O cubo de Rubik 9×9×9

Egídio Gonçalves Pereira[1]

Março de 2016

[1] egipereira@gmail.com

Conteúdo

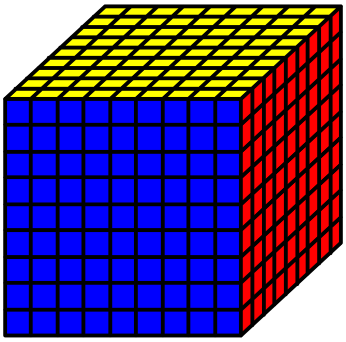
Preface

Although this text is tagged as the Abstract in the Front Matter, it will appear in the typeset document as the Preface. Replace this text with your preface.

Capítulo 1

Introdução

O cubo mágico 9×9×9 é semelhante aos cubos mágicos 3×3×3, 5×5×5 e 7×7×7, mas tem mais peças, como podemos ver na figura seguinte:

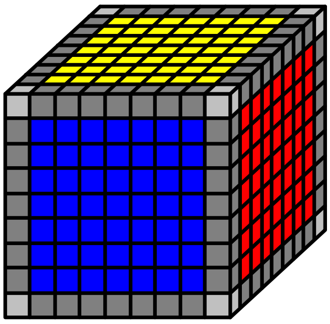


Neste caso, temos 81 quadrados (elementares) em cada face. Assim, teremos 81 "adesivos"de cada cor, num total de 486 "adesivos".

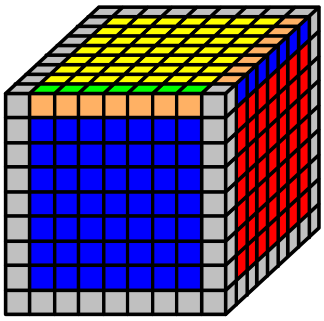
No cubo 9×9×9, temos uma casa central em cada face, pelo que cada centro indica a cor da respetiva face.

Num cubo 9×9×9, continuamos a ter 8 peças de canto, cada uma com 3 cores, temos 294 peças interiores, cada uma com uma cor, e 84 peças de borda (também chamadas peças de meio), cada uma com 2 cores. Fazendo os cálculos, temos $8 \times 3 + 294 \times 1 + 84 \times 2 = 486$ adesivos (o que está de acordo com $81 \times 6 = 486$).

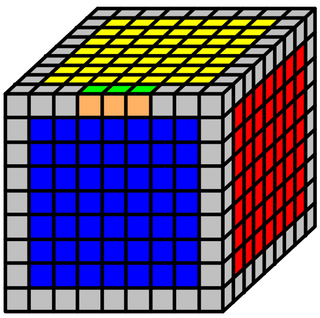
Passemos à resolução do cubo 9×9×9. Como no caso dos cubo 5×5×5 e 7×7×7, o primeiro objetivo é construir os 6 centros, utilizando a casa central de cada face como refrência, conforme podemos ver na imagem seguinte:



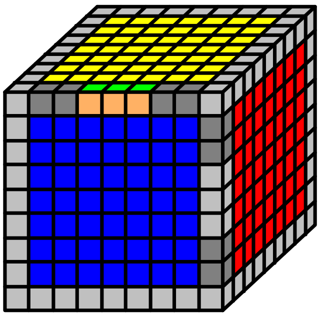
O segundo objetivo é conseguir formar as arestas, como podemos ver com duas arestas da figura seguinte:



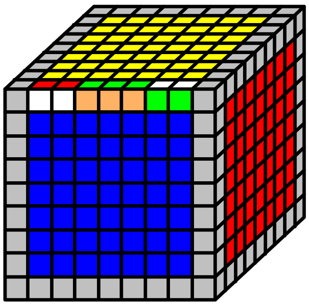
Para a formação das arestas, poderemos começar por formar blocos centrais de tipo 3×1, como os da figura seguinte:



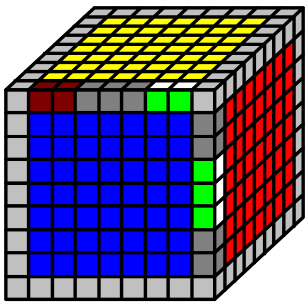
Eventualmente, poderemos ir formando em simultâneo, blocos do tipo 2×1 (que fiquem nos extremos das arestas).



E continuaremos a juntar peças das arestas até chegarmos à situação em que todas as arestas têm 3 blocos resolvidos, como a aresta da figura seguinte:

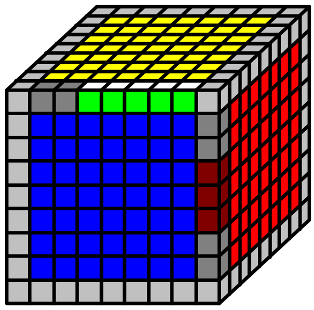


Por fim, há que juntar os 3 blocos, como fazíamos no cubo 5×5×5, só que as várias camadas têm espessuras diferentes.

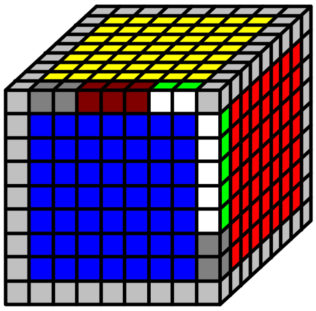


Na posição anterior, pretendemos colocar o bloco vertical verde e branco junto do outro bloco verde e branco, formando um bloco de 5 peças alinhadas.

Isso faz-se com a sequência $D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$. E ficaremos com a seguinte posição:

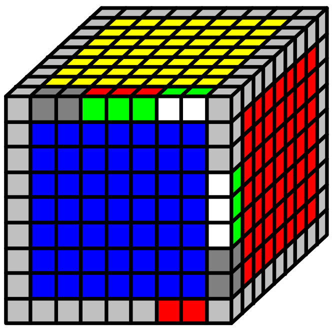


E seguir-se-á a junção do outro bloco verde e branco. Para fazermos isso, teremos de obter uma posição favorável, como por exemplo, a seguinte:



Agora, fazemos $D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$, ficando a aresta verde e branca pronta. E o processo continua.

Mas, como já sabemos, podemos ir colocando dois pares de blocos de cada vez, tal qual fazíamos nos cubos $4{\times}4{\times}4$ e $5{\times}5{\times}5$. Uma das maneiras é a partir da seguinte posição:



Como sabemos, a sequência a aplicar é $D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$, formando-se um bloco de 5 peças verdes e brancas e um bloco de 5 peças verdes e vermelhas. Depois, completa-se uma das duas arestas que já têm 5 peças.

Outra possibilidade consiste em formar dois blocos de duas peças em cada aresta com as cores alinhadas e deixar as três peças centrais para o final. Na colocação final das peças centrais poderemos utilizar o mesmo processo que é usado no método de Ortega (para quem conheça esse método).

Resolvidas as 12 arestas, obtemos um cubo 3×3×3, pelo que passamos à sua resolução, pelo método mais adequado a cada pessoa. Convém referir que poderemos ter que inverter as cores do bloco central da última aresta, tal qual acontecia no cubo 5×5×5.

Também pode acontecer que as três peças centrais tenham as mesmas cores, mas estejam mal alinhadas, isto é a peça central da aresta pode ter as cores ao contrário das outras duas. Nesse caso, é como se a camada "d"tivesse 3 camadas interiores.

Note-se que, para formar as últimas arestas, precisaremos de algumas das fórmulas que usávamos no cubo 4×4×4, nas chamadas paridades.

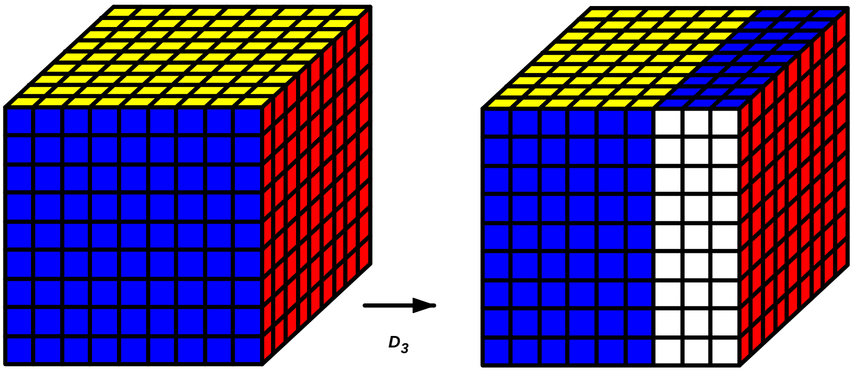
1.1 Notação

Neste texto, usamos uma notação muito diferente da habitual, por duas razões.

A primeira razão consiste tem a ver com a Língua em que escrevemos: o Português. Por isso, utilizamos as iniciais das palavras portuguesas e não das palavras inglesas. Por isso, utilizaremos as letras **B** (Baixo), **C** (Cima), **D** (Direita), **E** (Esquerda), **F** (Frente) e **T** (Trás). Ainda pensei em utilizar A (de Atrás), mas desisti. A vantagem do A seria termos as primeiras 6 letras do alfabeto.

A segunda razão tem a ver com visibilidade e rigor. Não acho muito interessante (para a vista) escrever D'. Por isso, preferi usar uma notação mais "matemática". Ou seja, em vez de D', optei por D^{-1}. E, em vez de D2, optei por D^2. E poderemos escrever D^3 ou D^{-2}. Esta notação tem uma vantagem suplementar: permite-nos descrever a rotação de camadas adjacentes em simultâneo, utilizando um índice.

Assim, se quisermos rodar as três camadas exteriores da direita, escreveremos D_3.



Também poderemos escrever D, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 e D_9. D_9 significa rodar todo o cubo, de maneira semelhante a rodar D.

De maneira semelhante, teremos E, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8 e E_9, para os movimentos das camadas da esquerda.

Se quisermos rodar no sentido contrário ao do sentido dos ponteiros do relógio, escreveremos, D^{-1}, D_2^{-1}, D_3^{-1}, D_4^{-1}, D_5^{-1}, D_6^{-1}, D_7^{-1}, D_8^{-1} e D_9^{-1}, E^{-1} E_2^{-1}, E_3^{-1}, E_4^{-1}, E_5^{-1}, E_6^{-1}, E_7^{-1}, E_8^{-1} e E_9^{-1}.

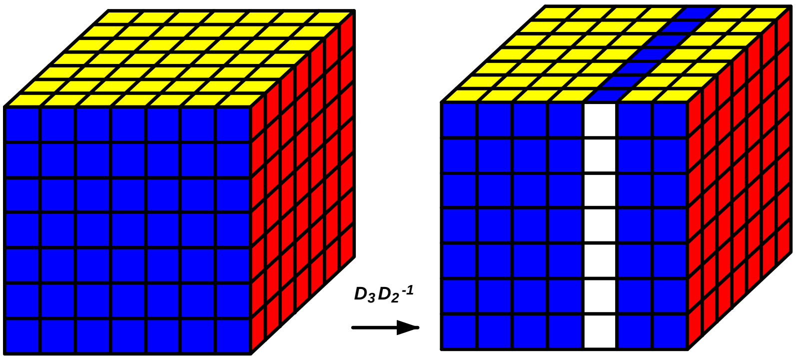
Para as meias voltas, teremos D^2 e D^{-2}, por exemplo. Note-se que o resultado de fazer D^2 e D^{-2} é o mesmo, embora D^2 e D^{-2} tenham significados diferentes. Mas, diremos que $D^2 = D^{-2}$.

De modo semelhante, escreveremos que $D^3 = D^{-1}$, embora D^3 e D^{-1} tenham significados diferentes (na maneira de rodar o cubo).

De maneira semelhante, teremos C, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 C_7, C_8 e C_9. E B, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, F, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9 T, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 e T_9.

Também escreveremos C_2^2, F_3^{-1}, T_2^2, etc.

Se quisermos rodar a terceira camada interior a contar da direita, escreveremos $D_3D_2^{-1}$. Esta expressão significa que rodamos as três camadas mais à direita do cubo, após o que trazemos de volta as duas camadas mais à direita.



E procedemos de modo análogo para as outras camadas interiores. Temos, assim, uma notação rigorosa e simples para identificar cada movimento feito no cubo, independentemente do número de camadas existentes no mesmo.

Vejamos uma questão curiosa: o que é a camada M, num cubo 9×9×9? A resposta vai depender do contexto. Se estivermos a pensar no cubo 9×9×9, em sentido estrito, trata-se da 5^a camada paralela à face da direita (e da esquerda). Se estivermos a pensar no cubo 3×3×3, com os centros de tipo 7×7, já se trata das 7 camadas compreendidas entre a camada da direita e a camada da esquerda.

Note-se que um cubo 9×9×9 também pode ser considerado um cubo 7×7×7 e 5×5×5. É evidente (julgo que para toda a gente) que um cubo de ordem ímpar não pode ser considerado um cubo de ordem par, por causa dos centros das faces. Já um cubo de ordem par pode ser considerado um cubo de ordem ímpar (em determinadas circunstâncias). Aliás, é isso que pretendemos, quando, por exemplo, resolvemos um cubo 4×4×4 ou 6×6×6: transformá-lo num cubo 3×3×3.

Convém realçar que, para as sequências de movimentos, não seguimos a convenção habitual em Matemática. Assim, quando escrevemos DCF, queremos que se rode primeiro a camada D, depois a camada C e, por fim a camada F. Na Matemática, é costume fazer o contrário, começando pelo fim. Só que fica muito mais fácil, aplicar uma sequência começando pela esquerda. De resto, tudo funciona como na Matemática. Por exemplo, se quisermos voltar à posição inicial, depois de aplicarmos DCF, basta-nos fazer $(DCF)^{-1}$, ou seja, $F^{-1}C^{-1}D^{-1}$.

Por fim, registe-se que convém usar certas convenções habituais, para camadas interiores. Assim, dá imenso jeito considerar movimentos como d, c ou e, por uma questão de maior facilidade ao decorar as fórmulas (algoritmos ou sequências). Sobre este assunto, leia a observação seguinte.

Observação

Quando aprendemos a resolver o cubo 4×4×4, aprendemos a resolver certas singularidades que aparecem nesse cubo. Nessa altura, costumamos aprender algumas fórmulas, nomeadamente a seguinte:

$$d^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2d^2$$

Esta fórmula dá algum trabalho a fixar, mas imagine a seguinte:

$$D_2^2D^2T^2C^2E_2E^{-1}C^2D_2{}^{-1}DC^2D_2D^{-1}C^2F^2D_2D^{-1}F^2E_2^{-1}ET^2D_2^2D^2$$

Esta última fórmula (ou algoritmo ou sequência) tem o mesmo significado da penúltima, mas a primeira é muito mais fácil de fixar do que a última. Logo, continuaremos a usar letras minúsculas, por uma questão de ser mais fácil para o leitor (e também para mim...).

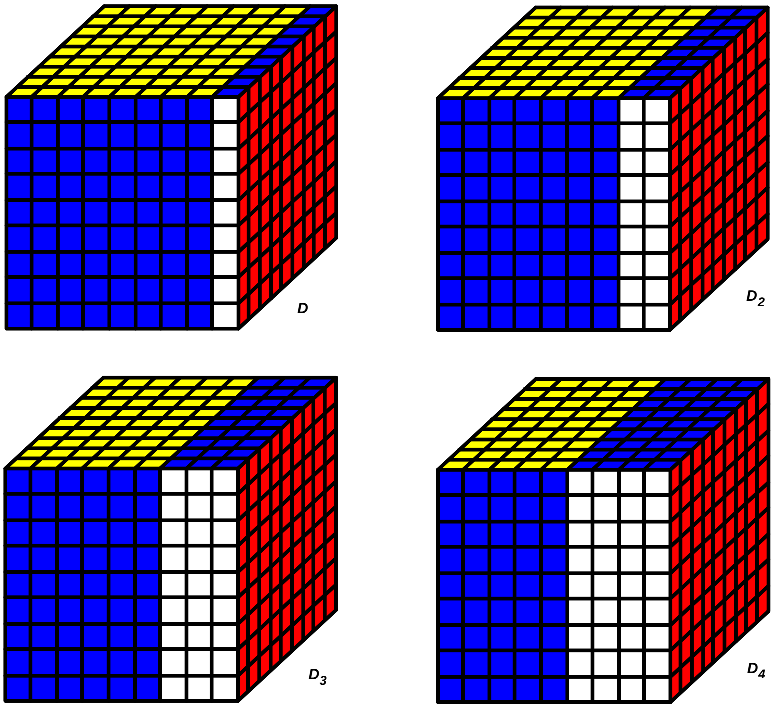
O leitor pode fixar a sequência $d^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2d^2$, da seguinte maneira:

"Meia volta nas duas da direita, meia volta atrás, meia volta em cima, VEM a esquerda, meia volta em cima, VEM a direita, meia volta em cima, VAI a direita, meia volta em cima, meia volta na frente, VAI a direita, meia volta na frente, VAI a esquerda, meia volta atrás, meia volta nas duas da direita". Só que terá de saber quais as situações em que estamos a considerar movimentos de camadas interiores.

Note-se que $\begin{cases} d = D_2D^{-1},\ d^2 = D_2^2D^2,\ d^{-1} = D_2{}^{-1}D \\ e = E_2E^{-1},\ e^2 = E_2^2E^2,\ e^{-1} = E_2^{-1}E \end{cases}$

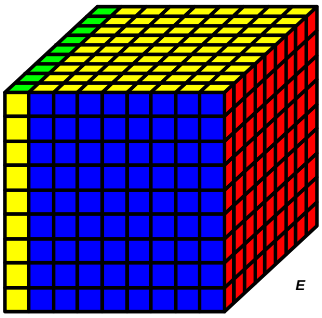
E, analogamente para b, c, f, t.

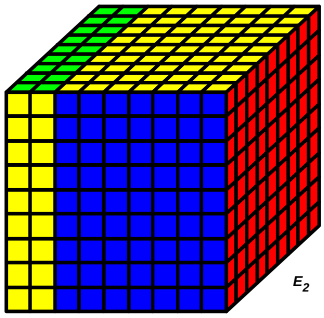
A seguir, apresentamos as imagens de alguns movimentos, começando pelos movimentos das camadas mais à direita. Por uma questão de espaço, só apresentamos a imagem do cubo, após o movimento indicado, sendo que todos os movimentos são feitos partindo do cubo resolvido, com amarelo em cima e azul na frente.

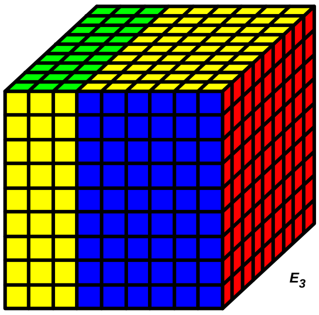


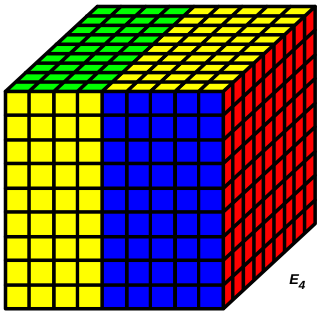
E podíamos ter continuado com D_5, D_6, D_7, D_8 e D_9.

Vejamos alguns movimentos das camadas mais à esquerda:

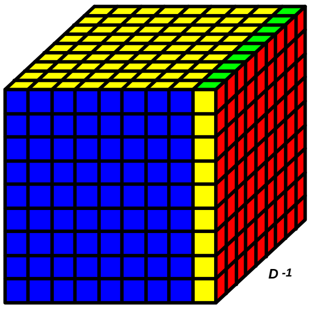


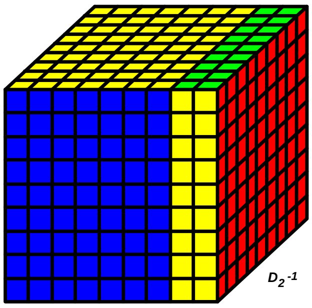






Vejamos dois movimentos no sentido anti-horário:





Como todos os movimentos são intuitivos, não vamos apresentar mais imagens.

Capítulo 2

Os Centros

A exemplo de todos os cubos superiores ao cubo $3\times3\times3$, começamos por construir os centros de cada face. Como temos um número ímpar de peças em cada aresta do cubo, existe uma casa central em cada face do cubo. Por isso, vamos construir cada centro à volta dessa casa central (com a cor a combinar).

Então, começamos por juntar 4 peças ao centro, formando uma fila de 5 (bloco 5×1). Vamos supor que começamos por formar o centro branco (como é habitual).

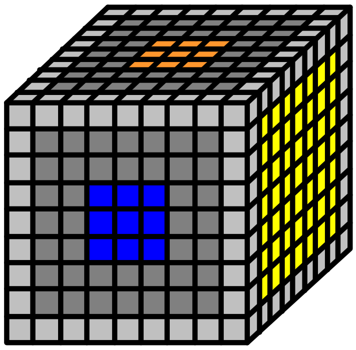
Depois, junta-se (noutra face) um novo bloco 5×1 (branco), sem desfazer o primeiro. A seguir-se, juntam-se os dois blocos. E o processo continua até termos o centro branco resolvido.

Depois, resolvemos o centro da face paralela ao primeiro centro resolvido. No caso de termos resolvido o centro branco (em primeiro lugar), resolvemos o centro amarelo, fila a fila, com a preocupação de não desfazermos o centro branco.

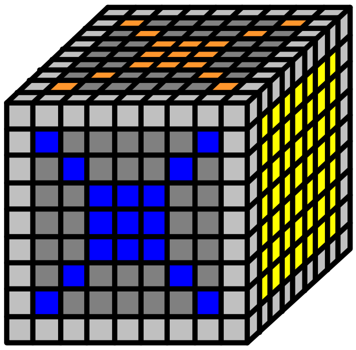
Resolvidos os dois primeiros centros, colocamos um deles para a esquerda e o outro para a direita e formamos o terceiro centro. O quarto centro a resolver, convém ser o centro de uma das duas faces adjacentes ao terceiro centro resolvido. Assim, se tivermos resolvido o centro azul, não convém resolver o centro verde, embora seja possível resolver os centros dessa maneira.

Até ao quarto centro, tudo se passa como no cubo $5\times5\times5$. A resolução dos dois últimos centros é semelhante ao caso do cubo $5\times5\times5$, mas tem algumas particularidades.

O primeiro passo consiste em construir os dois centros 3×3, da mesma maneira que fazíamos no cubo $5\times5\times5$.



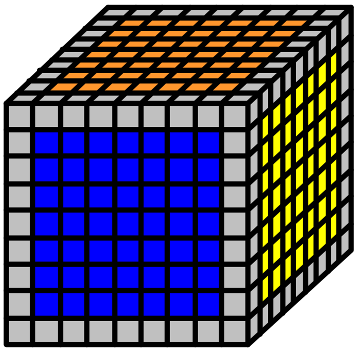
O segundo passo consiste em acertar os cantos dos centros 5×5 e 7×7 (embora isso possa ser feito no fim).



Note-se que podemos resolver os dois últimos centros de forma intuitiva. Assim, depois de termos formado os centros 3×3, podemos "levar"peças cor de laranja e "trazer"peças azuis. Ou seja, levamos peças azuis e peças cor de laranja (não pertencentes às três camadas centrais) e "trazemos"mais peças azuis do que as que foram "levadas". A certa altura, ficaremos com um certo número de peças erradas, não havendo uma maneira intuitiva de melhorarmos a situação.

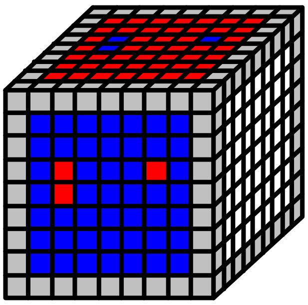
Então, vamos aplicar o método já aprendido noutro tipo de cubos (com menos camadas), para completarmos os dois últimos centros.

Por fim, há que acertar as restantes peças dos dois últimos centros.



Eventualmente, poderemos construir um dos centros linha a linha. Ou podemos construir o centro 3×3 e, depois, passar para o centro 5×5 e. por fim, resolver o centro 7×7. Nunca saberemos qual o melhor processo, mas podemos começar pelo centro 3×3 e, depois, trocar linhas de uma face por filas de outra face, de modo a ir aumentando o número de peças certas nos dois centros. Quando já não for possível melhorar, por esse processo, seguimos o processo sistemático de permuta de peças entre os dois últimos centros. Embora não seja obrigatório, podemos começar por acertar as peças erradas das diagonais dos centros, terminando com permuta das restantes peças erradas.

Example 1 *Na primeira vez que resolvi o cubo $9 \times 9 \times 9$, cheguei à seguinte posição, depois de algum trabalho na resolução dos dois últimos centros, fazendo (apenas) trocas diretas:*

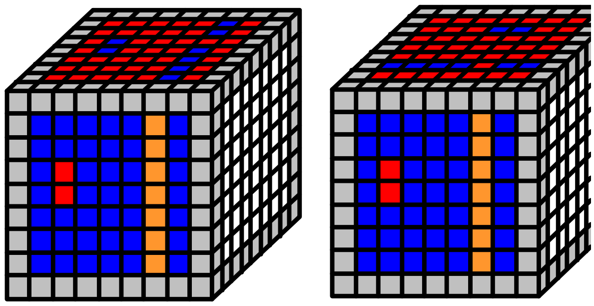


Resolução

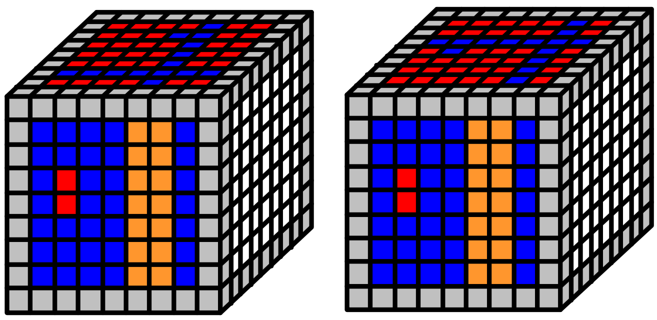
Vamos começar por trocar a peça errada da camada da frente com a peça errada da camada de cima (na terceira camada a contar da direita). Essa peça vermelha está na quarta camada a contar de cima, mas é mais fácil pensar que está na terceira camada do centro $7 \times 7 \times 7$.

Então, começamos por levar a coluna azul com a peça errada para a face de cima: $D_3 D_2^{-1}$

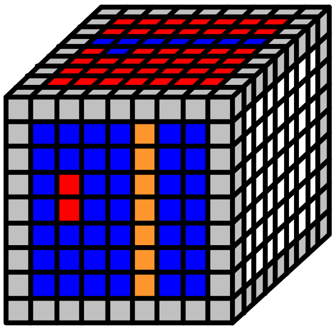
Depois, giramos a camada de cima: C



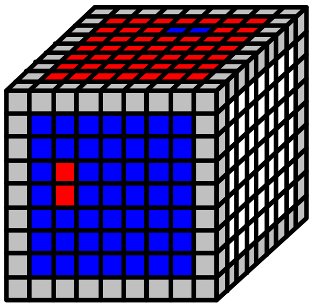
Agora, levamos a terceira camada do centro azul, a contar da direita, de modo a formarmos uma cruz azul (assimétrica): $D_4 D_3^{-1}$ e desfazemos o movimento na camada de cima: C^{-1}



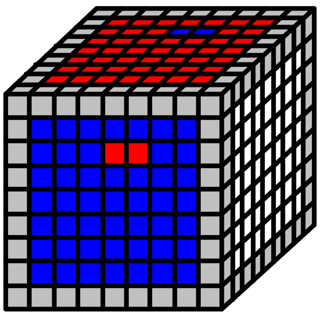
Agora, trazemos a coluna azul para a frente: $D_3^{-1} D_2$



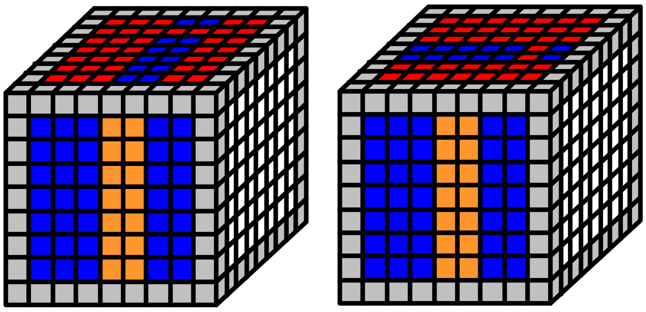
E continuamos com uma fila azul na camada de cima, pelo que fazemos $CD_4^{-1}D_3$



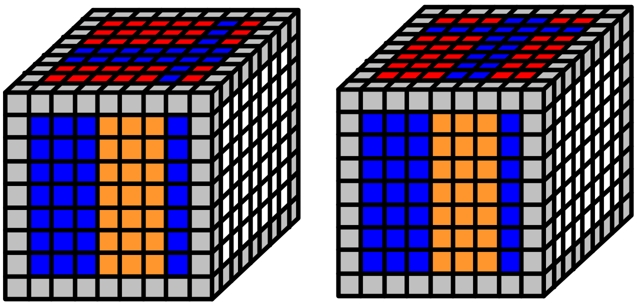
Agora, temos duas peças erradas em cada um dos centros, sendo que essas peças estão juntas. Então, começamos por fazer F:



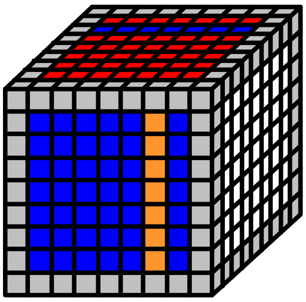
Agora, levamos as duas colunas azuis (com um vermelho) para cima e rodamos a camada de cima: $D_5D_3^{-1}C$



Agora, levamos a segunda coluna (da direita) do centro azul e desfazemos o movimento de cima: $D_3 D_2^{-1} C^{-1}$

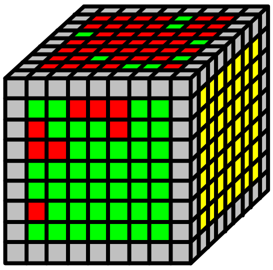


Agora, trazemos as duas colunas azuis para a camada da frente: $D_5^{-1} D_3$



E terminamos os dois últimos centros, com $C D_3^{-1} D_2$.

Example 2 *Vamos resolver os dois últimos centros dum cubo* $9 \times 9 \times 9$*:*



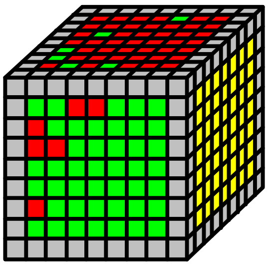
Resolução

Vamos começar por trocar as duas peças erradas mais à direita (na camada da frente). Para isso, fazemos:

$$D_4 D_3^{-1} C D_3 C^{-1} D_4^{-1} D_3 C D_3^{-1}$$

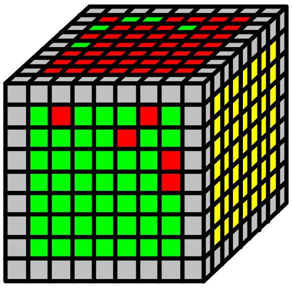
Descrição: "levamos"a coluna com as duas peças erradas, giramos em cima, levamos as duas colunas da direita (porque as peças erradas estavam nas duas primeiras linhas, contando a partir de cima), desfazemos o movimento feito em cima, trazemos a coluna que estava errada, giramos em cima e trazemos as duas camadas da direita (do centro).

E obtemos a seguinte posição:



E seguimos com F, para obtermos uma posição padrão (a imagem foi omitida).

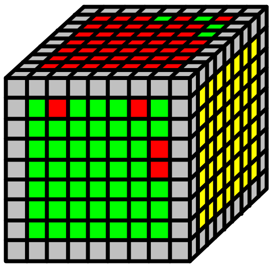
E continuamos com $D_4 D_3^{-1} C D_2 C^{-1} D_4^{-1} D_3 C D_2^{-1}$



E podemos continuar com C, para obtermos nova posição padrão. Segue-se:

$$D_4 D_3^{-1} C D_3 D_2^{-1} C^{-1} D_4^{-1} D_3 C D_3^{-1} D_2$$

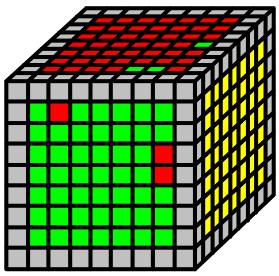
E obtemos a posição seguinte:



Como já estamos numa posição padrão, fazemos

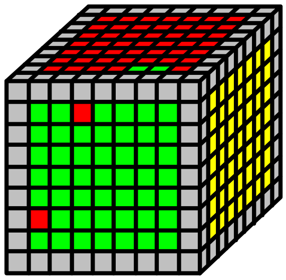
$$D_3 D_2^{-1} C D_2 C^{-1} D_3^{-1} C D_2^{-1}$$

E obtemos a seguinte posição:



E obtemos uma nova posição padrão com $C^{-1}F^{-1}$. Note-se que já estávamos numa posição padrão.

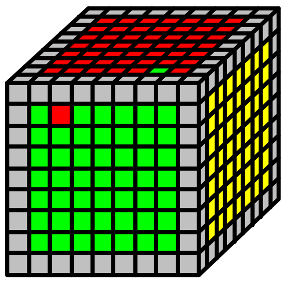
E fazemos $D_5D_4^{-1}CD_2C^{-1}D_5^{-1}D_4CD_2^{-1}$



Com $C^{-1}F$, obtemos nova posição padrão, em que as duas peças erradas estão na terceira linha. Seguimos com

$$D_2CD_4D_3^{-1}C^{-1}D_2^{-1}CD_4^{-1}D_3$$

Nova posição:



Com $C^{-1}F$, atingimos nova posição padrão. E completamos os dois últimos centros com

$$D_2CD_3D_2^{-1}C^{-1}D_2^{-1}CD_3^{-1}D_2$$

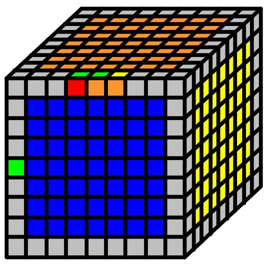
Note-se que podemos aplicar sequências análogas, para o lado esquerdo do cubo, mas tal não é necessário e pode provocar alguma confusão (pelo menos, no início).

Capítulo 3

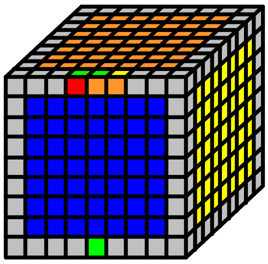
As Arestas

De início, quando comecei a pensar na resolução do cubo $9 \times 9 \times 9$, embora sem ter o cubo real, achei que seria mais fácil transformar o cubo $9 \times 9 \times 9$ num cubo $5 \times 5 \times 5$, alinhando as três peças centrais de cada aresta, bem como as duas peças de cada extremo (das arestas). No entanto, quando comecei a trabalhar com o cubo real, verifiquei que dá muito trabalho procurar as peças com as mesmas cores, pelo que resolvi seguir outro caminho. Assim, se acertarmos as três peças centrais das doze arestas, obtemos um cubo $7 \times 7 \times 7$, em que a camada M, por exemplo, é constituída por 3 camadas, o mesmo acontecendo com as camadas Q e S.

Para a resolução das peças centrais das arestas, verificamos as cores duma das peças adjacentes à peça central dessa aresta e procuramos a peça central com essas cores, colocando-a na posição adequada.

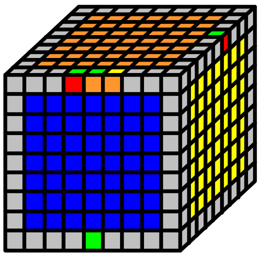


No caso da figura anterior, temos a peça vermelha e verde na camada da esquerda. Essa peça tem de mudar de posição, para chegarmos a uma posição padrão. Uma possibilidade será fazer $C^{-1}F^{-1}C$, após o que obtemos:

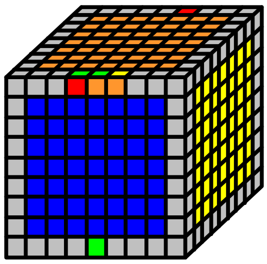


Agora, basta-nos fazer $D_5 D_4^{-1} C^{-1} D C D_5^{-1} D_4$. E obtivemos duas das três peças bem alinhadas. O próximo passo consiste em juntar a terceira peça com vermelho e verde, de modo a ficarmos com um bloco central de três peças alinhadas.

Pode ser útil, colcar duas peças duma só vez. No caso da figura anterior, podemos mostrar a terceira peça verde e vermelha:



Se fizermos DT, obtemos uma posição interessante:



Agora, é fácil juntar as três peças: $D_5 D_4^2 C^{-1} D C D_5^{-1} D_4^2$.

Note-se que a sequência apresentada tem variantes, pois podemos fazer C, C^{-1} ou C^2, consoante a situação, pois precisamos de ter um bloco errado para ser colocado no lugar do bloco que é corrigido. Tem de haver um bloco errado que esteja na camada da esquerda ou na camada da direita, mas não esteja na camada de cima.

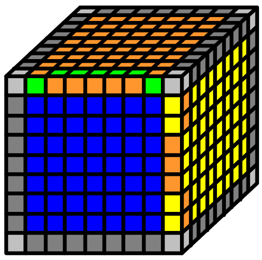
Note-se, no entanto, que costuma ser mais rápido acertar uma só peça, do que andar à procura da peça que falta.

Resolvidos os blocos centrais (de tipo 3×1), obtemos um cubo $7\times 7\times 7$. Normalmente, teremos muitos pares de peças mal alinhadas, pelo que poderemos começar por acertar um extremo da aresta com a peça adjacente. Obtidos alguns desses pares, podemos juntá-los com os blocos centrais, formando blocos de tipo 5×1, ou mesmo de tipo 7×1. Isso tem a vantagem de ficarmos com algumas arestas mais perto de estarem resolvidas, provocando uma maior concentração das peças erradas, facilitando a sua visualização.

Eventualmente, podemos formar blocos 6×1.

É importante utilizarmos várias interpretações da dimensão do cubo, pois isso é essencial para a resolução de certos problemas que nos aparecem. Assim, a camada d pode ser formada por uma só camada, por duas camadas ou por 3 camadas. A camada b também tem várias interpretações. Ou seja, é importante saber aplicar as duas fórmulas trazidas das paridades do cubo $4 \times 4 \times 4$, porque elas são essenciais na resolução do cubo $9 \times 9 \times 9$ (e em todos os cubos de ordem superior a 4).

Eis um exemplo de resolução das duas últimas arestas. Este exemplo foi obtido numa resolução real do cubo.



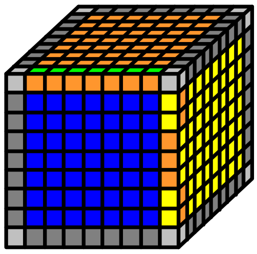
No caso da figura anterior, temos dez arestas resolvidas e duas por resolver, sendo que em cada uma dessas duas arestas (não resolvidas), todas as peças de cada aresta têm as mesmas cores. No entanto, as duas situações são manifestamente diferentes.

Comecemos por resolver a aresta laranja e verde. Neste caso, o movimento d corresponde a uma única camada, ou seja, vamos considerar um cubo $5 \times 5 \times 5$ em que os centros são do tipo 5×5.

Então, $d = D_2D^{-1}$, $d^2 = D_2^2D^2$, $e = E_2E^{-1}$, $e^{-1} = E_2^{-1}E$, pelo que a solução será

$$D_2^2T^2C^2E_2^{-1}EC^2D_2^{-1}DC^2D_2D^{-1}C^2F^2D_2D^{-1}F^2E_2^{-1}ET^2D_2^2$$

E a aresta verde e laranja fica resolvida.



Agora, fazemos F_9^{-1}, para que a aresta errada fique na posição padrão.

Vamos interpretar o cubo $9 \times 9 \times 9$ como sendo do tipo $5 \times 5 \times 5$, com centros 3×3 e a camada d com duas camadas.

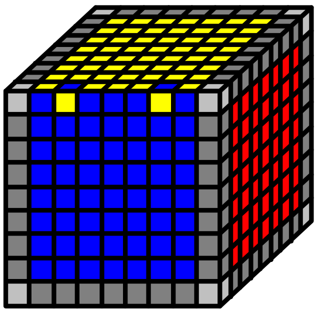
Ou seja, neste caso, vamos ter $d = D_3 D^{-1}$, $e = E_3 E^{-1}$.

Então, a solução é

$$D_3^2 T^2 C^2 E_3 E^{-1} C^2 D_3^{-1} D C^2 D_3 D^{-1} C^2 F^2 D_3 D^{-1} F^2 E_3^{-1} E T^2 D_3^2$$

Há várias situações em que temos onze arestas resolvidas e uma por resolver.

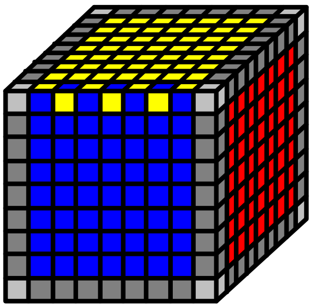
Vejamos um exemplo interessante, que também ocorre no cubo $7 \times 7 \times 7$:



Uma solução é a seguinte:

$$D_3^2 D_2^2 T^2 C^2 E_3 E_2^{-1} C^2 D_3^{-1} D_2 C^2 D_3 D_2^{-1} C^2 F^2 D_3 D_2^{-1} F^2 E_3^{-1} E_2 T^2 D_3^2 D_2^2$$

Há outra situação bastante interessante:



Na situação da figura anterior, temos onze arestas resolvidas e uma por resolver. Esta situação poderia ter sido evitada, se tivéssemos acertado as três peças centrais, durante a resolução. Mas, este mesmo exemplo mostra que isso pode dar mais trabalho, pois teríamos que aplicar novamente um algoritmo semalhante, no fim da resolução das arestas.

Vejamos como resolver a situação anterior:

A maneira mais rápida consiste em verificar quais as camadas que estão erradas, comparando com as cores da peça azul e amarela central. Então, temos quatro peças erradas, sendo que essas peças estão alternadas. Então, em vez de movimentarmos uma só camada interior, vamos movimentar duas camadas interiores, de cada vez.

Embora a notação seja algo pesada, a resolução não é muito complicada, embora tenhamos de ter algum cuidado.

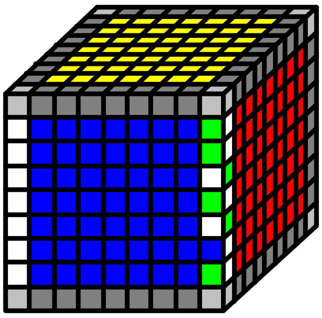
Assim, em vez de fazermos d^2T^2, vamos fazer $D_4^2D_3^2D_2^2T^2$, procedendo-se de maneira semelhante com as camadas da esquerda. Quanto ao movimento d, ele será substituído por $D_4D_3^{-1}D_2$, enquanto que e será substituído por $E_4E_3^{-1}E_2$.

Então, em vez de $d^2T^2C^2eC^2d^{-1}C^2dC^2F^2dF^2e^{-1}T^2d^2$, teremos a seguinte sequência

$$\begin{array}{l} D_4^2D_3^2D_2^2T^2C^2E_4E_3^{-1}E_2C^2D_4^{-1}D_3D_2^{-1}C^2D_4D_3^{-1}D_2C^2 \\ F^2D_4D_3^{-1}D_2F^2E_4^{-1}E_3E_2^{-1}T^2D_4^2D_3^2D_2^2 \end{array}$$

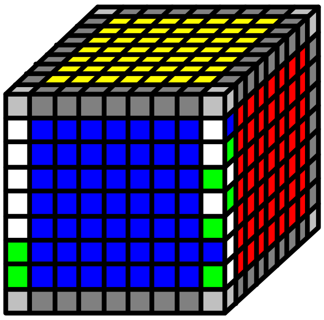
E há muitas outras pequenas curiosidades: podemos ir colocando peças com as cores a combinar, mesmo que não estejam em posições consecutivas, podemos deixar para o fim algumas peças que estejam em posição mais complicada; se a peça central da aresta estiver em Baixo/Frente e vai ficar com as cores invertidas, quando rodamos a camada do meio (quando fazemos M^{-1}), podemos fazer B^2M^2 e a peça já fica com as cores a combinar; podemos fazer algo semelhante com as restantes peças, mas tudo isso vai aparecer com a prática da resolução.

De qualquer modo, aqui fica mais um exemplo obtido na resolução dum cubo $9 \times 9 \times 9$.



Na situação da figura anterior, temos dez arestas resolvidas (a cinzento mais escuro) e duas arestas por resolver (na camada da frente), sendo que a peça errada da camada da esquerda está na terceira camada a contar de baixo para cima. Uma solução consiste em levar o par errado da esquerda para a camada da direita, trazendo um par verde e branco.

Para isso, fazemos $B_3DF^{-1}CD^{-1}FB_3^{-1}$, obtendo-se a seguinte posição:



Agora, colocamos o centro vermelho para cima (o azul continua na frente) e temos duas alternativas:

Na primeira alternativa, trocamos as duas peças dos extremos (as quais mudam a orientação das cores, formando-se dois blocos com as cores a combinar. Numa segunda fase, temos que acertar as cores das três peças centrais. E, por fim, temos de resolver as duas últimas arestas, como se tivéssemos um cubo $5 \times 5 \times 5$.

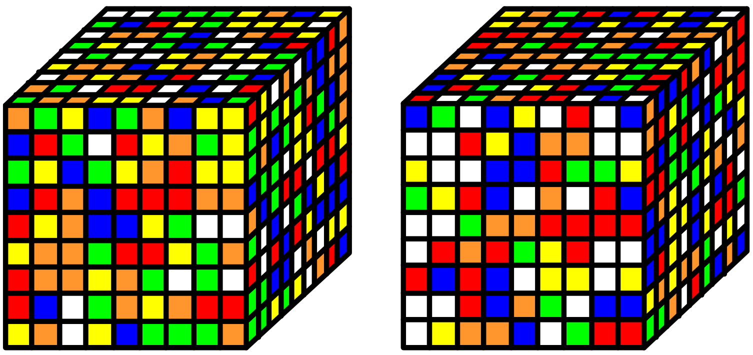
Na segunda alternativa, trocamos duma só vez, os extremos e as peças adjacentes à peça central verde e branca, após o que resolvemos as duas ultimas arestas.

No início, mais vale resolver cada coisa duma vez, por causa das confusões que vão aparecer: mais vale perder um pouco de tempo do que fazer alguma asneira que motive o refazer dos centros e das arestas.

Example 3 *Vejamos um exemplo de resolução completa do cubo* $9 \times 9 \times 9$*. Coloquemos o cubo resolvido com a face amarela em cima e a face azul na frente e baralhemo-lo da seguinte maneira:*

$DCTE^2F^{-1}$	$C_2^{-1}F_3D_4B_3^{-1}E_2$	$CTE^{-1}BD^2$	$D_3C_2E_4^{-1}B_2D_3^2$	$C^{-1}FDB^{-1}F$
$E_2^{-1}F_3D_4^2C_2F_3$	$E^{-1}FD^2CF$	$C_3D_4T_2E_4^2B_2$	$T^{-1}CDB^{-1}D^2$	$T_4^{-1}C_2D_4B_2^{-1}D_4^2$
$C_3^{-1}F_2D_4B_3^{-1}E_2$	$C_3D_4T_2E_4^2B_3$	$D_2C_4E_3^{-1}B_2D_3^2$	$T_4^{-1}C_2D_3B_4^{-1}D_3^2$	$F_2D_4^2C_3F_2E_3^{-1}$
$F_4C_3E_2^{-1}B_3D_4^2$	$T_3^{-1}C_4D_3B_2^{-1}D_4^2$	$F_3D_2^2C_3F_4E_2^{-1}$	$C_4^{-1}F_3D_2B_4^{-1}E_2$	$C_4D_3T_4E_2^2B_4$
$E_2^{-1}F_3D_4^2C_3F_2$	$C_3^{-1}F_4D_3B_2^{-1}E_4$	$C_3D_2T_3E_4^2B_2$	$D_3C_2E_3^{-1}B_4D_3^2$	$T_2^{-1}C_3D_4B_3^{-1}D_2^2$
$C_3^{-1}F_4D_3B_2^{-1}E_3$	$C_4D_3T_2E_3^2B_4$	$D_3C_2E_3^{-1}B_4D_2^2$	$T_4^{-1}C_3D_2B_3^{-1}D_4^2$	$F_3D_2^2C_3F_4E_3^{-1}$
$B^{-1}FD^2CF$	$DTE^{-1}CD^2$	$T^{-1}C^2D^{-1}B^{-1}D^2$	$T^{-1}C^2TE^2B^{-1}$	$F^2D^{-1}B^{-1}EC^{-1}$
$D_4C_3E_2^{-1}B_3D_4^2$	$T_3^{-1}C_4D_3B_2^{-1}D_4^2$	$F_3D_4^2C_3F_4E_2^{-1}$	$C_4^{-1}F_3D_4B_2^{-1}E_3$	$C_3D_2T_4E_3^2B_2$

Resolução
A posição obtida é a seguinte (mostrando-se as seis faces):



Resolução Parcial

Por onde começar? É claro que há muitas maneiras de começar. Até podemos aproveitar as quatro peças cor de laranja que já estão bem unidas, pois só falta colocar três peças, para formar uma fila.

Comecemos, então, com o centro azul, na frente e o centro amarelo, em cima (figura da esquerda).

Então, fazemos FE_2, colocando mais uma peça. E seguimos com CD_3^{-1}, após o que falta uma única peça para formarmos uma fila. Agora, fazemos $T^{-1}D_2^2$, completando-se a primeira fila do centro laranja.

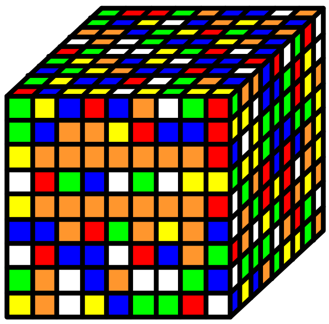
Agora, podemos colocar o centro laranja na frente, mantendo o centro amarelo em cima. Isso faz-se com C_9^{-1}.

Não convém esquecer que a fila pronta ficou na face direita. Agora, convém formar uma segunda fila, havendo duas possibilidades. Na primeira, construímos uma fila que contenha o centro laranja. Na segunda, construímos uma qualquer fila que não contenha o centro. Como sempre, é uma questão de gosto.

Como é mais usual começar pela fila central, vamos formar uma fila que contenha o centro laranja.

Fazemos $FD_4^{-1}E_2CD_3^{-1}C^2E_3E_2^{-1}BD_2DC_3$, obtendo-se duas filas na face de centro laranja.

Após os movimentos indicados, temos a posição seguinte:



Normalmente, eu deixo as duas filas prontas na face da esquerda, mas podemos começar por fazer B_3, colocando mais uma peça laranja numa fila da direita (que passa a ter três peças desta cor).

Segue-se $FC_4^{-1}T_2C_4$. E conseguimos cinco peças laranja, na face superior, faltando as peças dos extremos.

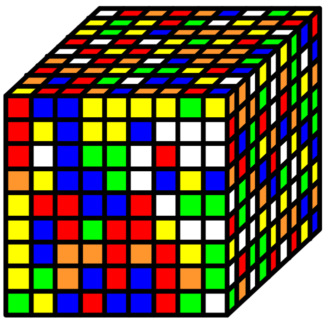
Podemos continuar com $C^{-1}E_2^{-1}T^{-1}D_2^{-1}CD_2^{-1}C_9$. E temos três filas prontas, na face da esquerda. Agora, podemos mover livrementa as camadas paralelas à camada da direita e as camadas exteriores do cubo.

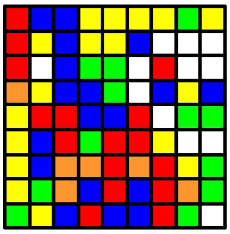
Vamos prosseguir com $F^{-1}E_4^{-1}F^{-1}E_3^{-1}E_2BD_2^2ET_2CD_5^{-1}T_2^{-1}D_5D_4^{-1}$

Example 4 *Vejamos um exemplo de resolução completa do cubo* $9 \times 9 \times 9$. *Coloquemos o cubo resolvido com a face amarela em cima e a face azul na frente e baralhemo-lo da seguinte maneira:*

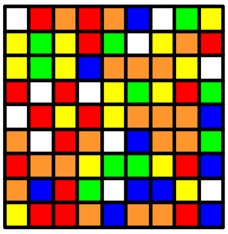
$DCT_2E^2F_3^{-1}$	$D_2^{-1}F_2D_4B_3^{-1}E_2$	$C_3T_3E^{-1}B_2D_3^2$	$F_2C_3E_4^{-1}B_2D_4^2$
$C_4^{-1}F_2D_3B_4^{-1}F$	$E_2^{-1}F_3D_4^2C_2F_2$	$E_3^{-1}F_2D_2^2CF$	$C_2F_4D_2E_4^2F_4$
$D_3^{-1}CD_3B^{-1}D^2$	$T_4^{-1}C_2D_4B_2^{-1}D_4^2$	$C_2^{-1}F_4D_4B_3^{-1}E_4$	$C_3D_4T_2E_3^2B_3$
$D_2C_4E_3^{-1}B_2D_3^2$	$T_4^{-1}C_2D_3B_4^{-1}D_3^2$	$F_2D_4^2C_3F_2E_3^{-1}$	$F_4C_3E_2^{-1}B_3D_4^2$
$T_3^{-1}C_2D_3B_2^{-1}D_3^2$	$F_3D_2^2C_3F_4E_3^{-1}$	$C_3^{-1}F_3D_2B_4^{-1}E_2$	$C_3D_3T_4E_2^2B_3$
$E_2^{-1}F_3D_4^2C_3F_2$	$C_3^{-1}F_4D_3B_2^{-1}E_4$	$C_3D_2T_3E_4^2B_2$	$D_3C_2E_2^{-1}B_4D_3^2$
$T_2^{-1}C_3D_4B_3^{-1}D_2^2$	$C_3^{-1}F_4D_3B_2^{-1}E_3$	$C_4D_4T_3E_3^2B_3$	$D_3C_2E_3^{-1}B_4D_2^2$
$T_3^{-1}C_3D_4B_3^{-1}D_3^2$	$F_3D_2^2C_3F_4E_3^{-1}$	$B^{-1}F_2D_3^2F_3C$	$D_4T_3E_3^{-1}CD_2^2$
$T^{-1}C_4^2D_3^{-1}B_3^{-1}D_4^2$	$T^{-1}C_2^2TE_2^2B^{-1}$	$F^2D^{-1}B_2^{-1}E_4C^{-1}$	$D_4C_3E_2^{-1}B_3D_4^2$
$T_3^{-1}C_4D_3B_2^{-1}D_3^2$	$F_3D_3^2C_3F_4E_2^{-1}$	$C_3^{-1}F_3E_4B_2^{-1}E_3$	$C_2D_2T_3E_2^2B_2$

Resolução
A posição obtida é a seguinte, seis faces, mas só três, em perspetiva:

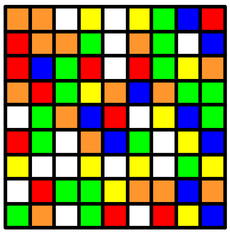




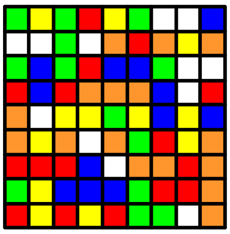
Frente



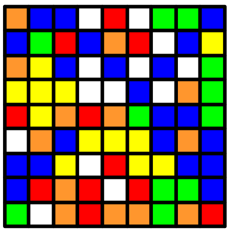
Cima



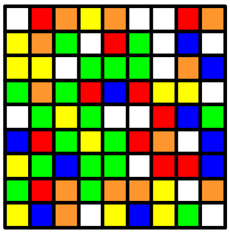
Direita



Trás



Esquerda



Baixo

Nas figuras anteriores, temos as seis faces do cubo, sendo que a face de Baixo é aquela que vemos, em cima, quando fazemos D_9^2, partindo do cubo com o centro amarelo em cima e o centro azul na frente.

As faces laterais são vistas, rodando o cubo em torno do eixo vertical.

Vamos começar a resolução, com o centro amarelo em cima e o centro azul na frente.

Centro amarelo

1. $D_4^{-1}E_4FD_2F^{-1}E_3^{-1}E_2F_9^{-1}$ fila amarela central
2. $E_4^{-1}D_3FE_3^{-1}E_2D_4D_3^{-1}TD_2^{-1}ET_4$ segunda fila amarela
3. $FE_2D_3^{-1}D_5D_3^{-1}CD_4^{-1}D_3B_4^{-1}$ terceira fila amarela
4. $F^{-1}D_4D_3TE_3E_2^{-1}CE^{-1}T_4T_3^{-1}C^{-1}T_2$ quarta fila amarela
5. $E_3^{-1}F^{-1}D_3F^2D_4D_3^{-1}C^{-1}D_2CD_2^{-1}B^2E_2^2C^{-1}EF_5^{-1}F_4CT_3F_5F_3^{-1}$ quinta fila amarela
6. $F^2D_3^{-1}D_2^2TE_4^2FEC_3D^{-1}C_5C_4^{-1}D^{-1}C_2FB_2^{-1}C_5^{-1}C_2^{-1}$ sexta fila amarela
7. $D_2T^2E_3F^2D_3D_2^{-1}E_2BD_5^2D_3^2CD^{-1}EF_4^{-1}F_3C^{-1}T_4T_3^{-1}F_4F_3^{-1}$

Centro branco

1. $E_3^{-1}FE_3E_4^{-1}D_4^{-1}D_3D_2^{-1}CT_4^{-1}T_2F_4FF_3^{-1}T_4T_2^{-1}$ fila branca central
2. $D_5^{-1}D_4D_2^{-1}F^{-1}D_3D_2^{-1}E_3^2E_2^2F_9^{-1}CD_4C^2D_4^{-1}$ segunda fila branca
3. $C^2D_2C^2D_2^{-1}FF_9^{-1}E_2^{-1}CF^2E_3^{-1}F^{-1}D_2E_4^{-1}E_3B^{-1}D_5^2D_4^2E^{-1}T_2E^2T_2^{-1}$ terceira fila branca
4. $CFE_3C^{-1}D_4^{-1}T^{-1}D_3^2C^{-1}D_2^{-1}E^2C_3E^2C_3^{-1}$ quarta fila branca
5. $C^{-1}E_2T^2D_5^2D_4^2D_2^2F_4F_2^{-1}C^2F_4^{-1}F_2C^{-1}E_3E_2^{-1}EC_3C_2^{-1}E^2C_3^{-1}C_2$ quinta fila branca
6. $D_5^{-1}C^{-1}E_3T^{-1}E_2^2D_3D_2D_4^2D_3^2EB_4^{-1}B_3E^2B_4B_3^{-1}$ sexta fila branca
7. $C^{-1}D_2F^{-1}E_4^{-1}D_5^{-1}D_3B^{-1}E_2^2CD_2^{-1}CF^{-1}D_4^{-1}D_3EC_2E^2C_2^{-1}$

Centro azul

1. $FE_4^{-1}E_2F^2D_3D_2^{-1}C$ fila azul central
2. $E_3^{-1}C^2E_3F^2E_2D_4^{-1}D_3E_4^2E_2^2F^{-1}E_3^{-1}$ segunda fila azul
3. FE_3^{-1} VERIFICAR SE FOI 3 OU 4 CAMADAS EM E E_3^{-1} OU E_4^{-1}
4. $CENTROLARANJANAFRENTE, AZULEMCIMA$

Podemos começar com $D_4^{-1}E_4FD_2F^{-1}E_3^{-1}E_2F_9^{-1}$, formando uma fila amarela, incluido o centro amarelo, e deixando-a na face esquerda. Agora, podemos mover livremente as camadas paralelas à face da esquerda, bem como as camadas exteriores.

Seguimos com $D_2E_2C_4C^{-1}E_4^{-1}E_3CE_4^{-1}D_2ET_2D_9$, colocando-se uma segunda fila amarela na face da esquerda.

Vamos formar um novo bloco amarelo 7×1, para o que fazemos $E_2^{-1}E_4^{-1}E_3FD_4D_2FD_3D_2^{-1}T_3$.

E obtivemos uma nova fila amarela para o centro (amarelo).

Para a quarta fila amarela, fazemos $D_9^{-1}FE_4^{-1}D_9^{-1}CE_2^{-1}E_3E_4^{-1}D_4E^{-1}B_2^{-1}F^2D_3D_2^{-1}ET_2$.

E ainda faltam três filas amarelas.

E prosseguimos com $D_9^{-1}C^2D_4^{-1}D_3TE_2^{-1}E_3ET_4T_2^{-1}$, colocando-se mais uma fila amarela na face da esquerda.

Podemos prosseguir com $CD_4D_2B_3^{-1}F^{-1}B_3FE_4D_4^{-1}D_3D_2^{-1}F^2C_3C_2^{-1}$, completando-se nova fila amarela do centro.

E falta-nos uma única fila, para que o centro amarelo fique pronto.

Seguimos com $F^{-1}D_2D_9^{-1}C^{-1}D_4T^{-1}E_2C_3F^{-1}C_3^{-1}E_3^{-1}E_2C^{-1}D_4^{-1}CF^{-1}D_3D_2^{-1}E^{-1}T_4T_3^{-1}$, ficando o centro amarelo resolvido, na camada da esquerda.

Seguimos com $E_3^{-1}T^{-1}E_4E_3^{-1}D_3^{-1}F_2D^2F_2^{-1}$, deixando-se o centro amarelo na esquerda e uma fila branca na face da direita.

Seguimos com $FE_4^{-1}D_3F^2D_2CD_2^{-1}F^{-1}CD_3D_2^{-1}D^{-1}T_2^{-1}D^2T_2$, obtendo-se uma segunda fila branca, na face da direita.

E continuamos com $D_9^{-1}E_4E_3^{-1}E_2CD_4^{-1}D_2^2DC_4^{-1}C_3D^2C_4C_3^{-1}$, ficando uma terceira fila branca, na face da direita.

Vamos seguir com $E_3^{-1}E_2F^{-1}D_3B^2E_4^2E_3^2B^2D_4^2D_3^2C^2F_4F_3^{-1}D^2F_4^{-1}F_3$. E obtivemos a quarta fila branca, na face direita.

Agora, $CF^{-1}D_3D_9^{-1}CE_4^{-1}D_3B^{-1}E_2^2DT_3T_2^{-1}CT_3^{-1}T_2D_3T^{-1}D_2^{-1}E_3E_2^{-1}FD_4D_2^{-1}T_3^{-1}T_2D^2T_3T_2$ ficando pronta a quinta fila branca (na face da direita).

E podemos continuar com $D_4D_3^{-1}D_2C^2D_5^{-1}F^{-1}E_3^{-1}E_2C^2F_3F_2^{-1}D^2F_3^{-1}F_2$, completando-se a sexta fila branca, na face da direita.

E, por fim, fazemos $D_9^2F^{-1}D_3D_2^{-1}E_3^{-1}CE_5F_5^{-1}F_4CF_5F_4^{-1}FCD_2^{-1}C^2D_4^{-1}D_3FB_5^{-1}B_4FB_5B_4^{-1}$, completando-se o centro branco (e mantendo o centro amarelo).

Neste caso, eu deixei para o fim a fila central branca, mas costumo começar por essa fila.

Agora, vamos construir uma primeira fila do terceiro centro. Podemos construir uma fila que inclua um dos centros ou podemos aproveitar uma fila quase formada. Neste caso, temos uma fila com seis verdes, pelo que vamos aproveitar isso.

Então, fazemos $T^{-1}C^{-1}D_2T$, formando-se uma fila verde, na face de trás.

Agora, vamos construir uma fila central: $E_5^{-1}E_2^{-1}CE_5^{-1}$

E prosseguimos com $C^{-1}E_3^{-1}D_4D_2F^{-1}D_3D_2^{-1}CD_4^{-1}D_2^2$, completando-se a terceira fila verde do centro.

Vamos continuar com $C^{-1}FE_3^{-1}F^2E_4^{-1}E_3B^{-1}D_2^2C^{-1}D_2^2CBD_5^2D_4^2C^{-1}D_5^2D_4^2E_2^{-1}$, obtendo-se a quarta fila verde do centro.

Vamos prosseguir com $FE_3^{-1}E_2E_4D_2^{-1}FD_2E_3^{-1}CFE_3^{-1}E_2CD_3D_2^{-1}$, completando-se a quinta fila verde do centro.

E seguimos com $CFD_3^{-1}E_3FD_3E_2^{-1}F^{-1}E_2D_2FE_2^{-1}D_2^{-1}E_4E_2^{-1}B^{-1}C^{-1}D_5^2E_3^2CE_4E_2^{-1}$, ficando pronta a quinta fila verde.

Agora, fazemos $D_9^{-1}C^{-1}E_2CD_4E_2^{-1}D_2^2C^{-1}D_4^{-1}D_2^2CFE_4^{-1}E_2CE_4E_2^{-1}CD_3D_2^{-1}CD_3^{-1}D_2E_3^2E_2^2$, completando-se o centro verde.

Agora, há que completar uma fila vermelha ou uma fila laranja. Embora haja filas quase completas, vamos começar por formar a fila central cor de laranja.

Então, fazemos $FE_4E_3^{-1}E_2D_3^{-1}D_2^2FD_3^2D_2^2E_4^{-1}E_3E_2^{-1}$, ficando completa a fila central cor de laranja.

Vamos prosseguir com $E_2^{-1}C^{-1}E_2^2C^{-1}E_2^{-1}D_2^{-1}CD_2TCD_4E_4^{-1}TE_4D_4^{-1}D_2C^2D_2^{-1}$, completando-se a segunda fila laranja.

Agora, continuamos com $E_4^{-1}C^{-1}E_2^{-1}T^2E_2E_4C^{-1}E_2CE_2^{-1}C^{-1}T^{-1}D_3^{-1}C^2E_2^{-1}CE_2D_3$, formando-se a terceira fila laranja.

E fazemos $D_9^{-1}CD_4D_3^{-1}CD_4^{-1}D_3E_4^{-1}E_2FE_4E_2^{-1}CD_4^{-1}E_4CE_4^{-1}D_4D_4^2D_3^2F^2D_4^2D_3^2$, formando-se a quarta fila laranja.

Agora, fazemos $E_3CE_3^{-1}FE_2^{-1}CE_2E_3^2E_2C^2E_3^2E_2^{-1}$, formando-se a quinta fila laranja.

Vamos prosseguir com $CE_2FE_2^{-1}CF^{-1}E_2^{-1}D_4C^{-1}E_2D_2^{-1}F^{-1}CD_2C^{-1}D_4^{-1}CE_4^{-1}E_2CE_4E_2^{-1}E_4FE_4^{-1}$ ficando completa a sexta fila laranja.

E seguimos com $CE_2^{-1}D_4C^{-1}E_2D_4^{-1}FCE_4^{-1}E_3C^{-1}E_4E_3^{-1}C^2D_3^2D_2^2CD_3^2D_2^2D_3^{-1}FE_3FE_3^{-1}D_3CD_5D_4^{-1}$ ficando completos os centros verde e laranja.

Agora, começamos por construir os centros (vermelho e azul) 3×3, para o que fazemos:

$$C^{-1}D_4C^2D_4^{-1}FD_4CD_4^{-1}C^2D_4CD_4^{-1}$$

Depois de completarmos os dois centros 3×3, vamos permutar filas de ambos os centros (7×7), de modo a conseguirmos mais peças certas em ambos os centros.

Para isso, fazemos $C^{-1}D_2C^2D_2^{-1}D_3D_2^{-1}CD_3^{-1}D_2$. Nesta posição, já não é simples conseguir melhorias, utilizando permutas de filas, pelo que vamos seguir o método sistemático de resolução dos dois últimos centros.

A primeira coisa a fazer é verificar quantas peças das diagonais estão erradas. Neste caso, apenas temos uma peça errada em cada face, pelo que fazemos C^2, para obtermos a posição padrão e aplicamos a sequência

$$D_2CD_2^{-1}CD_2C^2D_2^{-1}$$

E as peças das diagonais ficaram certas. Agora, temos dez peças erradas, em cada face.

Vamos começar por fazer C^2, deixando duas peças em cada face, nas posições correspondentes (na segunda fila dos centros, a contar de cima para baixo e de trás para a frente).

Então, fazemos

$$D_5D_3^{-1}CD_3D_2^{-1}C^{-1}D_5^{-1}D_3CD_3^{-1}D_2$$

E corrigimos duas peças, em cada face. Para não aplicarmos sequências no lado esquerdo, vamos fazer CF^{-1}, obtendo-se dois pares de peças pem posicionadas para a permuta, pelo que seguimos com

$$D_3D_2^{-1}CD_5D_3^{-1}C^{-1}D_3^{-1}$$

E seguimos com $D_5D_3^{-1}F^2E_2^{-1}CD_3D_4D_3^{-1}FC^{-1}D_2CD_2^{-1}E_3^2E_4^2$. E temos a quinta fila vermelha pronta. Como eu havia dito, lá desfizemos a fila verde.

Vamos continuar com $C^{-1}E_2CE_2^{-1}T^{-1}C^{-1}E_4E_3^{-1}CE_4^{-1}E_2C^{-1}TD_5^{-1}D_4CD_5D_3^{-1}TC^{-1}D_3^{-1}D_2$ E temos mais uma fila vermelha bem colocada.

Para a última fila vermelha, fazemos $FD_5^{-1}D_3FD_5D_4^{-1}F^{-1}D_2^2D_3^2D_4^2E_3^2FE_3^2D_2^2FTD_4^2D_3^2FD_2^{-1}$ completando-se o centro vermelho.

Agora, é quase obrigatório completar um dos centros adjacentes (o centro azul ou o centro verde), conforme o que seja mais vantajoso. Neste caso, não há vantagem em nenhum dos centros, pelo que vamos começar pelo centro verde.

Então, fazemos $C^2D_4^{-1}E_3C^{-1}D_3^{-1}FD_3E_5E_3^{-1}CB^{-1}D_2^2BD_2^2$, ficando a fila central verde pronta (na face de baixo).

Seguimos com $C^{-1}E_3D_3F^{-1}E_3^{-1}CD_3^{-1}$, obtendo-se uma segunda fila verde. Repare-se que obtivemos uma fila cor de laranja, fila essa que pode ser colocada junto das duas filas verdes. Então, fazemos $D_4^2B^2D_4^2$.

E podemos continuar com $CD_4E_4^{-1}CD_5D_4^{-1}D_2CT^{-1}E_3^{-1}TCD_2^{-1}\,(-1?)\,E_3E_2^{-1}C^2E_2$.

E temos três filas verdes. A quarta fila verde é fácil de obter: $CD_2^{-1}CD_2D_4D_3^{-1}C^2D_4^{-1}D_3$.

Repare-se que a fila cor de laranja continua entre as filas verdes.

E continuamos com $C^{-1}E_3E_2^{-1}CE_3^{-1}E_2C^{-1}TD_4^{-1}C^{-1}D_4CT^{-1}D_3^{-1}CD_3D_4^{-1}D_3F^2D_4D_3^{-1}$.

Agora, a fila cor de laranja saiu de entre as filas verdes, pelo que corre sérios riscos de ser desfeita. Para que a fila laranja continuasse protegida, deveríamos ter resolvido as outras filas verdes.

Vamos continuar com $C^{-1}D_4^{-1}E_2^{-1}CE_2D_4\left(?CTD_4^{-1}\right)CD_3^{-1}CD_3C^{-1}D_3^{-1}D_2C^{-1}D_3T^{-1}CD_4^{-1}$

$DCT_2E^2F_3^{-1}$	$D_2^{-1}F_2D_4B_3^{-1}E_2$	$C_3T_3E^{-1}B_2D_3^2$	$F_2C_3E_4^{-1}B_2D_4^2$	$C_4^{-1}F_2D_3B_4^{-1}F$
$E_2^{-1}F_3D_4^2C_2F_2$	$E_3^{-1}F_2D_2^2CF$	$C_2F_4D_2E_4^2F_4$	$D_3^{-1}CD_3B^{-1}D^2$	$T_4^{-1}C_2D_4B_2^{-1}D$
$C_2^{-1}F_4D_4B_3^{-1}E_4$	$C_3D_4T_2E_3^2B_3$	$D_2C_4E_3^{-1}B_2D_3^2$	$T_4^{-1}C_2D_3B_4^{-1}D_3^2$	$F_2D_4^2C_3F_2E_3^{-1}$
$F_4C_3E_2^{-1}B_3D_4^2$	$T_3^{-1}C_2D_3B_2^{-1}D_3^2$	$F_3D_2^2C_3F_4E_3^{-1}$	$C_3^{-1}F_3D_2B_4^{-1}E_2$	$C_3D_3T_4E_2^2B_3$
$E_2^{-1}F_3D_4^2C_3F_2$	$C_3^{-1}F_4D_3B_2^{-1}E_4$	$C_3D_2T_3E_4^2B_2$	$D_3C_2E_2^{-1}B_4D_3^2$	$T_2^{-1}C_3D_4B_3^{-1}D$
$C_3^{-1}F_4D_3B_2^{-1}E_3$	$C_4D_4T_3E_3^2B_3$	$D_3C_2E_3^{-1}B_4D_2^2$	$T_3^{-1}C_3D_4B_3^{-1}D_3^2$	$F_3D_2^2C_3F_4E_3^{-1}$
$B^{-1}F_2D_3^2F_3C$	$D_4T_3E_3^{-1}CD_2^2$	$T^{-1}C_4^2D_3^{-1}B_3^{-1}D_4^2$	$T^{-1}C_2^2TE_2^2B^{-1}$	$F^2D^{-1}B_2^{-1}E_4C$
$D_4C_3E_2^{-1}B_3D_4^2$	$T_3^{-1}C_4D_3B_2^{-1}D_3^2$	$F_3D_3^2C_3F_4E_2^{-1}$	$C_3^{-1}F_3E_4B_2^{-1}E_3$	$C_2D_2T_3E_2^2B_2$

1. $D_4^{-1}E_4FD_2F^{-1}E_3^{-1}E_2F_9^{-1}$ 1^a fila amarela

2. $C^{-1}E_2^{-1}D_3FD_2FE_3^{-1}E_2TE_4^{-1}D_4EB_3$ 2^a fila amarela

3. $C^{-1}E_4T^2D_2^{-1}BE_3^2E_2^2T_2$ 3^a fila amarela

4. $CD_6D_4^{-1}D_3BE_2^2C^{-1}DF_5^{-1}F_4CT_5^{-1}CD_3^{-1}C^{-1}FD_2C^2T_3$ 4^a fila amarela AQUI

5. $ETE_4^2D_7^2T^2D_2^2DET_2CT_2^{-1}C^{-1}E_2^{-1}D_5D_4^{-1}D_3^2D_2^{-1}E^{-1}T_2$ 5^a fila amarela

6. $F^{-1}E_3^2BD_5D_4^{-1}F^{-1}C_2F^2C_2^{-1}D_2FD_2^{-1}EC_4C_3^{-1}$ 6^a fila amarela

7. $D_2^2E_5^2C^{-1}E_2FD_4C^{-1}FD_3^{-1}CD_3D_2D_4^{-1}E^{-1}C_4C_3^{-1}$ 7^a fila amarela

8. $C_9CE_2D_2^{-1}FE_2^{-1}D_2C_4C_3^{-1}FC_4^{-1}C_3B^2E_4^{-1}FE_4D_9F_9$ 1^a fila branca

9. $D_4F^{-1}D_3B^2D_2^2C_2FC_2^{-1}F^{-1}E_2D_4^{-1}DC_2^{-1}D^2C_2$ 2^a fila branca

10. $C^{-1}F^{-1}D_4^{-1}D_2^2CE_2^{-1}E_3DC_2^{-1}D^2C_2$ 3^a fila branca

11. $TE_3^{-1}E_4F^{-1}D_2BE_2^2F_4F_3^{-1}D^2F_4^{-1}F_3$ 4^a fila branca

12. $FE_3C^{-1}E_3^{-1}E_4D_3^{-1}D_2CD_3D_4^{-1}CE_2DC_3^{-1}C_2D^2C_3C_2^{-1}$ 5^a fila branca

13. $F^{-1}CE_2CE_3^{-1}E_4TE_3^2E_2^2D_4^2D_2^2F^{-1}C_3C_2^{-1}FC_3^{-1}C_2$ 6^a fila branca

14. $D_9^2D_3D_4^{-1}CE_4E_2^{-1}C_4C_3^{-1}FTD_4C^2T^{-1}D^{-1}C_4^{-1}C_3CD_2^{-1}E_3E_2^{-1}D^{-1}C_4^{-1}C_3D^2C_4C_3^{-1}$
E temos dois centros formados

15. $CE_3D_5D_3^{-1}F$ 1^a fila vermelha

16. $D_3CD_2C^{-1}T^{-1}E_4D_4^{-1}CD_2^{-1}$ 2^a fila vermelha

17. $D_4^2D_2^2CT^{-1}D_5^{-1}F^{-1}D_4CD_2D_4^2$ 3^a fila vermelha

18. $E_2^{-1}FD_5D_4^{-1}CD_4CE_2^{-1}TF^2D_4^{-1}D_2C^{-1}E_2^{-1}E_3D_9^{-1}$ 4^a fila vermelha
CENTRO AZUL EM CIMA, AMARELO NA ESQUERDA

19. $E_2^{-1}D_2^2D_3^{-1}CD_2^{-1}F^{-1}C^{-1}E_2^{-1}E_3E_4^{-1}D_4CE_2D_7D_6^{-1}D_5D_2$ 5^a fila vermelha

20. $D_3E_3^{-1}CD_2^{-1}E_3CD_4D_3^{-1}F^{-1}D_2CD_2^{-1}F^{-1}C^{-1}E_3E_4^{-1}T^2E_2C^{-1}E_3^{-1}E_2^{-1}E_4D_4^2D_2^2$ 6^a fila vermelha

21. $E_3^2TE_3^2F^{-1}D_4^{-1}D_3CE_2F^{-1}D_4D_2^{-1}FCD_3D_2^{-1}C^{-1}E_2^{-1}D_3^2D_2^2$ 7^a fila vermelha

22. $D_4^{-1}E_3^2D_2FE_3^2D_4D_2^{-1}D_4D_3^{-1}CD_4^{-1}D_3CE_2^{-1}E_5CD_7D_4^{-1}C^2E_3^{-1}CE_3TE_2C^{-1}E_2^{-1}D_2^2T^2D_2^2$

23. $E_4^{-1}C^{-1}E_4CE_2CE_2^{-1}D_3D_2^{-1}C^2D_3^{-1}D_2$

24. $E_2^{-1}CE_2CD_4^{-1}D_3C^{-1}D_4D_3^{-1}CT^{-1}E_2CE_2^{-1}E_4^{-1}E_3C^2E_4E_3^{-1}$

25. $CD_4^{-1}CD_4CT^{-1}D_3TD_3^{-1}T^{-1}CE_2C^{-1}E_3^{-1}TE_3E_2^{-1}C^{-1}D_5^{-1}D_4CD_5D_4^{-1}E_3^{-1}E_2C^2E_3E_2^{-1}$

26. $T^2E_2C^{-1}E_2^{-1}TCE_4E_2^{-1}C^{-1}E_4^{-1}E_2^{-1}TE_2^2C^{-1}D_3^{-1}D_2CD_3D_2^{-1}E_2^{-1}C^2E_2$

27. $D_9^{-1}D_4D_2^{-1}CD_4^{-1}D_2$

CENTRO VERMELHO ATRÁS

28. $FCE_2E_3^{-1}CE_3E_2^{-1}CD_5D_4D_3^2C^{-1}D_5^{-1}D_3F^{-1}D_3^{-1}D_2F^2D_4^2D_3^2FD_4D_2^{-1}D_4D_3^{-1}F^2D_4^{-1}D_3$

E só faltam dois centros

29. $FE_4^{-1}C^{-1}E_4CFD_4CD_4^{-1}F^2C^{-1}D_4CD_4^{-1}CD_4C^2D_4^{-1}$

Estão construídos os dois centros 3×3.

30. $F^{-1}D_2C^2D_2^{-1}C^{-1}E_3^{-1}E_2C^2E_3E_2^{-1}D_3D_2^{-1}C^2D_3^{-1}D_2C^2E_2^{-1}C^{-1}E_2FD_2C^{-1}D_2^{-1}$

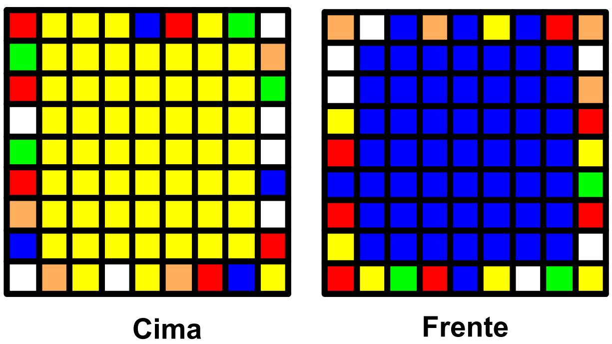
Depois das manobras feitas, temos 9 peças erradas em cada um dos dois centros, sendo que só uma das peças está na diagonal (em cada face).

31. $F^2C^{-1}D_3D_2^{-1}CD_3^{-1}D_2CD_3D_2^{-1}C^2D_3^{-1}D_2$

As duas diagonais já estão certas, faltando 8 peças em cada face.

32. $C^{-1}F^2D_2CD_4D_2^{-1}C^{-1}D_2^{-1}CD_4^{-1}D_2$

Exemplo



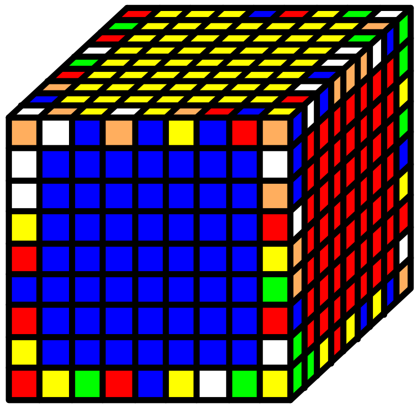
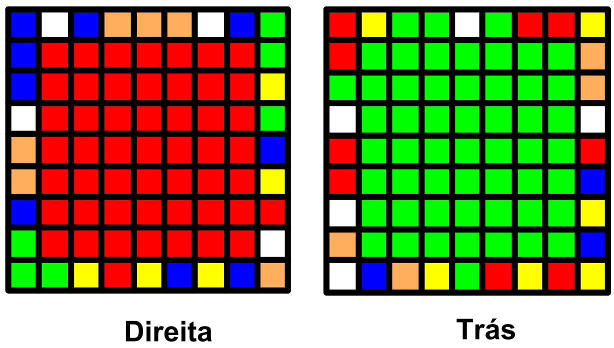


Figura 3.1:



Resolução

Vamos começar por colocar a peça azul e amarela em Cima/Frente, de modo a formar um bloco 3×1, embora numa posição não totalmente correta (no sentido em que queremos formar blocos que fiquem equidistantes dos extremos da aresta em que se encontram.

Curiosamente, temos uma peça azul e amarela na frente esquerda. Se imaginarmos a rotação da camada da frente, essa peça fica à direita da peça central azul e amarela, mas com as cores invertidas, pelo que é esta peça que nos interessa.

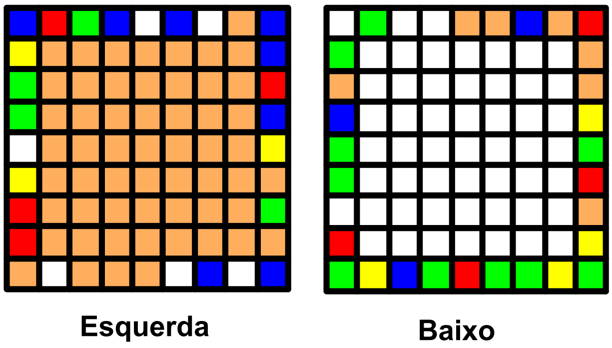


Figura 3.2:

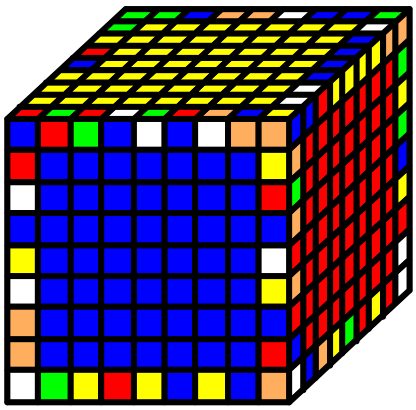
Então, fazemos $CF^{-1}C^{-1}E_4^{-1}E_3CEC^{-1}E_4E_3^{-1}$.

A outra peça azul e amarela ficou numa posição bastante favorável, bastando fazer BFB^{-1}, para que fiquemos numa posição que permite juntar as 4 peças azuis e amarelas.

Então, fazemos $E_4^{-1}C^{-1}DCE_4$, obtendo-se um bloco 4×1. É claro que poderíamos colocar a peça azul e amarela que falta para completarmos um bloco 5×1, mas vamos deixar isso para mais tarde.

Na frente, temos duas peças cor de laranja e brancas (juntas) e uma terceira separada. Essas três peças ficam juntas da seguinte maneira: $F_9D^{-1}B^{-1}D_4CE^{-1}C^{-1}D_4^{-1}F_9^{-1}$. O último movimento destina-se a termos menos trabalho no desenho do cubo.

Posição obtida:



É claro que há inúmeras maneiras de continuarmos. Eu costumo seguir a seguinte estratégia: considero a peça azul e amarela que está em Cima/Frente e procuro a peça central azul e branca. Essa peça é única e deve ficar com o branco voltado para o lado, quando a colocamos em Frente/Baixo. Logo, vamos procurar essa peça e vamos trazê-la para a Frente/Baixo (onde está uma peça com amarelo). Ora essa peça azul e branca corresponde ao azul que se vê em Cima/Esquerda.

Então, fazemos $E^2B^{-1}D_5C^{-1}DCD_5^{-1}$, otendo-se em C/F (Cima/Frente), duas peças azuis e vermelhas, faltando a peça central azul e vermelha, para completarmos o bloco central 3×1.

Então, fazemos $D^{-1}T^{-1}B^2$, colocando devidamente a peça central azul e vermelha.

Agora, fazemos $D_5D_4^{-1}C^{-1}D^{-1}CD_5^{-1}D_4$.

Vamos prosseguir com $D_9CFC^{-1}D_4C^{-1}D^{-1}CD_4^{-1}$, formando-se um bloco verde e laranja.

E vamos seguir com $DT^{-1}B^2D_5C^{-1}D^2CD_5^{-1}$, juntando-se duas peças com vermelho e amarelo.

Seguimos com $CE^2BE_4^{-1}CE^{-1}C^{-1}E_4$, formando-se um bloco azul e branco.

Há um bloco verde e amarelo com duas peças, mas vamos prosseguir com $D^{-1}T^{-1}B^2D_5C^{-1}D^2CD_5^{-1}$.

Como temos vários blocos de duas peças, vamos completá-los.

Seguimos com $D_9^{-1}CE^2BE_4^{-1}CE^{-1}C^{-1}E_4$, completando o bloco vermelho e amarelo (de três peças centrais).

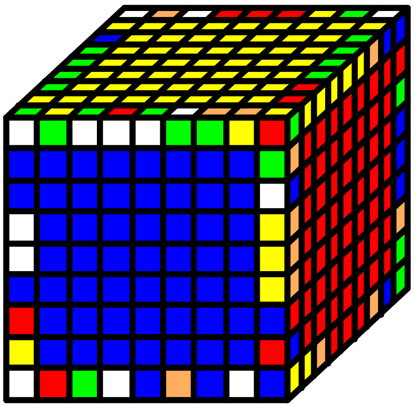
E seguimos com $FCE_4CE^{-1}C^{-1}E_4$, completando o bloco vermelho e verde.

Vamos prosseguir com $FT^{-1}B^2D_4D^{-1}C^{-1}DCD_4^{-1}$, completando-se o bloco verde e amarelo.

E temos uma posição em que nos falta colocar a peça central amarela e laranja, para completarmos novo bloco central. Por coincidência, ela está no lugar certo para ser colocada. Convém reparar quais as arestas que têm blocos centrais errados. Neste caso, os blocos centrais da camada da direita estão certos. Se fizermos T, ficamos com um bloco errado, na camada da direita, pelo que vamos fazer esse movimento. Agora, fazemos $D_5D_4^{-1}C^{-1}D^{-1}CD_5^{-1}D_4$.

Agora, vamos contar os blocos centrais errados. Neste caso, temos três blocos errados, todos na camada da frente.

Vejamos essa posição:



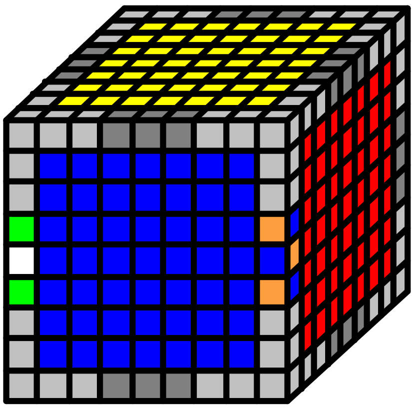
Nesta posição, eu costumo "saltar"as duas peças com vermelho e branco (em F/E) por cima da peça vermelha e branca que está em F/C. Para isso, fazemos:

$$E_4^{-1}F^{-1}EFE_4$$

E o bloco central vermelho e branco ficou pronto. Logo, faltam acertar dois blocos.

Neste caso, ambos os blocos ficaram com as cores certas, mas com peças mal orientadas.

Façamos $F^{-1}E^2$.



Embora se possa resolver os dois blocos, um de cada vez, é preferível resolvê-los em conjunto:

$$B_4DF^{-1}CD^{-1}FB_4^{-1}$$

E seguimos com
$$F_9^2 B_4 D F^{-1} C D^{-1} F B_4^{-1}$$

Assim, temos todos os blocos centrais resolvidos, pelo que temos um cubo $7 \times 7 \times 7$.

Agora, podemos formar blocos do tipo 2×1, nos extremos de cada aresta. No início, isso é fácil de fazer, embora seja preciso encontra a peça certa.

No caso que estamos resolvendo, temos um bloco com quatro peças azuis e amarelas, pelo que nos interessa encontrar a peça de canto correspondente. Com algum treino, vemos que essa peça está na camada de cima pois, dando meia volta, fica no lugar errado com as cores ao contrário. Então, ela vai ficar no lugar certo com as cores certas. Para isso, fazemos $T^2 B^2 E_2^{-1} C E^{-1} C^{-1} E_2 \, (F_9^2)$, obtendo-se um bloco de 5 peças azuis e amarelas.

Para formarmos um par de peças com amarelo e laranja, fazemos

$$E T B^2 E_2^{-1} C^{-1} D C E_2$$

E vamos seguir com $E^2 B E_3^{-1} E_2 C^{-1} D C E_3 E_2^{-1}$, formando-se um bloco azul e laranja com 5 peças.

Agora, para juntarmos duas peças com verde e vermelho, fazemos

$$B D^{-1} T^{-1} B^2 E_2^{-1} C E^{-1} C^{-1} E_2$$

Vamos prosseguir com $D T^{-1} B^2 D_2 C^{-1} D^{-1} C D_2^{-1}$, formando um par vermelho e branco.

E para formar um par verde e branco, fazemos

$$F C D_3 D_2^{-1} C^{-1} D C D_3^{-1} D_2$$

Agora, fazemos $T^{-1} E^{-1} B E_2^{-1} E^{-1} C E C^{-1} E_2$, formando-se um novo par verde e branco.

A certa altura, convém contar os pares errados, o que poderíamos fazer agora, mas é fácil de ver que ainda faltam muitos pares por acertar.

Neste caso, temos duas peças azuis e brancas que podem ser unidas. Para não complicar, vamos começar por mover todo o cubo, para que as peças fiquem numa posição habitual:
$$F_9 C_9 E_2^{-1} C E C^{-1} E_2$$

E temos duas peças com branco e laranja quase em posição.

Então, fazemos $C F C^{-1} E_2^{-1} C E C^{-1} E_2$.

Vamos unir duas peças com azul e vermelho, fazendo

$$D_9^{-1} D_2 D C^{-1} D^{-1} C D_2^{-1}$$

Agora, podemos juntas duas peças com verde e laranja:

$$CFC^{-1}E_3^{-1}E_2CE^{-1}C^{-1}E_3E_2^{-1}$$

Vamos seguir com $B^2D_2D^{-1}C^{-1}DCD_2^{-1}$, juntando mais duas peças com verde e laranja. E tivemos um bónus (um par laranja e amarelo). Talvez seja altura de contarmos os pares errados: 2 em cima, 3 em baixo e 2 nas laterais (sete ao todo).

Então, vamos formar mais dois pares:

$$C_9T^{-1}B^2E_2^{-1}C^{-1}DCE_2$$

E ficou formado um par azul e branco. Analisando a situação, vemos que há dois pares quase "certos", pois têm as cores invertidas. Por coincidência, trata-se das quatro peças com verde e amarelo. Para não demorarmos, vamos considera esses dois pares como "certos". Então, temos quatro pares por corrigir, pelo que vamos deixar isso para o fim.

Agora, vamos formar blocos de 5 ou 7 peças.

E vamos começar por formar um bloco de 5 peças (verdes e vermelhas).

$$D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$$

E seguimos com $D_9E^{-1}C_9^2D_9^{-1}D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$.

Note-se que só estamos preocupados em formar um bloco mais longo, mas podemos formar mais dois. É o que faremos no próximo passo, omeçando por $CC_9^{-1}F_9^{-1}$. Neste caso, temos um bloco de duas peças errado, pelo que vamos colocar o bloco azul e amarelo em baixo:

$$FBF^{-1}B^{-1}E_3^{-1}F^{-1}EFE_3$$

E conseguimos um bloco de 7 peças e outro de 6 peças.

Seguimos com

$$B^{-1}F_9B^2E_3^{-1}F^{-1}EFE_3E^2C_9D_9^{-1}E^2BE^2E_3^{-1}F^{-1}EFE_3$$

Para poupar tempo, foram indicadas duas sequências distintas.

E vamos prosseguir com

$$FC^2T^2B^2E_3^{-1}F^{-1}EFE_3D^2F_9^2D^2B^{-1}E_3^{-1}F^{-1}EFE_3$$

Agora, fazemos

$$FC^2E^2BD_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}B^2F_9E^{-1}TB^2EE_3^{-1}F^{-1}EFE_3$$

Seguimos com

$$DD_9B^2D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}EB^{-1}E_3^{-1}F^{-1}EFE_3$$

E ainda com $D^{-1}T^{-1}D_9^{-1}T^{-1}B^2D_3FD^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$

Nesta posição, temos quatro meios (longos) por completar, para além do meio verde e amarelo.

Façamos $D_9D^2FC_9DB^{-1}E_2^{-1}F^{-1}EFE_2$, completando-se dois meios longos (meio azul e amarelo e meio verde e vermelho).

E faltam dois meios, para além do meio verde e amarelo.

Façamos $D^{-1}C_9^2B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}$, ficando resolvido o meio vermelho e amarelo.

O meio vermelho e azul ficou na mesma situação que o meio verde e amarelo, o que é uma vantagem enorme, pois não precisamos de aplicar "aquela"longa sequência.

E seguimos com

$$C^{-1}EB_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}F_9^2B_2DF^{-1}CD^{-1}FB_2^{-1}F_9^2$$

E o cubo ficou transformado num cubo $3 \times 3 \times 3$.

Coloquemos o cubo resolvido com a face amarela em cima e a face azul na frente e baralhemo-lo da seguinte maneira:

$$\boxed{C_2D_2T_3E_2^2B_2}$$