

Ficha para praticar 11

Págs. 54 e 55

1.1. Conjunto dos majorantes: $[10, +\infty[$ Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 4]$

Máximo: 10

Mínimo: 4

1.2. Conjunto dos majorantes: $\emptyset$ Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 1]$

Máximo: não existe

Mínimo: 1

1.3. Conjunto dos majorantes: $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ Conjunto dos minorantes: $\emptyset$

Máximo: não existe

Mínimo: não existe

1.4. Conjunto dos majorantes: $\emptyset$ Conjunto dos minorantes: $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

Máximo: não existe

Mínimo: $-\frac{3}{2}$

2.1. $a_2 = \frac{3 \times 2 + 1}{2 + 2} \Leftrightarrow a_2 = \frac{7}{4}$

$a_4 = \frac{3 \times 4 + 1}{4 + 2} \Leftrightarrow a_4 = \frac{13}{6}$

$a_2 + a_4 = \frac{7}{4} + \frac{13}{6} \Leftrightarrow a_2 + a_4 = \frac{21}{12} + \frac{26}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_2 + a_4 = \frac{47}{24}$

2.2. $a_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1+2} = \frac{3n+3+1}{n+3} = \frac{3n+4}{n+3}$

$a_n + 1 = \frac{3n+1}{n+1} + 1 = \frac{3n+1}{n+2} + \frac{n+2}{n+2} =$
 $= \frac{3n+1+n+2}{n+2} = \frac{4n+3}{n+2}$

2.3. 2,8 é termo da sucessão se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 2,8$.

Assim:

$a_n = 2,8 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{n+2} = 2,8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n+1}{n+2} - 2,8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n+1-2,8(n+2)}{n+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n+1-2,8n-5,6}{n+2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{0,2n-4,6}{n+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,2n-4,6 = 0 \wedge n+2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,2n = 4,6 \wedge n \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{4,6}{0,2} \Leftrightarrow n = 23$

Portanto, 2,8 é termo da sucessão de ordem 23.

Por outro lado, 2,54 é termo da sucessão se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 2,54$.

Assim;

$a_n = 2,54 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{n+2} = 2,54 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n+1}{n+2} - 2,54 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3n+1-2,54(n+2)}{n+2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3n+1-2,54n-5,08}{n+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{0,46n-4,08}{n+2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,46n-4,08 = 0 \wedge n+2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,46n = 4,08 \wedge n \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{4,08}{0,46}$

$\Leftrightarrow n = \frac{204}{23}$

Como $\frac{204}{23}$ não é um número natural, então 2,54 não é

termo da sucessão.

3.1. a) $a_{p+2} = (p+2-5)^2 = (p-3)^2 = p^2 - 6p + 9$

$a_{2p} = (2p-5)^2 = 4p^2 - 20p + 25 =$

$b_{p+2} = (p+2)^2 - 5 = p^2 + 4p + 4 - 5 =$
 $= p^2 + 4p - 1$

$b_{2p} = (2p)^2 - 5 = 4p^2 - 5$

b) $a_{n+1} - a_n = (n+1-5)^2 - (n-5)^2 =$
 $= (n-4)^2 - (n-5)^2 =$
 $= n^2 - 8n + 16 - (n^2 - 10n + 25) =$
 $= n^2 - 8n + 16 - n^2 + 10n - 25 =$
 $= 2n - 9$

$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 5 - (n^2 - 5) =$
 $= n^2 + 2n + 1 - 5 - n^2 + 5 =$
 $= 2n + 1$

Então, $a_{n+1} - a_n = 2n - 9$ e $b_{n+1} - b_n = 2n$

3.2. $a_p < b_p \Leftrightarrow (p-5)^2 < p^2 - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 - 10p + 25 < p^2 - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10p + 25 < -5 \Leftrightarrow -10p < -5 - 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10p < -30 \Leftrightarrow 10p > 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p > 30$

Portanto, $p \in \mathbb{N} \wedge p > 30$.3.3. 7 é o termo da sucessão a_n se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 7$.

Assim:

$a_n = 7 \Leftrightarrow (n-5)^2 = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n-5 = -\sqrt{7} \vee n-5 = \sqrt{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = -\sqrt{7} + 5 \vee n = \sqrt{7} + 5$

 $-\sqrt{7} + 5$ e $\sqrt{7} + 5$ não são números naturais, então 7 não é termo da sucessão a_n .Por outro lado, 7 é o termo da sucessão b_n se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = 7$.

Assim:

$$b_n = 7 \Leftrightarrow n^2 - 5 = 7 \Leftrightarrow n^2 = 7 + 5 \Leftrightarrow n^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -\sqrt{12} \vee n = \sqrt{12}$$

$-\sqrt{12}$ e $\sqrt{12}$ não são números naturais, pelo que 7 também não é termo da sucessão b_n .

Portanto, 7 não é termo de nenhuma das duas sucessões dadas.

4.1. Vamos estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5 - (n+1)}{3} - \frac{5 - n}{3} = \\ &= \frac{5 - n - 1}{3} - \frac{5 - n}{3} = \\ &= \frac{5 - n - 1 - 5 + n}{3} = \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Assim, $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, u_n é decrescente.

4.2. Vamos estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)}{3(n+1)-1} - \frac{3n}{3n-1} = \\ &= \frac{3n+3}{3n+3-1} - \frac{3n}{3n-1} = \\ &= \frac{3n+3}{3n+2} - \frac{3n}{3n-1} = \\ &= \frac{(3n+3)(3n-1) - 3n(3n+2)}{(3n+2)(3n-1)} = \\ &= \frac{9n^2 - 3n + 9n - 3 - 9n^2 - 6n}{(3n+2)(3n-1)} = \\ &= \frac{-3}{(3n+2)(3n-1)} \end{aligned}$$

Sendo n um número natural $3n+2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $3n-1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\frac{-3}{(3n+2)(3n-1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então, u_n é decrescente.

4.3. Vamos estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{2}{3}\right) = \\ &= -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Sendo, n um número natural $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, portanto,

$-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que u_n é decrescente.

5.1. Vamos estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4(n+1)+1}{n+1+4} - \frac{4n+1}{n+4} = \\ &= \frac{4n+4+1}{n+5} - \frac{4n+1}{n+4} = \frac{4n+5}{n+5} - \frac{4n+1}{n+4} = \\ &= \frac{(4n+5)(n+4) - (4n+1)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{4n^2 + 16n + 5n + 20 - 4n^2 - 20n - n - 5}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{15}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

Sendo n um número natural, $(n+5)(n+4) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

pelo que $\frac{15}{(n+5)(n+4)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, u_n é crescente.

5.2. Vamos estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - 2^n = \\ &= 2^n \times 2 - 2^n = 2^n (2 - 1) = 2^n \end{aligned}$$

Sendo, n um número natural, $2^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, u_n é crescente.

5.3. Vamos estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 2(n+1) - (n^2 - 2n) = \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - n^2 + 2n = \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

Sendo n um número natural, $2n - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, u_n é crescente.

6. Vamos começar por calcular alguns termos da sucessão, para melhor compreender o comportamento, da sucessão, uma vez que a presença de $(-1)^n$ pode sugerir que a sucessão é não monótona.

$$u_1 = \frac{1 + (-1)^9}{1 + 2} = \frac{1 - 1}{3} = 0$$

$$u_2 = \frac{2 + (-1)^2}{2 + 2} = \frac{2 + 1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = \frac{3 + (-1)^3}{3 + 2} = \frac{3 - 1}{5} = \frac{2}{5}$$

Como $u_1 < u_2$ e $u_2 > u_3$, podemos desde já concluir que a sucessão não é monótona.

7.1. Recorrendo ao algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r} 8n \quad | \quad n+1 \\ \hline -8n-8 \quad 8 \\ \hline -8 \end{array}$$

$$u_n = 8 - \frac{8}{n+1}$$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+1}$ é

decrescente e de termos positivos, portanto, 0 é um minorante e o primeiro termo, no caso $\frac{1}{2}$, é majorante.

Assim:

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -\frac{8}{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 8 - \frac{8}{n+1} < 8, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq u_n < 8, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, a sucessão (u_n) é minorada e majorada, pelo que é limitada.

$$7.2. \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Por outro lado:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par}$$

$$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é ímpar}$$

$$\text{Portanto, } -1 \leq u_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como a sucessão (u_n) é minorada e majorada, então é limitada.

7.3. Consideremos os termos de ordem par, no caso, $u_n = \frac{n}{2n+1}$.

Recorrendo ao algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r} n \quad | \quad 2n+1 \\ -n - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \leq \frac{1}{10}, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{10} \leq -\frac{\frac{1}{2}}{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \leq \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq u_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par}$$

Consideremos, agora, os termos de ordem ímpar, no caso,

$$u_n = \frac{3}{n}.$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é ímpar}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{3}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é ímpar}.$$

Assim, o maior dos majorantes determinado é 3 e o menor dos minorantes determinado é 0, pelo que, $0 < u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Como a sucessão é minorada e majorada, então é limitada.

$$8.1. \quad u_p < 10 + 0,001 \Leftrightarrow \frac{10p+1}{p} < 10 + 0,001$$

Como $p \in \mathbb{N}$, então:

$$10p+1 < 10p+0,001p \Leftrightarrow 1 < 0,001p \Leftrightarrow \frac{1}{0,001} < p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > 1000$$

Portanto, os termos da sucessão (u_n) são inferiores a $10 + 0,001$ a partir do termo de ordem 1001, inclusive.

$$8.2. \quad u_p < 10 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{10p+1}{p} < 10 + \varepsilon$$

Como $p \in \mathbb{N}$, então:

$$10p+1 < 10p + \varepsilon p \Leftrightarrow 1 < \varepsilon p \Leftrightarrow p > \frac{1}{\varepsilon}$$

Então, os termos da sucessão (u_n) são inferiores a $10 + \varepsilon$ a partir do termo de ordem $k+1$, sendo k o maior número inteiro menor que $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$8.3. \quad u_n = \frac{10n+1}{n} \Leftrightarrow u_n = 10 + \frac{1}{n}$$

Assim:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10 < 10 + \frac{1}{n} \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, $10 < u_n \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que a sucessão (u_n) é minorada e majorada, logo é limitada.

9. $3^{2n} - 1$ é divisível por 8 é equivalente a dizer que $3^n - 1 = 8k$, sendo k um número natural.

Seja $p(n)$ a condição $3^n - 1 = 8k$.

1.º A propriedade é verdadeira para $n=1$, isto é, $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

$$3^2 - 1 = 8k \Leftrightarrow 8 = 8k \quad (\text{verdade com } k=1)$$

2.º A propriedade é hereditária, ou seja:

$$3^{2n} - 1 = 8r \Rightarrow 3^{2(n+1)} - 1 = 8s, \text{ com } r, s \in \mathbb{N}.$$

Admitindo que, para determinado $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$3^{2n} - 1 = 8r :$$

$$3^{2(n+1)} - 1 = 8s \Leftrightarrow 3^{2n+2} - 1 = 8s \Leftrightarrow 3^{2n} \times 3^2 - 1 = 8s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8r+1) \times 3^2 - 1 = 8s \Leftrightarrow 8r \times 3^2 + 3^2 - 1 = 8s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8r \times 9 + 8 = 8s \Leftrightarrow 8(9r+1) = 8s$$

$$\text{Sendo que } 8(9r+1) = 8s \Leftrightarrow s = 9r+1$$

Portanto, $p(n)$ é universal em $\mathbb{N}$, pois $p(1)$ é verdadeira e

$p(n)$ é hereditária, logo $3^{2n} - 1$ é para todo o número natural n , divisível por 8.

10.1. A sucessão (u_n) não é majorada, pelo que não é limitada.

10.2. A sucessão (u_n) não é minorada, pelo que não é limitada.

11.1. $a_1 = 3$

$$a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{\frac{5}{3}} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = \frac{9}{7}, \quad a_5 = 2 - \frac{1}{a_4} = \frac{11}{9}$$

Portanto, $a_1 = 3, a_2 = \frac{5}{3}, a_3 = \frac{7}{5}, a_4 = \frac{9}{7}$ e $a_5 = \frac{11}{9}$.

11.2. $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

- Para $n=1$:

$$a_1 = \frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1 - 1} \Leftrightarrow 3 = \frac{2+1}{2-1} \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ (verdadeira)}$$

- Pretendemos agora provar que a propriedade é hereditária, ou seja, se para dado $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{2n+1}{2n-1}, \text{ então } a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)-1} = \frac{2n+3}{2n+1}.$$

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} = \quad (\text{fórmula de recorrência})$$

$$= 2 - \frac{1}{\frac{2n+1}{2n-1}} = \quad (\text{por hipótese})$$

$$= 2 - \frac{2n-1}{2n+1} =$$

$$= \frac{4n+2-2n+1}{2n+1} = \frac{2n+3}{2n+1}$$

Portanto, a propriedade é hereditária.

Pelo princípio da indução matemática podemos concluir

$$\text{que } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2n+1}{2n-1}.$$

11.3. $a_{200} + a_{300} = \frac{2 \times 200 + 1}{2 \times 200 - 1} + \frac{2 \times 300 + 1}{2 \times 300 - 1} =$

$$= \frac{401}{399} + \frac{601}{599} = \frac{479\,998}{239\,001}$$

Portanto, $a_{200} + a_{300} = \frac{479\,998}{239\,001}$.

11.4. $a_n = \frac{33}{31} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{33}{31} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{2n-1} - \frac{33}{31} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+1)31 - 33(2n-1)}{31(2n-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{62n+31-66n+33}{31(2n-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4n+64}{31(2n-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4n+64 = 0 \wedge 31(2n-1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n = 64 \wedge 2n-1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 16 \wedge n \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = 16$$

Então, $\frac{33}{31}$ é o 16.º termo da sucessão.

12.1. $u_5 + u_8 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

12.2. $\left(\frac{u_3}{u_2}\right)^2 = \left[\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)}\right]^2 = \left(\frac{\cos(\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Ficha para praticar 12

Págs. 56 a 59

1.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1)}{3} + 4 - \left(\frac{5n}{3} + 4\right) =$

$$= \frac{5n+5}{3} + 4 - \frac{5n}{3} - 4 =$$

$$= \frac{5}{3}$$

pelo que $u_{n+1} - u_n$ é constante, no caso iguala $\frac{5}{3}$.

Assim, a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{5}{3}$.

1.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2+3(n+1)}{n+1} - \frac{2+3n}{n} =$

$$= \frac{2+3n+3}{n+1} - \frac{2+3n}{n} =$$

$$= \frac{5+3n}{n+1} - \frac{2+3n}{n} =$$

$$= \frac{(5+3n)n - (2+3n)(n+1)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{5n+3n^2-2n-2-3n^2-3n}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{-2}{n(n+1)}$$

Como $u_{n+1} - u_n$ não é constante, podemos, desde já concluir, que (u_n) não é uma progressão aritmética.

1.3. $u_n = \frac{n^2-n}{n} = \frac{n(n-1)}{n} = n-1$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) - 1 - (n-1) = 1$$

$u_{n+1} - u_n$ é constante, no caso igual a 1.

Assim, a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

1.4. $u_n = n - \frac{3-2n}{4} =$

$$= \frac{4n-3+2n}{4} =$$

$$= \frac{6n-3}{4}$$

Por outro lado:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6(n+1)-3}{4} - \frac{6n-3}{4} =$$

$$= \frac{6n+6-3-6n+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$u_{n+1} - u_n$ é constante, no caso igual a $\frac{3}{2}$.

Assim, a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{3}{2}$.

- 2.1. (u_n) é uma progressão aritmética e sendo r a respetiva razão, temos que:

$$u_{10} = u_5 + 5r, \text{ ou seja, } 6 = 4 + 5r \Leftrightarrow 5r = 2 \Leftrightarrow r = \frac{2}{5}.$$

A razão é igual a $\frac{2}{5}$.

- 2.2. (u_n) é uma progressão aritmética e sendo r a respetiva razão, temos que:

$$u_{60} = u_{50} + 10r, \text{ ou seja: } 70 = 80 + 10r \Leftrightarrow 10r = -10 \Leftrightarrow r = -1$$

A razão é igual a -1

- 2.3. (u_n) é uma progressão aritmética e sendo r a respetiva razão, temos que:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_{n-1} = 2r$$

$$\text{Ou seja, } 5 = 2r \Leftrightarrow r = \frac{5}{2}.$$

A razão é igual a $\frac{5}{2}$.

- 2.4. (u_n) é uma progressão aritmética e sendo r a respetiva razão, temos que:

$$u_{n+3} = u_n + 3r \Leftrightarrow u_{n+3} - u_n = 3r$$

Ou seja:

$$\sqrt{2} = 3r \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

A razão é igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

- 3.1. Determinemos a razão r desta progressão aritmética. Temos que $u_7 = u_4 + 3r$, ou seja:

$$10 = 8 + 3r \Leftrightarrow 3r = 2 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

Portanto, a razão é $\frac{2}{3}$.

Por outro lado:

$$u_{12} = u_7 + 5r$$

$$u_{12} = 10 + 5 \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow u_{12} = 10 + \frac{10}{3} \Leftrightarrow u_{12} = \frac{40}{3}$$

Então, o 12.º termo desta progressão é $\frac{40}{3}$.

- 3.2. Determinemos a razão desta progressão aritmética. Temos que $u_6 = u_3 + 3r$, ou seja:

$$-4 = 2 + 3r \Leftrightarrow 3r = -6 \Leftrightarrow r = -2$$

Portanto, a razão é -2 .

Por outro lado, temos, por exemplo, que:

$$u_{12} = u_6 + 6r, \text{ isto é:}$$

$$u_{12} = -4 + 6 \times (-2) \Leftrightarrow u_{12} = -4 - 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{12} = -16$$

Então, o 12.º termo desta progressão é -16 .

- 4.1. Determinemos a razão r desta progressão aritmética. Temos que $u_{20} = u_5 + 15r$:

$$45 = 30 + 15r \Leftrightarrow 15r = 15 \Leftrightarrow r = 1$$

A razão é 1

Determinemos o 1.º termo:

$$u_5 = u_1 + 4r, \text{ isto é:}$$

$$30 = u_1 + 4 \times 1 \Leftrightarrow u_1 = 30 - 4 \Leftrightarrow u_1 = 26$$

O termo geral de (u_n) é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

Portanto:

$$u_n = 26 + (n-1) \times 1 \Leftrightarrow u_n = 26 + n - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = n + 25$$

Assim, o termo geral é $u_n = n + 25$.

- 4.2. Determinemos a razão r desta progressão aritmética. $u_{12} = u_8 + 4r$, ou seja:

$$-2 = 10 + 4r \Leftrightarrow 4r = -12 \Leftrightarrow r = -3$$

A razão é -3 .

Determinemos o 1.º termo.

$$u_8 = u_1 + 7r, \text{ isto é:}$$

$$10 = u_1 - 21 \Leftrightarrow u_1 = 31$$

O termo geral de (u_n) é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

Portanto:

$$u_n = 31 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow u_n = 31 - 3n + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = -3n + 34$$

Assim, o termo geral é $u_n = -3n + 34$.

- 5.1. Os múltiplos naturais de 3 são termos de uma progressão aritmética de razão 3 e cujo primeiro termo é 3.

Por outro lado, $\frac{54}{3} = 18$, isto é, $54 = 3 \times 18$ e $\frac{348}{3} = 116$,

isto é, $348 = 3 \times 116$.

Assim, pretende-se calcular a seguinte soma:

$$3 \times 18 + 3 \times 19 + 3 \times 20 + \dots + 3 \times 115 + 3 \times 116 =$$

$$= \frac{54 + 348}{2} \times (116 - 17) = 201 \times 99 = 19\,899$$

A soma pedida é 19899.

- 5.2. O menor múltiplo de 5 maior que 42 é 45 e $\frac{45}{5} = 9$, logo

$$45 = 5 \times 9.$$

O maior múltiplo de 5 menor que 448 é 445 e $\frac{445}{5} = 89$,

logo $445 = 5 \times 89$.

Por outro lado, temos que os múltiplos naturais de 5 são termos de uma progressão aritmética de razão 5 e cujo primeiro termo é 5. Assim, pretende-se determinar a seguinte soma:

$$5 \times 9 + 5 \times 10 + \dots + 5 \times 88 + 5 \times 89 =$$

$$= \frac{45 + 445}{2} \times (89 - 9 + 1) = 245 \times 81 = 19\,845$$

A soma pedida é 19 845.

$$6.1. \quad u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 4 - (8n-4) = 8n+8-4-8n+4 = 8$$

Como $u_{n+1} - u_n$ é constante, no caso igual a 8, a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 8.

6.2. Seja S_{20} a soma pedida.

$$\text{Então, } S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20.$$

$$u_1 = 4 \text{ e } u_{20} = 8 \times 20 - 4 \Leftrightarrow u_{20} = 160 - 4 \Leftrightarrow u_{20} = 156$$

$$S_{20} = \frac{4+156}{2} \times 20 = 80 \times 20 = 1600$$

A soma pedida é igual a 1600.

$$6.3. \quad u_n > 508 \Leftrightarrow 8n - 4 > 508 \Leftrightarrow 8n > 508 + 4 \Leftrightarrow 8n > 512 \Leftrightarrow n > \frac{512}{8} \Leftrightarrow n > 64$$

Assim, o primeiro termo de (u_n) que é maior do que 508 é o 65.º termo.

$$7.1. \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{3}}{\frac{4^n}{3}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ é constante e igual a 4.

Portanto a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

$$7.2. \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{3^n}{5^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{3^n} = \frac{3^{n+1-3}}{5^{n+2-(n+2)}} = \frac{3^{n+1-3}}{5^{n+2-n-2}} = \frac{3^{n-2}}{5^0} = \frac{3}{5}$$

Então, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ é constante e igual a $\frac{3}{5}$.

Portanto, a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{5}$.

$$7.3. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} \times (\sqrt{8})^{n+1+3}}{2^n \times (\sqrt{8})^{n+3}} = \frac{2^{n+1} \times (\sqrt{8})^{n+4}}{2^n (\sqrt{8})^{n+3}} = 2^{n+1-n} \times (\sqrt{8})^{n+4-(n+3)} = 2 \times (\sqrt{8})^{n+4-n-3} = 2 \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

Portanto, a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $4\sqrt{2}$.

$$8.1. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{-(n+1)+2}}{2 \times 3^{-n+2}} = \frac{3^{-n-n+2}}{3^{-n+2}} = \frac{3^{-2n+2}}{3^{-n+2}} = 3^{n+1-(-n+2)} = 3^{n+1+n-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

8.2. A soma, S_n , dos primeiros termos da sucessão (v_n) é:

$$S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$v_1 = 2 \times 3^{-1+2} \Leftrightarrow v_1 = 2 \times 3 \Leftrightarrow v_1 = 6$$

$$S_n = 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 9 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 9 = 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3^2 = 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

Assim, uma expressão da soma dos n primeiros termos da sucessão pode ser $S_n = 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

$$8.3. \quad v_n = \frac{2}{81} \Leftrightarrow 2 \times 3^{-n+2} = \frac{2}{81} \Leftrightarrow 3^{-n+2} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{-n+2} = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{-n+2} = 3^{-4} \Leftrightarrow -n+2 = -4 \Leftrightarrow n = 6$$

Portanto, $\frac{2}{81}$ é o 6.º termo da sucessão.

9. Seja (u_n) a progressão geométrica.

$$u_5 = u_3 \times r^2, \text{ sendo } r \text{ a razão de } (u_n).$$

$$26 = 8 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{26}{8} \Leftrightarrow r^2 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow r = -\frac{\sqrt{13}}{2} \vee r = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

No entanto, sabemos que a sucessão (u_n) é não monótona,

pelo que $r < 0$, ou seja, $r = -\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Determinemos, agora, o primeiro termo de (u_n) .

$$u_3 = u_1 \times r^2, \text{ ou seja:}$$

$$8 = u_1 \times \frac{13}{4} \Leftrightarrow u_1 = 8 \times \frac{4}{13} \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{13}.$$

Por outro lado, o termo geral de u_n é:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}, \text{ ou seja:}$$

$$u_n = \frac{32}{13} \times \left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Então, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{32}{13} \times \left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}.$$

10.1. $u_1 = 4$

$$u_2 = \frac{u_1}{3} \Leftrightarrow u_2 = \frac{4}{3}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{3} \Leftrightarrow u_3 = \frac{\frac{4}{3}}{3} \Leftrightarrow u_3 = \frac{4}{9}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{3} \Leftrightarrow u_4 = \frac{\frac{4}{9}}{3} \Leftrightarrow u_4 = \frac{4}{27}$$

Portanto, $u_3 = \frac{4}{9}$ e $u_4 = \frac{4}{27}$.

10.2. Seja $A(n)$ a condição $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

1.º $A(1)$ é verdadeira.

$$u_1 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} \Leftrightarrow 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$\Leftrightarrow 4 = 4 \times 1 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ (proposição verdadeira)}$$

2.º A propriedade é hereditária

Tem-se que $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é verdadeira, para determinado $n \in \mathbb{N}$, por hipótese de indução e

$$u_{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Assim:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3} \times \left[4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Provamos, assim, a hereditariedade da propriedade.

Então, como $A(1)$ é verdadeira e a propriedade é hereditária,

pelo princípio da indução, pode-se concluir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

11.1. Seja $A(n)$ a condição $u_n = -3 + (n-1) \times 5$.

1.º $A(1)$ é verdadeira.

$$u_1 = -3 + (1-1) \times 5 \Leftrightarrow -3 = -3 + 0 \times 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 = -3 \text{ (proposição verdadeira)}$$

2.º A propriedade é hereditária

Tem-se que $u_n = -3 + (n-1) \times 5$ é verdadeira, para um dado $n \in \mathbb{N}$, por hipótese de indução e $u_n = -3 + 5n$.

Assim, vem que:

$$u_{n+1} = u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} = -3 + (n-1) \times 5 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = -3 + 5n - 5 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = -3 + 5n$$

Provamos, assim, a hereditariedade da propriedade.

Então, como $A(1)$ é verdadeira e a propriedade é

hereditária, pelo princípio da indução, pode-se concluir

que $u_n = -3 + (n-1) \times 5, \forall n \in \mathbb{N}$, como queríamos

provar.

11.2. Sabemos que $u_n = -3 + (n-1) \times 5, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$u_{10} = -3 + (10-1) \times 5 \Leftrightarrow u_{10} = -3 + 9 \times 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{10} = -3 + 45 \Leftrightarrow u_{10} = 42$$

$$u_{30} = -3 + (30-1) \times 5 \Leftrightarrow u_{30} = -3 + 29 \times 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{30} = -3 + 145 \Leftrightarrow u_{30} = 142$$

$$\text{Assim, } u_{10} - u_{30} = 42 - 142 \Leftrightarrow u_{10} - u_{30} = -100.$$

$$12.1. u_{n+1} - u_n = \frac{3-6(n+1)}{2} - \frac{3-6n}{2} =$$

$$= \frac{3-6n-6}{2} - \frac{3-6n}{2} =$$

$$= \frac{-6n-3}{2} - \frac{3-6n}{2} =$$

$$= \frac{-6n-3-3+6n}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -3$, ou seja, é uma progressão aritmética de razão -3 .

$$12.2. \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 2^{1-(n+1)}}{3 \times 2^{1-n}} =$$

$$= \frac{2^{1-n-1}}{2^{1-n}} = \frac{2^{-n}}{2^{1-n}} =$$

$$= 2^{-n-(1-n)} = 2^{-n-1+n} =$$

$$= 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$, ou seja, (v_n) é uma progressão

geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

12.3. Pretende-se determinar a soma de 40 termos consecutivos da sucessão (u_n) , a partir do 15.º termo, u_{15} , inclusive, ou seja, pretende-se determinar:

$$u_{15} + u_{16} + \dots + u_{53} + u_{54} = S_{54} - S_{14}$$

$$S_{14} = \frac{u_1 + u_{14}}{2} \times 14$$

$$S_{54} = \frac{u_1 + u_{54}}{2} \times 54$$

$$u_1 = -\frac{3}{2}, u_{14} = \frac{3-6 \times 14}{2} = -\frac{81}{2}$$

$$u_{54} = \frac{3-6 \times 54}{2} = -\frac{321}{2}$$

$$S_{54} - S_{14} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{321}{2}}{2} \times 54 - \frac{-\frac{3}{2} - \frac{81}{2}}{2} \times 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{54} - S_{14} = -81 \times 54 + 21 \times 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{54} - S_{14} = -4080$$

ou

$$S = \frac{u_{15} + u_{54}}{2} \times (54 - 15 + 1) =$$

$$= \frac{-\frac{87}{2} - \frac{321}{2}}{2} \times 40 = \left| \begin{array}{l} u_{15} = \frac{3-6 \times 15}{2} \\ = -\frac{87}{2} \end{array} \right.$$

$$= -204 \times 20 =$$

$$= -4080$$

A soma pedida é igual a -4080 .

12.4. $v_1 = 3 \times 2^{1-1} \Leftrightarrow v_1 = 3 \times 2^0 \Leftrightarrow v_1 = 3 \times 1 \Leftrightarrow v_1 = 3$

$$v_n = \begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

12.5. Pretende-se determinar a soma dos 12 termos consecutivos da progressão geométrica (v_n) , a partir do 8.º termo,

inclusive, ou seja, pretende-se determinar:

$$v_8 + v_9 + \dots + v_{18} + v_{19} = S_{19} - S_7$$

$$S_{19} = v_1 \times \frac{1-r^{19}}{1-r}$$

$$S_7 = v_1 - \frac{1-r^7}{1-r}, \text{ sendo } r = \frac{1}{2} \text{ (razão).}$$

Assim:

$$\begin{aligned} S_{19} - S_7 &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \frac{1}{2}} - 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{\frac{1}{2}} - 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{2}} = \\ &= 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right) - 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right) = \\ &= \frac{12 \cdot 285}{262 \cdot 144} \end{aligned}$$

13. Considerando que os três termos consecutivos pertencem a uma progressão aritmética, temos:

$$x^2 - 1 - (x+1) = x+9 - (x^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 1 = x + 9 - x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

Portanto, para $x = 3$, obtemos os termos:

$$x+1 = 3+1 = 4$$

$$x^2 - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$x+9 = 3+9 = 12$$

Para $x = -2$, obtemos os termos:

$$x+1 = -2+1 = -1$$

$$x^2 - 1 = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$x+9 = -2+9 = 7$$

Logo, os termos são 4, 8 e 12 ou -1, 3 e 7.

14. Como o perímetro do triângulo é 36, temos $u_1 + u_2 + u_3 = 36$

e sendo r a razão da progressão,

$$u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) = 36$$

isto é, $3u_1 + 3r = 36$, ou seja, $u_1 + r = 12$.

Então:

$$u_2 = u_1 + r = 12, u_1 = u_2 - r = 12 - r$$

$$u_3 + r = 12 + r$$

Por outro lado:

$$u_2 = u_1 + r = 12, u_1 = u_2 - r = 12 - r$$

$$u_3 = u_2 + r = 12 + r$$

Por outro lado, sabemos que o triângulo é retângulo, logo

$$u_1^2 + u_2^2 = u_3^2 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + r)^2 = (u_1 + 2r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + 12^2 = (u_1 + 24 - 2u_1)^2, \text{ pois } u_1 = 12 - r \Leftrightarrow r = 12 - u_1$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + 12^2 = (24 - u_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (12 - r)^2 + 12^2 = (12 + r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 144 - 24r + r^2 + 144 = 144 + 24r + r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48r = 144 \Leftrightarrow r = 3$$

Daqui resulta que:

$$u_1 = 12 - 3 = 9, u_2 = 12 \text{ e } u_3 = 12 + 3 = 15$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo retângulo $[ABC]$ são 9 cm, 12 cm e 15 cm.

15. Suponhamos que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r \neq 0$, então $u_n = ar^{n-1}$.

Por definição, temos que:

$$\frac{u_{13}}{u_7} = \frac{ar^{13-1}}{ar^{7-1}} = r^6$$

Por outro lado, temos que:

$$\frac{u_{13}}{u_7} = \frac{1}{512} = \frac{1}{512^2} = \frac{1}{8^6}$$

Das duas igualdades resulta:

$$r^6 = \frac{1}{8^6} \Leftrightarrow r^6 = \left(\frac{1}{8}\right)^6 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{8} \vee r = \frac{1}{8}$$

Como (u_n) é uma progressão geométrica monótona, a razão

r é positiva, ou seja $r = \frac{1}{8}$.

Visto que:

$$512 = u_7 = a \times \left(\frac{1}{8}\right)^6, a = \frac{512}{\left(\frac{1}{8}\right)^6}$$

ou seja:

$$a = \frac{8^3}{\left(\frac{1}{8}\right)^6} = \frac{8^3}{8^{-6}} = 8^9$$

$$\text{Logo, } u_n = 8^9 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = 8^9 \times 8^{-n+1} = 8^{10-n}.$$

16. Seja (u_n) uma progressão geométrica de potências de base 3 e de primeiro termo 81.

Uma expressão do termo geral da progressão geométrica pode ser dada por $u_n = 81 \times 3^{n-1} = 3^4 \times 3^{n-1} = 3^{n+3}$.

$$u_n = 1 \, 162 \, 261 \, 467 \Leftrightarrow 3^{n+3} = 3^{19} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+3 = 19 \Leftrightarrow n = 16$$

Portanto, o termo 1 162 261 467 é o termo da progressão geométrica (u_n) de ordem 16.

$$S_{16} = \sum_{i=1}^{16} u_i = 81 \times \frac{1-3^{16}}{1-3} =$$

$$= 81 \times \left(\frac{3^{16}-1}{2}\right) = 1 \, 743 \, 392 \, 160$$

$$17.1. \forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{5^{n+1}}}{\frac{2}{5^n}} = \frac{2 \times 5^n}{2 \times 5^{n+1}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{5^n}{5^n \times 5} = \frac{1}{5}$$

Portanto, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

17.2. A razão da progressão geométrica (v_n) é $\frac{1}{5}$ e o primeiro termo é $v_1 = \frac{2}{5}$.

Logo, a soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

Portanto, uma expressão da soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (v_n) é:

$$S_n = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

18. Sabemos que a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\sqrt{2}$, portanto:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \sqrt{2}$$

Por outro lado, temos que a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica:

$$r = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-\sqrt{2}u_{n+1}}}{3^{-\sqrt{2}u_n}} = 3^{-\sqrt{2}(u_{n+1} - u_n)} = 3^{-\sqrt{2}(\sqrt{2})} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Portanto, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{9}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ pelo que (v_n) é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{9}$.

19. Os tempos de treino de cada semana estão e progressão aritmética de razão $r = \frac{1}{5}$, pois 12 minutos corresponde a $\frac{1}{5}$ de uma hora.

O termo geral desta progressão é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times \frac{1}{5}$$

Por outro lado, o António pretende que na semana anterior à semana da prova, ou seja, daqui a 28 semanas, a duração do treino, dessa semana, seja, inferior ou igual a 8 horas, isto é, que $u_{28} \leq 8$.

Assim, vem que:

$$u_{28} < 8 \Leftrightarrow u_1 + (28-1) \times \frac{1}{5} \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 27 \times \frac{1}{5} \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 5,4 \leq 8 \Leftrightarrow u_1 < 2,6$$

Temos que $2,6 \text{ h} = 2 \text{ h } 36 \text{ min}$, portanto, a duração, do treino da primeira semana não pode ser superior a 2 h 36 min.

20.1. Como $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3}w_n}{w_n} = \frac{2}{3}$, a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$.

20.2. O termo geral da sucessão (w_n) é dado por $w_n = w_1 \times r^{n-1}$.

$$\text{Como } w_1 = -2 \text{ e } r = \frac{2}{3}:$$

$$w_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Pretende-se determinar:

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{12} w_i &= w_3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} = \\ &= -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{\frac{1}{3}} = \\ &= -6 \times \frac{4}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right] = \\ &= -\frac{464}{177} \times \frac{200}{147} \end{aligned}$$

$$21.1. u_2 = \sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{3} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$u_4 = \sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$u_6 = \sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2 \sin(2\pi) =$$

$$= \sqrt{3} - 2 \times 0 = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \frac{u_6}{u_2 + u_4} = \frac{\sqrt{3}}{0 + 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ como queríamos}$$

verificar.

$$21.2. u_n = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{n\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (n = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \vee n = 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}_0^+)$$

Como $\mathbb{Z}_0^+$ é um conjunto com uma infinidade de elementos, então existe uma infinidade de termos não nulos, mais concretamente, os termos de ordem n , tais que $n = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \vee n = 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}_0^+$

22. Uma expressão para o termo geral da progressão (u_n) pode ser dada por $u_n = u_1 + (n-1)r$.

$$\begin{aligned} u_{1+p} &= u_1 + (1+p-1)r = u_1 + pr \\ u_{n-p} &= u_1 + (n-p-1)r \\ u_{1+p} + u_{n-p} &= (u_1 + pr) + (u_1 + (n-p-1)r) \\ &= u_1 + pr + u_1 + nr - pr - r \\ &= u_1 + u_1 + nr - r \\ &= u_1 + nr - r + u_1 \\ &= u_1 + \underbrace{(n-1)r}_{u_n} + u_1 \end{aligned}$$

Ficha de teste 6

Págs. 60 e 61

1. $v_1 = -3$
 $v_2 = v_1 + 4 = -3 + 4 = 1$
 $v_3 = v_2 + 4 = 1 + 4 = 5$
 $v_4 = v_3 + 4 = 5 + 4 = 9$

Portanto, o quarto termo da sucessão é 9.

Resposta: (A)

2. ■ $u_n = (5-n)^2$

Basta, verificar que:

$$u_4 = (5-4)^2 = 1$$

$$u_5 = (5-5)^2 = 0$$

$$u_6 = (5-6)^2 = 1$$

Portanto, $u_4 > u_5$ e $u_5 < u_6$, pelo que a sucessão (u_n) é não monótona.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_n &= \frac{2}{7-2n} \\ u_2 &= \frac{2}{7-2 \times 2} \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{2}{7-2 \times 3} \\ u_4 &= \frac{2}{7-2 \times 4} \Leftrightarrow u_4 = -2 \end{aligned}$$

Portanto, $u_2 < u_3$ e $u_3 > u_4$, pelo que a sucessão (u_n) é não monótona.

- Se n é par, então $n+1$ é ímpar, pelo que:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 2 - (2n+1) = \\ &= 2n + 2 + 2 - 2n - 1 = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Por outro lado, se n é ímpar, então $n+1$ é par, pelo que:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 1 - (2n+2) = \\ &= 2n + 2 + 1 - 2n - 2 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, logo (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)}{5(n+1)-1} - \frac{5n}{5n-1} = \\ &= \frac{5n+5}{5n+5-1} - \frac{5n}{5n-1} = \frac{5n+5}{5n+4} - \frac{5n}{5n-1} = \\ &= \frac{(5n+5)(5n-1) - 5n(5n+4)}{(5n+4)(5n-1)} = \\ &= \frac{25n^2 - 5n + 25n - 5 - 25n^2 - 20n}{(5n+4)(5n-1)} = \\ &= \frac{-5}{(5n+4)(5n-1)} \end{aligned}$$

Como $(5n+4)(5n-1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{-5}{(5n+4)(5n-1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja, } (u_n) \text{ é uma}$$

sucessão monótona decrescente.

Resposta: (C)

3. $64 + 170 = 234$ e $234 : 117 = 2$

Assim, $u_{64} + u_{170} = u_{117} + u_{117} = 10$

Portanto:

$$u_{117} + u_{117} = 10 \Leftrightarrow 2u_{117} = 10 \Leftrightarrow u_{117} = 5$$

Resposta: (B)

4. $243 = 3^5$ e $531\,441 = 3^{12}$

Pretende-se calcular a seguinte soma:

$3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11} + 3^{12}$, ou seja, trata-se da soma de oito termos consecutivos a partir do 5.º termo, inclusive, de uma progressão geométrica, de razão 3 e cujo primeiro termo é 3.

$$3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11} + 3^{12} = S_{12} - S_4 =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \times 1 - \frac{3^{12}}{1-3} - 3 \times \frac{1-3^4}{1-3} = \\ &= 3 \times \frac{1-3^{12}}{-2} - 3 \times \frac{1-3^4}{-2} = \\ &= -\frac{3}{2}(1-3^{12}) + \frac{3}{2} \times (1-3^4) = \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times 3^{12} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times 3^4 = \\ &= \frac{3}{2} \times 3^{12} - \frac{3}{2} \times 3^4 = \frac{3^{13} - 3^5}{2} = \\ &= 797\,040 \end{aligned}$$

Resposta: (D)

5. (u_n) é uma progressão geométrica não monótona, $u_4 = 4$ e

$u_6 = 9$, pelo que, sendo r a respetiva razão, temos que:

$$u_6 = u_4 \times 2^2, \text{ ou seja, } 9 = 4 \times r^2.$$

$$9 = 4 \times r^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{9}{4}} \vee r = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{3}{2} \vee r = -\frac{3}{2}$$

Todavia, como (u_n) é não monótona, então $r < 0$, portanto

$$r = -\frac{3}{2}.$$

Assim, a soma dos dez primeiros termos desta sucessão, S_{10} , é igual a:

$$\begin{aligned} S_{10} &= u_1 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = u_1 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{10}}{1 + \frac{3}{2}} = u_1 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{10}}{\frac{5}{2}} = \\ &= \frac{2}{5} u_1 \times \left(1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{10}\right) = \frac{2}{5} u_1 \times \left(1 - \frac{59\,049}{1024}\right) = \\ &= \frac{2}{5} u_1 \times \left(-\frac{58\,025}{1024}\right) = \\ &= -\frac{11\,605}{512} u_1 \end{aligned}$$

Resposta: (C)

6. (w_n) é uma sucessão de termos positivos, pelo que $w_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Assim, } \frac{5}{w_n} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq w_n \Leftrightarrow w_n \leq \frac{5}{2}.$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > 0 \wedge w_n \leq \frac{5}{2}$, ou seja:

$0 < w_n \leq \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (w_n) é minorada e majorada e

assim sendo é limitada.

- 7.1. Estudemos o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1-3(n+1)}{n+1+4} - \frac{1-3n}{n+4} = \frac{1-3n-3}{n+5} - \frac{1-3n}{n+4} = \\ &= \frac{-3n-2}{n+5} - \frac{1-3n}{n+4} = \\ &= \frac{(-3n-2)(n+4) - (1-3n)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{-3n^2 - 12n - 2n - 8 - n - 5 + 3n^2 + 15n}{(n+5)(n+4)} = \\ &= \frac{-13}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

Como $(n+5)(n+4) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$\frac{-13}{(n+5)(n+4)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja, } u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

portanto, a sucessão (u_n) é monótona decrescente.

- 7.2. Recorrendo ao algoritmo da divisão, temos que

$$\begin{array}{r} -3n+1 \quad \overline{) \quad n+4} \\ 3n+12 \quad \underline{-} \quad -3 \end{array}$$

$$u_n = -3 + \frac{13}{n+4}$$

Por outro lado, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < \frac{13}{n+4} \leq \frac{13}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < -3 + \frac{13}{n+4} \leq -\frac{2}{5}$$

Portanto, $-3 < u_n \leq -\frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$, e, sendo assim, a sucessão

(u_n) é minorada e majorada, pelo que é limitada.

- 8.1. Por definição de progressão aritmética sabe-se:

$$u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim:

$$x^2 - (x+6) = x+18 - (x^2)$$

Resolvendo esta equação:

$$x^2 - x - 6 = x + 18 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+7}{2} \vee x = \frac{1-7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$$

Se $x = 4$:

$$x+6 = 4+6 = 10$$

$$x^2 = 4^2 = 16$$

$$x+18 = 4+18 = 22$$

Por outro lado, se $x = -3$:

$$x+6 = -3+6 = 3$$

$$x^2 = (-3)^2 = 9$$

$$x+18 = -3+18 = 15$$

Portanto, e como o 4.º termo é igual a 4, apenas temos uma solução, pois, no último caso, os termos seriam 3, 9 e 15 e sendo estes consecutivos, o 4.º termo nunca poderia ser 4. Os termos pedidos são 10, 16 e 22.

- 8.2. O termo geral de uma progressão aritmética (u_n) é dado por:

$$u_n = u_4 + (n-4) \times r$$

Como $u_4 = 4$ e $r = 9 - 3 = 6$:

$$\begin{aligned} u_n &= 4 + (n-4) \times 6 \Leftrightarrow u_n = 4 + 6n - 24 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_n = 6n - 20 \end{aligned}$$

- 8.3. $u_{100} + u_{101} + \dots + u_{199} = S_{199} - S_{99}$

$$S_{199} = \frac{u_1 + u_{199}}{2} \times 199 =$$

$$= \frac{(6 \times 1 - 20) + (6 \times 199 - 20)}{2} \times 199 = 115\,420$$

$$S_{99} = \frac{u_1 + u_{99}}{2} \times 99 =$$

$$= \frac{(6 \times 1 - 20) + (6 \times 99 - 20)}{2} \times 99 =$$

$$= 27\,720$$

Portanto, $S_{199} - S_{99} = 115\,420 - 27\,720 = 87\,700$.

A soma pedida é 87 700.

- 9.1. $v_3 = 1 - 2 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow v_3 = 1 - 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow v_3 = 1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow v_3 = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 1 - \sqrt{2}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}v_{15} &= 1 - 2\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin\left(2\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = \\&= 1 - 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \\&= 1 - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\&= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Então:

$$v_3 - v_{15} = 1 - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

9.2. $v_n = -1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\pi = 2\pi + 8k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 2 + 8k, k \in \mathbb{Z}$$

Como, $n \in \mathbb{N}$, então $n = 2 + 8k, k \in \mathbb{N}_0$, ou seja, a sucessão

tem, de facto, uma infinidade de termos iguais a $a - 1$, concretamente todos os termos cuja ordem verifica a condição $n = 2 + 8k, k \in \mathbb{N}_0$.

10. (u_n) é uma progressão geométrica, pelo que:

$$u_{15} = u_9 \times r^6, \text{ ou seja:}$$

$$\frac{1}{64} = 64 \times r^6 \Leftrightarrow r^6 = \frac{1}{4096} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{1}{4096}} \vee r = \sqrt[6]{\frac{1}{4096}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{4} \vee r = -\frac{1}{4}$$

Como (u_n) é monótona, então $r > 0$, pelo que $r = \frac{1}{4}$.

Determinemos o primeiro termo de (u_n) .

$$u_9 = u_1 \times r^8, \text{ ou seja:}$$

$$64 = u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^8 \Leftrightarrow u_1 = \frac{64}{\left(\frac{1}{4}\right)^8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 4\,194\,304$$

O termo geral de (u_n) é:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}, \text{ ou seja:}$$

$$u_1 = 4\,194\,304 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

No entanto,

$$4\,194\,304 = 4^{11}$$

$$u_n = 4^{11} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{-11} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-12}$$

Assim, uma expressão do termo geral de (u_n) é:

$$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-12}$$

11. A 1.ª modalidade é um problema que pode ser resolvido com recurso ao conceito de progressão aritmética.

Assim, 2 é o 1.º termo e 0,5 é a razão.

Pretende-se calcular a soma dos primeiros oito termos.

O termo geral da progressão, considera-se, (u_n) é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r, \text{ ou seja:}$$

$$u_n = 2 + (n-1) \times 0,5 \Leftrightarrow u_n = 2 + 0,5n - 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 0,5n + 1,5$$

$$\text{Assim, } u_8 = 0,5 \times 8 + 1,5 \Leftrightarrow u_8 = 5,5.$$

$$\text{Portanto, } S_8 = \frac{u_1 + u_8}{2} \times 8 = \frac{2 + 5,5}{2} \times 8 = 30.$$

Na 1.ª modalidade, o trabalhador ganharia, num dia de trabalho, 30 euros.

Quanto à 2.ª modalidade é um problema que pode ser resolvido com recurso ao conceito de progressão geométrica.

Assim, 2 é o 1.º termo e 1,2 (+ 20%) a razão.

Pretende-se calcular a soma dos primeiros oito termos.

O termo geral da progressão (v_n) é:

$$v_n = v_1 \times r^{n-1}, \text{ ou seja, } v_n = 2 \times (1,2)^{n-1}.$$

Assim:

$$v_8 = 2 \times (1,2)^{8-1} \Leftrightarrow v_8 \approx 7,17$$

Portanto:

$$S_8 = 2 \times \frac{1 - (1,2)^8}{1 - 1,2} \approx 33$$

Assim, na 2.ª modalidade, o trabalhador ganharia, num dia de trabalho, aproximadamente, 33 euros.

Ficha para praticar 13

Págs. 62 a 65

1.1. Pretendemos mostrar que para todo o número real δ positivo existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p &\Rightarrow \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta \\ \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{n+2}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2(n+2) - (2n+5)}{2(2n+5)} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2n+4-2n-5}{4n+10} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{4n+10} \right| < \delta \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4n+10} < \delta \\ &\Leftrightarrow 4n+10 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4n > \frac{1}{\delta} - 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1-10\delta}{4\delta} \end{aligned}$$

Então, sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{1-10\delta}{4\delta}$

é verdade que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \delta$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

1.2. Da alínea anterior, temos $\delta = 0,01$.

$$p \geq \frac{1-10 \times 0,01}{4 \times 0,01} \wedge p \in \mathbb{N}$$

$$p \geq 22,5 \wedge p \in \mathbb{N}$$

$$p \geq 23 \wedge p \in \mathbb{N}$$

Portanto, todos os termos de ordem igual ou inferior a 22 não

pertencem a $V_{0,01}\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja, são 22 termos nestas

condições.

2.1. Pretendemos mostrar que para todo o número real $\delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p &\Rightarrow |u_n + 2| < \delta \\ |u_n + 2| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{1-2n}{n+1} + 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1-2n+2(n+1)}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1-2n+2n+2}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{\delta} < n+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n+1 > \frac{3}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{3}{\delta} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{3-\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{3-\delta}{\delta}$ é

verdade que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n + 2| < \delta$, ou seja,

$\lim u_n = -2$, como queríamos provar.

$$2.2. u_n \in V_{0,03}(-2) \Leftrightarrow n > \frac{3-0,03}{0,03} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > 99 \wedge n \in \mathbb{N}$$

Portanto, todos os termos de ordem igual ou superior a 100 pertencem a $V_{0,03}(-2)$.

2.3. Estudemos o sinal de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1-2(n+1)}{n+1+1} - \frac{1-2n}{n+1} = \\ &= \frac{1-2n-2}{n+2} - \frac{1-2n}{n+1} = \frac{-2n-1}{n+2} - \frac{1-2n}{n+1} = \\ &= \frac{(-2n-1)(n+1) - (1-2n)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{-2n^2 - 2n - n - 1 - n - 2 + 2n^2 + 4n}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{-3}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Como $(n+2)(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja:}$$

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a sucessão (u_n) é decrescente.

3. Seja L um número real positivo qualquer, então:

$$u_n > L \Leftrightarrow 6n-3 > L \Leftrightarrow 6n > L+3$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{L+3}{6}, \text{ ou seja, sendo } P \text{ um número natural superior}$$

$$\text{ou igual a } \frac{L+3}{6}, \text{ temos que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L,$$

portanto, $u_n \rightarrow +\infty$.

$$4. u_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5$$

4.1. Seja δ um número positivo qualquer.

$$|u_n - (-5)| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} - 5 + 5 \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Logo, para cada $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - (-5)| < \delta.$$

sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{1}{\delta}$.

Portanto, $\lim u_n = -5$.

$$\begin{aligned} 4.2. u_p - u_k &= \left[\frac{(-1)^p}{p} - 5 \right] - \left[\frac{(-1)^k}{k} - 5 \right] = \\ &= -\frac{1}{p} - 5 - \left(-\frac{1}{k} - 5 \right) = \quad \left. \begin{array}{l} p \text{ e } k \text{ são} \\ \text{ímpares} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{p} - 5 + 5 = \\ &= \frac{p-k}{kp} \end{aligned}$$

5.1. Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{3+2n} = 2$, temos de verificar que

$\forall \delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{4n-2}{3+2n} - 2 \right| < \delta.$$

De facto:

$$\left| \frac{4n-2}{3+2n} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{4n-2-2(3+2n)}{3+2n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{4n-2-6-4n}{3+2n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-8}{3+2n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{8}{3+2n} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\delta} < 3+2n \Leftrightarrow \frac{8}{\delta} - 3 < 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-3\delta}{\delta} < 2n \Leftrightarrow n > \frac{8-3\delta}{2\delta}$$

Assim, e dado $\delta > 0$ arbitrário, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal

que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{4n-2}{3+2n} - 2 \right| < \delta$, sendo p um número

natural maior ou igual a $\frac{8-3\delta}{2\delta}$.

5.2. Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \times \frac{2}{n+1} + 4 \right) = 4$, temos de

mostrar que $\forall \delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \left((-1)^n \times \frac{2}{n+1} + 4 \right) - 4 \right| < \delta$$

De facto:

$$\left| \left((-1)^n \times \frac{2}{n+1} + 4 \right) - 4 \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| (-1)^n \times \frac{2}{n+1} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{\delta} < n+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\delta} - 1 < n \Leftrightarrow n > \frac{2-\delta}{\delta}$$

Assim e dado $\delta > 0$ arbitrário, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal

que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \left((-1)^n \times \frac{2}{n+1} + 4 \right) - 4 \right| < \delta$, sendo p

um número natural maior ou igual a $\frac{2-\delta}{\delta}$.

6. Recorrendo à definição de limite, temos que:

$\forall \delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{n}{3+4n} - 4 \right| < \delta$$

$$\left| \frac{n}{3+4n} - 4 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{n-4(3+4n)}{3+4n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{n-12-16n}{3+4n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-15n-12}{3+4n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15n+12}{3+4n} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15n+12 < 3\delta+4n\delta$$

$$\Leftrightarrow 15n-4n\delta < 3\delta-12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(15-4\delta) < 3\delta-12$$

$$n(15-4\delta) < 3\delta-12 \Leftrightarrow n > \frac{3\delta-12}{15-4\delta} \text{ apenas se } 15-4\delta < 0,$$

ou seja, se $\delta > \frac{15}{4}$.

Assim:

$$\left| \frac{n}{3+4n} - 4 \right| < \delta \Leftrightarrow n > \frac{3\delta-12}{15-4\delta} \text{ apenas para } \delta > \frac{15}{4}.$$

Como não acontece para qualquer número real positivo δ ,

como é solicitado na definição, podemos concluir que não é

verdade que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3+4n} = 4$.

7.1. Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{200} = +\infty$, temos que verificar que

$\forall L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \frac{n}{200} > L$$

De facto:

$$\frac{n}{200} > L \Leftrightarrow n > 200L$$

Assim, dado $L > 0$, arbitrário, escolhe-se para p o primeiro número natural superior a $200L$.

7.2. Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (3-n) = -\infty$, temos de verificar que

$\forall L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq p \Rightarrow 3-n < -L$$

Assim:

$$3-n < -L \Leftrightarrow -n < -L-3 \Leftrightarrow n > 3+L$$

Logo, dado $L > 0$, arbitrário, escolhe-se para p o primeiro número natural superior a $3+L$.

8.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-3n}{1+n} = -3$

8.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+8}{3n-1} = \frac{4}{3}$

8.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{8} = -\infty$

8.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{-2n} = -2$

8.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$

8.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n (-8n+3) = -\infty$

8.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-7+2n) = +\infty$

8.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3n}{2} \right) = +\infty$

9.1. a) Por exemplo, $u_n = -n$

b) Por exemplo, $v_n = \frac{4n+2}{n}$

9.2. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} + v_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 + 4 = 4$

$$\text{b) } \lim \left(\frac{u_n}{2} \right) = \lim \left(\frac{1}{2} u_n \right) = \frac{1}{2} \lim u_n = \frac{1}{2} \times (-\infty) = -\infty$$

$$10. \lim u_n = \lim \sqrt[3]{\frac{4+8n}{-n}} = \sqrt[3]{\lim \frac{4+8n}{-n}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \lim v_n &= \lim \left(\frac{4n}{2+n} \right)^{\frac{1}{4}} = \left[\lim \left(\frac{4n}{2+n} \right) \right]^{\frac{1}{4}} = \\ &= 4^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) &= \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \lim b_n &= \lim \left(\frac{n+1}{16n} - n^{-4} \right)^{\frac{1}{4}} = \left[\lim \left(\frac{n+1}{16n} - n^{-4} \right) \right]^{\frac{1}{4}} = \\ &= \left[\lim \left(\frac{n+1}{16n} \right) - \lim n^{-4} \right]^{\frac{1}{4}} = \\ &= \left[\frac{1}{16} - \lim \frac{1}{n^4} \right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{16} - 0 \right)^{\frac{1}{4}} = \\ &= \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\lim(a_n) \times \lim(b_n) = (k+1) \times \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

Assim, e como $\lim(a_n) \times \lim(b_n) = -\frac{1}{2}$, temos que:

$$\frac{k+1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k+1 = -1 \Leftrightarrow k = -2$$

Portanto, $k = -2$

12.1. Seja $T(n)$ a condição $u_n < 4$, para todo o número natural n .

- $T(1)$ é verdadeira, uma vez que $u_1 = \frac{5}{2} < 4$
- Suponhamos que $T(n)$ é verdadeira para um número natural n (hipótese de indução). Queremos mostrar que $T(n+1)$ é verdadeira, isto é:

$$\begin{aligned} u_{n+1} < 4 &\Leftrightarrow 5 - \frac{4}{u_n} < 4 \Leftrightarrow \frac{5u_n - 4}{u_n} < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5u_n - 4 < 4u_n \Leftrightarrow u_n < 4 \quad (\text{Atendendo a que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0) \end{aligned}$$

Logo, $u_{n+1} < 4$, ou seja, $T(n+1)$ é verdadeira.

Assim, pelo princípio da indução matemática, podemos concluir que $u_n < 4$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

$$12.2. u_1 = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = 5 - \frac{4}{u_1} = 5 - 4 \times \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$u_2 > u_1$$

Se (u_n) é monótona terá de ser crescente.

Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

- $P(1)$ é verdadeira pois $u_2 - u_1 = \frac{17}{5} - \frac{5}{2} > 0$
- $P(n)$ é hereditária

Admitamos, por hipótese, que para dado $n \in \mathbb{N}$ se tem $u_{n+1} > u_n$. Pretendemos provar que então $u_{n+2} > u_{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} > u_n &\Leftrightarrow \frac{4}{u_{n+1}} < \frac{4}{u_n} \Leftrightarrow (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{u_{n+1}} > -\frac{4}{u_n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 - \frac{4}{u_{n+1}} > 5 - \frac{4}{u_n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1} \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Fica, assim, provado que $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

12.3. (u_n) é monótona crescente e $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$, pelo que (u_n) é convergente, uma vez que toda a sucessão crescente majorada é convergente.

13. Seja L um número real positivo qualquer, então:

$$\begin{aligned} u_n > L &\Leftrightarrow \frac{\pi n + 3}{2} > L \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi n + 3 > 2L \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi n > 2L - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2L - 3}{\pi} \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer número real positivo l , existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ para a qual $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$

Neste caso, p é qualquer número natural superior a $\frac{2L - 3}{\pi}$.

Logo, $\lim u_n = +\infty$.

14. Seja L um número real positivo qualquer.

$$u_n < -L \Leftrightarrow 3 - 10n < -L \Leftrightarrow 10n > L + 3 \Leftrightarrow n > \frac{L + 3}{10}$$

Portanto, sendo p um número natural superior ou igual a $\frac{L + 3}{10}$, temos que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$.

Logo, $u_n \rightarrow -\infty$.

$$15.1. \lim a_n = \lim \frac{5 - 2n}{8n + 3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$15.2. \lim b_n = \lim \frac{3 - n}{\sqrt{2n + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$15.3. \lim c_n = \lim \frac{6 + 3n}{12n + 12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$15.4. \lim d_n = \lim \frac{1 - 3n}{2} = -\infty$$

$$15.5. \lim e_n = \lim \frac{6 + n}{-3} = -\infty$$

$$15.6. \lim f_n = \lim \frac{7}{6n - 3} = 0$$

16. Seja $v_n = n + 3$, então $\lim v_n = +\infty$.

A sucessão (u_n) pode obter-se da sucessão (u_n) alternando apenas os 99 primeiros termos.

Assim, resulta que:

$$\lim u_n = \lim v_n \text{ e, portanto, } \lim u_n = +\infty.$$

17. $\lim u_n = \lim(2 + 6n) = +\infty$

17.1. Por exemplo, $w_n = 2$, pois

$$\lim(u_n w_n) = \lim[(2 + 6n) \times 2] = \lim(4 + 12n) = +\infty$$

17.2. Por exemplo, $w_n = -1$, pois

$$\lim(u_n w_n) = \lim[(2 + 6n) \times (-1)] = \lim(-2 - 6n) = -\infty$$

17.3. Por exemplo, $w_n = -10n$, pois:

$$\lim(u_n + w_n) = \lim[(2 + 6n) + (-10n)] = \lim(2 - 4n) = -\infty$$

18. $\lim u_n = \lim \frac{4n+1}{1-2n} = \frac{4}{-2} = -2$

18.1. Por exemplo, $w_n = \frac{2n}{n+1}$, pois:

$$\lim(u_n + w_n) = \lim u_n + \lim w_n =$$

$$= -2 + \lim \frac{2n}{n+1} = -2 + 2 = 0$$

18.2. Por exemplo, $w_n = \frac{-3n}{6n+2}$, pois

$$\lim(u_n w_n) = \lim u_n \times \lim w_n =$$

$$= -2 \times \lim \left(\frac{-3n}{6n+2} \right) = -2 \times \left(-\frac{3}{6} \right) = 1$$

18.3. Por exemplo, $w_n = \frac{-2n+3}{n}$, pois

$$\lim(u_n - w_n) = \lim u_n - \lim w_n =$$

$$= -2 - \lim \frac{-2n+3}{n} =$$

$$= -2 - (-2) = -2 + 2 = 0$$

19. $\lim u_n = \lim \frac{3}{1+n} = 0$

19.1. Por exemplo, $w_n = \frac{1}{n}$, pois:

$$\lim(u_n + w_n) = \lim u_n + \lim w_n = 0 + \lim \frac{1}{n} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

19.2. Por exemplo, $w_n = \frac{1-n}{n}$, pois:

$$\lim(u_n - w_n) = \lim u_n - \lim w_n =$$

$$= 0 - \lim \frac{1-n}{n} = 0 - (-1) = 1$$

19.3. Por exemplo, $w_n = n$, pois:

$$\lim(u_n \times w_n) = \lim \left(\frac{3}{1+n} \times n \right) =$$

$$= \lim \frac{3n}{1+n} = 3$$

20. $\lim a_n = \lim \frac{2n}{n+5} = 2$

$$\lim b_n = \lim \left(\frac{n+2}{2n} \right)^4 = \left(\lim \frac{n+2}{2n} \right)^4 = \left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\lim c_n = \lim \left(\frac{2n}{n+5} - \frac{n}{n+1} \right) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim d_n = \lim(-2 + n^{-2}) = -2 + 0 = -2$$

20.1. $\lim[a_n \times \sqrt[4]{b_n}] = \lim a_n \times \lim \sqrt[4]{b_n} =$

$$= \lim a_n \times \sqrt[4]{\lim b_n} =$$

$$= 2 \times \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

20.2. $\lim(c_n - d_n) = \lim c_n - \lim d_n = 1 - (-2) = 3$

20.3. $\lim(3a_n - c_n) = \lim(3a_n) - \lim c_n = 3\lim a_n - \lim c_n =$
 $= 3 \times 2 - 1 = 5$

20.4. $\lim \frac{d_n}{\sqrt{2}a_n} = \frac{\lim d_n}{\lim(\sqrt{2}a_n)} = \frac{\lim d_n}{\sqrt{2} \lim a_n} =$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

20.5. $\lim \frac{d_n - b_n}{a_n \times c_n} = \frac{\lim(d_n - b_n)}{\lim(a_n \times c_n)} = \frac{\lim d_n - \lim b_n}{\lim a_n \times \lim c_n} =$

$$= \frac{-2 - \frac{1}{16}}{2 \times 1} = -1 - \frac{1}{32} = -\frac{33}{32}$$

20.6. $\lim \frac{\sqrt{b_n} - \sqrt[3]{c_n}}{\frac{a_n}{d_n}} = \frac{\lim(\sqrt{b_n} - \sqrt[3]{c_n})}{\lim \frac{a_n}{d_n}} =$

$$= \frac{\lim \sqrt{b_n} - \lim \sqrt[3]{c_n}}{\frac{\lim a_n}{\lim d_n}} = \frac{\sqrt{\lim b_n} - \sqrt[3]{\lim c_n}}{\frac{\lim a_n}{\lim d_n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{1}}{\frac{\frac{1}{4} - 1}{-2}} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

21. $\lim a_n = \lim \frac{8n}{n+1} = 8$

$$\lim b_n = \lim \left(\frac{2+n}{n} + 3 \right) = 1 + 3 = 4$$

21.1. $\lim \sqrt[3]{a_n} - \lim \sqrt{b_n} = \lim c_n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\lim a_n} - \sqrt{\lim b_n} = \lim c_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{8} - \sqrt{1+3} = \lim c_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 = \lim c_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim c_n = 0$$

Por exemplo, $c_n = \frac{1}{n}$.

21.2. $\frac{2\lim(c_n) - 1}{\lim b_n} = \frac{1}{\lim a_n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\lim(c_n) - 1}{4} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lim(c_n) - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim c_n = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim c_n = \frac{3}{4}$$

Assim, e por exemplo, $c_n = \frac{3n+2}{4n+1}$.

Ficha para praticar 14

Págs. 66 a 69

1.1. $u_2 = \sqrt{3+u_1} \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{3+2} \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{5}$

$$u_3 = \sqrt{3+u_2} \Leftrightarrow u_3 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

Portanto, $u_2 = \sqrt{5}$ e $u_3 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

1.2. a) (u_n) é crescente se e somente se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Mostremos que a condição se verifica para $n=1$.

$$u_2 \geq u_1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \geq 2 \quad (\text{proposição verdadeira}).$$

Provemos, agora, que a condição é hereditária, ou seja,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}.$$

Admitindo a hipótese de indução, isto é, que, par um dado $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, temos que:

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 3+u_{n+1} > 3+u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+u_{n+1}} > \sqrt{3+u_n} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Da definição de } u_n \\ \text{temos } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

Assim, a condição $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ é hereditária.

Então, se a condição $u_{n+1} \geq u_n$ é verificada para $n=1$ e é hereditária, é universal em $\mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

b) Seja $p(n)$ a condição: $u_n < 3$.

$p(1)$ é uma proposição verdadeira: $u_1 < 1 \Leftrightarrow 2 < 3$

Mostremos, agora, que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, isto é,

$$u_n < 3 \Rightarrow u_{n+1} < 3$$

$$u_n < 3 \Leftrightarrow 3+u_n < 6 \Leftrightarrow (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+u_n} < \sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} < \sqrt{6} \Rightarrow u_{n+1} < 3 \quad (\text{pois } \sqrt{6} < 3)$$

Portanto, $p(n)$ é hereditária, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$

1.3. Temos que (u_n) é monótona crescente e $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.

Logo, (u_n) é convergente porque toda a sucessão monótona crescente e majorada é convergente.

Como (u_n) é convergente temos que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$.

Seja $\lim u_n = a = \lim u_{n+1}$.

$$\lim u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \Leftrightarrow \lim u_{n+1} = \sqrt{\lim(3+u_n)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim u_{n+1} = \sqrt{3+\lim u_n}$$

Como $\lim u_n = \lim u_{n+1} = a$:

$$a = \sqrt{3+a} \Rightarrow a^2 = 3+a \Leftrightarrow a^2 - a - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \vee a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Todavia, os termos da sucessão são todos positivos, pelo que

$$a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \text{ ou seja, } \lim u_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

2.1. $\lim u_n = \lim \frac{n+4}{3n-1} = \lim \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$

2.2. $\lim u_n = \lim \frac{n^3-2n}{n+4} = \lim \frac{n^3}{n} = \lim n^2 = +\infty$

2.3. $\lim u_n = \lim \frac{2n-3}{1-n^2} = \lim \frac{2n}{-n^2} = \lim \frac{2}{-n} = 0$

2.4. $\lim u_n = \lim (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n}) =$
 $= \lim \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n}} =$
 $= \lim \frac{(\sqrt{2n+3})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n}} =$
 $= \lim \frac{2n+3-n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n}} = \lim \frac{n+3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n}} =$
 $= \lim \frac{n+3}{\sqrt{n^2(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})} + \sqrt{n^2(\frac{1}{n})}} =$
 $= \lim \frac{n+3}{n\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + n\sqrt{\frac{1}{n}}} = \lim \frac{n(1 + \frac{3}{n})}{n(\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}})} =$
 $= \lim \frac{1 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}} =$
 $= \frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2.5. $\lim u_n = \lim (\sqrt{n^2+1} - n) =$
 $= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$
 $= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} =$
 $= \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} =$
 $= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

2.6. $\lim u_n = \lim \frac{n + \sin(\frac{n\pi}{3})}{n+1} =$
 $= \lim \left(\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n} \right) =$
 $= \lim \left(\frac{1}{n} \right) =$
 $= \lim \frac{1 + \frac{1}{n} \sin(\frac{n\pi}{3})}{1 + \frac{1}{n}} =$

Por outro lado, temos que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ pelo que } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right] = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

3.1. O termo geral, (u_n) de uma progressão geométrica é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}, \text{ onde } r \text{ é a respetiva razão.}$$

Então:

$$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \times \frac{1}{n^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2^{n-1}}$$

3.2. A soma dos p primeiros termos de uma progressão geométrica

é $S_p = u_1 \times \frac{1-r^p}{1-r}$, ou seja:

$$S_p = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow S_p = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_p = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_p = 6 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_p = 6 - \frac{6}{2^p}$$

Portanto, $S_p = 6 - \frac{6}{2^p}$.

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{6}{2^n}\right) = 6 - \frac{6}{+\infty} = 6 - 0 = 6$$

Significa que a soma dos n primeiros termos desta sucessão tende para 6, quando $n \rightarrow +\infty$.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2}{3n + 10n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{10n^2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2n^2}{n+2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n+2} =$$

$$= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{1 - 2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[6]{\frac{n^2}{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[6]{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} = \frac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + n^2}{\sqrt[3]{n} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n} + 1\right)}{n^2 \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2} + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + 1}{\sqrt[3]{\frac{n}{n^2}} + \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + 1}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}} = \frac{0+1}{0+0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}}}{n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + n^2}{\sqrt{n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \left(-\frac{1}{n^2} + 1\right)}{\cancel{n^2} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{\sqrt{n}}{n^2} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} =$$

$$= \frac{0 + \infty}{0 + 1} = +\infty$$

5. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}$ é a soma dos n primeiros termos

de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e cujo primeiro termo é igual a 1.

$$u_n = S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \times (1 - 0) = \frac{3}{2}$$

6.1. $v_2 = 3$ e $v_2 = 3$

$$u_2 = 2^2 + 3 \Leftrightarrow u_2 = 7$$

Portanto, $v_2 \times (u_2)^2 = 3 \times 7^2 = 147$.

$$6.2. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - 4n^3}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4n^3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n^2) =$$

$$= -\infty$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_n}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - 4n^3}{n^2 + 3} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - 4n^3}{n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^3}{n^3} = -4$$

$$7. \lim a_n = \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 9}}{n} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(4 + \frac{9}{n^2} \right)}}{n} =$$

$$= \lim \frac{n \sqrt{4 + \frac{9}{n^2}}}{n} = \lim \sqrt{4 + \frac{9}{n^2}} =$$

$$= \sqrt{4 + 0} = 2$$

$$\lim b_n = \lim \left[2^{n+3} - 5^n \right] = \lim \left[2^n \left(2^3 - \frac{5^n}{2^n} \right) \right] =$$

$$= \lim \left[2^n \left(8 - \left(\frac{5}{2} \right)^n \right) \right] = \lim 2^n \times \lim \left(8 - \left(\frac{5}{2} \right)^n \right) =$$

$$= (+\infty) \times (8 - (+\infty)) =$$

$$= +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim (a_n + b_n) = 2 + (-\infty) = -\infty$$

$$8.1. \lim u_n = \lim (n^2 - 3n^3) = \lim (-3n^3) =$$

$$= -3 \lim n^3 = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

$$8.2. \lim u_n = \lim (-1 + 10^3 - n^4 - 10^2 n^5) =$$

$$= \lim (-10^2 n^5) = -10^2 \lim n^5 =$$

$$= -100 \times (+\infty) = -\infty$$

$$8.3. \lim u_n = \lim \left[3(-1) \times \frac{5n}{n^2 + 3} \right] = 0$$

dado que $\forall n \in \mathbb{N}, -3 \leq 3 \times (-1)^n \leq 3$.

$$\lim \frac{5n}{n^2 + 3} = \lim \frac{5n}{n^2} = \lim \frac{5}{n} = 0$$

e o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo é uma sucessão que tende para 0.

$$8.4. \lim u_n = \lim \frac{-6n - 3 + n^3}{4n^2 - n} =$$

$$= \lim \frac{n^3}{4n^2} = \lim \frac{n}{4} = +\infty$$

$$8.5. \lim u_n = \lim [\sin(n\pi)] = \lim 0 = 0$$

$$8.6. \lim (\sqrt[n]{4} + \sqrt{n^2 + 3n} - n) =$$

$$= \lim \sqrt[n]{4} + \lim (\sqrt{n^2 + 3n} - n) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

$$= 1 + \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

$$= 1 + \lim \frac{\cancel{n^2} + 3n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} \right)} + n}$$

$$= 1 + \lim \frac{3n}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + n} =$$

$$= 1 + \lim \frac{3 \cancel{n}}{\cancel{n} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)} =$$

$$= 1 + \frac{3}{1 + 1} = \frac{5}{2}$$

$$8.7. \lim u_n = \lim \sqrt[3]{\frac{27n^3 - n^2}{1 - n^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\lim \frac{27n^3 - n^2}{1 - n^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\lim \frac{27n^3}{-n^3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$8.8. \lim u_n = \lim \left(2^n + 3^n \right) = \lim 2^{\frac{1}{n}} + \lim 3^n =$$

$$= \lim \sqrt[n]{2} + \infty = 1 + \infty = +\infty$$

$$8.9. \lim \frac{(\sqrt{3n^2 + n})^2 - (\sqrt{3n})^2}{\sqrt{3n^2 + n} + \sqrt{3n}} =$$

$$= \lim \frac{3n^2 + n - 3n^2}{\sqrt{3n^2 + n} + \sqrt{3n}} =$$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{3n^2 + n} + \sqrt{3n}} =$$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} \right)} + \sqrt{3n}} =$$

$$= \lim \frac{n}{n \sqrt{3 + \frac{1}{n}} + \sqrt{3n}} =$$

$$= \lim \frac{n}{n \left(\sqrt{3 + \frac{1}{n}} + \sqrt{3} \right)} =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{1}{n}} + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3 + 0} + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$8.10. \lim u_n = \lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - 4n}{6n - 1} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - 4n}{6n - 1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-4n}{6n-1} = \\
&= \lim \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-4\right)}{n\left(6-\frac{1}{n}\right)} = \\
&= \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-4}{6-\frac{1}{n}} = \\
&= \frac{\sqrt{1+0}-4}{6-0} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$9.1. \quad u_1 = \frac{\cos \pi + 1}{1+1} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{\cos(2\pi) + \sqrt{2}}{2+1} \\
&= \frac{-1 + \sqrt{2}}{3} \approx 0,18
\end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{\cos(3\pi) + \sqrt{3}}{4} \approx 0,2$$

$u_2 > u_1$ e $u_3 < u_2$. Logo, (u_n) é não monótona.

$$\begin{aligned}
9.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n\pi) + \sqrt{n}}{n+1} &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\cos(n\pi)}{n} + \sqrt{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0
\end{aligned}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n\pi) \leq 1$ e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cos(n\pi) \times \frac{1}{n} \right] = 0 \text{ porque o produto de}$$

uma sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo é uma sucessão que tende para 0.

$$10.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^6 - 3n^4 + 2n^2 + n - 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^6 = +\infty$$

$$\begin{aligned}
10.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 - n + 2} = \\
&= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n + 2)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} n^3} = \\
&= \sqrt{+\infty} = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{n + 4} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + n^2}{5 - 2n + n^3 - n^2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{n^3} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n + 8}{2n - n^4 + 3} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{-n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{-n} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2 + 1} - \frac{n^2}{n^2 - 1} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = \\
&= 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3 - 2n + 27n^2}{1 + 9n^2}} = \\
&= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n + 27n^2}{1 + 9n^2}} = \\
&= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27n^2}{9n^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{27}{9}} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^4 + n^3 + n + 1}{4n^4 + n^2}} = \\
&= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^3 + n + 1}{4n^4 + n^2}} = \\
&= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{4n^4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{5^n + 1 + 6^n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2^n}{5^n} + 1 \right)}{5^n \left(1 + \frac{1}{5^n} + \frac{6^n}{5^n} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n + 1}{1 + \frac{1}{5^n} + \left(\frac{6}{5} \right)^n} = \\
&= \frac{0 + 1}{1 + 0 + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 2^n + 1}{4^n + 3^n + 2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(4 - \frac{2^n}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right)}{4^n \left(1 + \frac{3^n}{4^n} + \frac{2}{4^n} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{4^n}}{1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{2}{4^n}} = \\
&= \frac{4 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.11. \quad \lim u_n &= \lim \left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right)^{(\infty - \infty)} = \\
 &= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) \left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + 1} \right)}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\
 &= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} \right)^2 - \left(\sqrt{n^2 + 1} \right)^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\
 &= \lim \frac{n^2 + 3n + 2 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\
 &= \lim \frac{3n + 1}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\
 &= \lim \frac{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \\
 &= \lim \frac{3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \\
 &= \frac{3 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.12. \quad \lim u_n &= \lim \frac{1 + n^3}{\sqrt{n^6 + 1}}^{(\frac{\infty}{\infty})} = \\
 &= \lim \frac{1 + n^3}{\sqrt{n^6 \left(1 + \frac{1}{n^6} \right)}} = \\
 &= \lim \frac{1 + n^3}{n^3 \sqrt{1 + \frac{1}{n^6}}} = \\
 &= \lim \frac{n^3 \left(\frac{1}{n^3} + 1 \right)}{n^3 \sqrt{1 + \frac{1}{n^6}}} = \\
 &= \lim \frac{\frac{1}{n^3} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^6}}} = \frac{0 + 1}{\sqrt{1 + 0}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.13. \quad \lim u_n &= \lim \left[\frac{3}{n^2 - 1} \times (n + 4n^2) \right]^{(0 \times \infty)} = \\
 &= \lim \frac{3(n + 4n^2)}{n^2 - 1} = \\
 &= \lim \frac{12n^2 + 3n}{n^2 - 1} = \\
 &= \lim \frac{12n^2}{n^2} = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.14. \quad \lim u_n &= \lim \left(4^{n+2} - 6^n \right)^{(\infty - \infty)} = \\
 &= \lim \left[6^n \times \left(4^2 \left(\frac{4^n}{6^n} \right) - 1 \right) \right] = \\
 &= \lim \left[6^n \times \left(16 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) \right] = \\
 &= +\infty \times (16 \times 0 - 1) = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.15. \quad \lim u_n &= \lim \frac{8^n + 4^{n+1}}{5^{n+2}}^{(\frac{\infty}{\infty})} = \\
 &= \lim \frac{8^n}{5^{n+2}} + \lim \frac{4^{n+1}}{5^{n+2}} = \\
 &= \lim \frac{8^n}{5^n \times 5^2} + \lim \frac{4^n \times 4}{5^n \times 5^2} = \\
 &= \frac{1}{25} \lim \left(\frac{8}{5} \right)^n + \frac{4}{25} \lim \left(\frac{4}{5} \right)^n = \\
 &= \frac{1}{25} \times (+\infty) + \frac{4}{25} \times 0 = \\
 &= +\infty + 0 = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.16. \quad \lim u_n &= \lim \frac{n + 3}{\sqrt{2n^2 + 1} + 4n}^{(\frac{\infty}{\infty})} = \\
 &= \lim \frac{n + 3}{\sqrt{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} + 4n} = \\
 &= \lim \frac{n + 3}{n \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 4n} = \\
 &= \lim \frac{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 4 \right)} = \\
 &= \lim \frac{1 + \frac{3}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + 4} = \frac{1 + 0}{\sqrt{2 + 0} + 4} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2} + 4} = \frac{\sqrt{2} - 4}{(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 4)} = \\
 &= \frac{\sqrt{2} - 4}{(\sqrt{2})^2 - 4^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{2} - 4}{2 - 16} = \frac{4 - \sqrt{2}}{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.17. \quad \lim u_n &= \lim \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{1 - 2n}^{(\frac{\infty}{\infty})} = \\
 &= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)}}{1 - 2n} = \\
 &= \lim \frac{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}{n \left(\frac{1}{n} - 2 \right)} = \\
 &= \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}{\frac{1}{n} - 2} = \\
 &= \frac{\sqrt{1 + 0}}{0 - 2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$10.18. \quad \lim u_n = \lim \frac{n + \sin^2(n)}{n^2 + 1}^{(\frac{\infty}{\infty})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{\sin^2 n}{n} \right)}{n \left(n + \frac{1}{n} \right)} =$$

$$= \frac{1+0}{+\infty+0} = 0$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sin^2 n \leq 1$ e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ vem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^2 n \times \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ dado que o produto de uma}$$

sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo é uma sucessão que tende para 0.

$$10.19. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{5n^2 + \cos n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{\sin n}{n^2} \right)}{n^2 \left(5 + \frac{\cos n}{n^2} \right)} = \frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5}$$

dado que $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n) \leq 1$ e

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1.$$

Logo, como o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo é uma sucessão que tende para 0

temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$.

$$10.20. \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{n^2 + 1} - 3n \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} - 3n \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 3n \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 3 \right) \right] =$$

$$= +\infty \times (\sqrt{1+0} - 3)$$

$$= +\infty \times (-2) = -\infty$$

11.1. Vamos mostrar, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -5$

Seja $T(n)$ a condição em $\mathbb{N}$ $u_n > -5$.

- $T(1)$ é verdadeira, uma vez que
- Suponhamos que $T(n)$ é verdadeira para um dado número natural n (Hipótese de indução). Queremos mostrar que $T(n+1)$ é verdadeira, isto é, $u_{n+1} > -5$.

$$u_n > -5 \Leftrightarrow \frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5} \times (-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}u_n > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}u_n - 4 > -1 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}u_n - 4 > -5 \Leftrightarrow u_{n+1} > -5$$

Logo, $u_{n+1} > -5$, ou seja, $T(n+1)$ é verdadeira.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que $u_n > -5$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$11.2. \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 5}{u_n + 5} = \frac{\frac{1}{5}u_n - 4 + 5}{u_n + 5} = \frac{\frac{1}{5}u_n + 1}{u_n + 5} = \frac{\frac{1}{5}(u_n + 5)}{u_n + 5} = \frac{1}{5}$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}$, logo (v_n) é uma progressão

geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

$$11.3. \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n v_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right) =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[(u_1 + 5) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right] =$$

$$= (4 + 5) \times \frac{1-0}{\frac{4}{5}} = \frac{45}{4}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{n}} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{n}} - \frac{3}{2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \right)} - \frac{3}{2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 2} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{3}{0+2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

13.1. As medidas dos comprimentos dos segmentos estão em progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ cujo 1.º termo é 3.

Na figura estão representados 6 segmentos, pelo que se pretende obter a soma dos seis primeiros termos desta progressão.

Assim:

$$S_6 = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^6}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^6}{\frac{1}{3}} = 9 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^6 \right) = \frac{665}{81}$$

A soma das medidas dos comprimentos dos segmentos é igual a $\frac{665}{81}$ cm.

13.2. A soma pedida é igual a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 3 \times \frac{1-0}{1-\frac{2}{3}} = 9$$

A soma das medidas dos comprimentos de todos eles é 9.

$$14.1. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^{-n} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 + 0 = 0$$

$$\text{b) } \lim b_n = \lim \left(\frac{2+n^2}{n+1} \right) = \lim \frac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$$

14.2. a) Por exemplo $c_n = \frac{1}{n^2}$, pois:

$$\begin{aligned} \lim(b_n \times c_n) &= \lim \left(\frac{2+n^2}{n+1} \times \frac{1}{n^2} \right) = \lim \left(\frac{2+n^2}{n^3+n^2} \right) = \\ &= \lim \frac{n^2}{n^3} = \lim \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

b) Por exemplo, $c_n = \frac{2n+3}{n}$, pois

$$\begin{aligned} \lim(a_n - c_n) &= \lim \left(3^n + \frac{1}{n} - \frac{2n+3}{n} \right) = \\ &= \lim \left(3^n + \frac{1}{n} \right) - \lim \frac{2n+3}{n} = \\ &= 0 - \lim \frac{2n}{2} = 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

Ficha de teste 7

Págs. 70 e 71

1. ■ (u_n) é decrescente, pois $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

■ A sucessão (u_n) é decrescente e, portanto, é majorada e como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 8$, então 8 é um minorante e sendo minorada e majorada é limitada.

■ A sucessão (u_n) é monótona decrescente e limitada pelo que é convergente mas não se pode garantir que $\lim u_n = 8$

Resposta: (B)

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim u_n &= \lim \left(n - 2\sqrt{n} \right) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim \left(n - 2\sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n} \right)} \right) = \\ &= \lim \left(n - 2n\sqrt{\frac{1}{n}} \right) = \lim \left[n \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \right) \right] = \\ &= \lim n \times \lim \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \right) = \\ &= +\infty \times (1 - 2 \times 0) = +\infty \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

Resposta: (D)

3. Temos que:

$$\begin{aligned} \lim \sum_{p=1}^n u_p &= \lim \left[12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right] = \lim \left[12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{\frac{3}{4}} \right] = \\ &= \lim \left[\frac{48}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) \right] = 16 \lim \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = 16 \times (1 - 0) = 16 \end{aligned}$$

Resposta: (A)

4. ■ Se $a = \frac{1}{3}$, então $u_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$ e $\lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$, pelo que a sucessão (u_n) é convergente.

■ Se $a = 0$, então $u_n = 0^n = 0$ e $\lim u_n = 0$, pelo que a sucessão (u_n) é convergente.

■ Se $a = 1$, então $u_n = 1^n = 1$ e $\lim 1 = 1$, pelo que a sucessão (u_n) é convergente.

■ Se $a = 3$, então $u_n = 3^n$ e $\lim 3^n = +\infty$, pelo que a sucessão (u_n) é divergente (o limite não é um número real)

Resposta: (D)

5. $\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = a \times (+\infty)$ e como $a \in \mathbb{R}^-$, então $\lim(a_n \times b_n) = -\infty$.

Resposta: (C)

6.1. Temos que $a_1 = 32$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$, pelo que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{2}{5}$.

6.2. O termo geral de (a_n) é dado por:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$\text{Portanto, } a_n = 32 \times \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} a_n &= 0,052 \, 428 \, 8 \Leftrightarrow 32 \times \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} = 0,052 \, 428 \, 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} = \frac{0,052 \, 428 \, 8}{32} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} = 0,001 \, 638 \, 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} = \frac{16 \, 384}{10 \, 000 \, 000} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} = \left(\frac{2}{5} \right)^7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n-1 = 7 \Leftrightarrow n = 8 \end{aligned}$$

Existe um quadrado com lado 0,052 428 8, trata-se do 8.º quadrado da sucessão de quadrados da figura.

$$\begin{aligned} 7.1. \quad \lim \left(\frac{2 - \sqrt{n+3}}{n-1} \right) &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \\ &= \lim \frac{(2 - \sqrt{n+3})(2 + \sqrt{n+3})}{(n-1)(2 + \sqrt{n+3})} = \\ &= \lim \frac{2^2 - (\sqrt{n+3})^2}{(n-1)(2 + \sqrt{n+3})} = \\ &= \lim \frac{4 - (n+3)}{(n-1)(2 + \sqrt{n+3})} = \\ &= \lim \frac{4 - n - 3}{(n-1)(2 + \sqrt{n+3})} = \\ &= \lim \frac{-n+1}{(n-1)(2 + \sqrt{n+3})} = \\ &= \lim \frac{-(n-1)}{(n-1)(2 + \sqrt{n+3})} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2 + \sqrt{n+3}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$7.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^{2n} + 1}{5^n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(5^n + \frac{1}{5^n} \right)}{5^n \left(1 + \frac{1}{5^n} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{5^n}} = \frac{+\infty + 0}{1 + 0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

8. Seja δ um número real positivo qualquer.

Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, temos de verificar que

$\forall \delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta$$

Assim:

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} < n^2 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

Sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ é verdade

$$\text{que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \delta$$

ou seja, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

9.1. Se $n \leq 100$, $u_n = -2$.

Por outro lado, se $n > 100$, temos que $0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{103}$.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n \leq \frac{1}{103}$, portanto, a sucessão (u_n) é

minorante e majorada, pelo que é limitada.

$$9.2. \quad \lim(nu_n) = \lim\left(n \times \frac{1}{n+2}\right) = \lim \frac{n}{n+2} = 1$$

10. Seja $u_n = \frac{n^2 + 4n + 4}{n + 3}$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2 + 4(n+1) + 4}{n+4}}{\frac{n^2 + 4n + 4}{n+3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 4}{n+4}}{\frac{n^2 + 4n + 4}{n+3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 + 6n + 9}{n+4} \times \frac{n+3}{n^2 + 4n + 4} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 18n + 9n + 27}{n^3 + 4n^2 + 4n + 4n^2 + 16n + 16} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 9n^2 + 27n + 27}{n^3 + 8n^2 + 20n + 16} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3} = 1$$

Então, e usando o resultado dado, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 4n + 4}{n + 3}} = 1$$

11. $p \wedge q \Rightarrow r$: Se a sucessão (u_n) é monótona crescente e limitada então é convergente.
A proposição é verdadeira.