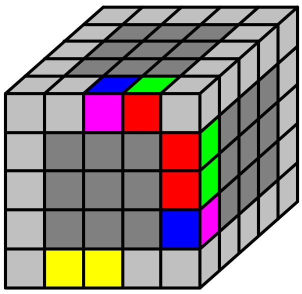
Ao aplicarmos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, obtemos a seguinte posição:



Procedendo deste modo, ganhamos tempo, porque os três meios ficaram juntos e conseguimos dois outros meios já unidos.

Observação

Convém observar que nem sempre é possível proceder desta maneira, porque a peça azul e laranja poderá estar como na figura seguinte:

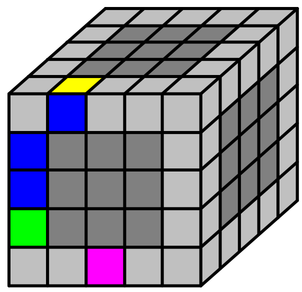


Neste caso, há que ter cuidado, pois não podemos colocar em baixo/frente, três meios já resolvidos. E se lá estiver uma peça com dois meios unidos eles devem ficar como os dois amarelos da figura anterior. Note-se que podemos fazer uma "habilidade", quando obtemos a posição anterior. Essa "habilidade consiste em colocar na posição que está à direita dos dois amarelos, a terceira peça azul e laranja. Em cerca de metade dos casos, vamos ter a peça colocada de modo favorável e, em metade dos casos, a peça ficará de forma desfavorável. A posição favorável é aquela em que o azul fica voltado para a frente e o laranja fica voltado para baixo. No caso da figura anterior, a peça vai ficar em posição favorável (basta imaginar que a peça azul e laranja que está por baixo das duas peças verdes e vermelhas, quando colocada no lugar da peça verde e vermelha da camada de Cima, fica desalinhada, pelo que a outra vai ficar alinhada).

Resumindo, a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$ mantém os seis centros do cubo, separa as peças de três meios (longos), mantém todos os restantes meios unidos e troca a posição de alguns cantos (o que não nos prejudica em nada). Os meios que são alterados são aqueles que estão "coloridos"na figura anterior.

Por fim, registe-se que o facto dos meios (longos) se manterem inalterados não significa que eles permaneçam na mesma posição do cubo.

Vejamos outro exemplo, agora "à esquerda":



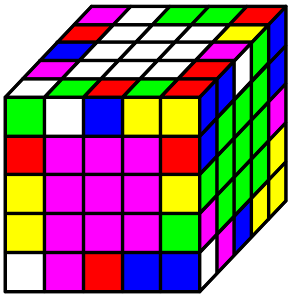
Neste caso, ao aplicarmos a sequência $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, unimos os três meios com azul e amarelo e unimos dois meios com verde e laranja.

Do mesmo modo, nem sempre é possível colocar todos os meios na posição anterior, pois a peça verde e laranja poderá estar à direita da peça azul e amarela da figura anterior. Nesse caso, na camada de baixo (frente) não pode ficar um meio já resolvido e, se ficar um meio com duas peças já unidas, elas devem ficar o mais à direita possível, porque aquela peça com verde ficará à esquerda da peça com laranja (embora o verde fique voltado para baixo).

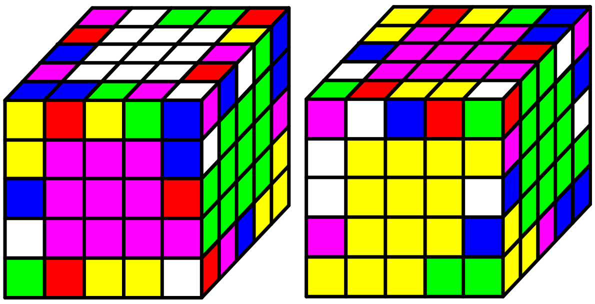
No final, quando já faltarem três (ou menos) meios para serem unidos (num total de 9, 6 ou 3 peças para serem acertadas), poderão surgir algumas dificuldades.

3.1 Unindo os meios

Retomemos o exemplo do capítulo anterior, depois da resolução dos centros:

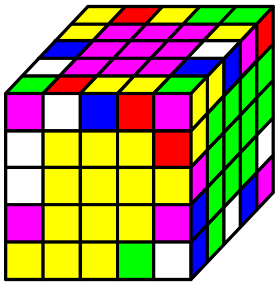


1. Analisando o cubo, vemos que há um par de peças de borda que estão unidos. São duas peças vermelha e brancas, as quais se encontram nas camadas de baixo e da frente. Rodando a camada da frente no sentido anti horário, a terceira peça de borda vermelha e branca (é aquela que está na camada da esquerda por cima dos dois amarelos) fica na posição ideal para ser unida com as outras duas (apresentamos duas vistas diferentes do cubo):

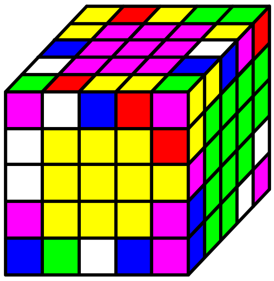


2. Na imagem anterior, não vemos a face esquerda, mas temos duas peças vermelhas e brancas e uma peça laranja e branca, por baixo daquele peça com verde e laranja (cubo apresentado à direita). Curiosamente, a peça laranja e branca

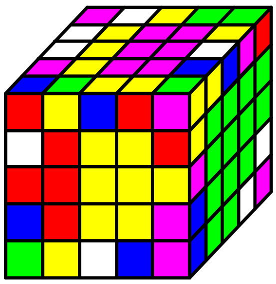
que precisamos é aquela que está na terdeira camada e na camada da direita. Fazendo D, ela vem para a primeira camada, com o branco para o lado e o laranja para baixo, pelo que pode ser colocada no lugar pretendido.



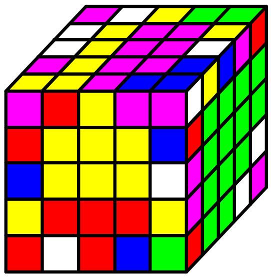
3. Agora, rodamos B^{-1}:



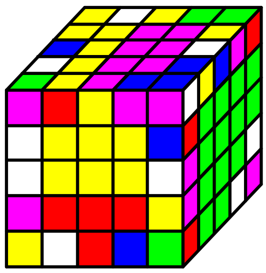
4. Com estas "manobras", a peça amarela e laranja (a que está na face da frente entre o verde e o azul, foi devidamente colocada na posição indicada (com o branco para a frente e o laranja para baixo). Agora, vamos aplicar a sequência que permite unir as três peças vermelhas e brancas, ficando unidas duas laranja e brancas. Comecemos por afastar as peças vermelhas e brancas da camada da frente, com E_2^{-1}:



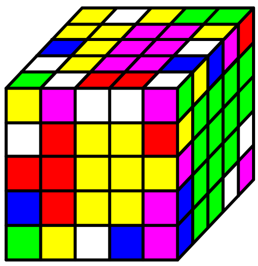
5. Agora, fazemos F^{-2}, para que, mais tarde, as cores fiquem na posição correta:



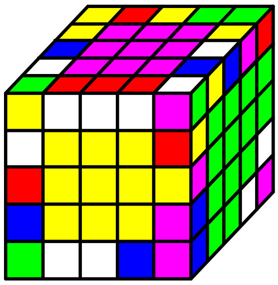
6. Agora, fazemos E, trazendo as duas peças vermelhas e brancas para a camada da frente:



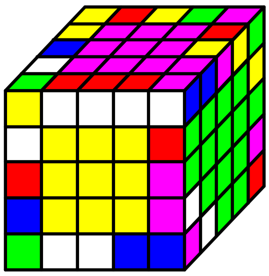
7. Rodamos a camada da frente (F), voltando os blocos amarelos e o bloco vermelho à posição vertical.



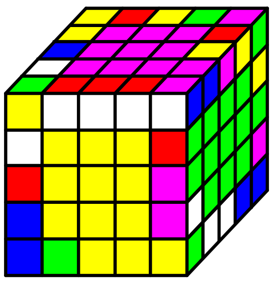
8. E agora, trazemos as duas camadas da esquerda de volta, ou apenas a camada e. Para diminuir o trabalho (no que diz respeito à colocação de cores no desenho), vamos optar por fazer e.



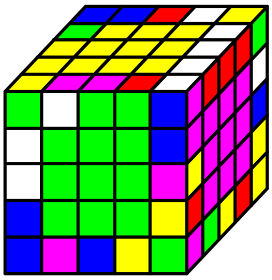
9. Com o movimento anterior, unimos as três peças de borda vermelhas e brancas, tendo ficado com duas peças brancas e laranja (aqueles dois brancos unidos, na primeira camada). Agora, temos de procurar a terceira peça laranja e branca e colocá-la de forma conveniente.Por acaso, trata-se daquele terceiro branco da primeira camada. Então, vamos rodar a direita (D), para que essa peça laranja e branca fique na segunda camada:



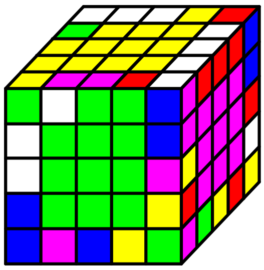
10. Agora, rodamos a camada de baixo no sentido horário (B):



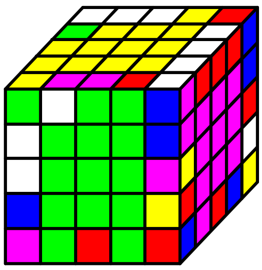
11. Agora, vamos ter que colocar as peças laranja e brancas na posição típica (novamente do lado esquerdo), mudando a maneira como olhamos para o cubo:



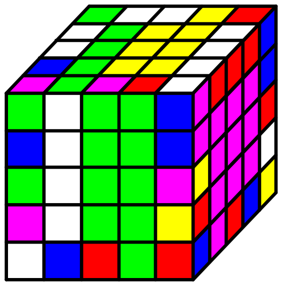
12. Aquele azul, por baixo dos dois brancos, na camada da frente, corresponde a uma peça azul e vermelha. Logo, temos de procurar a peça vermelha e azul adequada (uma peça que fica no meio da "aresta") e colocá-la, na posição entre o laranja e o amarelo, com o vermelho para a frente e o azul para baixo. Por acaso, essa peça está visível, pois trata-se daquele azul que está na face da direita. Para que o vermelho fique de lado, fazemos T^{-1}, obtendo-se:



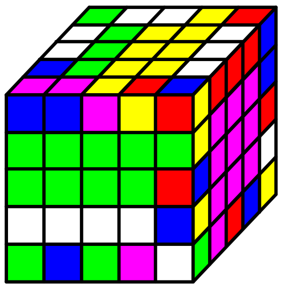
13. Agora, basta dar meia volta, na camada de baixo (B^2):



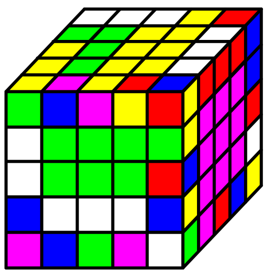
14. Agora, voltamos a aplicar a mesma sequência de há pouco. Primeiro, E_2^{-1}:



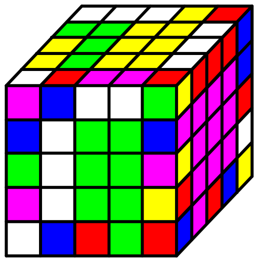
15. Agora, fazemos F^{-1}, para compensar o movimento F, que faremos mais tarde:



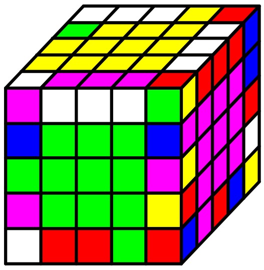
16. Trazemos as duas peças brancas e laranja de volta, E:



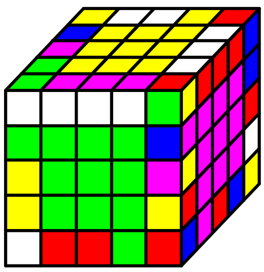
17. Agora, para colocar as duas peças brancas e laranja e para recolocar os blocos na vertical, fazemos F:



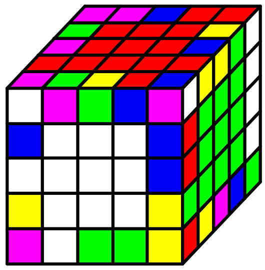
18. Agora, trazemos o bloco verde, refazendo os centros, unindo as três pelas brancas e laranja e unimos duas peças azuis e vermelhas. Façamos e:



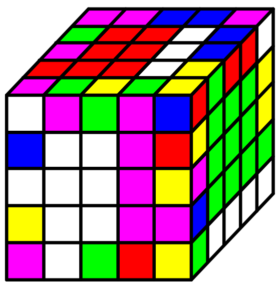
19. Agora, temos que procurar a terceira peça de borda, azul e vermelha. Por coincidência, é aquela peça azul na camada da esquerda, pelo que basta fazer E, para que as três peças fiquem em posição:



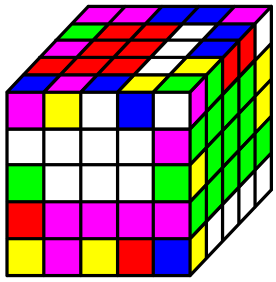
20. Vamos mudar a posição do cubo, colocando o centro vermelho para cima e o centro branco para a frente:



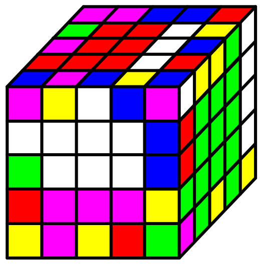
21. Neste caso, ao contrário dos dois casos anteriores, as três peças que pretendemos unir ficaram no lado direito. E vamos ter que encontrar a peça verde e amarela (peça de borda, mas central) e colocá-la com o verde para a frente e o amarelo para baixo. Só que essa peça já está à esquerda da peça azul e vermelha, pelo que não podemos colocá-la onde pretendíamos. Ora o que não tem remédio, remediado está, pelo que não há nada mais a fazer sobre isso. O que devemos ver é se aqueles dois verdes de baixo têm as cores de baixo iguais ou diferentes. Por acaso, são diferentes (vermelho e laranja), pelo que podemos aplicar a sequência sem receio de estragar alguma coisa que já esteja feita. O primeiro movimento é D_2, levando as duas peças azuis e vermelhas para a camada de cima:



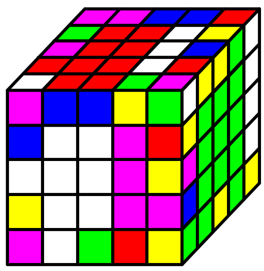
22. Agora, rodamos a camada da frente (F), colocando os blocos do centro na horizontal, para que, depois, voltem para a posição vertical:



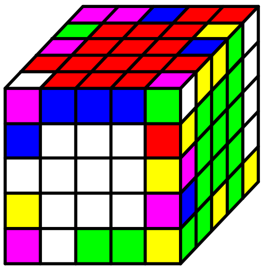
23. Trazemos as duas peças azuis e vermelhas, para a frente, fazendo D^{-1}:



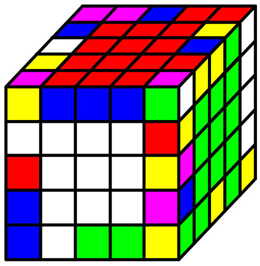
24. Agora, vamos colocar as duas peças azuis e vermelhas na camada de cima, recolocando (ao mesmo tempo) os blocos do centro da frente na vertical, fazendo F^{-1}:



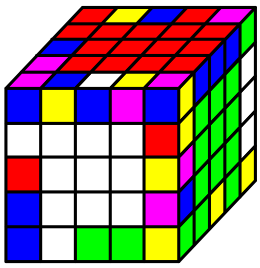
25. Com d^{-1}, refazemos os centros e unimos as três peças azuis e vermelhas:



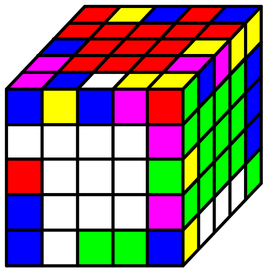
26. Como não temos nenhum par de peças meio formado, vamos ter que escolher dois para serem unidos. Das peças visíveis (na figura anterior), há duas que podem ser unidas, por terem as mesmas cores: a peça central amarela-laranja e aquele amarelo da segunda camada (tem o laranja voltado para a esquerda). Vamos ter que aproximar uma peça da outra, pelo que podemos rodar a camada da esquerda, no sentido anti horário (E^{-1}):



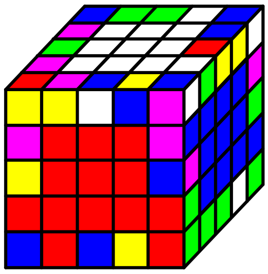
27. A peça amarela-laranja tem a parte laranja voltada para a esquerda, pelo que ao fazermos C^{-1}, ela fica com as cores invertidas. Mas, façamos C^{-1}:



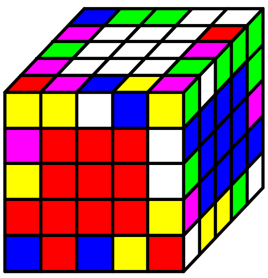
28. Agora, fazemos D, para que as cores fiquem na posição correta:



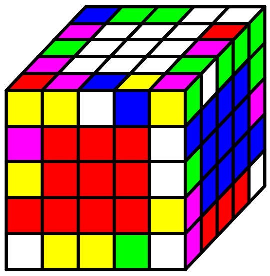
29. Temos de reorientar o cubo, colocando as duas peças no lado esquerdo, pelo que o centro branco ficará para cima e o centro vermelho ficará para a frente:



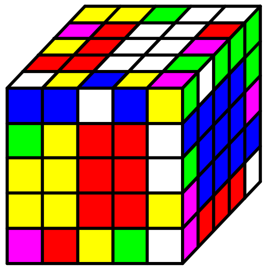
30. Aquele vermelho da esquerda, segunda camada, corresponde a uma peça vermelha e amarela, pelo que vamos procurar a peça vermelha e amarela central, para ser devidamente colocada (na posição à esquerda daquele amarelo da primeira camada, onde está um azul).Essa peça está visível (na camada da direita), pelo que damos meia volta, na camada da direita, continuando a peça com o amarelo para o lado:



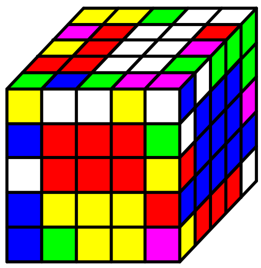
31. Agora, trazemos a peça vemelha e amarela para a frente, fazendo B^{-1}:



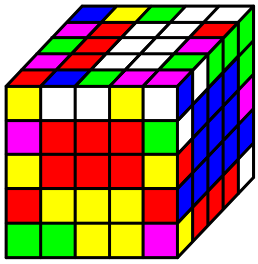
32. Segue-se a sequência para unir meios (no lado esquerdo), a qual começa por E_2^{-1}, afastando as peças amarelas-laranja da camada da frente:



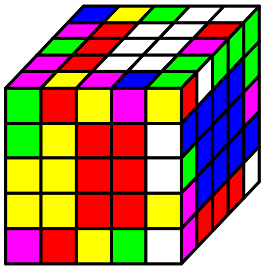
33. Continuamos com F^{-1}, para compensar o F que vamos fazer, dois movimentos adiante:



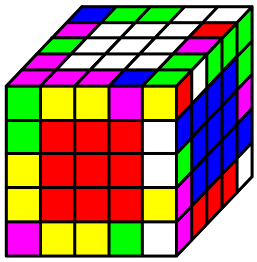
34. Com E, trazemos a peça vermelha-laranja para a camada da frente:



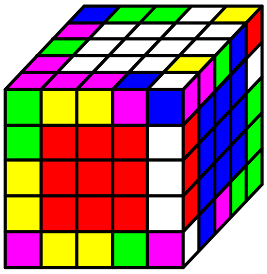
35. Agora, rodamos a camada da frente (F):



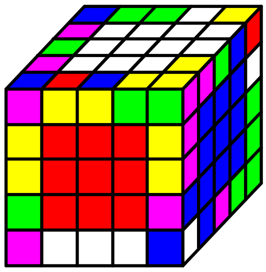
36. E refazemos os centros, unindo os dois pares de meios, com d:



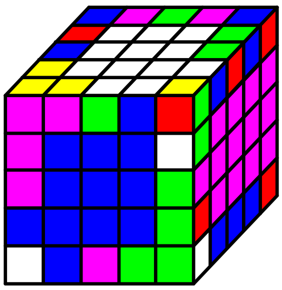
37. A terceira peça amarela e laranja está visível, pelo que fazemos D, aproximando-a do par com as mesmas cores:



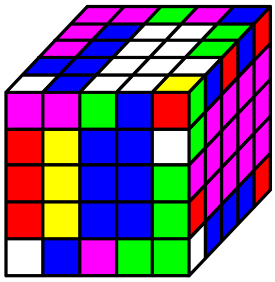
38. Agora, rodamos a frente:



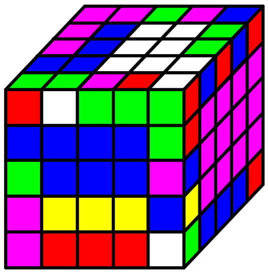
39. Como podemos ver, na figura anterior, temos que colocar as peças no lado esquerdo, passando o centro azul para a frente e mantendo o centro branco em cima (embora fosse possível "trabalhar"na posição anterior). Nova posição do cubo:



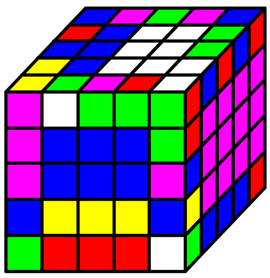
40. Agora, temos de saber qual a outra cor da peça azul que está por baixo do par laranja-amarelo. Por coincidência, a outra cor é laranja e a peça de borda central azul e laranja já está colocada na posição certa com as cores certas. É uma situação rara de ocorrer, mas aconteceu. Então, começamos pelo primeiro movimento da sequência, ou seja, E_2^{-1}.



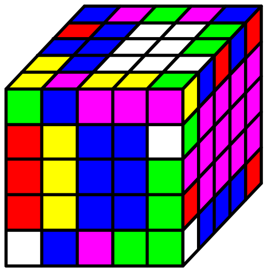
41. Rodamos a camada da frente, no sentido anti horário, ou seja, F^{-1}:



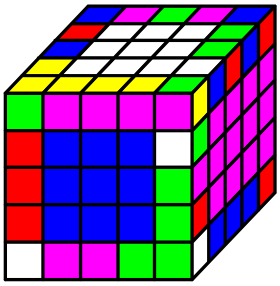
42. Trazemos a camada esquerda de volta (E):



43. Rodamos a frente, recolocando os blocos do centro da frente na vertical (F):

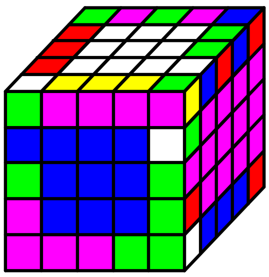


44. E refazemos os centros, unindo as peças pretendidas, fazendo e:

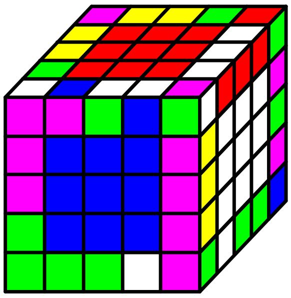


Obtivemos, assim, mais um meio completo (o meio amarelo e laranja). E temos dois meios unidos (duas peças vermelhas e amarelas que não estão visíveis na figura anterior).

45. Por coincidência, aquelas duas peças da camada de baixo, com a cor laranja têm o azul voltado para baixo, pelo que podemos optar por este par ou pelo outro. Precisamos encontrar a terceira peça vermelha e branca ou a terceira peça azul e laranja. Por acaso, se fizermos E^{-1}, a peça azul e laranja aparece, pelo que vamos fazer esse movimento:

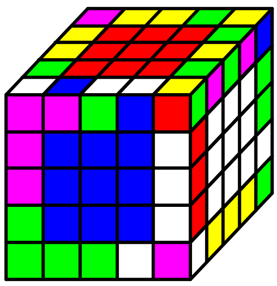


46. Para que as duas peças fiquem devidamente posicionadas, basta reorientar o cubo, mantendo o centro azul na frente e passando o centro branco para a direita. E mais uma vez, vamos ter as peças a unir, no lado esquerdo:

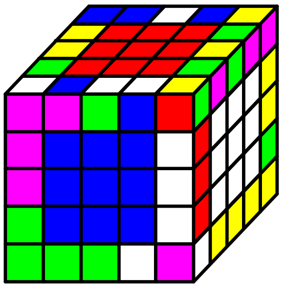


Antes de unirmos as peças azuis e laranja, devemos colocar devidamente uma outra peça. O verde por baixo das três peças de cor laranja (camada da esquerda) é duma peça verde e vermelha, pelo que devemos colocar a peça vermelha e verde central na posição à esquerda do branco (primeira camada, frente). Comecemos por descobrir onde está essa peça vermelha e verde: Por feliz coincidência, trata-se daquele verde central da face da direita, camada de baixo. Se o trouxermos para a frente, a peça fica com as cores invertidas, relativamente ao que pretendemos. Logo, temos de fazer uma pequena manobra, para colocar o vermelho para o lado e o verde para baixo.

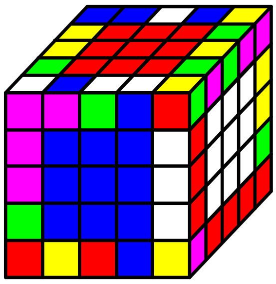
Então, começamos por D^{-1}:



47. Agora, fazemos T^{-1}, levando a peça para a primeira camada, com o vermelho para o lado e o verde para baixo:

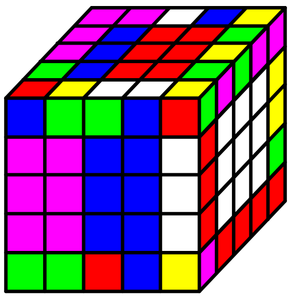


48. Agora, rodamos B^2, trazendo a peça verde e vermelha para a frente:

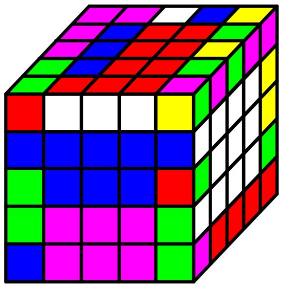


E obtivemos a posição que permite unir os três meios azuis e laranja, bem como, unir duas peças vermelhas e verdes.

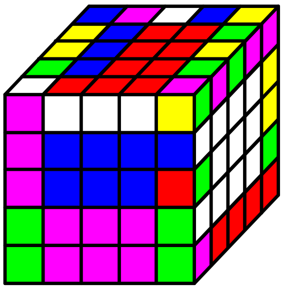
49. Mais uma vez, começamos por E_2^{-1}:



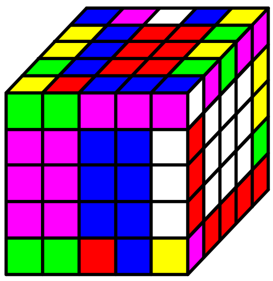
50. Continuamos com F^{-1}:



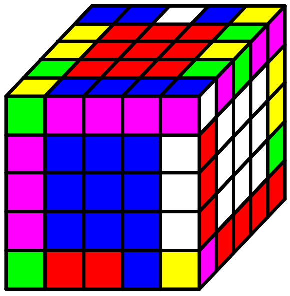
51. Segue-se E:



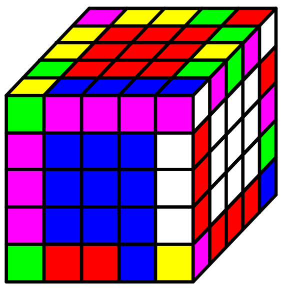
52. E, depois, F, colocando os blocos do centro da frente na vertical:



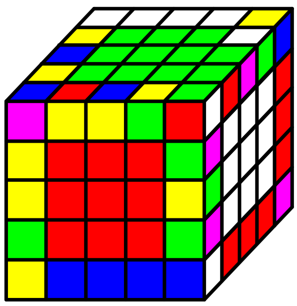
53. Por fim, refazemos os centros, com e:



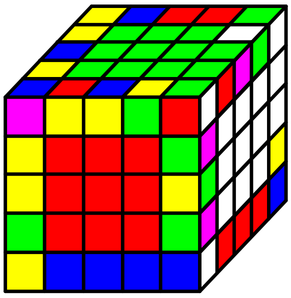
54. Temos duas peças vemelhas e brancas unidas (os dois amarelos que vemos na camada da esquerda) e duas peças vermelhas e verdes (od dois vermelhos que vemos na face da frente. Então, precisamos de encontrar a peça de borda com vermelho e verde ou com vermelho e laranja. Vamos optar pela peça vermelha e amarela, porque está visível e é fácil de colocá-la junto das outras duas com as mesmas cores. Essa peça vermelha e amarela é aquele amarelo da quarta camada, pelo que basta rodar a camada de trás no sentido horário (T):



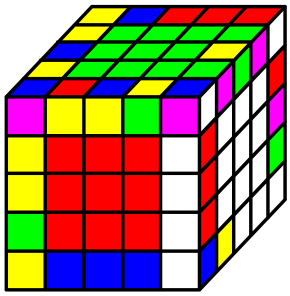
55. Reposicionamos o cubo, com o centro verde para cima e o centro vermelho para a frente:



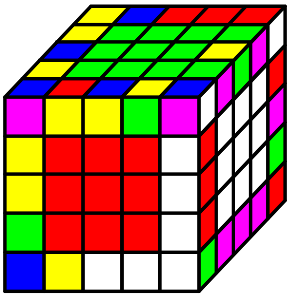
56. E mais uma vez, as peças a unir ficaram no lado esquerdo do cubo. Temos de saber qual a outra cor da peça que tem aquele verde da camada da esquerda. A outra cor é o branco, pelo que precisamos de encontrar a peça verde e branca centralpara ser colocada na terceira posição da camada da frente e de baixo, com o branco para a frente e o verde para baixo. Essa peça está escondida, pelo que vamos dar meia volta na camada de trás, para que ela passe para a parte direita do cubo (e vai ficar visível):



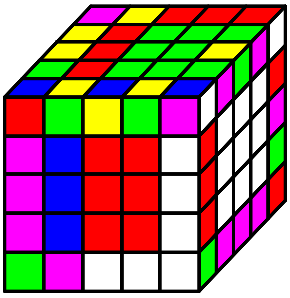
57. A peça verde e branca que pretendemos corresponde ao branco da terceira camada (horizontal) e camada de trás. Como pretendemos que o branco fique para o lado, rodamos a camada da direita, no sentido horário:



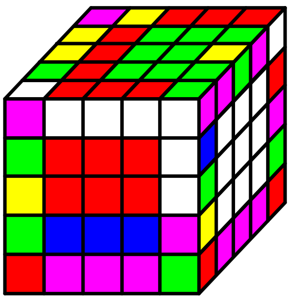
58. Agora, rodamos a camada de baixo no sentido anti horário, colocando a peça verde e branca na posição adequada:



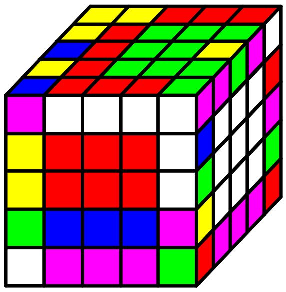
59. Mais uma vez, começamos com E_2^{-1}:



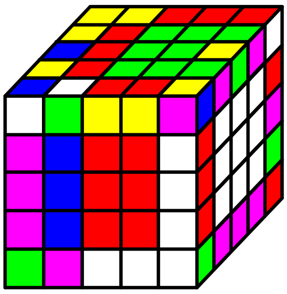
60. continuamos com F^{-1}, para compensar o F que faremos adiante:



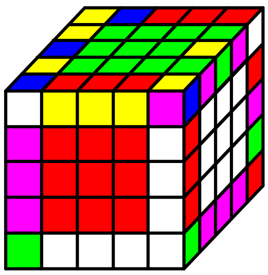
61. Trazemos a camada e de volta:



62. Rodamos a camada da frente:

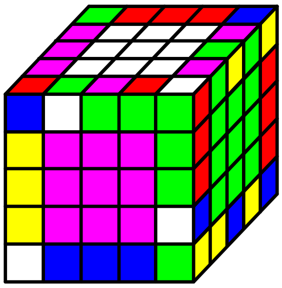


63. E refazemos os centros com e, completando mais uma peça de meio (de borda), ou se preferirmos, mais uma aresta:

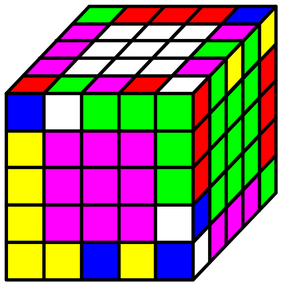


Nesta posição, temos 6 arestas devidamente formadas e, pelo menos dois pares de peças já unidas. São as peças verdes e brancas e as peças verdes e vemelhas. As peças verdes e vermelhas são as que vemos junto ao canto superior direito da camada de trás. E já estão devidamente posicionadas, pelo que basta reposicionar o cubo.

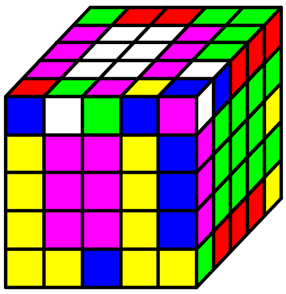
64. Reposicionando o cubo:



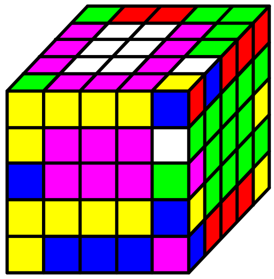
65. Antes de unirmos as peças vermelhas e verdes, devemos colocar a peça azul e branca central, na camada de baixo e da frente. O ideal é que ela já lá estivesse (está lá um azul...). Mas não está. Por acaso, é fácil de colocá-la lá, pois basta fazer B^{-1}:



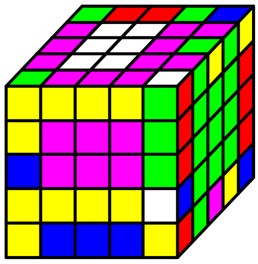
66. Agora, as peças que pretendemos unir ficaram do lado direito, pelo que começamos com D_2:



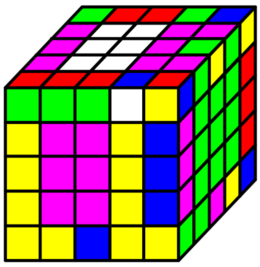
67. Rodamos a camada da frente no sentido horário:



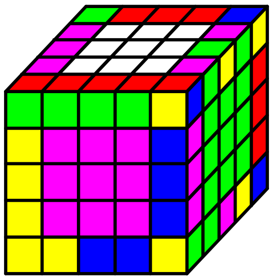
68. Trazemos a camada da direita de volta (D^{-1}):



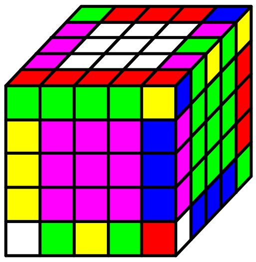
69. Continuamos com F^{-1}, para que as peças do centro da frente fiquem devidamente posicionadas:



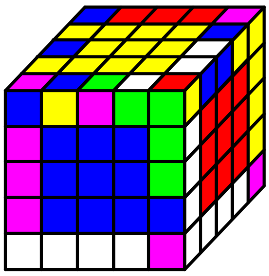
70. Por fim, refazemos os centros com d^{-1}:



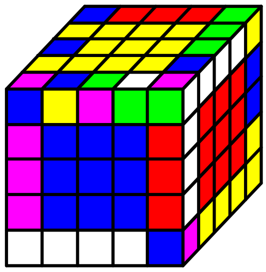
71. Neste momento, temos sete arestas prontas. E já temos duas peças erdes e brancas unidas, bem como duas peças azuis e brancas. A maneira mais fácil de continuar é fazer B^2, ou seja, dar meia volta na camada de baixo:



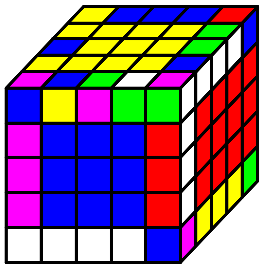
72. Reposicionando o cubo, para vermos as peças verdes e brancas:



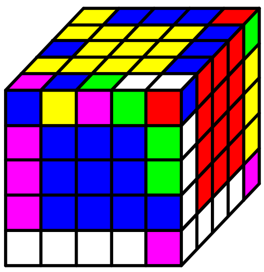
73. As peças verdes e brancas ficaram do lado direito e interessa-nos colocar os azuis e brancos da camada superior, por baixo do centro azul, com o branco para o lado. Para fazermos isso, vamos ter que destazer momentaneamente a posição das peças verdes e brancas. Vamos começar por rodar a camada da direita, no sentido horário, colocando as duas peças azuis e brancas na camada de trás, com o branco para trás.



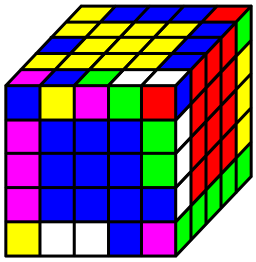
74. Rodamos a camada de trás, no sentido anti horário:



75. E trazemos a camada da direita de volta (D^{-1}):

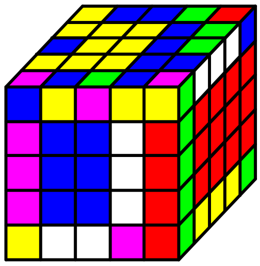


76. Damos meia volta na camada de baixo:

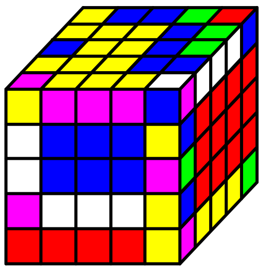


77. Como os dois brancos que estão por baixo do centro azul, vamos ser duplamente beneficiados, ficando duas arestas prontas:

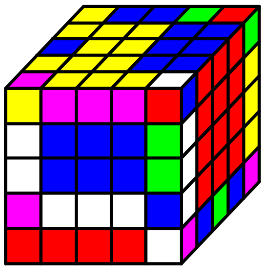
78. Começamos por D_2:



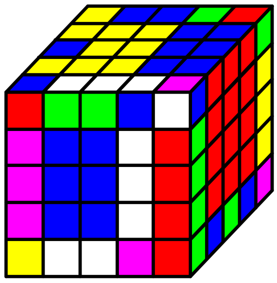
79. Rodamos a camada da frente, no sentido horário, F:



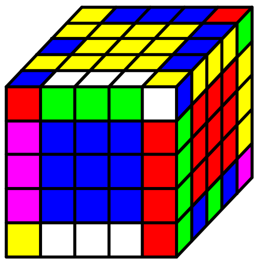
80. Trazemos a camada da direita de volta, D^{-1}:



81. Rodamos a camada da frente, no sentido anti horário, F^{-1}:

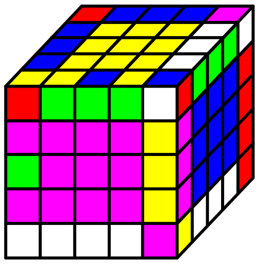


82. E refazemos os centros, com d^{-1}:

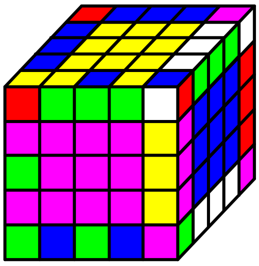


Nesta posição, temos nove arestas resolvidas, faltando resolver três, sendo que duas dessas arestas estão visíveis. Perto do fim, a situação começa a complicar-se...

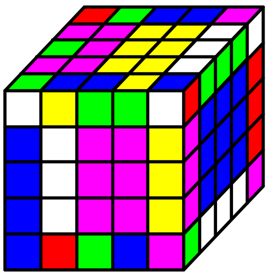
83. Reposicionemos o cubo:



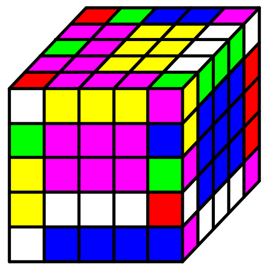
84. Vamos dar meia volta na camada de baixo (B^2), de modo a vermos as três arestas por resolver:



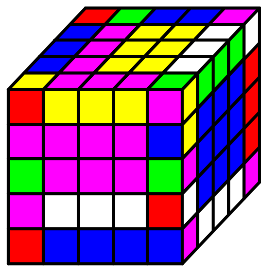
85. Como o verde da terceira camada pertence a uma peça com amarelo, podemos juntar duas peças verdes e amarelas, começando por E_2^{-1}:



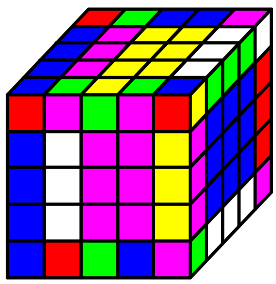
86. Rodamos a frente no sentido anti horário:



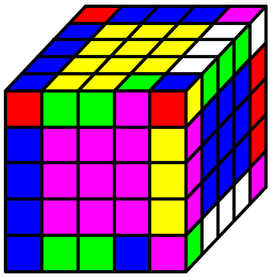
87. Trazemos a camada esquerda de volta (E):



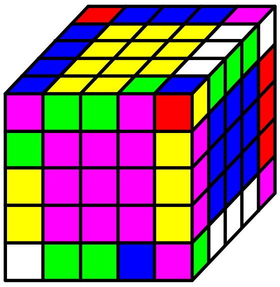
88. Rodamos a frente no sentido horário:



89. E refazemos os centros, com e:

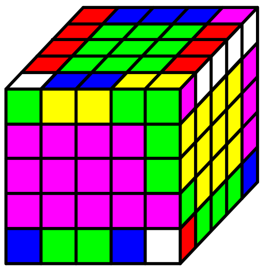


90. E fazemos E^{-1}, para que as arestas não resolvidas fiquem na camada da frente:

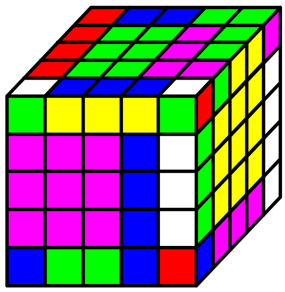


Estamos com três arestas quase resolvidas.

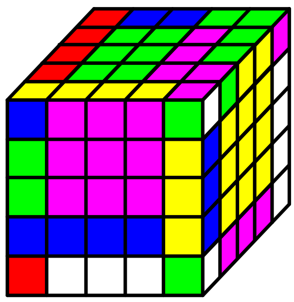
91. Quando eu ia reorientar o cubo, fiz umas manobras de que não registei imagens, chegando à seguinte posição, em tudo semelhante à posição anterior. O que o leitor tem que fazer é colocar o centro amarelo para a direita, mantendo o centro laranja na frente. E trazer a terceira aresta incompleta (inclui duas peças amarelas e laranja), para a nova camada de baixo, de modo a ficar com as cores invertidas em relação à peça verde e laranja da figura. Foram essas manobras que me esqueci de registar. Mas não modifiquei em nada a maneira de resolver...



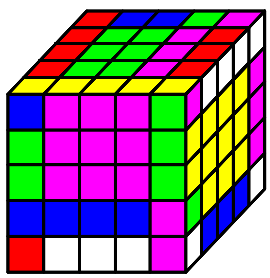
92. E aplicamos, mais uma vez, a mesma sequência, começando por D_2:



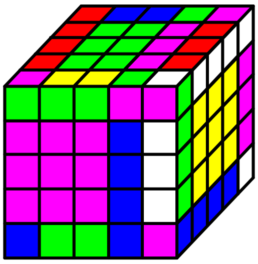
93. Rodamos a camada da frente, no sentido horário:



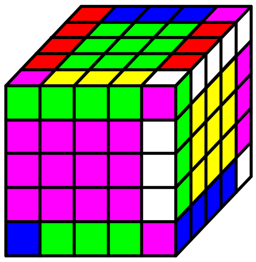
94. Trazemos a direita de volta (D^{-1}):



95. Rodamos a frente no sentido anti horário:



96. E refazemos os centros (d^{-1}):



Neste caso, tivemos sorte, porque ao resolvermos a décima aresta, também resolvemos as outras duas, ou seja, resolvemos três arestas duma só vez. Tal significa que o cubo 5×5×5 ficou transformado num cubo 3×3×3. Agora, basta resolver o cubo, como se fosse um cubo 3×3×3, sem nenhuma diferença. Repare-se que no caso do cubo 4×4×4, quando vamos resolver o cubo 3×3×3 resultante, temos algumas situações que não ocorrem no cubo 3×3×3.

3.2 Casos especiais

Depois de resolvermos a décima aresta, temos várias possibilidades:

1. Não falta resolver nenhuma aresta, porque foram resolvidas três arestas duma só vez

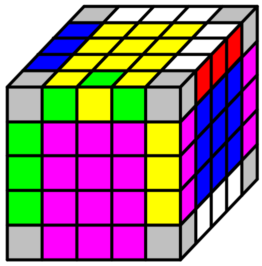
2. Falta resolver uma única aresta

3. Falta resolver duas arestas

No primeiro caso, já temos um cubo 3×3×3, pelo que passamos à sua resolução

Suponhamos, então, que temos uma única aresta para resolver. Isso significa que as três peças a unir estão juntas, mas as cores não estão devidamente "colocadas".

Example 1 *Consideremos o seguinte caso, onde temos onze arestas resolvidas e uma por resolver*



Resolução

Evidentemente que estamos a supôr que os centros também estão resolvidos. Os cantos foram deixados a cinzento, porque as cores dos mesmos são irrelevantes para a presente situação.

A situação indicada, na figura anterior, é a única em que há uma só aresta para resolver. Claro que poderiam ser outras cores, ou sendo as mesmas, poderiam estar ao contrário. Todavia, a situação é sempre a "mesma". A solução é uma sequência um pouco longa, mas que é bem conhecida daqueles que sabem resolver o cubo 4×4×4. Eis a fórmula:

$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

Na realidade, costuma aplicar-se uma fórmula ligeiramente diferente, pois é mais fácil mover as camadas d e D simultaneamente, do que, apenas, a camada d. A fórmula alternativa é a seguinte

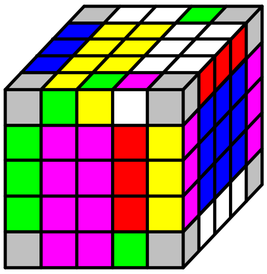
$$\left(D_2^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2D_2^2\right)$$

Embora, seja uma fórmula ligeiramente diferente, ela "faz"exatamente o mesmo:

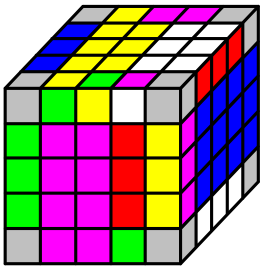
Aplicada a fórmula (ou sequência), a peça central da aresta continua na mesma posição e as outras duas passam a ter o verde voltado para cima (na realidade, trocam entre si e invertem as cores).

Vejamos a resolução passo a passo, aplicando a primeira fórmula (para termos menos trabalho a colorir as figuras):

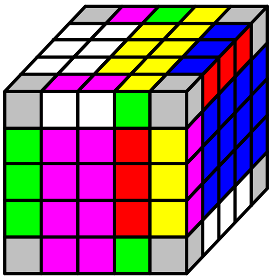
1. d^2



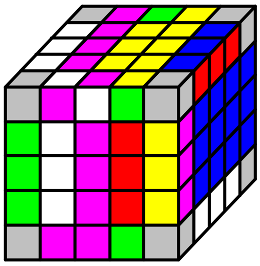
2. T^2



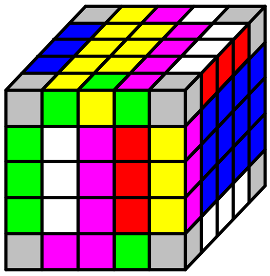
3. C^2



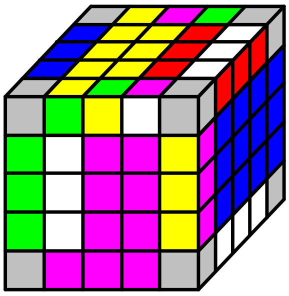
4. e



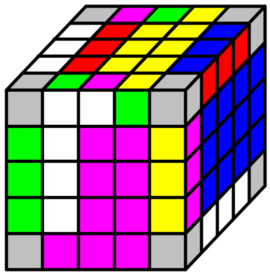
5. C^2



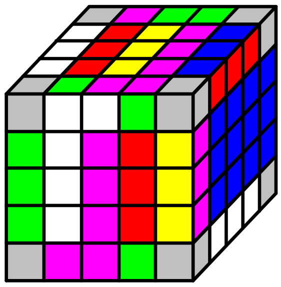
6. d^{-1}



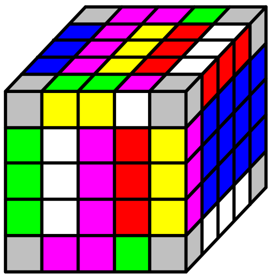
7. C^2



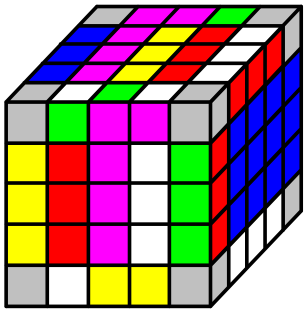
8. d



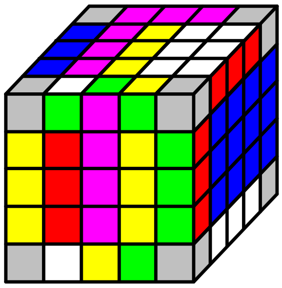
9. C^2



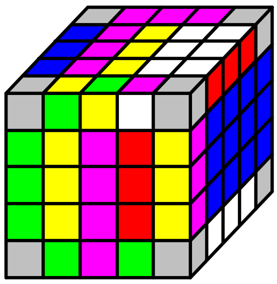
10. F^2



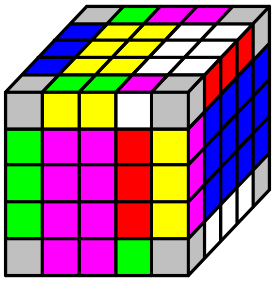
11. d



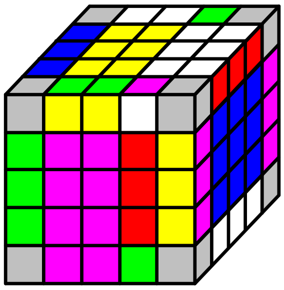
12. F^2



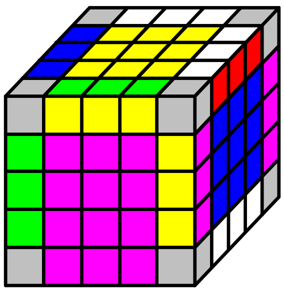
13. e^{-1}



14. T^2



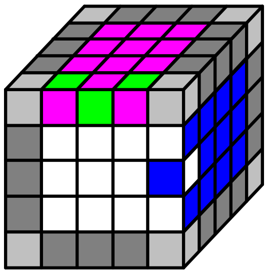
15. d^2



E a aresta verde e branca ficou resolvida.

Resta-nos o caso em que faltam duas e só duas arestas. Aqui, temos várias possibilidades, pelo que este caso é mais complicado do que o anterior.

Example 2 *Suponhamos que faltam duas arestas para resolver, como na figura seguinte:*

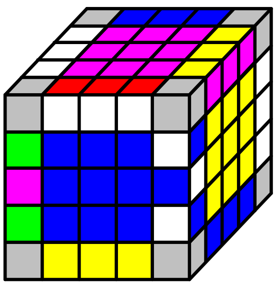


Claro que estamos a supôr que os centros estão resolvidos. A cinzento mais escuro estão indicadas as arestas resolvidas. Neste exemplo, basta-nos aplicar a fórmula $(D_2^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2D_2^2)$, resolvendo uma das arestas. Depois, é só reorientar o cubo e voltar a aplicar a mesma fórmula, resolvendo a última aresta.

De passagem, registe-se que até poderemos ter as doze arestas por resolver na mesma situação: em cada uma das arestas, as três peças têm as mesmas cores, mas as cores não combinam. Nesse caso, verdadeiramente incomum, aplicaríamos doze vezes a fórmula anterior. Claro que em vez de doze arestas nessa situação, poderão ser cinco ou seis, ou outro número qualquer. Nesses casos, aplicaremos a fórmula, tantas vezes quantas as necessárias.

No entanto, existem outros processos mais fáceis.

Example 3 *Consideremos o seguinte exemplo, onde os centros estão resolvidos e o mesmo acontece com dez arestas:*

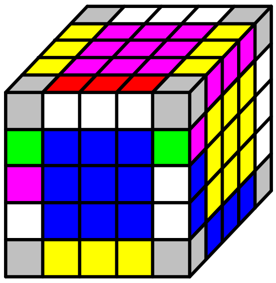


Este exemplo é análogo ao anterior, o qual poderia ser transformado neste. Já sabemos que podemos aplicar duas vezes a sequência que troca as duas peças de borda "laterais", com inversão das cores.

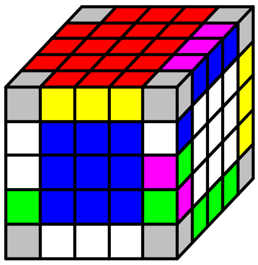
Mas, apliquemos a seguinte fórmula (já conhecida):

$$B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$$

A posição obtida é a seguinte:

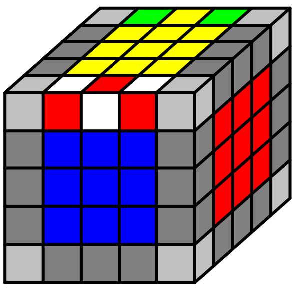


Agora, para não termos que descobrir e decorar uma nova fórmula, damos meia volta ao cubo (relativamente a um eixo de perfil), obtendo-se a seguite posição:



Nesta posição, já sabemos que a fórmula $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$ resolve o problema.

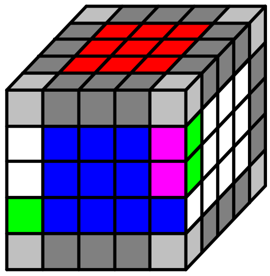
Ainda outro processo:



Seja $M = D_3^{-1}D_2 = E_3E_2^{-1}$. Com a sequência $(MCMCM)\,C^2\,(M^{-1}CM^{-1}CM^{-1})\,C^2$, as duas arestas ficam resolvidas duma vez só. E nem precisamos de fazer C^2, no fim

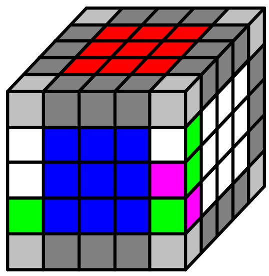
Se escrevermos $\left(D_3^{-1}D_2CD_3^{-1}D_2CD_3^{-1}D_2\right)C^2\left(D_3D_2^{-1}CD_3D_2^{-1}CD_3D_2^{-1}\right)$, a sequência fica um pouco mais complicada para os olhos, mas acaba sendo aquilo que fazemos na realidade (a menos que se mexa, apenas, na camada do meio, coisa que dá muito mais trabalho).

Example 4 *Consideremos o seguinte cubo, com dez arestas e os centros resolvidos:*

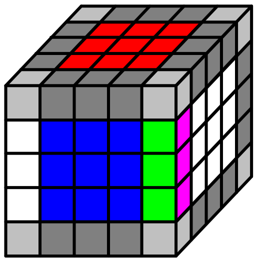


Neste exemplo, parece ser necessário trocar a peça azul e branca (da direita) com a peça verde e laranja (da quarta camada), para que a peça azul e branca da direita fique devidamente posicionada, para a resolução das duas arestas.

Colocando o centro branco para cima e mantendo o centro azul para a frente e aplicando a fórmula $(D_2^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2D_2^2)$ e reposicionando o cubo, obtemos:

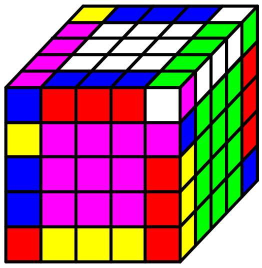


E, aplicando a fórmula $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$, ficamos com as arestas todas resolvidas.



Note-se que, habitualmente, aplicamos as mesmas duas sequências, mas por ordem inversa.

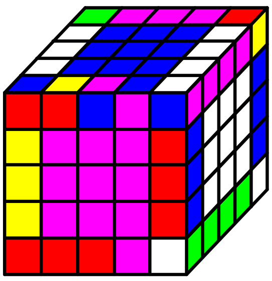
Example 5 *Vejamos mais um caso:*



Neste exemplo, o cubo foi colocado na posição menos adequada. O nosso objetivo é deixar as duas peças vermelhas e amarelas (as que estão unidas) na camada de baixo e alterar convenientemente a posição das peças da outra aresta incompleta. Para isso, vamos aplicar a sequência do caso anterior, depois de colocarmos o cubo com o centro azul para cima e mantendo o centro laranja na frente:

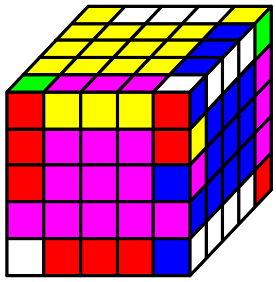
$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

A posição obtida é a seguinte:



Tudo continua igual, menos a aresta incompleta de cima, onde as peças "laterais"trocaram de posição com inversão das cores.

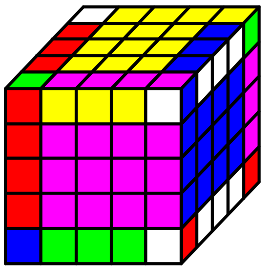
Avancemos, colocando o cubo na seguinte posição:



A aresta incompleta da esquerda tem duas peças vermelhas e amarelas, enquanto que as cores da outra aresta incompleta estão visíveis. Agora, pretendemos levar a peça vermelha e amarela da camada da direita para a outra aresta incompleta, trocando com a peça azul e laranja que lá está. Isso consegue-se com a fórmula

$$B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$$

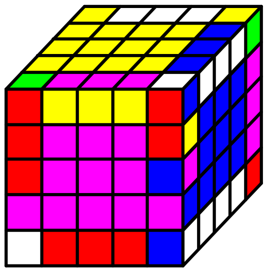
E obtemos a seguinte posição:



Então, já temos as doze arestas resolvidas, pelo que obtivemos um cubo 3×3×3, que se resolve como o cubo 3×3×3 propriamente dito.

Neste exemplo, podemos inverter a ordem de aplicação dos dois algoritmos.

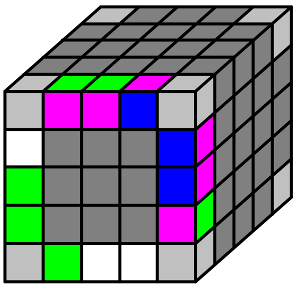
Example 6 *Consideremos o seguinte cubo, com os centros e dez arestas resolvidas:*



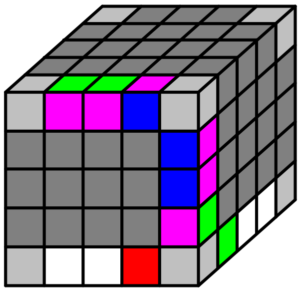
Como vimos, basta aplicar a sequência $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$, ou então, a sequência $bDF^{-1}CD^{-1}Fb^{-1}$, que talvez seja mais fácil de fixar, para quem ainda não saiba resolver o cubo 4×4×4.

Para ganhar rotinas, o leitor deve resolver muitas vezes esta questão (união dos meios, de forma a obter um cubo 3×3×3).

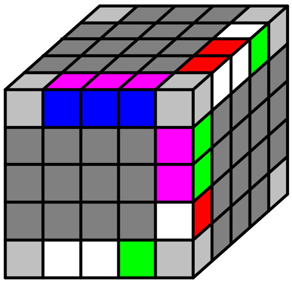
Example 7 *Consideremos o seguinte cubo com os centros e oito arestas resolvidas:*



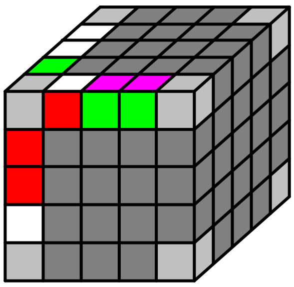
Na camada da frente, temos as peças com azul e laranja, as peças com verde e laranja, as peças com verde e branco e as peças com vermelho e branco. Podemos unir as três peças com azul e laranja, mas iremos separar as duas peças com vermelho e branco. Então, convém colocá-las noutra posição. No entanto, é mais fácil fazer EB, obtendo-se:



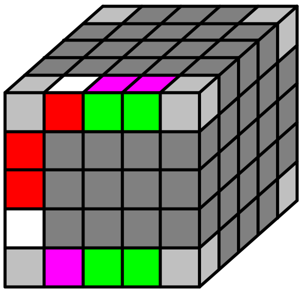
Agora, aplicamos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}D^2$, obtendo-se



Segue-se F^{-1} e, reorientando o cubo, obtemos:

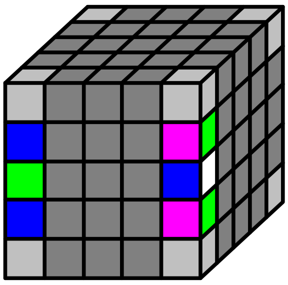


As peças da camada da esquerda (face de cima) devem ser colocadas em baixo e à frente de modo conveniente, para resolvermos duas arestas (pelo menos) duma vez só. Então, os dois verdes têm de ficar para a frente e o branco para baixo. Sequência: E^2BE^2:

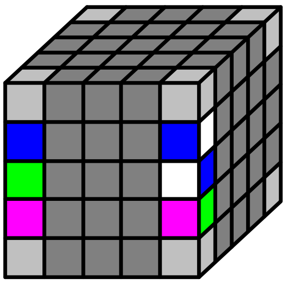


Agora, aplicando a sequência $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, as últimas três arestas ficam resolvidas, obtendo-se um cubo 3×3×3.

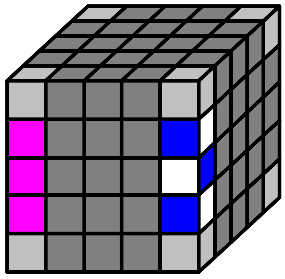
Example 8 *Consideremos o seguinte cubo com os centros e dez arestas resolvidas:*



Apliquemos a sequência $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$:



Obtivemos uma posição onde já temos duas peças azuis e brancas juntas (embora as cores não combinem). É claro que também temos as duas peças com verde e laranja juntas. Agora, basta colocar as peças de meio na posição ideal e voltamos a aplicar a sequência anterior. Por curiosidade, podemos referir que podemos aplicar uma fórmula semelhante, como se estivéssemos a ver a figura anterior no espelho. Tal sequência é $B_2^{-1}E^{-1}FC^{-1}EF^{-1}B_2$, obtendo-se:



Agora, falta-nos resolver uma única aresta, para o que aplicamos (depois de reorientarmos devidamente o cubo) a sequência

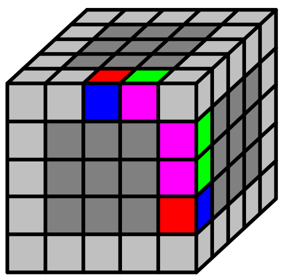
$$\left(d^2T^2\right)\left(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2\right)\left(F^2dF^2e^{-1}\right)\left(T^2d^2\right)$$

Para não ter que decorar outra fórmula, é conveniente obter a posição habitual. Para isso, partindo da posição da penúltima figura, basta fazer E^2T^2 e colocar a face da direita para a frente, fazendo C_5. Depois, basta aplicar a sequência $B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$, para chegarmos a uma posição que sabemos resolver: onze arestas resolvidas e uma por resolver.

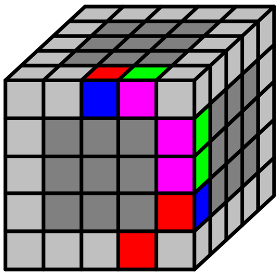
No entanto, como já vimos, podemos resolver as duas arestas, duma só vez, reorientando o cubo e aplicando a sequência $(MCMCM)\,C^2\,(M^{-1}CM^{-1}CM^{-1})\,C^2$.

Observação 1

Consideremos a posição indicada na figura seguinte:



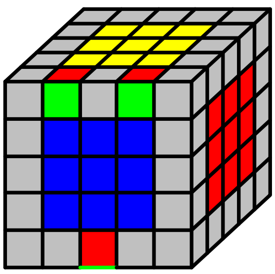
Neste caso (figura anterior), não podemos colocar a peça de meio central azul e vermelha, na camada de baixo, pois ela está na camada de cima, junto da peça laranja e verde. Então, podemos adiantar trabalho, colocando (se possível) a terceira peça azul e vermelha com o azul para baixo e o vermelho para a frente, como na figura seguinte:



Então, quando fizermos D_2, unimos duas peças de meio azuis e vermelhas. Esta situação já acontecia no cubo 4×4×4, onde podemos optar por uma de duas possibilidades. No caso do cubo 5×5×5, também temos as duas opções, mas eu prefiro colocar devidamente a peça de meio central, pois apenas existe uma, o que torna mais fácil a colocação da peça. Em alguns dos exemplos apresentados, poderíamos ter procedido desta maneira, o que teria adiantado um pouco. No entanto, não o fizemos, para não falarmos em várias coisas ao mesmo tempo. Mas aconselhamos o leitor a seguir o processo indicado nesta observação (desde que seja possível, o que nem sempre acontece). Eventualmente, a peça poderá ficar com as cores invertidas (se a terceira peça azul e vermelha estivesse com as cores ao contrário, ou seja, azul para a frente e vermelho para baixo).

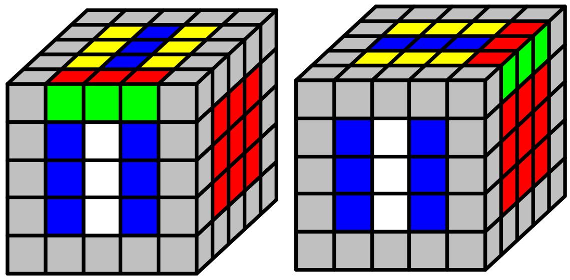
Observação 2

Uma situação que ocorre muitas vezes (na resolução dos meios) é a seguinte:

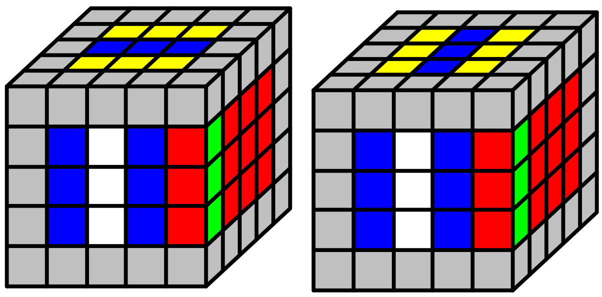


Neste caso, convém resolver da maneira "tradicional". Roda-se M^{-1} (ou seja, $D_3D_2^{-1}$), de modo a juntarmos os três meios com vermelho e verde.

Momentaneamente, desfazemos os centros. Depois, fazemos C^{-1} (ou outro movimento da camada de cima).



No caso de termos feito C^{-1}, movemos a camada da direita, de modo a colocarmos na camada de cima um bloco de três meios ainda não resolvidos. No caso da figura seguinte, fizemos D^{-1}, para vermos melhor as peças. Em seguida, desfazemos o movimento feito (neste caso será C) e voltamos a refazer os centros com M.



Por uma questão de espaço, omitimos o último movimento.

É muito importante referir que a sequência anterior só resulta, se tivermos, na camada da esquerda ou na camada da direita, uma aresta por resolver e que essa aresta não esteja na camada superior. Desse modo, podemos trocar a aresta acabada de resolver com essa aresta não resolvida. Um pouco de treino é suficiente para percebermos a resolução.

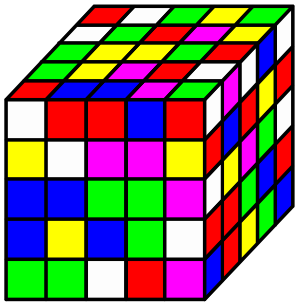
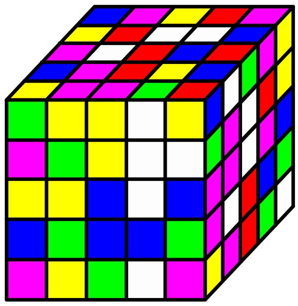
Capítulo 4

Um Exemplo de Resolução

Pegue num cubo 5×5×5 resolvido, com a face amarela para cima e a face verde para a frente. Baralhe-o, cuidadosamente, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} D_2DE_2EF_2FT_2TB_2BC_2CD_2DE_2E^2DTBD_2TE \\ B^{-1}C^2EF^2B^{-1}DC_2E^{-1}TF^2D^{-1}E_2^2C^2TB_2E_2CE \\ CFB^2T^{-1}D^2E_2ECTD_2DCB_2EFDTBE_2C^{-1}D^2 \\ T^2E_2C_2TD_2C^{-1}T_2D_2^2BE^2CF_2DC_2DE_2CD^2C \\ B_2C_2EC_2T_2F^2D_2C^2E_2B_2^2DC_2^2B_2^{-1}D_2^2F^2T^2BD \\ BD_2CE^2T_2^2DF^{-1}C_2D_2^2T^{-1}CDB^2T_2B_2D_2^{-1}TE^2B \\ C_2^2D_2^{-1}T^2DB^{-1}B_2T_2^2C_2^{-1}D^2BTB_2^2E_2C_2T_2^2D^{-1}F_2 \\ DTB^2EC^{-1}BT_2D^{-1}E_2B_2TD_2^{-1}F_2CD_2B^2DCBE \end{cases}$$

A sequência anterior foi escrita sem recorrer ao cubo, pelo que eu não imaginava qual a situação que iria obter (no final).

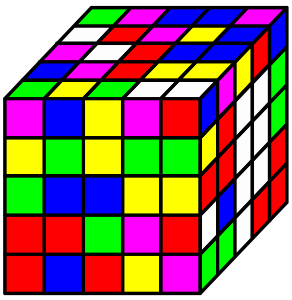
Resolução

É claro que há muitas maneiras de começarmos a resolver o cubo. Olhando para o cubo da direita, na figura anterior, verificamos que há três blocos de dois brancos juntos.

Coloquemos o cubo com o centro azul para a frente e o centro vermelho para cima.

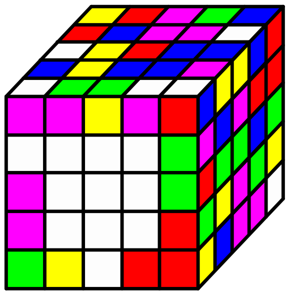
1. $D^2 T_2^{-1} F D^{-1} B_2$

E obtivemos a seguinte posição, com dois blocos de três brancos que irão formar um dos centros do cubo:

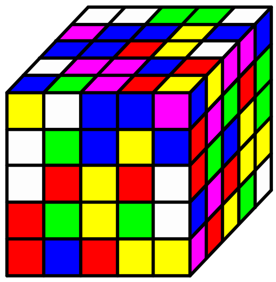


2. $C_5^2 C^{-1} E_2^{-1} D_2^2 C_5^{-1} F E_2$

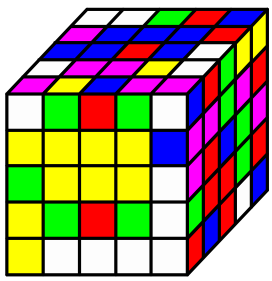
E o centro branco ficou resolvido:



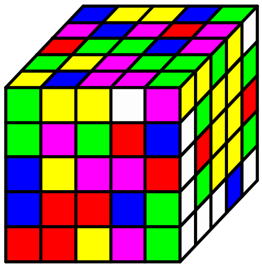
3. Agora, vamos resolver o centro amarelo (sem desfazer o centro branco). Se dermos meia volta no cubo, deixando o centro vermelho em cima e passando o centro branco para trás, ou seja, fazendo C_5^2, verificamos que há três blocos de dois amarelos, o que facilita a resolução do centro amarelo.



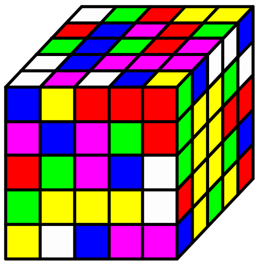
Aplicando a sequência $F^2D_2^{-1}F^{-1}D_2DB_2^{-1}FB_2$, refazemos o centro branco e conseguimos dois blocos de três amarelosdevidamente alinhados:



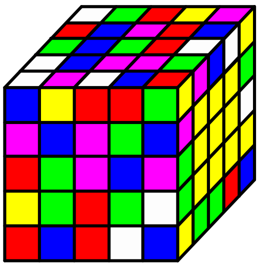
4. Agora, falta-nos formar um bloco de três amarelos e completar a resolução do centro amarelo. Esses três amarelos não estão na camada da frente, nem na camada de trás. Logo, vamos colocar o centro branco à esquerda (o centro amarelo fica à direita) e, por exemplo, o centro verde para cima:



Fazendo, $F^{-1}E_2TD_2^2$, obtemos a seguinte posição:

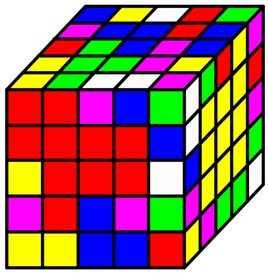


5. Agora, fazemos $D^{-1}B_2D^2B_2^{-1}$, obtendo-se:

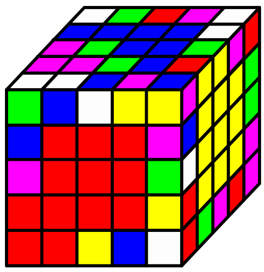


6. Na figura anterior, já temos os centros branco e amarelo resolvidos e já temos um bloco de três azuis formado. Curiosamente, também temos um bloco de três vermelhos e dois blocos de dois vermelhos, pelo que é mais rápido formar o centro vermelho.

Façamos $B^{-1}T^{-1}D_2D_5^2$:

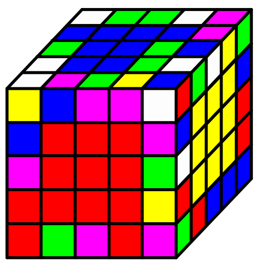


7. Falta-nos formar um bloco de três vermelhos. Façamos $FT^2E_2^2F^2D_2TD_2^2$



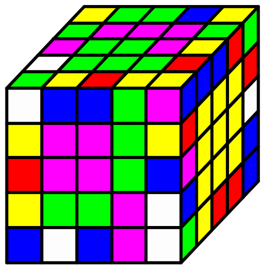
8. Obtivemos o centro vermelho, pelo que devemos resolver um dos centros adjacentes ao vermelho, ou seja, o verde ou o azul, embora seja possível resolver o centro laranja, sem causar grandes problemas.

Façamos $B^{-1}E_2^{-1}TE_2C^{-1}D_2^{-1}C^{-1}D_2$



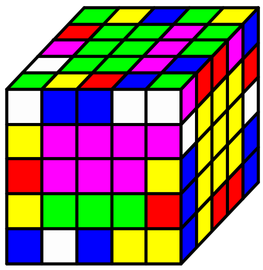
9. Agora, falta-nos completar um terceiro bloco de três azuis.

Façamos $E_2T^{-1}E_2^{-1}D_2TCD_2B^{-1}D_2^2D_5^2$:

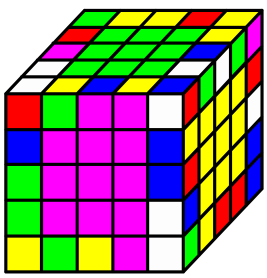
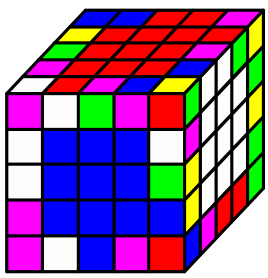


10. Na posição da figura anterior, temos quatro centros resolvidos, faltando resolver os dois últimos centros.

Sequência a utilizar: $CD_2C^{-1}D_2^{-1}$ e obtemos a seguinte posição:



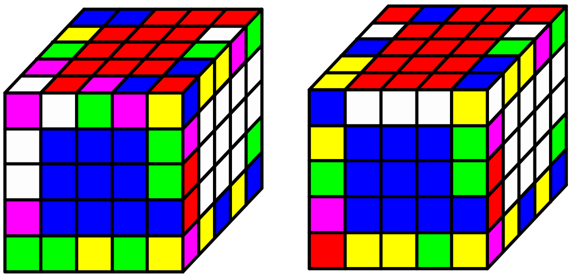
11. Agora, basta-nos trocar o bloco verde com o bloco laranja, para o que fazemos $FE_2^{-1}C^2E_2$:

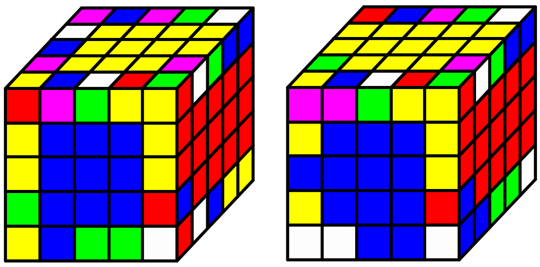
Estão, assim, construídos os seis centros do cubo. Agora, vamos ter que unir as peças de meio, de modo a formarmos as arestas do cubo.

12. Analisando o cubo, vemos que já temos dois pares com o vermelho e o branco alinhados, estando o terceiro par na posição ideal. Na figura anterior, imagem da direita, vemos as três peças (Frente/Esquerda), sendo que a terceira peça tem as cores laranja e amarelo (sendo que esta última não está visível). Partindo da figura da esquerda, fazemos $D_5^{-1}C_5^2$, obtendo-se a posição da direita. Nesta posição, convém colocar a peça central laranja e amarela na posição conveniente (centro de Frente/Baixo). Trata-se da peça que em Direita/Trás, pelo que basta fazer DB^{-1}.

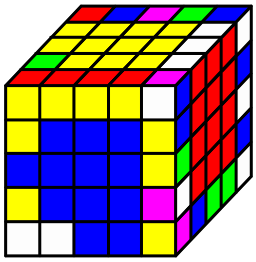
Agora, aplicamos a sequência $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, ficando uma aresta pronta e dois blocos de duas peças alinhadas.



13. Agora, fazemos C^2F_5 e, depois, $E^{-1}B$, obtendo-se as duas posições seguintes:

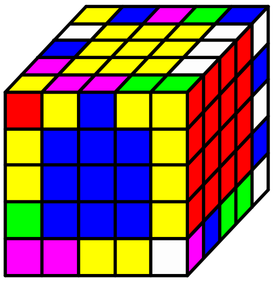


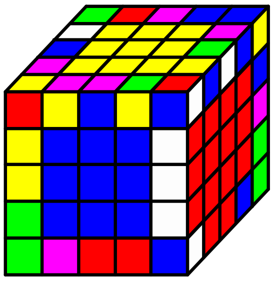
E, agora, basta-nos aplicar a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, após o que obtemos a seguinte posição:



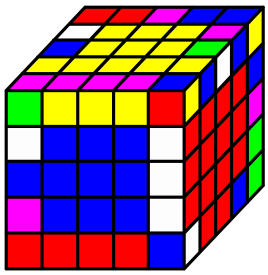
14. Fazendo FE, as três peças com amarelo e laranja ficam bem posicionadas (figura seguinte, esquerda), faltando colocar convenientemente a peça central verde e vermelha.

Segue-se $D^{-1}T^{-1}B^2$. Apresentam-se as duas posições:

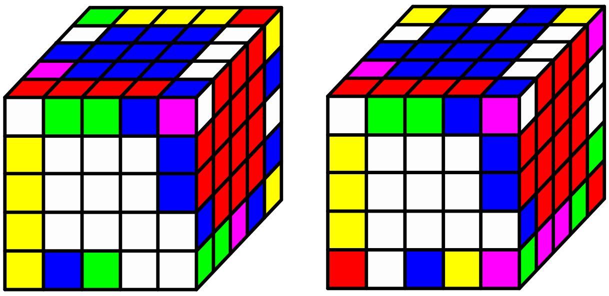




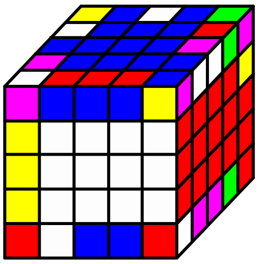
Agora, aplicamos a sequência $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, após o que obtemos a seguinte posição:



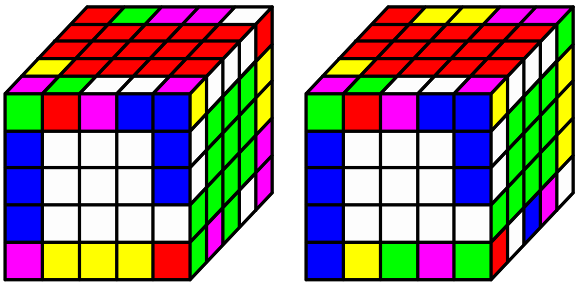
15. Se fizermos D_5, vemos as peças azuis e vermelhas na sua posição ideal, faltando colocar a peça central branca e azul. Eu costumo convencionar que, ao dizer branca e azul, a peça central branca e azul fica com o azul para a frente. Neste caso, basta fazer TB^2, para que a peça fique bem colocada:



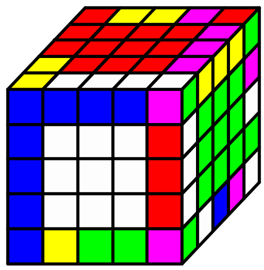
E aplicamos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, obtendo-se:



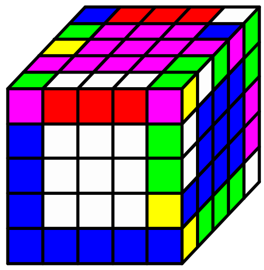
16. Agora, fazemos $D^{-1}F_5^{-1}$ e TB^2, após o que obtemos:



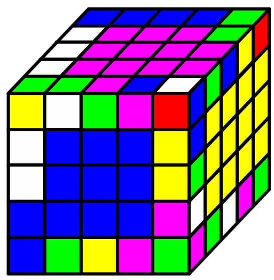
Agora, voltamos a aplicar a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, obtendo-se:



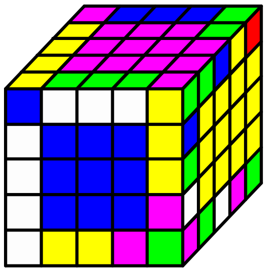
17. Agora, fazemos FF_5^2:



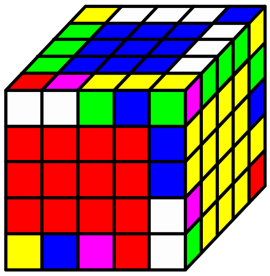
Agora, temos de encontrar a peça central azul e amarela. Trata-se da peça que está em Esquerda/Cima (estamos a ver o amarelo). Então, fazemos $E^{-1}TB^{-1}C_5$.



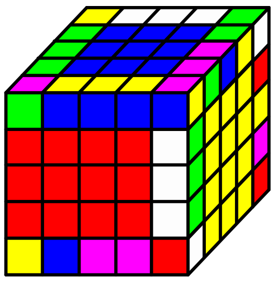
E aplicamos a sequência $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, obtendo-se:



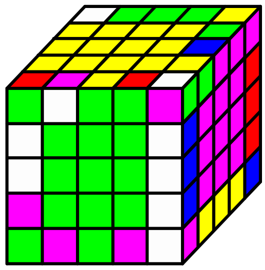
18. Agora, fazemos BFD_5, obtendo-se:



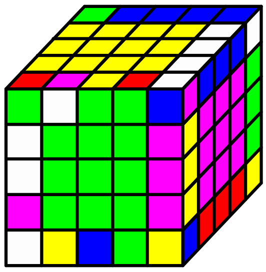
Na figura anterior, temos que a peça central laranja e branca já está no lugar conveniente, pelo que basta aplicar a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$:



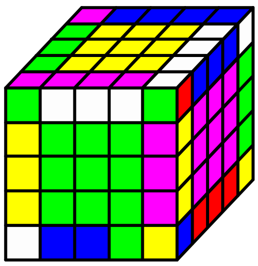
19. Façamos $DD_5F_5^{-1}$:



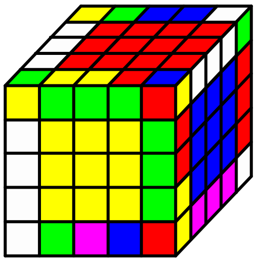
Agora, temos de colocar a peça central laranja e azul na sua posição padrão. Para isso, fazemos $DT^{-1}B^2$.



20. E, agora, aplicamos a sequência $E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$:

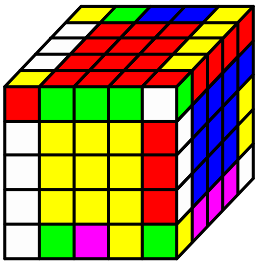


21. Agora, fazemos $CEC_5D_5^{-1}T^{-1}B^2$:



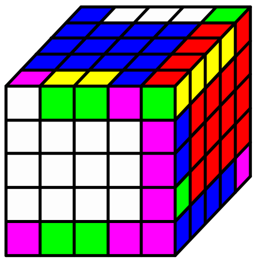
Neste caso, não é possível colocar mais uma peça em posição favorável, pelo que temos de colocar em Frente/Baixo, uma aresta não resolvida.

Agora, aplicamos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$:



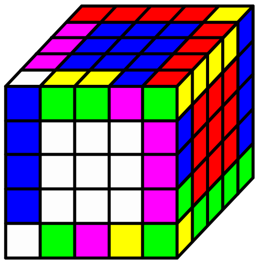
22. Na posição anterior, temos nove meios resolvidos e três meios por resolver (todos visíveis na figura).

Façamos $C_5^2F_5E^{-1}B$.

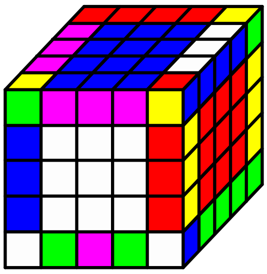


23. Observando com atenção o cubo, verificamos que a peça verde e amarela da camada de baixo, está na posição errada, pelo que é preferível trocar a orientação daquelas três peças em Baixo/Frente.

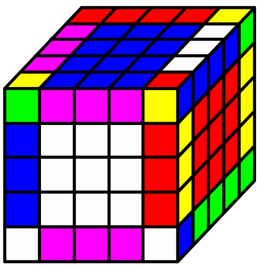
Então, fazemos $B^{-1}ETB^2$:



24. Agora, quando aplicarmos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$, conseguimos mais dois meios resolvidos, ficando uma única aresta por resolver:



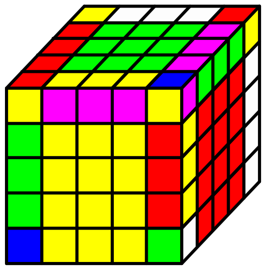
25. Agora, fazemos $D_5D_2^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2D_2^2\ D_5^{-1}$:



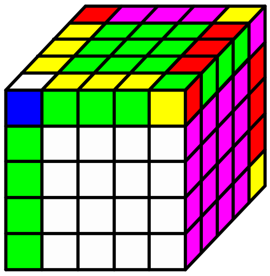
Obsereve-se que aquele D_5^{-1} final, foi executado, apenas para se aproveitar o desenho anterior, evitando mais trabalho...

Agora, temos um cubo 3×3×3 para resolver.

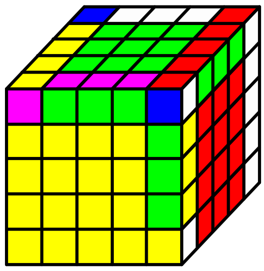
26. Cruz azul: $E^{-1}D^{-1}TCF^{-1}D^{-1}D_5^2$



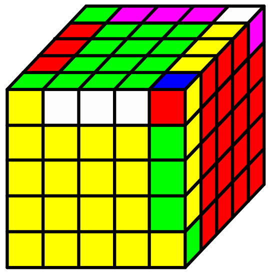
27. Agora, fazemos $CFC^2F^{-1}C^{-1}C_5^2DCD^{-1}$



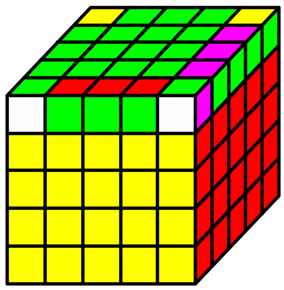
28. Uma vez colocado o primeiro par canto e meio, vamos colocar o segundo. Para isso, fazemos $C_5D^{-1}C^2DC_5C^{-1}E^{-1}CE$



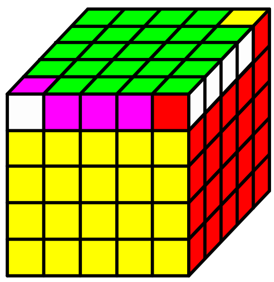
29. Terceiro par: $D^{-1}C^{-1}DC^{-1}C_5^2E^{-1}C^{-1}EC_5^2$



30. Quarto par: $DC^2D^{-1}C^{-1}DCD^{-1}$

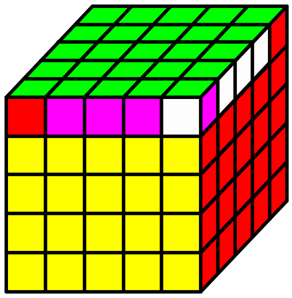


31. Cruz verde: $FCDC^{-1}D^{-1}F^{-1}$



32. Temos dois cantos errados em diagonal, com o verde para a esquerda e o verde para trás (nos cantos errados).

A solução é $(FDTD^{-1}F^{-1})\,(DT^{-1}D^{-1})$:



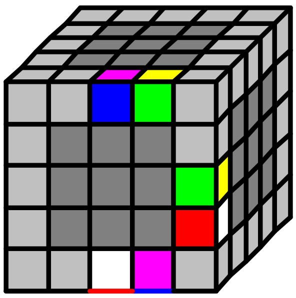
33. Se fizermos C^{-1}, chegamos a uma posição com os dois cantos da frente certos e os dois de trás errados e com os meios da frente e de trás certos e os outros dois errados.

Então, queremos permutar os dois cantos de trás e os dois meios "leste"e "oeste". Uma solução é

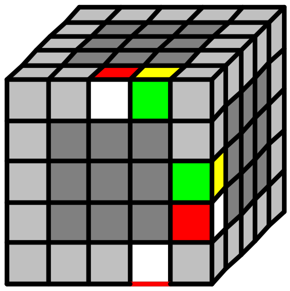
$$\left(DC^{-1}D^{-1}\right)E^{-1}\left(CDC^{-1}\right)\left(ECE^{-1}\right)\left(CD^{-1}C^{-1}\right)EC^2\left(DC^{-1}D^{-1}\right)$$

E o cubo ficou pronto.

Observação



O caso da figura anterior é o mais favorável, pois permite unir três pares de peças. Isso significa que temos duas opções no caso geral. Podemos colocar na posição adequada a peça central de aresta vermelha e branca ou podemos colocar a peça azul e laranja. É claro que é mais fácil procural a peça central, pois só há uma, do que procurar a peça não central, pois há duas e só uma delas serve. A menos que as duas peças já estejam juntas e acertem perfeitamente as cores de umas com as cores das outras. Note-se que a peça azul e laranja da figura anterior, poderia ter as cores invertidas. Por vezes, não conseguimos mais do que uma peça em posição favorável, como na figura seguinte:



Neste caso, não podemos fazer mais nada, a não ser aplicar a fórmula e unir as duas peças com verde e amarelo. É uma situação que ocorre algumas vezes, quando estamos a resolver as arestas.