O cubo de Rubik 6×6×6

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Fevereiro de 2016

[1]egipereira@gmail.com

Conteúdo

Preface

Although this text is tagged as the Abstract in the Front Matter, it will appear in the typeset document as the Preface. Replace this text with your preface.

Depois de ter escrito textos sobre os cubos 3×3×3, 4×4×4 e 5×5×5, resolvi escrever um texto sobre cubos maiores, tendo começado pelo cubo 6×6×6, embora sem possuir um cubo desses. Por isso, as primeiras 25 páginas foram escritas sem que eu pudesse confirmar o que era escrito num cubo real. Aparentemente, tudo seria muito semelhante ao cubo 4×4×4, embora os dois últimos centros parecessem ser mais complicados.

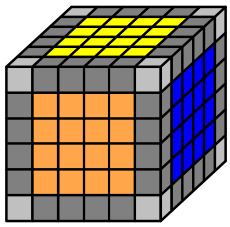
Por essa altura, também comecei a escrever textos sobre os cubos 7×7×7, 8×8×8 e 9×9×9, mesmo sem ter os cubos dessas dimensões. A principal razão de eu ter feito isso prende-se com os "desenhos": eu ia adiantando trabalho, pelo que

O resto do texto, sobre o cubo 6×6×6, foi escrito depois de eu ter conseguido obter o cubo (6×6×6), sendo que houve a necessidade de completar o que havia sido escrito nessas 25 páginas iniciais.

Capítulo 1

Introdução

O cubo mágico 6×6×6 é semelhante aos cubos mágicos 3×3×3, 4×4×4 e 5×5×5, mas tem mais peças, como podemos ver na figura seguinte, onde temos o cubo sem as cores coladas em todos os quadrados que constituem as faces. Apenas temos os centros formados:



Neste caso, temos 36 quadrados (elementares) em cada face. Assim, teremos 36 "adesivos"de cada cor, num total de 216 "adesivos".

No cubo 6×6×6, não temos uma casa central em cada face, pelo que temos que ter um certo cuidado com os centros.

Num cubo 6×6×6, continuamos a ter 8 peças de canto, cada uma com 3 cores, temos 96 peças interiores, cada uma com uma cor, e 48 peças de borda (também chamadas peças de meio), cada uma com 2 cores.

Fazendo os cálculos, temos $8 \times 3 + 96 \times 1 + 48 \times 2 = 216$ adesivos.

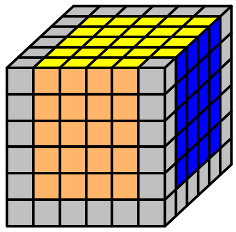
Se o seu cubo se desfizer por algum motivo, não se aborreça demasiado. Desmonte o cubo totalmente e monte-o já resolvido (por camadas).

Primeiro monte o centro branco, depois as peças de meio (com branco), tendo em atenção a ordem das cores) e, por fim os cantos.

Depois, monte a segunda camada e assim por diante.

Passemos à resolução do cubo 6×6×6. Como no caso do cubo 4×4×4, o primeiro objetivo é construir os 6 centros, conforme podemos ver na imagem anterior.

O segundo objetivo é conseguir formar as arestas, como podemos ver com duas arestas da figura seguinte:



Para formar as últimas arestas, precisaremos de algumas das fórmulas que usávamos no cubo 4×4×4, nas chamadas imparidades.

Quando todas as arestas estiverem resolvidas, obteremos um cubo 3×3×3, o qual será resolvido como o cubo 3×3×3 propriamente dito, mas com algumas diferenças.

A fórmula $d^2C^2d^2C^2c^2d^2c^2$ não serve, porque não mantém os centros.

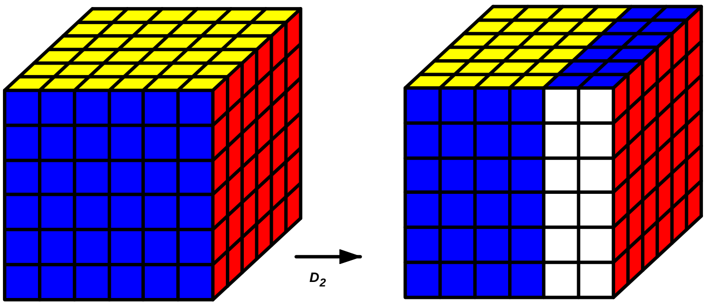
A fórmula $(d^2T^2)\,(C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2)\,(F^2dF^2e^{-1})\,(T^2d^2)$ faz praticamente o mesmo que fazia no cubo 4×4×4, ou seja, troca duas peças da camada de cima, conforme a figura seguinte (a fórmula foi aplicada a um cubo resolvido):

Esta fórmula é importante na resolução das arestas do cubo.

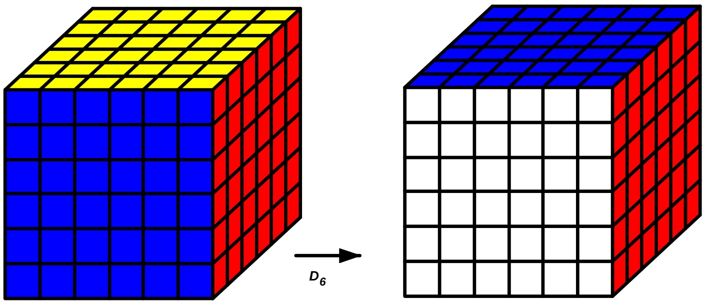
A fórmula $(Bb)\,DF^{-1}CD^{-1}F\,(Bb)^{-1}$ produz o seguinte efeito, quando aplicada a um cubo resolvido:

1.1 Notação

Vejamos algumas noções importantes. Se quisermos rodar as duas camadas exteriores da direita, escreveremos D_2.



Logo, poderemos escrever D, D_2, D_3, D_4, D_5 e D_6. D_6 significa rodar todo o cubo , de maneira semelhante a rodar D.



De maneira semelhante, teremos E, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6, para os movimentos das camadas da esquerda.

Se quisermos rodar no sentido contrário ao do sentido dos ponteiros do relógio, escreveremos, D^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1}, D_4^{-1}, D_5^{-1} e D_6^{-1}, E^{-1} E_2^{-1}, E_3^{-1}, E_4^{-1}, E_5^{-1} e E_6^{-1}.

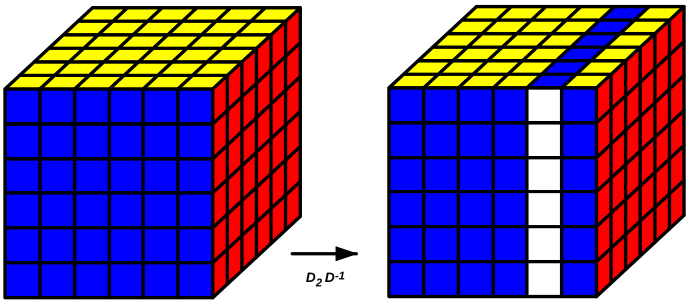
Para as meias voltas, teremos D^2 e D^{-2}, por exemplo. Note-se que o resultado de fazer D^2 e D^{-2} é o mesmo, embora D^2 e D^{-2} tenham significados diferentes. Mas, diremos que $D^2 = D^{-2}$.

De modo semelhante, escreveremos que $D^3 = D^{-1}$, embora D^3 e D^{-1} tenham significados diferentes (na maneira de rodar o cubo).

De maneira semelhante, teremos C, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6. E B, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, F, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, T, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6.

Também escreveremos C_2^2, F_3^{-1}, T_2^2, etc.

Se quisermos rodar a camada interior imediatamente à esquerda da camada da direita, escreveremos D_2D^{-1}. Esta expressão significa que rodamos as duas camadas mais à direita do cubo, após o que trazemos de volta a camada exterior.

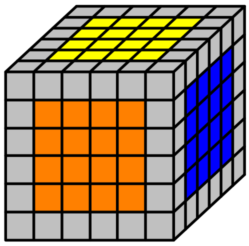


E procedemos de modo análogo para as outras camadas interiores. Temos, assim, uma notação rigorosa e simples para identificar cada movimento feito no cubo, independentemente do número de camadas existentes no mesmo.

Capítulo 2

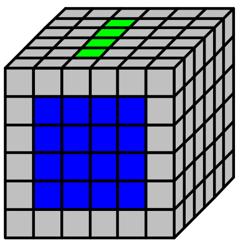
Os Centros

Os centros do cubo 6×6×6 são quadrados 4×4, conforme já vimos:



Para resolver um cubo baralhado, vamos ter que construir todos os centros. Para isso, começamos por uma cor qualquer, unindo as peças, de modo a formarmos um bloco 4×1. Depois, numa outra face do cubo, construimos novo bloco 4×1 que será unido ao primeiro bloco formado. E assim sucessivamente até termos formado o centro 4×4.

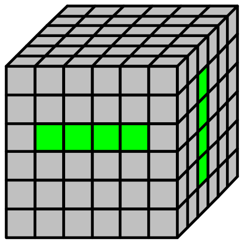
Seguidamente, começamos a formar novo bloco 4×1, com a cor da face oposta à cor do primeiro centro construído. Construído esse primeiro bloco, ele tem de ser colocado na face oposta ao primeiro centro. Para fazer isso, temos de desfazer momentaneamente o primeiro centro. Vejamos o seguinte exemplo:



Para colocarmos o bloco verde na face de trás, rodamos as três camadas da esquerda, colocando o bloco verde na camada de trás, damos meia volta na camada de trás (afastando esse bloco das três camadas da esquerda) e trazemos de volta as três camadas da esquerda.

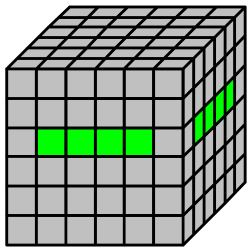
Simbolicamente, teremos $E_3^{-1}T^2E_3$. Seguidamente, coloca-se o centro verde na esquerda (ou na direita) e vamos formando mais blocos de quatro verdes (de tipo 4×1). Sempre que se forma um novo bloco verde, ele tem que ser colocado na face oposta ao centro azul.

Suponhamos que temos o centro azul na face da esquerda e dois blocos verdes como na figura seguinte:

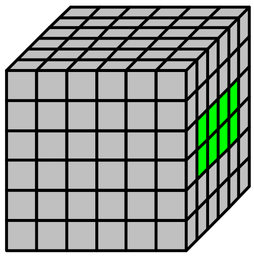


Para juntarmos os dois blocos, temos de rodar a camada da direita, de modo a termos os dois blocos verdes na mesma camada interior (neste caso, a quarta camada, a contar de baixo).

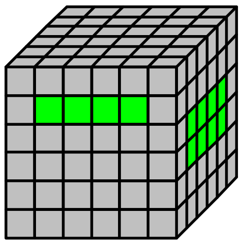
Então, rodamos a camada da direita, no sentido horário, obtendo-se a seguinte posição:



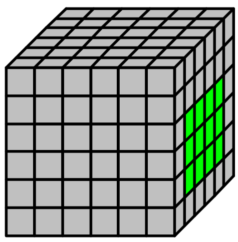
Agora, temos duas alternativas: podemos fazer $C_3^{-1}D^2C_3$ ou podemos optar por $B_3^{-1}F^2B_3$. Em qualquer dos casos, obtemos a posição seguinte:



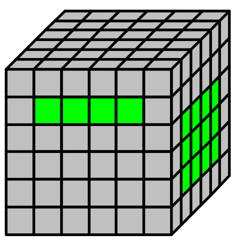
Depois, há que formar novo bloco verde e juntá-lo aos outros dois, procedendo de forma análoga: coloca-se o bloco verde ao lado dos outros dois, dá-se meia volta na direita, e trazemos de volta o bloco azul que saiu do lugar.



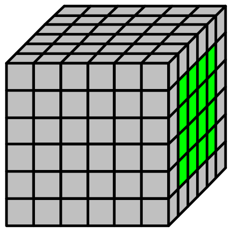
No caso da figura anterior, fazemos $C_2^{-1}D^2C_2$.



Construído o último bloco verde, podemos colocá-lo na camada da frente, deixando-o na horizontal mas não na camada onde ele vai ser colocado.

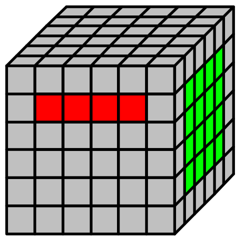


Se o centro azul está na esquerda, temos de dar meia volta na frente, tirando o bloco verde da quinta camada e colocando-o na segunda camada. A sequência total, partindo da posição da figura anterior, é $F^2B_2D^2B_2^{-1}$.

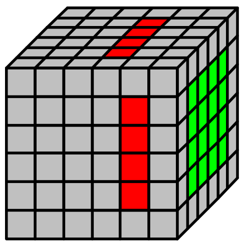


Nada do que escrevemos é novidade para quem sabe resolver o cubo 4×4×4 ou o cubo 5×5×5.

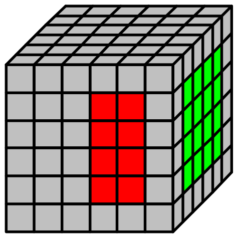
Construídos os dois primeiros centros, deixamos um deles na esquerda e o outro na direita e começamos a formar blocos 4×1 duma terceira cor. A partir daqui, só podemos rodar livremente as camadas interiores paralelas à camada da direita, a camada de cima e a camada de baixo. Assim, não poderemos fazer C_2, por exemplo.



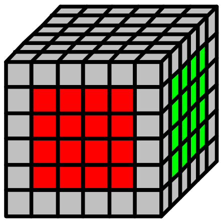
Os blocos de tipo 4×1 são obtidos na posição horizontal (a menos que já estejam prontos, quando se terminam os dois primeiros centros). A primeira coisa a fazer é colocá-los na "vertical":



Na figura anterior, os dois blocos vermelhos estão devidamente posicionados, para serem unidos e continuarmos formar novos blocos.



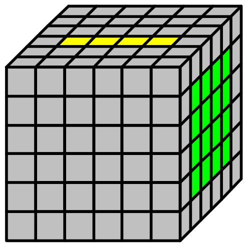
E o processo continua até completarmos o terceiro centro:



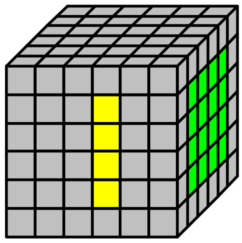
Agora, há que formar o quarto centro. Este quarto centro pode ser de qualquer cor e pode ficar colocado em qualquer uma das três faces que não sejam a da esquerda, a da direita nem a da frente (onde já estão os centros já formados). No entanto, convém formar o centro no seu lugar definitivo e convém que não seja o centro laranja (no exemplo da figura). Repare-se que, na ausência da peça central em cada face, não é tão fácil nos orientarmos como nos cubos de ordem ímpar. De qualquer modo, podemos ver a orientação através do canto verde, vermelho e branco ou do canto verde, vermelho e amarelo (no caso da figura anterior).

Então, vamos formar o centro amarelo e colocá-lo na face de cima (e não na de baixo). Se fosse o centro branco, ele ficaria na face de baixo. Cuidado com os cubos "estranhos", pois há cubos com uma diferente disposição das cores. Por isso, devemos verificar as cores do cubo e quais as suas disposições no cubo, antes de o baralharmos. No entanto, podemos descobrir a orientação das cores, analisando as cores das peças de canto.

Coloquemos o centro vermelho voltado para baixo e suponhamos que temos um primeiro bloco amarelo 4×1 formado:



O bloco amarelo que está na face de cima, tem de ser trazido para a face da frente. Então, rodamos a camada de cima e vamos "buscar"o bloco amarelo: $CD_3C^2D_3^{-1}$.



Os próximos blocos amarelos são formados nas duas faces "livres": a face de cima e a face de trás, sendo conveniente rodar o cubo, deixando essas faces livres em cima e na frente, para podermos ver as peças que falta colocar. No entanto, temos de ter atenção às peças com amarelo que ainda estejam na face de baixo, mas não formando um bloco.

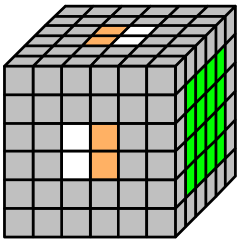
E tudo continua (pacificamente), até formarmos o quarto centro (no caso do exemplo, o caentro amarelo). Os dois últimos centros resolvem-se de maneira diferente e são tratados na secção seguinte.

2.1 Os dois últimos centros

Terminados quatro dos seis centros, a resolução dos dois últimos começa pela construção de dois blocos de tipo 2×2 que formarão os dois pequenos centros das duas últimas faces. A sua formação é idêntica à formação dos dois últimos centros do cubo 4×4×4.

Se os dois blocos 2×2 tiverem as quatro peças duma só cor, não há nada a fazer, se as cores estiverem na face certa, sendo necessário trocar todas as peças, se estiverem no lugar errado. Mas isso é bastante fácil: basta ir buscar duas peças e, depois, ir buscar as outras duas.

Se tivermos dois blocos 2×1 (de cores diferentes) em cada centro (2×2), basta permutar os blocos errados:



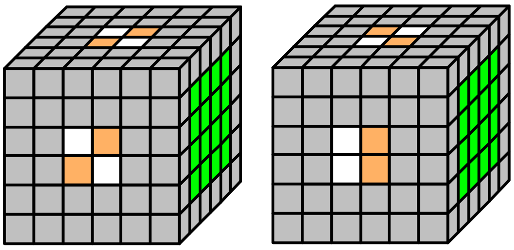
Suponhamos que o centro azul está voltado para a esquerda, o centro amarelo está para baixo (e o centro vermelho está para trás). Então, o centro branco fica voltado para cima.

Então, começamos por dar meia volta na frente, para que possamos ir buscar o bloco laranja que está na face de cima.

Uma solução é $F^2D_3C^2D_3^{-1}$. E os dois blocos 2×2 ficam certos.

Todos os restantes casos, vão acabar por se transformar no caso anterior, eventualmente com os blocos com outra orientação.

Há mais dois casos em que temos duas peças certas em ambos os centros (2×2).



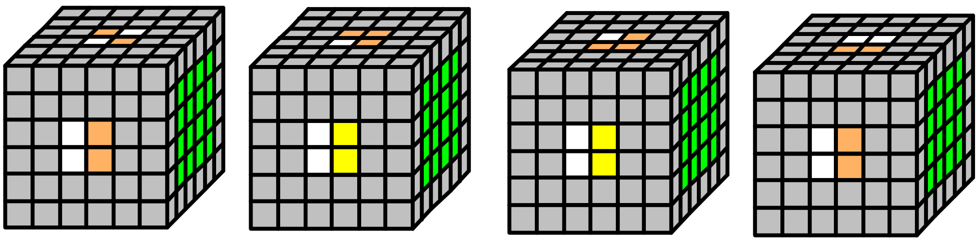
Num dos casos, temos um xadrez duplo e, no outro caso, temos um só xadrez (xadrez simples). Nos casos apresentados na figura anterior, pode haver algumas variações: os dois blocos podem ser horizontais, as cores do xadrez podem combinar ou não, etc.

Analisemos a figura da esquerda. Vamos ter que rodar as três camadas da direita, rodar em cima e, quando regressarmos com as camadas da direita, as cores vão ter que combinar. Por exemplo, quando regressarmos com as peças à face da frente, tem que vir o branco em cima e o laranja em baixo, para que as peças fiquem alinhadas.

E é preciso que as peças da face superior também fiquem alinhadas. Quem sabe resolver o cubo 4×4×4 já sabe a solução.

Mas vamos deixar a solução aqui: $D_3CD_3^{-1}$. Quando fazemos D_3, o centro de cima fica igual. Quando fazemos C, no lado esquerdo do centro da face de cima, fica fica o branco mais próximo da frente e o laranja mais próximo de trás. No lado direito fica ao contrário, pelo que quando trazemos as peças de volta, tudo acerta. Repare-se que as cores dos dois centros combinam perfeitamente (na posição inicial).

Na posição da direita (figura anterior), se levarmos duas peças laranja, nunca vamos conseguir trazer dois brancos. Mas, se trouxermos o bloco laranja de volta e tivermos dois blocos em cima, tudo fica fácil:

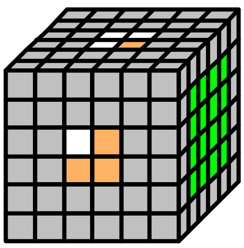


D_3 C D_3^{-1}

Agora, basta fazer C^{-1}, para obtermos uma posição bastante fácil de resolver.

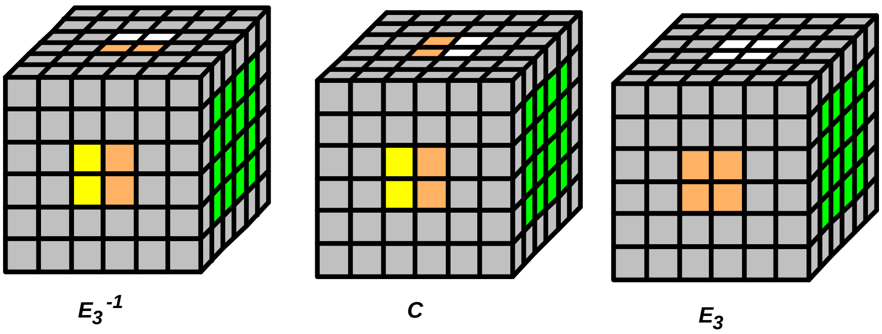
Note-se que há outras maneiras de resolver esta questão, mas todas elas são parecidas. Na posição inicial indicada, no lado esquerdo, temos branco, branco, branco, laranja, enquanto que no lado direito, temos laranja, laranja, laranja, branco, pelo que as peças da mesma cor ficam o mais próximo possível umas das outras (o que torna mais fácil decorar a posição padrão).

Há um último caso, que consiste em termos, em cada centro 2×2, três peças duma cor e uma peça de outra cor. Por agora, não nos interessa quais as cores das peças que estão certas e quais as que estão erradas.

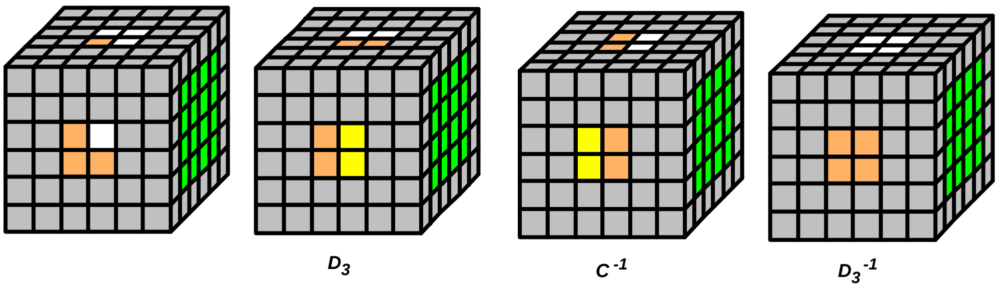


A ideia da resolução é levar as duas peças do lado esquerdo, formando dois blocos em cima e trazer de volta o bloco laranja.

Então, fazemos $E_3^{-1} C E_3$.



Normalmente, fixamos outra posição inicial, para que os movimentos se façam no lado direito:

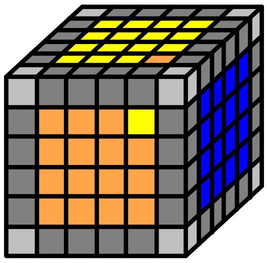


Construídos os dois centros 2×2, há que completá-los, permutando as peças erradas. Como o centro maior é um bloco 4×4 e o centro menor é do tipo 2×2, há um máximo de 12 peças erradas, em cada um dos dois últimos centros. E, na melhor das hipóteses, os dois centros já estarão formados (o que é uma situação raríssima).

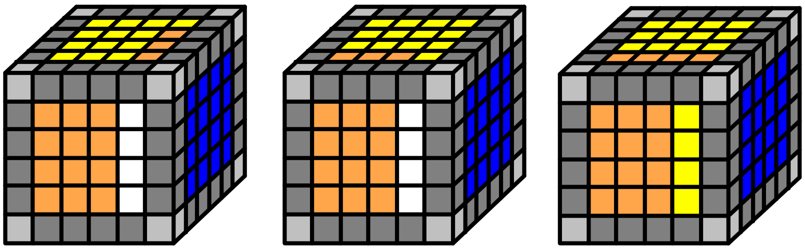
Passemos ao caso usual (os dois centros ainda não estão totalmente formados). Numa primeira fase, tentamos levar o máximo de peças erradas duma face para a outra, trazendo o máximo possível de peças certas. Isso é feito de maneira intuitiva, mas chegamos a uma posição em que não é possível avançar dessa maneira. Para avançarmos, vamos precisar de sequências que fazem permutas específicas.

Vejamos alguns exemplos, começando por ver como se troca uma peça de canto dum centro por outra peça de canto do outro centro. Isso é feito da mesma maneira que se fazia no cubo 5×5×5.

Suponhamos que temos quatro centros resolvidos, só faltando permutar uma peça entre os dois centros errados, como na figura seguinte:



A solução é igual à que era utilizada no cubo 5×5×5: $D_2CD_2^{-1}CD_2C^2D_2^{-1}$. Na figura seguinte apresentamos as imagens dos primeiros três movimentos:



D_2 C D_2^{-1}

Na posição da direita, basta trocar o bloco amarelo com o bloco laranja, fazendo os últimos 4 movimentos da sequência acima apresentada. Note-se que os dois tons de cinzento não têm qualquer significado (apenas aproveitámos uma figura já feita e esqueceu mudar o cinzento escuro).

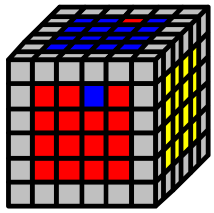
E faremos esta operação, quantas vezes as que forem necessárias (pode haver 0, 1, 2, 3 ou 4 pares de cantos errados).

Note-se que a sequência $D_2CD_2^{-1}CD_2C^2D_2^{-1}$ é muito semelhante ao Sonho (Sune).

Numa segunda fase, trocaremos as peças que estejam erradas e não sejam peças de canto. Nesta fase, o número máximo de peças erradas é de 8 (no centro de cada face).

Como mudar uma peça que não seja do canto? Recorde-se que, no cubo 5×5×5, com 3 movimentos, transformávamos esta questão na permuta de dois cantos (um de cada face). No cubo 6×6×6, já temos que seguir outro caminho.

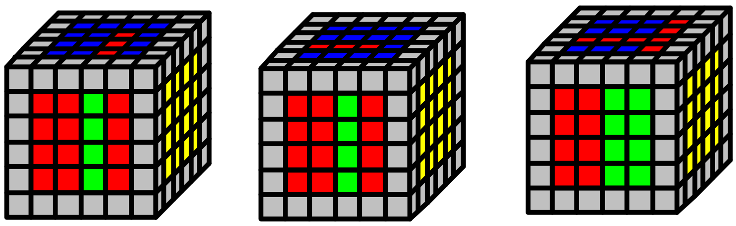
Example 1 *Resolução dos dois últimos centros, com uma peça errada em cada centro, sendo que as duas peças não pertencem às diagonais.*



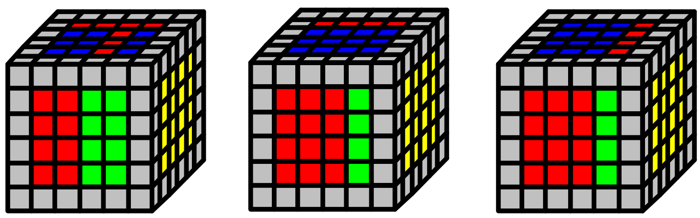
Resolução

Levamos a coluna com 3 vermelhos e um azul para a face superior, sendo que o azul errado vai ocupar a posição onde ele vai ter que ficar ($D_3 D_2^{-1}$).

Depois, giramos a camada de cima (C), após o que levamos a camada mais à direita do centro da face da frente, formando-se um T (assimétrico e tombado). É importante sabermos que levamos a primeira camada da direita (do centro) porque as peças erradas estavam na primeira linha (de cima para baixo, na frente, e de trás para a frente, em cima).



Agora, desfazemos o movimento em cima (C^{-1}), trazemos a camada que estava errada e rodamos em cima (C).



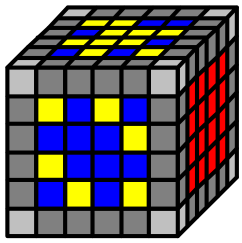
Agora, basta trazer de volta as duas camadas da direita (D_2^{-1}).

Então, a sequência aplicada foi $D_3D_2^{-1}CD_2C^{-1}D_3^{-1}D_2CD_2^{-1}$

Ao fim de algum tempo, estes movimentos tornam-se familiares e a resolução dos dois últimos centros torna-se bastante rápida, pois todas as peças que nos interessam estão bem visíveis.

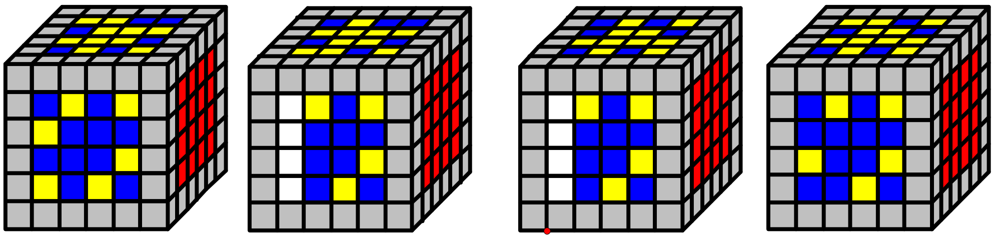
Vamos referir que esta questão tem de ficar bem assimilada, pois é necessária nos cubos "maiores"que o cubo 6×6×6. Note-se, ainda, que no caso dos cubos de ordem ímpar, o próprio centro 3×3 pode ser resolvido com base no processo anterior.

Consideremos o seguinte exemplo, com quatro centros já resolvidos



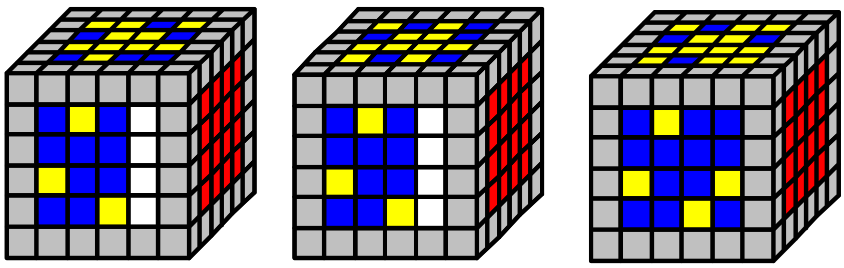
Temos de "levar"seis amarelos para a face de cima. Para isso, podemos rodar as duas camadas da direita, ou da esquerda, após o que podemos mover a camada de cima e trazer tudo de volta. Note-se que não convém rodar as três camadas da direita, pois corremos o risco de desfazer os centros 2×2.

Voltemos à posição da figura anterior. A primeira coisa a fazer é tentar melhorar a posição, levando peças com amarelo para cima e trazendo peças azuis. Se, por exemplo, levarmos duas peças azuis e trouxermos três peças azuis, ficamos com mais uma peça azul na frente. Então, podemos rodar a camada da frente (no sentido horário), de modo que o canto inferior direito do centro da frente fique azul. Depois, rodamos as duas camadas da direita, fazendo com que fiquem três azuis na primeira fila do centro da face de cima. Então podemos rodar a face de cima, no sentido anti-horário, e trazemos as duas camadas de volta. Ou podemos rodar as duas camadas da esquerda, no sentido anti-horário, após termos rodado a camada da frente. Optemos pela segunda hipótese:



F E_2^{-1} C^{-1} E_2

Agora, no centro da frente, temos cinco peças amarelas em vez de seis. E, rodando as duas camadas da direita, conseguimos formar uma fila com três azuis em cima, que podem ser trazidos para a frente:

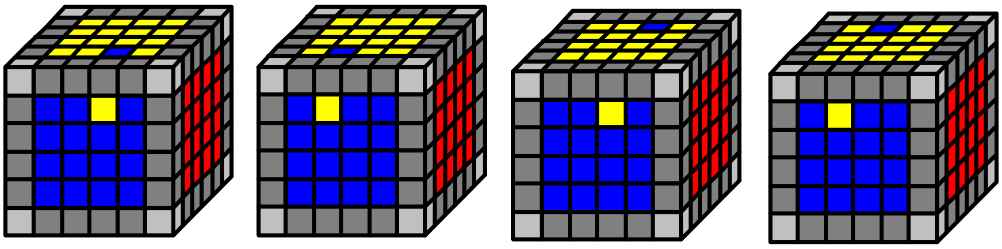


D_2 C^{-1} D_2^{-1}

Agora, temos quatro peças com amarelo, na frente, nenhuma delas de canto (relativamente ao centro 3×3×3). Então, vamos ter que trocar cada peça amarela (da frente) com uma peça azul de cima. E vamos ter que fazer essa operação quatro vezes, para que os seis centros fiquem resolvidos.

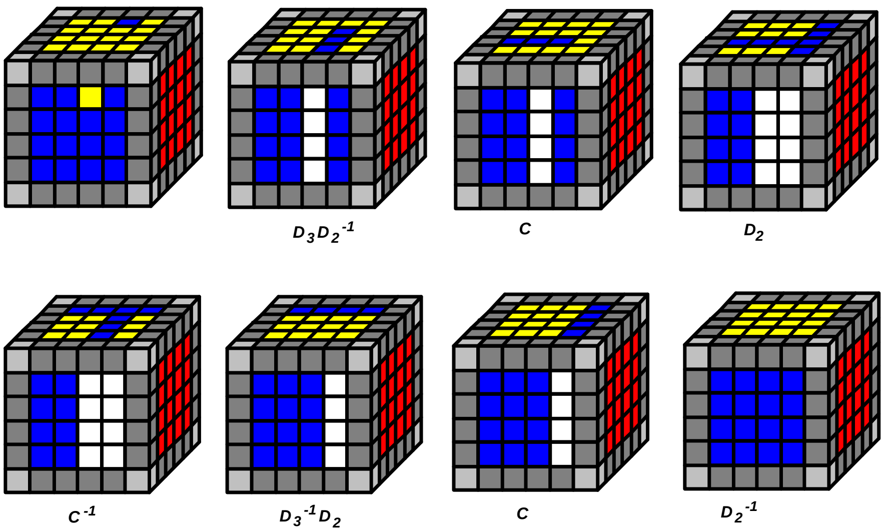
Repare-se que, relativamente ao cubo 5×5×5, a resolução dos últimos dois centros ficou mais complicada, porque, na prática, no cubo 5×5×5, bastava saber permutar os cantos. Além de que poderemos ter mais peças para trocar.

Vejamos como podemos permutar duas peças não pertencentes às diagonais, uma de cada centro.



Na figura anterior, temos (à partida) as várias possibilidades que podem ocorrer, com uma peça errada em cada centro 4×4. Estamos a supor que os outro quatro centros estão certos e que a peça errada não é nenhum dos quatro cantos dos centros. Note-se que as outras posições transformam-se numa destas quatro. Nos dois primeiros casos, as duas peças estão bastante próximas uma da outra, ficando na mesma camada de perfil. No terceiro caso, já estão mais distantes, sendo que uma peça está na quarta camada e a outra está na quinta (como em todos os casos apresentados). No entanto, as duas posições da esquerda não podem ocorrer, pelo que ficamos com duas possibilidades.

Eis uma solução para um dos dois casos possíveis:



Note-se a formação dum T azul e assimétrico. Duma forma informal, poderemos dizer: "leva-se a camada a corrigir, roda em cima, rodam as duas camadas da direita, desfaz-se em cima, traz-se a primeira camada movida, gira em cima e trazemos as duas camadas da direita"

A sequência é representada por $D_3D_2^{-1}CD_2C^{-1}D_3^{-1}D_2CD_2^{-1}$.

Em vez da sequência anterior, podemos usar uma outra muito semelhante:

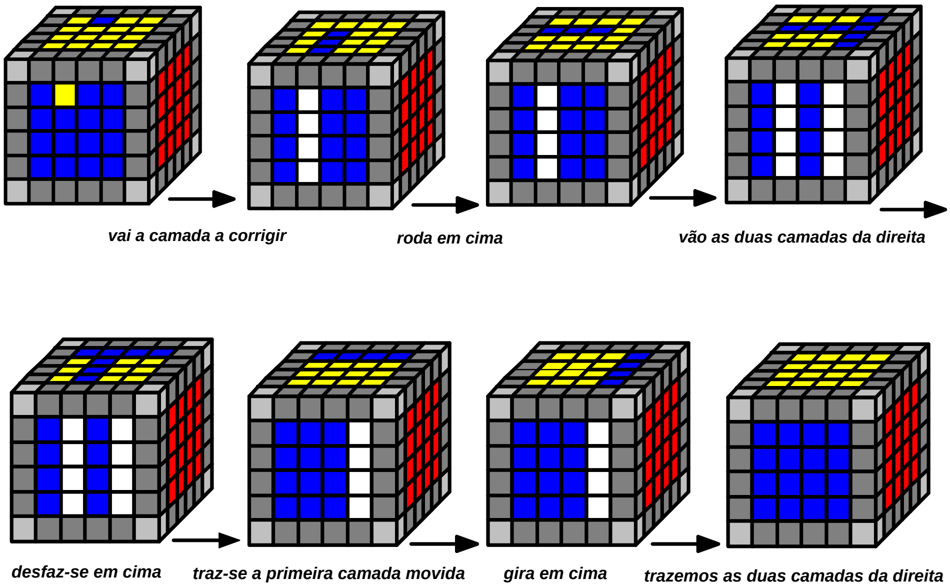
$$D_3D_2^{-1}CD_2D^{-1}C^{-1}D_3^{-1}D_2CD_2^{-1}D$$

Por simetria, temos a solução do caso em que as duas peças ficam na metade esquerda do cubo:

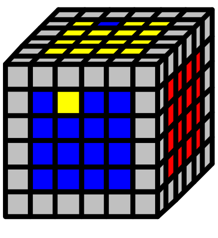
$$E_3^{-1}E_2C^{-1}E_2^{-1}CE_3E_2^{-1}C^{-1}E_2$$

No entanto, podemos tentar uma maneira idêntica à anterior: "vai a camada a corrigir, roda em cima, vão as duas camadas da direita, desfaz-se em cima, traz-se a primeira camada movida, gira em cima e trazemos as duas camadas da direita". Ou seja,

$$D_4D_3^{-1}CD_2C^{-1}D_4^{-1}D_3CD_2^{-1}$$



Vejamos o seguinte caso:



Já sabemos uma solução (por simetria), mas tentemos a mesma solução (sem simetria).

Vai a camada a corrigir: $D_4D_3^{-1}$

Roda em cima: C

Vai a camada da direita (do centro): D_2

Desfaz em cima: C^{-1}

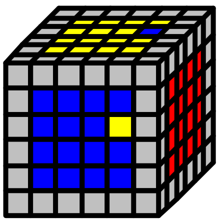
Vem a camada já corrigida: $D_4^{-1}D_3$

Roda em cima: C

Vem a camada da direita (do centro): D_2^{-1}

E as peças trocam, como pretendido.

Existe uma outra solução para o mesmo problema: rodamos em cima e na frente, de modo a colocarmos as duas peças na coluna da direita (dos dois centros):



Note-se que as duas peças estão na segunda linha (de cima para baixo, de trás para a frente).

Levamos a coluna a corrigir: D_2

Roda em cima: C

Vai a segunda camada da direita (do centro): $D_3D_2^{-1}$

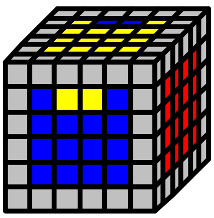
Desfaz em cima: C^{-1}

Vem a camada já corrigida: D_2^{-1}

Roda em cima: C

Vem a segunda camada da direita (do centro): $D_3^{-1}D_2$

Vejamos outra situação:



Neste caso, temos duas peças, em cada face, (não pertencentes às diagonais) para serem permutadas.

Vão as duas camadas a corrigir: $D_4 D_2^{-1}$

Roda em cima: C

Vai a camada da direita (do centro): D_2

Desfaz em cima: C^{-1}

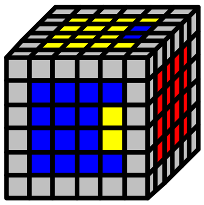
Vêm as duas camadas já corrigidas: $D_4^{-1} D_2$

Roda em cima: C

Vem a camada da direita (do centro): D_2^{-1}

E o problema ficou resolvido.

Também podemos colocar as peças erradas na coluna da direita (dos centros):



Vai a camada a corrigir: D_2

Roda em cima: C

Vão a segunda e terceira colunas do centro: $D_4 D_2^{-1}$

Desfaz em cima: C^{-1}

Vem a camada já corrigida: D_2^{-1}

Roda em cima: C

Voltam as duas colunas que foram para cima: $D_4^{-1} D_2$

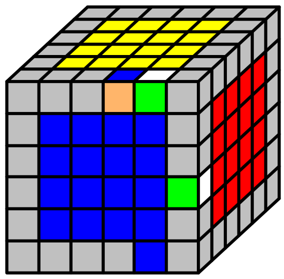
Observação

Esta questão deve ser bem compreendida, pela sua importância, quer no caso do cubo $6 \times 6 \times 6$, quer no caso de cubos maiores.

Capítulo 3

As Arestas

Podemos continuar a usar o mesmo método utilizado para os cubos 4×4×4 e 5×5×5.

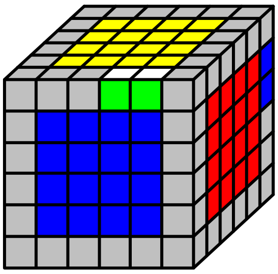


Observemos, com atenção, a figura anterior. A ideia consiste em juntar as duas peças com verde e branco. E já sabemos como é que se faz isso. De passagem, podemos colocar na posição adequada uma peça azul e laranja (esta última cor está voltada para baixo). Deste modo, quando rodarmos as duas camadas da direita, as duas peças com azul e laranja ficam (bem) unidas.

A sequência a aplicar é:

$$D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$$

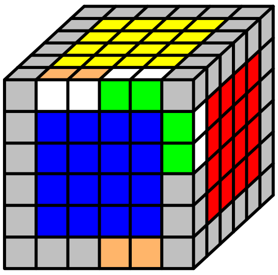
E obtemos a seguinte posição:



E obtivemos dois pares de peças bem unidas, ou, se quisermos, duas meias arestas. E, sempre que possível, procederemos desta maneira, embora possamos chegar a casos em que as peças ficam do lado esquerdo. A sequência a aplicar é semelhante:

$$E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$$

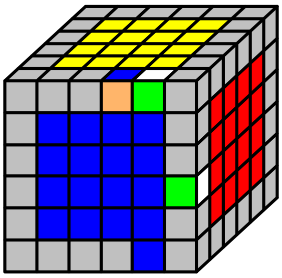
Terminada a obtenção de pares de duas peças bem unidas, há que juntar os pares de peças com as mesmas cores. Mas isso corresponde a fazer o mesmo que fazíamos no caso do cubo 4×4×4. Se tivermos o caso representado na figura seguinte (a cor de baixo das duas peças com laranja da camada de baixo é o branco), aplicamos a sequência $D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$, formando-se duas arestas.



E o processo continua. No entanto, podemos ir resolvendo as arestas às metades, sem a preocupação de as unir. No final, quando todas as metades estiverem formadas, teremos um cubo 4×4×4, já com os centros resolvidos.

Então, formamos as arestas do mesmo modo que no cubo 4×4×4, só que unimos blocos de duas peças. Quando todas as arestas estiverem formadas, temos um cubo 4×4×4 e um cubo 3×3×3 (para além do cubo 6×6×6). Logo, as singularidades que apareciam no cubo 4×4×4 continuarão a surgir no cubo 6×6×6.

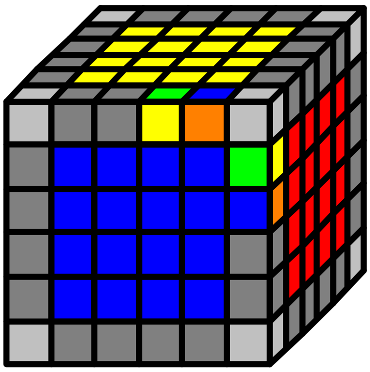
Voltemos à figura seguinte:



Em geral, a peça azul e laranja que está na camada de baixo, não estará nessa posição e temos que movimentá-la de modo a que a mesma fique nessa posição. Isso tem de ser feito com algum cuidado pois há duas peças disponíveis. Mas, só uma delas serve, porque a outra ficará com as cores invertidas. Por isso, temos que analisar bem qual das duas peças serve. De qualquer modo, se a peça ficar com as cores invertidas, basta ir "buscar"a outra peça.

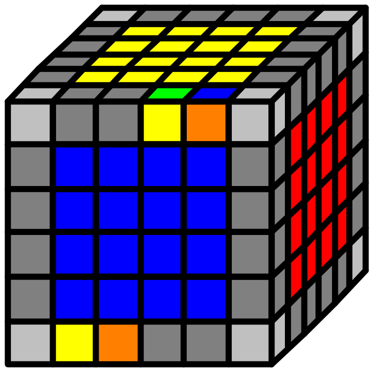
Note-se que podemos seguir outro caminho, juntando as peças com as mesmas cores nas várias arestas. Em certas posições, podemos ter que aplicar as fórmulas que aplicávamos no cubo 4×4×4. Também convém referir que o cubo 6×6×6 pode ser interpretado como um cubo 5×5×5, em que as camadas centrais (M, por exemplo) são formadas por duas camadas. Isso significa que podemos resolver o cubo 6×6×6, depois de formados os centros, alinhando convenientemente as dus peças centrais de cada aresta. No entanto, eu nunca utilizo este caminho. Aliás, nem utilizo a estratégia definida anteriormente, pois torna-se mais cómodo, unir pares de peças (uma da extremidade da aresta e a outra contígua).

Por vezes, acabamos unindo duas peças, mesmo sem que o tivéssemos previsto. No final, podemos ter uma situação curiosa:



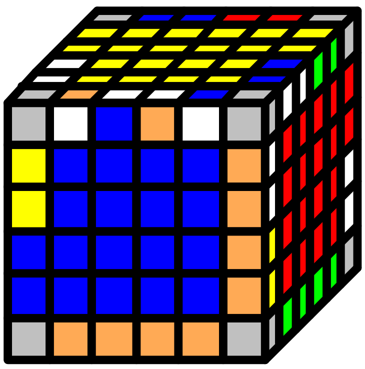
Suponhamos que temos pares devidamente alinhados, em dez arestas, havendo duas arestas, como na figura anterior, em que temos um par alinhado e duas peças que não combinam (em cada aresta).

Então, temos de juntar as quatro peças erradas numa mesma aresta. Para isso, podemos fazer $D^{-1}B^{-1}$, obtendo-se



Agora, podemos juntar as quatro peças erradas numa mesma aresta. E chegaremos a uma posição análoga à do exemplo seguinte.

Example 2 *Certa vez, na resolução das arestas dum cubo* $6 \times 6 \times 6$*, cheguei à seguinte posição:*



Neste exemplo, as quatro arestas da camada inferior já estáo resolvidas, mas isso não é importante. O essencial é que em todas as arestas, temos dois pares bem alinhados, faltando uma única aresta para alinharmos as peças da mesma cor. Neste caso, temos de juntar as duas peças com laranja e branco e as duas peças com azul e branco. Na realidade, as quatro peças não estavam na mesma aresta, mas é fácil e conveniente colocá-las na posição indicada.

Neste caso, convém interpretar o cubo $6 \times 6 \times 6$ como um cubo $5 \times 5 \times 5$, em que as camadas centrais têm duas camadas. Ou seja, queremos manter as duas peças centrais e trocar os extremos da aresta problemática.

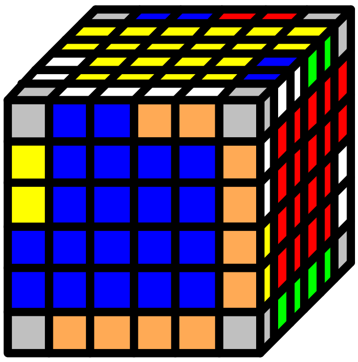
Então, aplicamos a sequência

$$d^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2d^2$$

Ou seja, de forma mais rigorosa

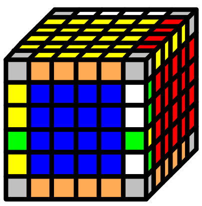
$$D_2^2T^2C^2E_2E^{-1}C^2D_2^{-1}DC^2D_2D^{-1}C^2F^2D_2D^{-1}F^2E_2^{-1}ET^2D_2^2$$

E obtemos a seguinte posição



Agora, temos um cubo $4 \times 4 \times 4$, cubo esse que já sabemos resolver.

Example 3 *Eis outro exemplo da formação das arestas dum cubo* $6 \times 6 \times 6$*:*



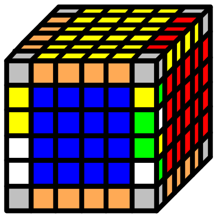
Todas as arestas (e todos os centros) estão resolvidos, menos as duas arestas que estão na camada da frente.

Neste caso, temos que juntar os dois pares bem alinhados, numa aresta e os dois pares mal alinhados, noutra aresta.

Então, fazemos

$$B_3DF^{-1}CD^{-1}FB_3^{-1}$$

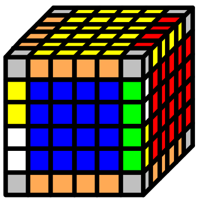
Após a aplicação da sequência anterior, obtemos a posição seguinte:



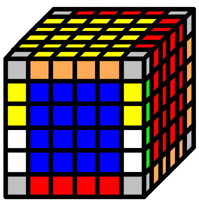
Agora, aplicamos a mesma sequência do exemplo anterior, depois de fazermos F_5^{-1}:

$$D_2^2T^2C^2E_2E^{-1}C^2D_2^{-1}DC^2D_2D^{-1}C^2F^2D_2D^{-1}F^2E_2^{-1}ET^2D_2^2F_5$$

E obtemos a seguinte posição:



E continuamos com $F^{-1}C^{-1}FD^{-1}$



Agora, basta aplicarmos a sequência

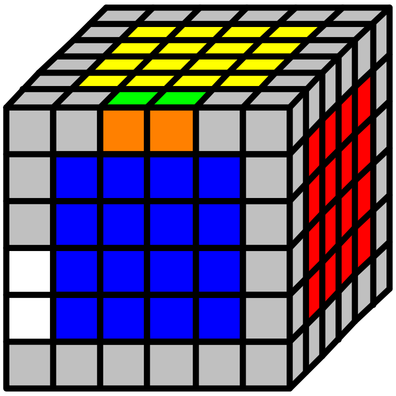
$$B_3DF^{-1}CD^{-1}FB_3^{-1}$$

E todas as arestas ficaram resolvidas, pelo que temos um cubo $4 \times 4 \times 4$, com os centros e as arestas resolvidas.

3.1 O cubo 5×5×5

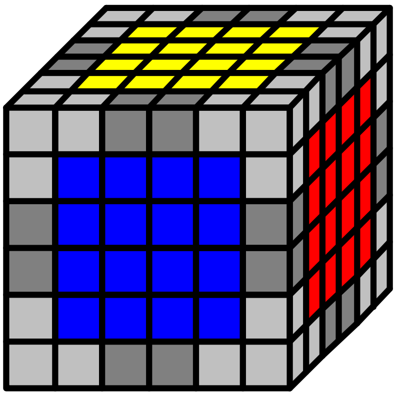
O cubo $6 \times 6 \times 6$ pode ser interpretado como um cubo $5 \times 5 \times 5$, como já vimos, em exemplo anterior.

Então, basta-nos ir "juntando"as duas peças centrais, de cada aresta, de forma a que tenhamos um par com as cores acertadas.



Na figura anterior, temos duas peças de borda, bem alinhadas. O que pretendemos é fazer o mesmo em todas as arestas.

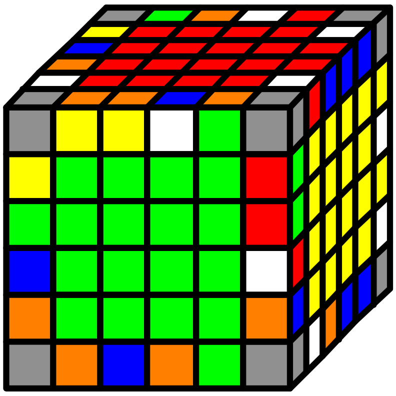
No final, teremos a seguinte situação:



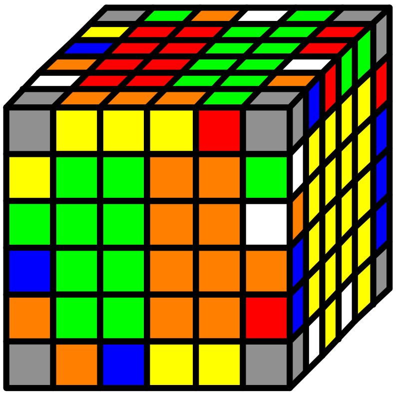
Estamos a supor que as peças a cinzento mais escuro estão devidamente alinhadas.

Chegados à situação anterior, temos um cubo $5 \times 5 \times 5$, pelo que completamos as arestas da mesma forma que fazíamos no cubo $5 \times 5 \times 5$.

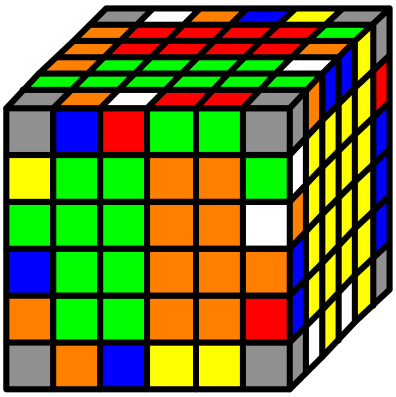
Example 4 *Terminada a resolução dos centros de um cubo* $6 \times 6 \times 6$*, obtivemos a seguinte situação (sem a indicação das cores dos cantos):*



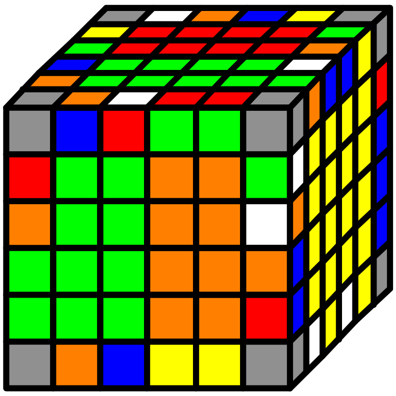
Na figura anterior, podemos ver pares de borda bem unidos: duas peças verdes e vermelhas, duas peças amarelas e cor de laranja e duas peças azuis e vermelhas. Destes três pares, aquele que nos interessa é o par de peças azuis e vermelhas (da camada da direita), uma vez que estamos a considerar o cubo como sendo do tipo $5 \times 5 \times 5$. Se utilizarmos as outras duas peças e transformarmos as arestas em pares de peças desse tipo, teremos um cubo $4 \times 4 \times 4$. O que acabou de ser referido, não significa que "desmanchemos esses pares de peças, antes pelo contrário. Então, podemos colocar a peça amarela e laranja no lugar onde está a peça azul e branca (com o branco voltado para cima). Felizmente, essa peça já está na posição adequada. Então, fazemos D_3:



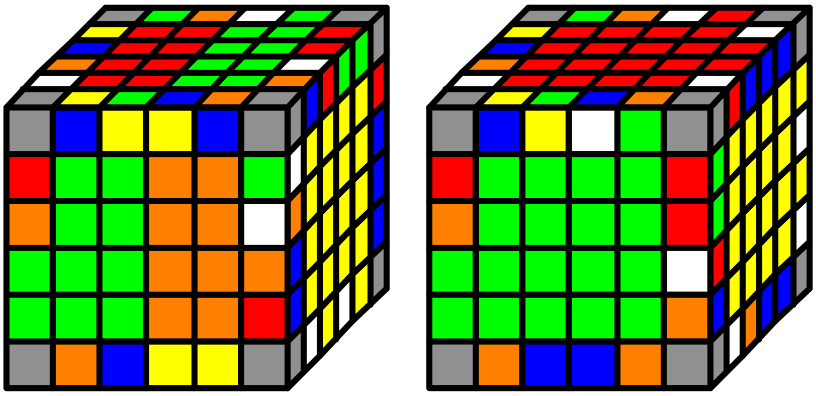
Agora, fazemos C, "levando"as três peças acabadas de unir, para a esquerda (também pode ser para a direita):



Agora, rodamos a camada da esquerda, de modo a colocar duas peças erradas nas duas filas verdes (da face superior), ou seja, podemos fazer E^{-1}:



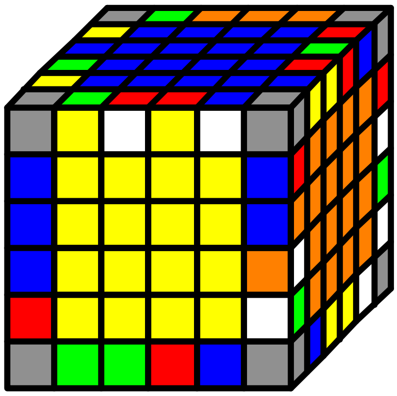
Agora, temos de refazer os centros com a sequência $C^{-1}D_3^{-1}$



Deste modo, continuamos com os centros certos e unimos duas peças de borda.

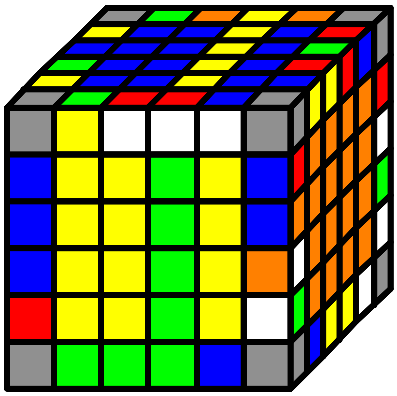
Se fizermos B_3, a peça vermelha e branca acerta com a peça vermelha e branca que está atrás e na quarta camada (da qual só vemos o branco).

Mudando a orientação do cubo, temos:

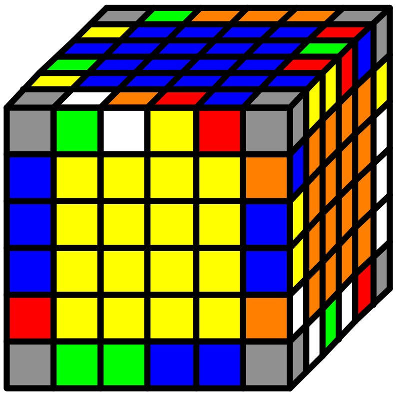


Agora, vamos unir as duas beças vermelhas e brancas. Podemos rodar as três camadas da direita ou podemos fazer isso, trazendo as duas camadas da direita de volta.

Neste caso, embora não traga nenhuma vantagem, vamos optar pela segunda (rodamos as três camadas e trazemos duas):



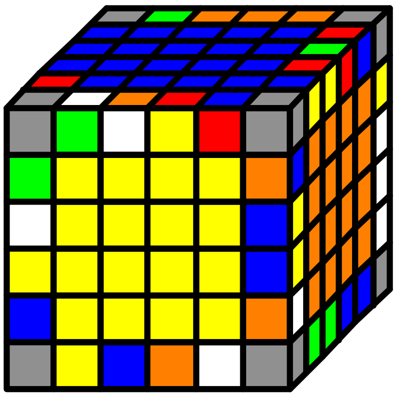
Agora, rodamos a camada de cima (no sentido anti-horário), rodamos a direita, desfazemos o movimento de cima e desfazemos o movimento da camada interior. Para isso, fazemos $C^{-1}DCD_3^{-1}D_2$:



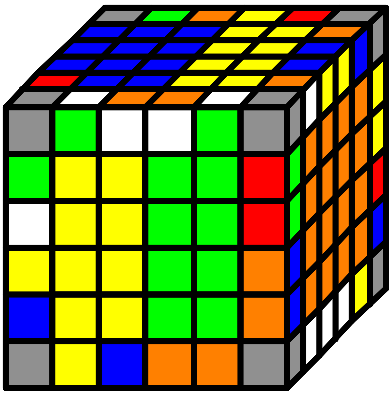
Curiosamente, já temos alguns pares bem unidos como os dois azuis e amarelos da figura (camada da frente), mas temos outros pares bem unidos como os dois verdes e os dois azuis que estão na camada da frente, em baixo. Será que isso não provoca confusão? A resposta é não, pois a qualquer momento, podemos resolver o cubo como se fosse do tipo $4 \times 4 \times 4$.

Para isso, teríamos de juntar uma peça amarela e azul às duas peças com azul e amarelo (da primeira camada). Por essa razão (e por outras), devemos preservar as peças que já se encontram bem alinhadas.

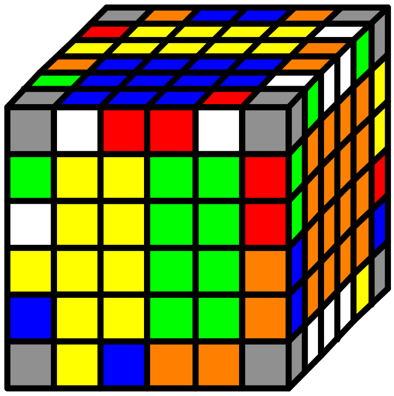
Se fizermos $E^{-1}B$, obtemos a seguinte posição:



Agora, há que ter atenção: se rodarmos as três camadas da direita, unindo as duas peças com laranja e branco, não desfazemos nenhum par formado (em cima/frente) e levamos para trás, uma aresta totalmente errada. Então, podemos rodar a camada de cima, no sentido anti-horário e trazer de volta a camada da direita, após o que refazmos os centros. O único problema está em fazer os desenhos de tudo isso! Façamos D_3C^{-1}

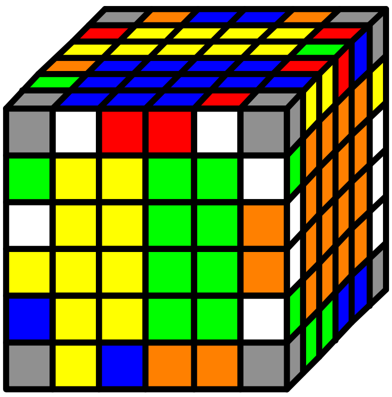


D_3

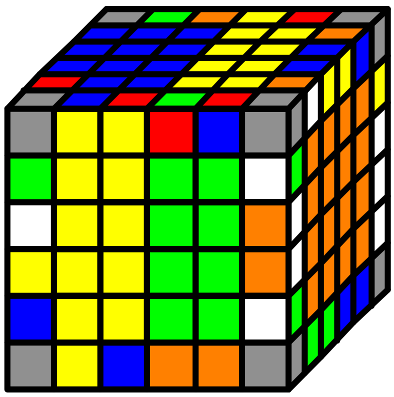


C^{-1}

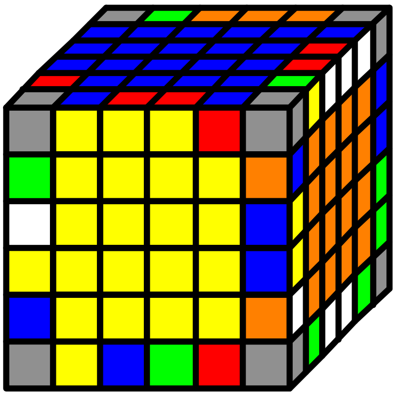
E seguimos com $D^{-1}CD_3^{-1}$.



D^{-1}



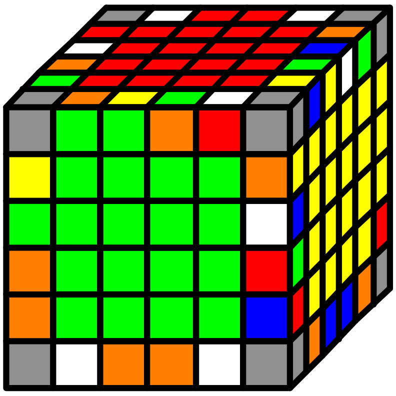
C



D_3^{-1}

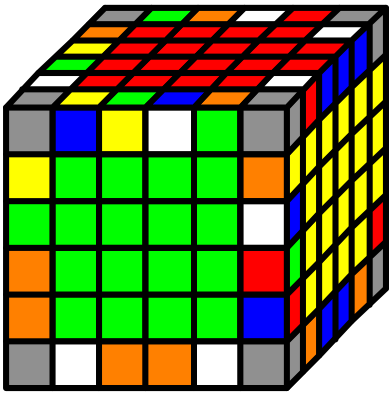
Na figura anterior, podemos ver três pares errados, mas há mais. Na realidade, há seis pares errados, pelo que estamos a meio caminho da formação de pares centrais, uma vez que há doze arestas.

Façamos D_3F_3:

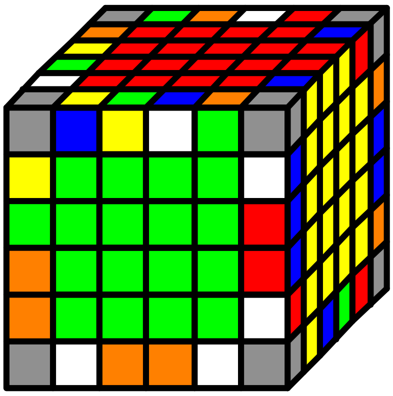


D_3F_3

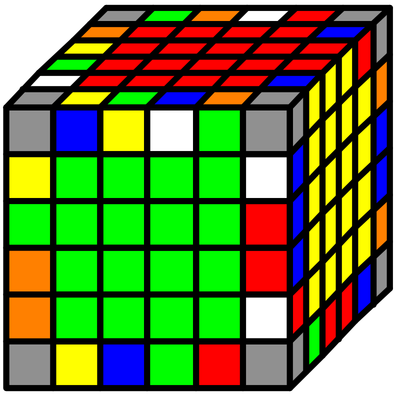
Na figura anterior, vemos cinco das seis arestas que têm pares centrais errados. Podemos prosseguir, com $CD^{-1}B^{-1}$



C

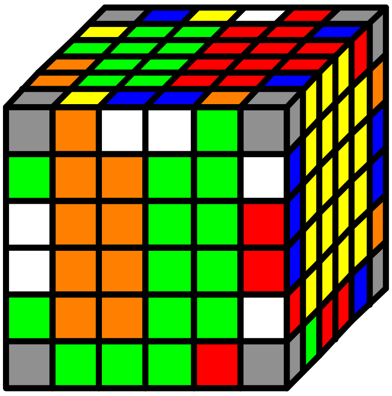


D^{-1}

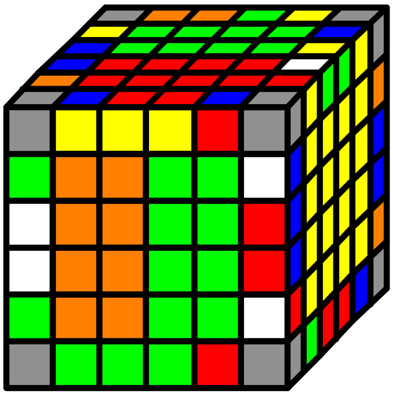


B^{-1}

Neste último caso, vamos ter que rodar as camadas da esquerda, mas isso não deve provocar confusão nenhuma. Note-se que todas as arestas da direita têm os pares centrais bem alinhados, pelo que temos de unir as duas peças azuis e brancas e levá-las para a esquerda. Então, fazemos $E_3^{-1}C$

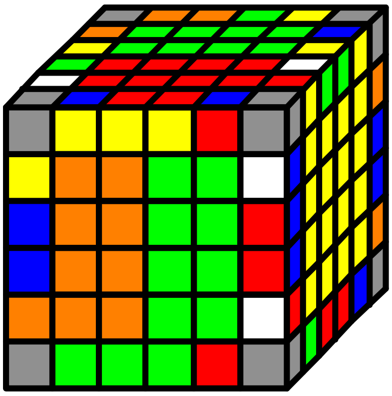


E_3^{-1}

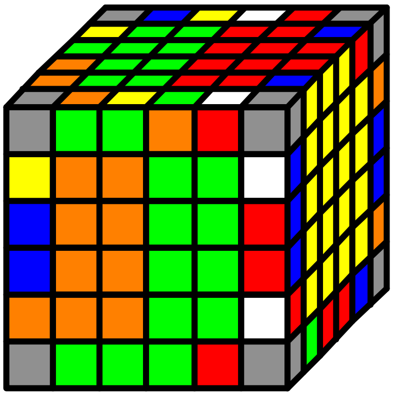


C

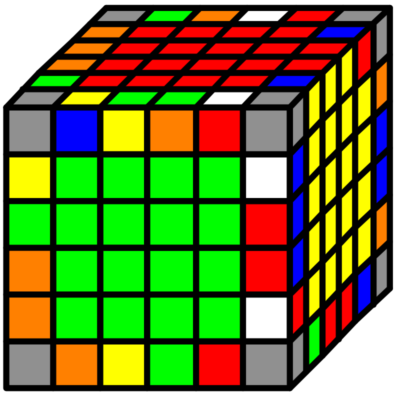
E seguimos com $EC^{-1}E_3$



E

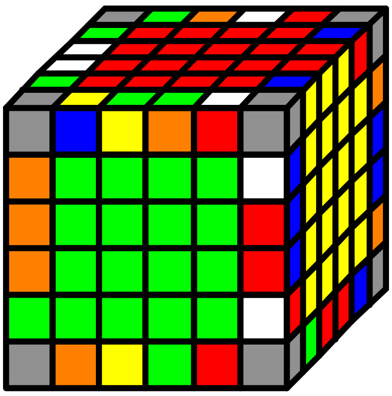


C^{-1}

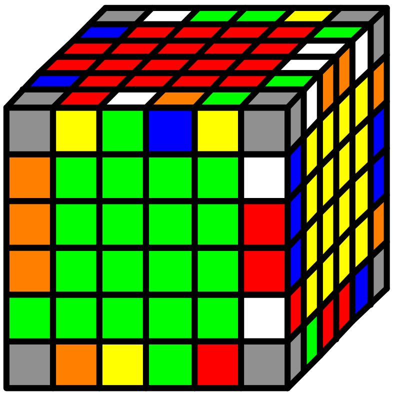


E_3

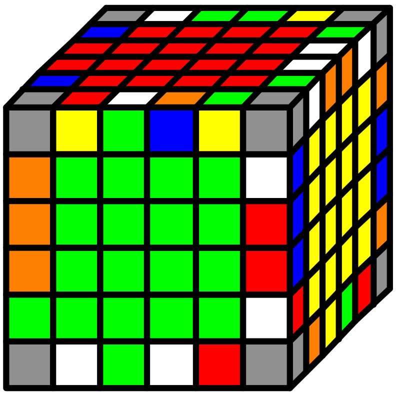
E faltam cinco pares. Podemos seguir com EC^2B



E



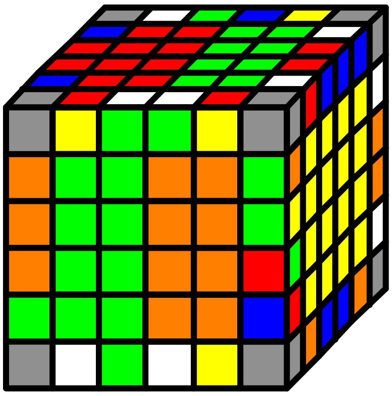
C^2



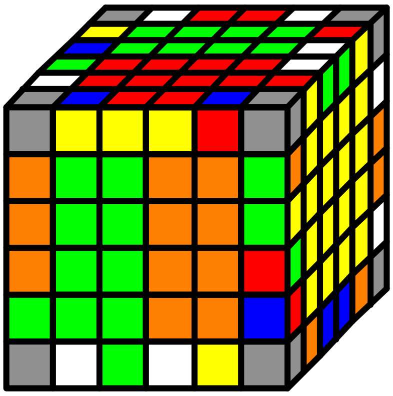
B

Agora, podemos juntar os dois meios centrais verdes e brancos, desde que haja um par central errado, em posição conveniente.

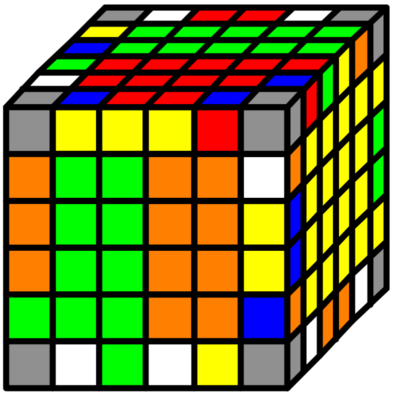
Neste caso, temos um par errado, na camada da direita, em baixo. Então seguimos com $D_3C^{-1}DCD_3^{-1}$



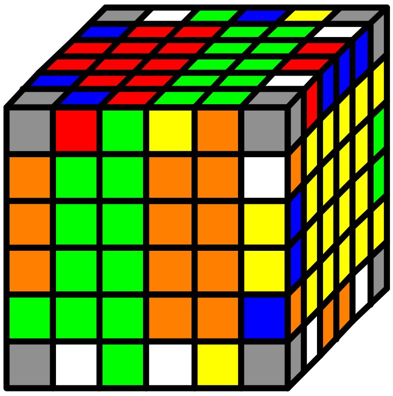
D_3



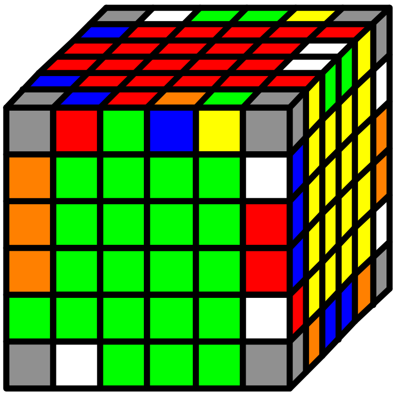
C^{-1}



D



C

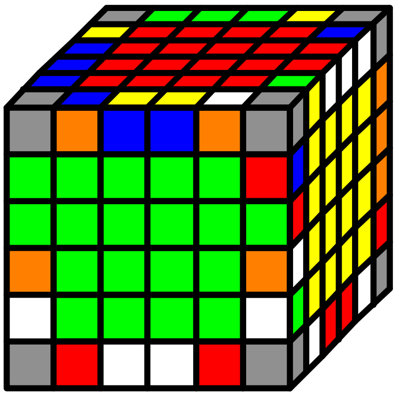


D_3^{-1}

E ainda faltam quatro pares.

O processo continua, até termos dois pares de meios mal alinhados ou ficarem todos os pares bem alinhados.

Vejamos um exemplo em que temos só dois pares por alinhar:

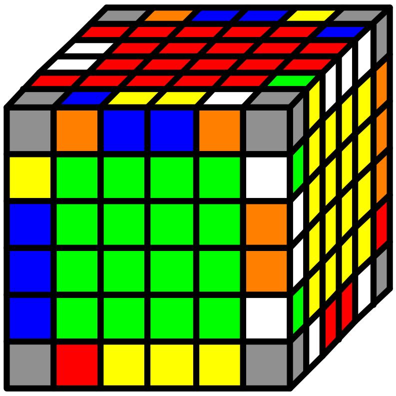


A situação resolve-se, utilizando uma das sequências que vem da resolução do cubo $4 \times 4 \times 4$.

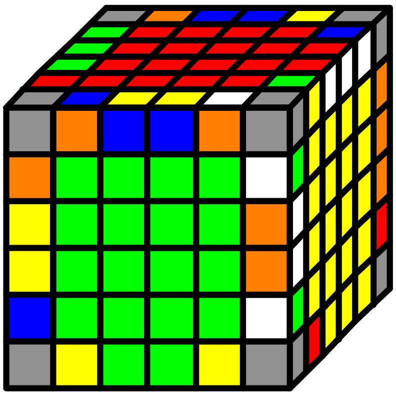
$$B_3DF^{-1}CD^{-1}FB_3^{-1}$$

O cubo obtido pode ser interpretado como um cubo $5 \times 5 \times 5$, onde as camadas centrais são mais largas.

Vejamos um exemplo, em que as duas peças de todas arestas estão bem alinhadas:



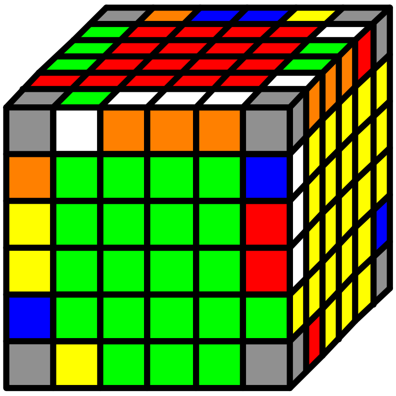
Convém ter o "meio"verde e brancoem Baixo/Frente, com o verde voltado para a Frente. No caso concreto, podemos fazer E^2B, obtendo-se a posição seguinte:



Para conseguirmos um bloco de três peças brancas e cor de laranja, fazemos

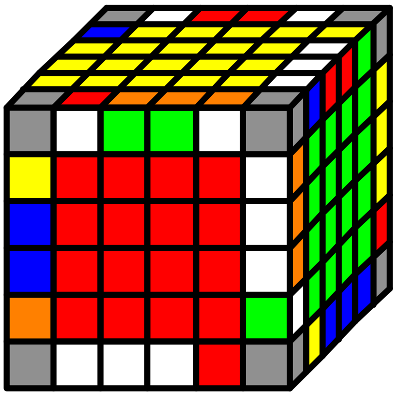
$$D_2 F D^{-1} F^{-1} D_2^{-1}$$

E obtemos a seguinte posição:



E a quarta peça laranja e branca já está bem colocada, para o próximo passo, bastanto reorientar o cubo, deixando o centro amarelo, em cima, o centro vermelho, na frente, e o centro verde na direita.

Depois, há que colocar o meio verde e branco na posição adequada.



Agora, aplicamos a sequência $D_2FD^{-1}F^{-1}D_2^{-1}$. E seguiremos, como no caso do cubo $5 \times 5 \times 5$. No final, pode acontecer que tenhamos uma só aresta por resolver ou duas arestas. E podemos ter que aplicar as mesmas sequências do caso do cubo $4 \times 4 \times 4$. Incluindo aquela em que, na resolução do cubo $3 \times 3 \times 3$, temos uma ou três peças na Cruz da camada de Cima.

Observação

Quando eu resolvo o cubo $6 \times 6 \times 6$, não costumo seguir nenhuma estratégia, em particular. Começo por formar algumas arestas e, com o decorrer da resolução, acabam por aparecer pares de peças bem alinhadas. No fim, há que juntar blocos e resolver alguns dos problemas usuais. Não existem novos algoritmos, pelo que a resolução é intuitiva. Eu nunca resolvi um cubo $8 \times 8 \times 8$, mas estou convencido que sei resolvê-lo. E o mesmo para os cubos $10 \times 10 \times 10$, $11 \times 11 \times 11$ e superiores.