

Atividade de diagnóstico

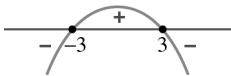
Pág. 6

1.1. $f(x) = 9 - x^2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 3[$

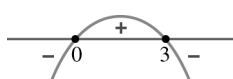
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$



1.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 3[$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$



1.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1.4. $i(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{-2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$i(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = |x^2 - 1| - x^2 + x$

2.1. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

$f(x) = |x^2 - 1| - x^2 + x =$

$$= \begin{cases} x^2 - 1 - x^2 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 - x^2 + x & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -2x^2 + x + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$



2.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x - 1 = 0 \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1)] \vee$

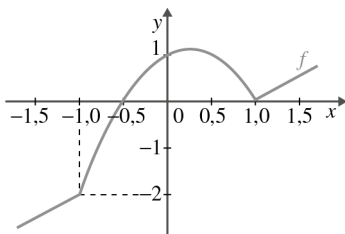
$\vee (-2x^2 + x + 1 = 0 \wedge -1 < x < 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee \left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4} \wedge -1 < x < 1 \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee \left[\left(x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \right) \wedge -1 < x < 1 \right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$

2.3.



3. $f(x) = \sqrt{x-1}$; $g(x) = 2 - x^2$

3.1. a) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(2) = \sqrt{2-1} = 1$

b) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2 - 1^2 = 1$

3.2. $D_f = [1, +\infty[$; $D_g = \mathbb{R}$

a) $D_{f \circ g} = \{x: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge 2 - x^2 \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 - x^2) = \sqrt{2 - x^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$f \circ g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

b) $D_{g \circ f} = \{x: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) =$

$= 2 - (\sqrt{x-1})^2 = 2 - (x-1) = 3 - x$

$g \circ f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 3 - x$

4. $f(x) = 1 - 2 \sin x$

4.1. $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$

$-2 \leq -2 \sin(2x) \leq 2$

$-1 \leq 1 - 2 \sin(2x) \leq 3$

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 3$ tomando todos os valores do intervalo.

$D_f' = [-1, 3]$

4.2. f é limitada porque é simultaneamente majorada e minorada, pois:

$-1 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

4.3. a) $[3, +\infty[$ b) $]-\infty, -1]$

Pág. 7

5.1. $f(x) = 1 - x^2$

$D_f' =]-\infty, 1]$

Logo, 1 é o máximo absoluto de f e f não tem mínimo absoluto.

5.2. $g(x) = 1 - \sin x$

$D_{\sin x}' = [-1, 1]$

$-1 \leq -\sin x \leq 1$

$0 \leq 1 - \sin x \leq 2$

$D_g' = [0, 2]$

Logo, 0 é o mínimo absoluto de g e 2 é o máximo absoluto.

6. Máximos relativos: 2 para $x = 2$ e -1 para $x \in]4, 6]$

Mínimos relativos: -1 para $x \in [4, 6[$ e -3 para $x = 8$

7.1. $A(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$

Divisores inteiros de -3 : $-3, -1, 1$ e 3

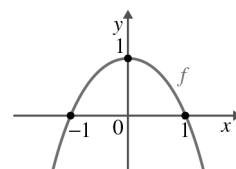
$A(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 11(-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$

$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = 3$

$A(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)$



7.2. $B(x) = x^3 - 1$

$B(1) = 0$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

A equação é impossível

$B(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$

7.3. $C(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$

Divisores inteiros de -6 : $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ e 6

$C(2) = 2^4 + 2^3 - 5 \times 2^2 + 2 - 6$

$= 16 + 8 - 20 - 4 = 0$

$C(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 5 \times (-3)^2 - 3 - 6 =$

$= 81 - 27 - 45 - 9 =$

$= 81 - 81 = 0$

2	1	1	-5	1	-6
	2	6	2	6	
	1	3	1	3	0
-3	1	-3	0	-3	
	1	0	1	0	

$x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$C(x) = (x-2)(x+3)(x^2+1)$

8. $A(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$A(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$

1	1	-1	-1	1
	1	0	-1	0
	1	0	-1	0

$A(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) =$

$= (x-1)^2(x+1)$

$B(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

$= x^2(x-3) - (x-3) =$

$= (x-3)(x^2-1) =$

$= (x-3)(x-1)(x+1)$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

$= \frac{x-1}{x-3}, \forall x \in D_f$

Pág. 8

Atividade inicial 1

1.1. Por exemplo:

a) $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ e $\frac{2}{n+1} \rightarrow 0$

b) $0,001 + \frac{1}{n} \rightarrow 0,001$ e $0,001 + \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,001$

c) $2,99 - \frac{1}{n} \rightarrow 2,99$ e $2,99 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 2,99$

d) $2 - \frac{1}{n} \rightarrow 2$ e $2 + \frac{1}{2n} \rightarrow 2$

1.2. $u_n = 5$ e $v_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq 100 \\ 5 & \text{se } n > 100 \end{cases}$

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a < \frac{1}{n} \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in A \text{ e } v_n \in A$

b) $\lim u_n = 5$ e $\lim v_n = 5$

1.3. Por exemplo, as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 100 \\ 5 & \text{se } n \geq 100 \end{cases} \text{ e } b_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{se } n \leq 10 \\ 5 & \text{se } n > 10 \end{cases}$$

1.4. Não existe

2. $B = \{1, 2\}$

2.1. $u_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \leq 200 \\ 1 & \text{se } n > 200 \end{cases}$

$\lim u_n = 1$

2.2. Por exemplo, as sucessões (c_n) e (d_n) definidas por

$$c_n = 1 \text{ e } d_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \leq 1000 \\ 1 & \text{se } n > 1000 \end{cases}$$

Pág. 9

1.1. $A =]2, +\infty[$; $\bar{A} = [2, +\infty[$

1.2. $B = [0, 1[\cup]2, 3]$; $\bar{B} = [0, 1] \cup [2, 3]$

1.3. $C = \mathbb{R}^+$; $\bar{C} = \mathbb{R}_0^+$

1.4. $D = \{1, 2, 3, 4\}$; $\bar{D} = D = \{1, 2, 3, 4\}$

1.5. $E = [0, \pi[\cup \{-2\pi, -\pi\}$

$\bar{E} = [0, \pi] \cup \{-2\pi, -\pi\}$

1.6. $F = \mathbb{N}$; $\bar{F} = \mathbb{N}$

Pág. 10

2.1. $f(x) = (x-3)(1-2x)^2$

$D_f = \mathbb{R}$

2 é o ponto aderente de D_f Seja x_n uma sucessão qualquer tal que:

$x_n \in D_f, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n \rightarrow 2$

$\lim f(x_n) = \lim [(x_n - 3)(1 - 2x_n)^2] =$

$= (\lim x_n - 3)(1 - 2 \times \lim x_n)^2 =$

$= (2 - 3)(1 - 2 \times 2)^2 = -1 \times 9 = -9$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -9$.

2.2. $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

$D_g = [-3, 3]$

 $\sqrt{5}$ é o ponto aderente de D_g .Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que:

$x_n \in D_g, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n \rightarrow \sqrt{5}$

$\lim g(x_n) = \lim \sqrt{9-x_n^2} = \sqrt{9 - (\lim x_n)^2} =$

$= \sqrt{9 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9-5} = 2$

Logo, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} g(x) = 2$.

Pág. 11

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x+1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

-1 é ponto aderente a D_f .

Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n \rightarrow -1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq -1$ e (y_n) uma sucessão tal que, a partir de certa ordem, $y_n = -1$:

$$\lim f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(x_n)^2}{x_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n)(1+x_n)}{x_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - (-1) = 2$$

$$\lim f(x_n) = \lim 2 = 2$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$.

$$4. \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

Sejam, por exemplo, as sucessões $u_n = \frac{1}{n}$ e $v_n = 0$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ e $u_n \rightarrow 0$, temos:

$$\lim f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|u_n|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Dado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$, tem-se que $\lim f(v_n) = \lim 1 = 1$.

Como (u_n) e (v_n) são sucessões de elementos do domínio de f que tendem para 0 e $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$, podemos concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Pág. 15

$$5.1. \quad f(x) = x - x^3, D_f = \mathbb{R}$$

Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f tal que:

$$\lim x_n = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim [x_n - (x_n)^3] = \lim \left[x_n^3 \left(\frac{1}{x_n^2} - 1 \right) \right] = \\ &= \lim x_n^3 \times \left(\frac{1}{(\lim x_n)^2} - 1 \right) = (+\infty)^3 \left(\frac{1}{(+\infty)^2} - 1 \right) = \\ &= +\infty(0-1) = -\infty \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$5.2. \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1}, D_g = \mathbb{R}$$

Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_g , tal que:

$$x_n \rightarrow -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim g(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_n \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\lim x_n + \frac{1}{\lim x_n}} = \frac{1}{-\infty + 0} = 0 \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Pág. 18

$$6. \quad f(x) = \frac{1}{x^2-4}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$6.1. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(-\infty)^2-4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(+\infty)^2-4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$6.2. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ então não existe limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + 2m & \text{se } x < 0 \\ -3 & \text{se } x = 0 \\ \frac{3n-2x}{x+4} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Se existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt[3]{x+1} + 2m) = 1 + 2m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3n-2x}{x+4} = \frac{3n}{4}$$

$$1 + 2m = -3 \wedge \frac{3n}{4} = -3 \Leftrightarrow 2m = -4 \wedge n = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \wedge n = -4$$

Pág. 19

$$8. \quad f(x) = \frac{1+2\cos x}{x^2+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq 2\cos x \leq 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq 1+2\cos x \leq 3$$

Portanto, sendo g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = 1+2\cos x$, g é limitada.

$$\text{Se } h(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Portanto, se g é uma função limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$,

então $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) \times h(x)] = 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Pág. 20

$$9. \quad f(x) = \sqrt{x} - 1, D_g = \mathbb{R}_0^+$$

$$g(x) = x^2 + 8x$$

$$9.1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 8x) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 1) = \sqrt{9} - 1 = 2$$

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 2$.

$$\begin{aligned}
 9.2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 8x) = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) &= 0
 \end{aligned}$$

Pág. 21

$$10.1. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$10.2. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$10.3. \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1-x^2}{3x+x^2} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

$$10.4. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2}{3x+x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 10.5. \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1+x}{|x|-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1+x}{x-2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{0^-} = -\infty
 \end{aligned}$$

$$10.6. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{|x^2-4|} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$11.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = -(-\infty) = +\infty$$

$$11.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4) = +\infty$$

$$11.3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$11.4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^2 + x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$11.5. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = -(-\infty) = +\infty$$

Pág. 22

$$12.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x^2 + x}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} x^2 \right) = +\infty$$

$$12.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x-x^2}{3+x+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \left(-\frac{1}{+\infty} \right) = 0$$

$$12.3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x}{5x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{5x^3} = \frac{3}{5}$$

$$12.4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+x+3x^4}{x^5-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$12.5. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{1-x-x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
 12.6. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2}x^2 - x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(\sqrt{2}-1)x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(\sqrt{2}-1)x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.7. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2} \times \frac{3}{x^3 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 3x - 3}{2x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = \frac{3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$12.8. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{3} \times \frac{x}{x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x}{3x^3 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \frac{2}{3}$$

Pág. 23

$$\begin{aligned}
 13.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}}{2x+3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{2x+3} = \frac{-\sqrt{1-0}}{2+0} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{1+0}} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2+2} + \sqrt{1+x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{2}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} + x \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \\
 &= \frac{2+0}{\sqrt{9+0} + \sqrt{0+0}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+2}}{2x-3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}}{2x-3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)} = \frac{\sqrt{0-0} - \sqrt{0+0}}{2-0} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-3} - \sqrt{x})(\sqrt{x-3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3-x}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} = \frac{-3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$13.7. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} - \sqrt{3-2x}) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{3-2x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{3-2x})}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3-2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x-(3-2x)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}} - x\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$13.8. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x - 1) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2+x} - (x+1)][\sqrt{x^2+x} + (x+1)]}{\sqrt{x^2+x} + x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+1+0} = -\frac{1}{2}$$

$$13.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + x \stackrel{(\infty)}{=}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + x}{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{2-0} = 1$$

$$14. f(x) = \sqrt{x^2+x}$$

$$14.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1+0=1$$

$$14.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$14.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} \stackrel{(\infty)}{=}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{1+0} = -1$$

$$14.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} + x) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} + x)(\sqrt{x^2+x} - x)}{\sqrt{x^2+x} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{-(\sqrt{1+0}+1)} = -\frac{1}{2}$$

Pág. 24

$$15.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6 \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3\cancel{(2-x)}}{\cancel{(2-x)}(2+x)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$15.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-8x+6 \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}{x^2+3x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-6)}{(x-1)(x+4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-6}{x+4} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$15.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+8x+8 \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}{x^3-x+6} =$$

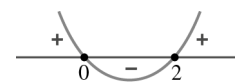
$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+3)} =$$

$$= \frac{-4+4}{4+4+3} = 0$$

$$15.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}{x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(3x+1)}{\cancel{x}(x^2-2x)} =$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x+1}{x^2-2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x+1}{x^2-2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



$$\text{Logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{x^3-2x^2}.$$

$$15.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2 \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(1-x^2)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(1-x)(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \frac{-1}{2(\sqrt{4}+2)} = -\frac{1}{8}$$

$$15.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}} = \frac{1}{4 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$15.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2+x)(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2+x)(x-\sqrt{x})}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x+1)(x-\sqrt{x})}{\cancel{x}(x-1)} = \frac{(0+1)(0-0)}{0-1} = 0$$

$$15.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2+x)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2+x)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3})}{2x+3-(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(2x+1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3})}{\cancel{x}} = 1 \times (\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$15.9. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4}{4-x^2} - \frac{1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4}{(2-x)(2+x)} - \frac{1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{4}$$

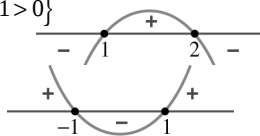
Pág. 25

$$16.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{-2+3x-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : -2+3x-x^2 \geq 0 \wedge x^2-1 > 0\}$$

$$-x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2$$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$$



$$D = [1, 2] \cap (1, +\infty) = (1, 2]$$

$$D =]1, 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{-2+3x-x^2}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{-2+3x-x^2}}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{-(1-2)}{(1+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$16.2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{|x-3|}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{x-3} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x-3)}{-(x-3)} = -3$$

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{|x-3|}$.

$$16.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-x^2|}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+x^2}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

Se $x > 1$: $|x-x^2| = -x+x^2$

$$16.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x}{|x-3x^2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x}{3x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

Se $x \rightarrow -\infty$, $|x-3x^2| = 3x^2-x$

$$16.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2-x|+2x^2}{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x+2x^2}{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x}{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-3x^2} = -1$$

Se $x \rightarrow -\infty$, $|x^2-x| = x^2-x$

$$16.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{|x-2|(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{|x-2|(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|}$.

$$16.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{|x^2-1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Se $x \rightarrow -1^-$, $|x^2-1| = -(x^2-1) = 1-x^2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{|x+1|} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{|x^2 - 1|}$.

$$16.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{(x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty$$

$$16.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x}{(x^3)^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x}{x^9}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = +\infty$$

Pág. 26

$$17. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = 1$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1). \text{ Logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Logo, f não é contínua no ponto $x = 1$.

Pág. 27

$$18.1. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2} & \text{se } x \leq -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x^2 - 1) = 2 \times (-1)^2 = 1$$

$$f(-1) = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 1, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1.$$

Dado que existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, f é contínua no ponto $x = -1$.

$$18.2. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2x - x^2}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ -2 & \text{se } x = 2 \\ \frac{2 - 5x}{x + 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 5x}{x + 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$g(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2). \text{ Logo, existe } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ pelo}$$

que g é contínua no ponto $x = 2$.

$$18.3. \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1}+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} \sqrt{x}}{\cancel{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x). \text{ Logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ pelo que } h$$

não é contínua no ponto $x = 0$.

$$19.1. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{kx^2 + (1-k)x - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \\ \frac{kx + 2}{4} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{kx^2 + (1-k)x - 1}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(kx+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{k+1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{kx + 2}{4} = \frac{k+2}{4}$$

$$g(1) = \frac{k+2}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \Leftrightarrow \frac{k+1}{2} = \frac{k+2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k+2 = k+2 \Leftrightarrow k = 0$$

g é contínua no ponto 1 se e só se $k = 0$.

$$19.2. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-k}{\sqrt{x}-\sqrt{k}} & \Leftrightarrow x > k \\ k & \Leftrightarrow x \leq k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{x-k}{\sqrt{x}-\sqrt{k}} = \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{(x-k)(\sqrt{x}+\sqrt{k})}{(\sqrt{x}-\sqrt{k})(\sqrt{x}+\sqrt{k})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{(x-k)(\sqrt{x}+\sqrt{k})}{(x-k)} = \sqrt{k} + \sqrt{k} = 2\sqrt{k}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} k = k$$

$$f(k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{k} = k \Leftrightarrow 4k = k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k(k-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 4$$

Verificação:

$$k = 0 : 2\sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (V)$$

$$k = 4 : 2\sqrt{4} = 4 \Leftrightarrow 2 \times 2 = 4 \quad (V)$$

f é contínua no ponto $x = k$ se e só se $k \in \{0, 4\}$.

Pág. 29

$$20.1. \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2x}{x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}; D_f = \mathbb{R}$$

- Em $]-\infty, 1]$, f é contínua por ser definida por um polinómio.
- Em $]1, +\infty[$, f é contínua por ser definida por uma função racional.
- No ponto $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1$$

$$f(1) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1), \text{ existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Logo, f é contínua no ponto $x = 1$.

Conclusão: A função f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$20.2. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

g é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$

(função constante em cada um dos intervalos)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Logo, g não é contínua no ponto $x = 0$.

g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$20.3. \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se } x < -2 \\ -4 & \text{se } x = -2; D_h = \mathbb{R} \\ \frac{2x + 4}{\sqrt{x + 3} - 1} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

- Em $]-\infty, -2[$, h é contínua por ser definida por uma função racional.
- Em $]-2, +\infty[$, h é contínua por ser definida pelo quociente de funções contínuas:
 - uma função polinomial
 - uma soma de uma potência de expoente racional de uma função contínua (função polinomial) com uma função constante.
- No ponto $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = -4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x + 4}{\sqrt{x + 3} - 1} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2(x + 2)(\sqrt{x + 3} + 1)}{(\sqrt{x + 3} - 1)(\sqrt{x + 3} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2(x + 2)(\sqrt{x + 3} + 1)}{x + 3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2(x + 2)(\sqrt{x + 3} + 1)}{x + 2} = \\ &= 2(\sqrt{-2 + 3} + 1) = 4 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x)$. Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ pelo

que h não é contínua no ponto $x = -2$.

Portanto, h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$21. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{kx^2 - (k + 1)x + 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ kx - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, f é contínua em $]-\infty, 1[$ (função racional) e em $]1, +\infty[$ (função polinomial).
- No ponto $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{kx^2 - (k + 1)x + 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(kx - 1)}{x - 1} = k - 1 \quad \begin{array}{c|cc} 1 & k & -(k+1) & 1 \\ \hline & k & -1 & 0 \end{array} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (kx - 1) = k - 1 \\ f(1) &= k - 1 \end{aligned}$$

Qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

Logo, $\forall k \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pelo que f é contínua

em $x = 1$.

Portanto, qualquer que seja o valor de k , f é contínua.

Pág. 30

22.1. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões

$$x_n = -2n\pi \rightarrow -\infty \text{ e } y_n = \pi - 2n\pi \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi - 2n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$$

Portanto, como existem duas sucessões (x_n) e (y_n) de valores do domínio de $\cos x$, a tender para $-\infty$, tais que as correspondentes sucessões $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm limites diferentes, podemos concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$

22.2. Sejam (x_n) e (y_n) sucessões tais que

$$x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi \rightarrow +\infty \text{ e } y_n = -\frac{\pi}{4} + n\pi \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Portanto, como existem sucessões (x_n) e (y_n) de valores do domínio da tangente, a tender para $+\infty$, tais que as correspondentes sucessões $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm limites diferentes, podemos concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x$.

Pág. 31

$$23.1. \quad f(x) = x \times \cos \frac{\pi}{x}$$

A função $x \mapsto \frac{\pi}{x}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A função $x \mapsto \cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

A função $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por ser a composta de funções contínuas.

Logo, como toda a função polinomial é contínua, f é contínua por ser o produto de duas funções contínuas.

23.2. $g(x) = \cos(\sin x)$

As funções $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \cos x$ são contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, a função g é contínua por ser a composta de duas funções contínuas.

23.3. $h(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

A função tangente é contínua.

Toda a função polinomial é contínua. Logo, h é contínua por ser a composta de duas funções contínuas.

24.1. $\lim_{x \rightarrow 3} \sin\left(\frac{\pi x}{x+9}\right)$

Seja $y(x) = \frac{\pi x}{x+9}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} y(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\pi x}{x+9} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sin\left(\frac{\pi x}{x+9}\right) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

24.2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)$

Seja $y(x) = \cos x$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(\cos x) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = \sin 0 = 0$$

Pág. 33

Atividades complementares

25.1. $\bar{A} = [0, 3]$

25.2. $\bar{B} = [0, 1] \cup \left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$

25.3. $\bar{C} = C$

25.4. $\bar{D} = \mathbb{R}$

26.1. Seja $f(x) = x(x - x^3)$.

$D_f = \mathbb{R}$

Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $x_n \in D_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim [x_n(x_n - x_n^3)] = \left[\lim x_n (\lim x_n - (\lim x_n)^3) \right] = \\ &= \sqrt{2} \left(\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3 \right) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^4 = 2 - 4 = -2 \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = -2$

26.2. Seja $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Seja (x_n) uma sucessão qualquer tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$ e $x_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n - 1}{x_n} = \frac{\lim x_n - 1}{\lim x_n} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \times 3 = -2$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = -2$

26.3. Seja $f(x) = \sqrt{3x + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x}}$.

$D_f = \mathbb{R}^+$

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$ e $x_n \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \sqrt{3x_n + \frac{1}{x_n}} = \sqrt{3 \lim x_n + \frac{1}{\lim x_n}} = \\ &= \sqrt{3 \times 1 + \frac{1}{1}} = \sqrt{3+1} = 2 \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

27. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x - x^2 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$, $D_f = \mathbb{R}$

27.1. Sejam (x_n) uma sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$ e $x_n \rightarrow 1$.

Se $x_n \rightarrow 1$ então, a partir de certa ordem temos $x_n \neq 0$

pole que:

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n - x_n^2) = \lim x_n - (\lim x_n)^2 = 1 - 1^2 = 0$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

27.2. Seja, por exemplo, as sucessões $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = 0$.

• Dado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ e $x_n \rightarrow 0$, temos

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n - x_n^2) = \lim x_n - (\lim x_n)^2 = 0 - 0^2 = 0$$

• Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = 0$, temos $\lim f(y_n) = \lim 1 = 1$.

Portanto, (x_n) e (y_n) são sucessões de elementos de D_f que tendem para 0 e $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$, podemos concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

28. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

28.1. Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f , tal que $x_n \rightarrow -\infty$. Então:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \frac{x_n^2}{1-x_n} = \lim \frac{x_n}{\frac{1}{1-x_n}} = \\ &= \frac{-\infty}{0-1} = +\infty \text{ pois } \lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

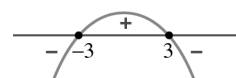
28.2. Seja (x_n) uma sucessão de elementos de D_f tal que $x_n \rightarrow 1$ e $x_n > 1$, a partir de determinada ordem.

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2}{1-x_n} = \frac{(\lim x_n)^2}{1 - \lim x_n} = \frac{1}{1-1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

29.1. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

29.2. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$



$$29.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$29.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$30. f(x) = \begin{cases} (kx)^2 - x & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ x^2 - kx & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(kx)^2 - x] = k - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - kx) = 1 - k$$

$$f(1) = 0$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ é necessário e suficiente que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow k - 1 = 1 - k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k - 1 = 0 \wedge 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$31. f(x) = \frac{\sin x + \sin(2x)}{\sqrt{x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) + \sin(2x)}{\sqrt{x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\sin x + \sin(2x)) \times \frac{1}{\sqrt{x} + x} \right) = 0$$

Se $g(x) = \sin x + \sin(2x)$ e $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ e } -1 \leq \sin(2x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq \sin x + \sin(2x) \leq 2$$

Ou seja, g é uma função limitada.

$$\text{Por outro lado: } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Como g é limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} [g(x) \times h(x)] = 0.$$

$$32. f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

$$32.1. \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x}{x+1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 4} (f \circ g)(x) = \frac{3}{5}.$$

$$32.2. \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x+1} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + \frac{2}{\frac{4}{5}} = 1 + 2 \times \frac{5}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 4} (g \circ f)(x) = \frac{7}{2}.$$

$$33.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{|x-3|} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$33.2. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$33.3. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{2x^2-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

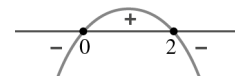


$$33.4. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{2x^2-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$33.5. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-1}{2x-x^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$2x - x^2 = x(2-x)$$

$$33.6. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-1}{2x-x^2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$



$$34.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \sqrt{2}x - \sqrt{3}x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{3}x^3) = -(-\infty) = +\infty$$

$$34.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - x + 1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{2} = +\infty$$

Pág. 34

$$35.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-6x^3}{3x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

$$35.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{x+x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

$$35.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-x^2-x^3}{\sqrt{2}x^3-x^3+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-x^2-x^3}{(\sqrt{2}-1)x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{(\sqrt{2}-1)x^3} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{-\sqrt{2}-1}{2-1} = -\sqrt{2}-1$$

$$35.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{2} \times \frac{3}{x(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3-3}{2x(x^2+2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3-3}{2x^3+4x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$$

$$36.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}+3x}{2x+3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+3x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+3\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = 2$$

$$36.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{2}$$

$$36.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2-x+3x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{9x^2-x+3x})(\sqrt{9x^2-x-3x})}{\sqrt{9x^2-x-3x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 - x - 9x^2}{\sqrt{9x^2-x-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x\sqrt{9-\frac{1}{x}-3x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{9-0+3}} = \frac{1}{6}$$

$$36.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+1| - \sqrt{1+4x^2}}{2x+1} =$$

$$\text{Se } x < -1, |x+1| = -(x+1).$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1 - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2} + 4\right)}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1 - (-x)\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}}{2x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1 - \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}\right)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-1-0+\sqrt{0+4}}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$37.1. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{2x^3 - 6x^2 + 8} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-2)(2x+2)} = \frac{2}{1} \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -6 \\ & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{2(x-2)(x+1)} = \frac{5}{0^-} = -\infty \quad \frac{2}{2} \left| \begin{array}{ccc} 2 & -6 & 0 & 8 \\ & 4 & -4 & -8 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ & 4 & 4 & \end{array} \right|$$

$$37.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^3}{x^4 + x^3 + x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x^2+x)}{(x+1)(x^3+x)} = \frac{-1}{-1} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{-(-1)^2 - 1}{(-1)^3 - 1} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \frac{-1}{-1} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$37.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+x)}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+x)}{-x\cancel{(x-1)}} = -2$$

$$37.4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$37.5. \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} = \frac{32}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} = \frac{32}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Não existe } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}.$$



$$37.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}{x+1-2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(1-x)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}{(1-\cancel{x})} = 2\sqrt{2}$$

$$37.7. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$38.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3-x|}{x-3}$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } x \leq 3 \\ -(3-x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$\frac{2}{2} \left| \begin{array}{ccc} 1 & -5 & 6 \\ & 2 & -6 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3-x|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{-(3-x)} = -1$$

$$38.2. \text{Para } x \rightarrow +\infty: |1-x-2x^4| = -1+x+2x^4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|1-x-2x^4|}{1-x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1+x+2x^4}{1-x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{-x^4} = -2$$

$$38.3. \text{Para } x \rightarrow -\infty: |1-x^2+x+x^3| = -1+x^2-x-x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1-x^2+x+x^3|}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+x^2-x-x^3}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1$$

$$39. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}-k & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$39.1. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{1-x}-k) = 1-k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)(\sqrt{x+1}+1)] = -1 \times (\sqrt{1}+1) = -2$$

$$f(0) = 1-k$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ é necessário suficiente que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1-k = -2 = 1-k \Leftrightarrow k = 3$$

$$39.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{+\infty \times (1-0)}{0^+} = +\infty \text{ pois } \sqrt{1+\frac{1}{x}} > \sqrt{\frac{1}{x}}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}-k}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}-k}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-k}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}} \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x} = 0$$

$$40.1. f(x) = \begin{cases} \frac{|6x-12|}{x^2-5x+6} & \text{se } x < 2 \\ 6 & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^3-8}{x^2-2x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|6x-12|}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{6|x-2|}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-6\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$\text{Se } x < 2: \\ |x-2| = -(x-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)} = \frac{4+4+4}{2} = 6$$

$$f(2) = 6$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Logo,

f é contínua no ponto $x = 2$.

$$40.2. \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x \neq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \text{se } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2})} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} g(x) \neq g(\sqrt{2}), \text{ Logo, não existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) \text{ pelo que } g \text{ não é contínua no ponto } x = \sqrt{2}.$$

$$40.3. \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x} - 4} & \text{se } x > 2 \\ x - \sqrt{2x} & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x} - 4} = \frac{0}{0} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)\sqrt{2x}-4}{\sqrt{2x}-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)\sqrt{2x}-4}{2(x-2)} = \frac{(4+4+4) \times \sqrt{0}}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - \sqrt{2x}) = 2 - \sqrt{2 \times 2} = 0$$

$$h(2) = 2 - \sqrt{4} = 0$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = h(2)$, existe $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Logo, h é contínua no ponto $x = 2$.

$$40.4. \quad i(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x+2}-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{x^6}{x}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0^-} x^5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x+2}-1} = \frac{0}{\sqrt{2}-1} = 0$$

$$i(0) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} i(x) = i(0)$. Logo existe $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$ pelo que

i é contínua no ponto $x = 0$.

$$41. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{kx^2 + (1-k)x - 1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ kx + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{kx^2 + (1-k)x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(kx+1)}{(x-1)} = k+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (kx + 1) = k + 1$$

$$f(1) = k + 1$$

$$\forall k \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = k + 1$$

Logo, qualquer que seja o valor de k , existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pelo que f é contínua no ponto $x = 1$.

$$42. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 2 + \frac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$42.1. \quad D_f = \mathbb{R}$$

Sabemos que toda a função polinomial é contínua e que uma potência de expoente racional de uma função contínua é uma função contínua.

• Em $]-\infty, 0[$:

f é contínua por ser o quociente de duas funções contínuas: uma é função polinomial e a outra é uma diferença de funções contínuas.

• Em $]0, +\infty[$:

f é contínua por ser a soma de funções contínuas: uma função é constante e outra que é o quociente de duas funções contínuas (uma que é o produto de funções contínuas e outra que é a soma de funções contínuas).

• Em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} = 1 + \sqrt{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \frac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{x}} =$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x\sqrt{x}+x} = 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{0}{0+1} = 2$$

$$f(0) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

pelo que f é contínua no ponto $x = 0$.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 42.2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{x\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right) = \\
 &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}} = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \\
 &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 + \frac{+\infty}{1+0} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{x\sqrt{x}}{x(x + \sqrt{x})} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \\
 &= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$43. \quad f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 43.1. \quad D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{x : x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$

43.2. A função f é contínua por ser a composta de funções contínuas: a função tangente e uma função polinomial.

$$43.3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \tan 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Se } y &= \frac{\pi x}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2}^- \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan y = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \tan \frac{\pi x}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) Se } y &= \frac{\pi x}{2}, \lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\pi x}{2} = \frac{3\pi}{2}^+ \\
 \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{y \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \tan y = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \tan \frac{\pi x}{2} = \tan\left(-\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) Se } y &= \frac{\pi x}{2}, \lim_{x \rightarrow 4} y = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\pi x}{2} = 2\pi \\
 \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{y \rightarrow 2\pi} \tan y = \tan(2\pi) = \tan 0 = 0
 \end{aligned}$$

43.4. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões de elementos de D_f tais que:

$$x_n = \frac{1}{2} + 2n \rightarrow +\infty \text{ e } y_n = -\frac{1}{2} + 2n \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned}
 \lim f(x_n) &= \lim \tan\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\right] = \lim \tan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \\
 &= \lim 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim f(y_n) &= \lim \tan\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2} + 2n\right)\right] = \\
 &= \lim \tan\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim(-1) = -1
 \end{aligned}$$

Como (x_n) e (y_n) são sucessões de elementos do domínio de f que tendem para $+\infty$ e $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$, podemos concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$44. \quad g(x) = \sin x \cos(2x)$$

44.1. g é contínua por ser o produto de duas funções contínuas: a função seno e a composta da função cosseno com uma função polinomial.

$$44.2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\sin x \cos(2x)] = \sin 0 \times \cos 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x \cos(2x)] = \sin \frac{\pi}{2} \times \cos \pi = \\
 &= 1 \times (-1) = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{3}} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{3}} [\sin(x) \cos(2x)] = \\
 &= \sin \frac{5\pi}{3} \times \cos \frac{10\pi}{3} = \\
 &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \\
 &= -\sin \frac{\pi}{3} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} [\sin x \cos(2x)] = \\
 &= \sin \frac{3\pi}{4} \times \cos \frac{3\pi}{2} = \\
 &= \sin \frac{3\pi}{4} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} [\sin x \cos(2x)] = \\
 &= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\
 &= -\sin \frac{\pi}{6} \times \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} g(2x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} [\sin(2x) \cos(4x)] = \\
 &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45. \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \\
 g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

45.1. • Para $x \neq 1$, f é contínua (função constante)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq f(1), \text{ Logo, não existe}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pelo que f não é contínua em $x = 1$.

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Para $x \neq 0$, g é contínua (função constante)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \neq g(0). \text{ Logo, não existe}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ pelo que g não é contínua no ponto $x = 0$.

g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

45.2. a) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(1) & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

b) $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & \text{se } x \neq 1 \\ g(1) & \text{se } x = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } (g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

45.3. a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f \circ g)(x) = 1 \neq (f \circ g)(0)$.

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x) = 0 \neq (g \circ f)(1)$.

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x)$

45.4. Por exemplo:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 0 \neq h(1). \text{ Logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

pelo que h não é contínua no ponto $x = 1$.

$$f + h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + h)(x) = \begin{cases} 0 + 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 + (-1) & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$(f + h)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo $f + h$ é contínua.

45.5. É falsa. Por exemplo as funções f e h são descontínuas no ponto $x = 1$ e $f + h$ é contínua nesse ponto.

46. $f(x) = a(x-1)(x-3)$

$$f(0) = 6 \Leftrightarrow a \times (-1) \times (-3) = 6 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2(x-1)(x-3)$$

$$g(x) = b(x-1)^2(x-3)$$

$$g(0) = -9 \Leftrightarrow b \times 1 \times (-3) = -9 \Leftrightarrow b = 3$$

$$g(x) = 3(x-1)^2(x-3)$$

$$46.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

$$46.2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x-3)}{3(x-1)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{3(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$46.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-1)^2(x-3)}{2(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-1)}{2} = 3$$

$$46.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{2} = 0$$

$$46.5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3(x-1)} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$46.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3) = -\infty$$

Pág. 36

Avaliação 1

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1)}{0^+} = -\infty$ porque $f(1) < 0$

Resposta: (A)

2. • $x_n = -1 - \frac{1}{n} \rightarrow -1^-$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim f(x_n) = -\infty$$

• $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim f(x_n) = +\infty$$

• $x_n = -1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow -1^+$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim f(x_n) = +\infty$$

Resposta: (C)

3. Pela definição de limite de uma função num ponto, a afirmação (C) é verdadeira.

Resposta: (C)

4. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$, ou seja, g é limitada.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 + 0 = 0$$

Como g é limitada e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então

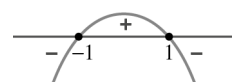
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$

Resposta: (A)

5. Sejam $f(x) = mx + b$ e $g(x) = m'x + b'$.

Sabemos que $m \times m' = -1$ ou seja, $\frac{1}{m'} = -m$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx+b}{m'x+b'} = \frac{m}{m'} = m \times \frac{1}{m'} = m \times (-m) = -m^2$$



$-m^2 < 0$, pois se $m \times m' = -1$, então $m \neq 0$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^+$

Resposta: (D)

$$6. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} + k & \text{se } x > 0 \\ kx + 1 - k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cancel{x} \sqrt{x}}{\cancel{x}} + k \right) = 0 + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (kx + 1 - k) = 1 - k$$

$$g(0) = 1 - k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow 1 - k = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Resposta: (A)

$$7. \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

Se $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 4$ então $a < 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) = a \times (-\infty) = +\infty \quad \text{porque } a < 0 \end{aligned}$$

Resposta: (B)

Pág. 37

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 5} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

8.1. Sejam (x_n) uma sucessão tal que $x_n \rightarrow 1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 1$ e (y_n) uma sucessão tal que, a partir de certa ordem, $y_n = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4x_n^2 + 5} =$$

$$= \sqrt{4(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 + 5} =$$

$$= \sqrt{4 \times 1^2 + 5} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$$

Portanto, qualquer que seja a sucessão (u_n) de elementos de

D_f tal que $u_n \rightarrow 1$ a correspondente sucessão $f(u_n) \rightarrow 3$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

$$\begin{aligned} 8.2. \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 5}}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{4 + \frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{4 + 0} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 5} + 2x) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 5} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 5} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + 5} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 5 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 5} - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$9. \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + k & \text{se } x < 0 \\ -3 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{3+k} + x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$9.1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{1-x} + k) = 1 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{3+k} + x) = \sqrt{3+k}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = \sqrt{3+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+k)^2 = 3+k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2k + k^2 - 3 - k^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Verificação

$$1 + 1 = \sqrt{3+1} \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (\text{verdade})$$

Logo, $k = 1$.

9.2. Para $k = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 + 1 = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq g(0). \text{ Logo, não existe } \lim_{x \rightarrow 0} g(x),$$

qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

$$10. \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

10.1. Sejam as sucessões (x_n) e (y_n) tais que

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$$

Tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

Logo, como existem duas sucessões (x_n) e (y_n) de valores

do domínio de $\sin x$, a tender para 0 tais que as

correspondentes sucessões $f(x_n)$ e $f(y_n)$, tendem para

limites diferentes, podemos concluir que não existe

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

10.2. A função f é limitada, dado que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Se, por exemplo, $g(x) = x$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Logo, como f é limitada e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((f \times g)(x)) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 11.1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{2 + x}} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right)}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4 + 0} + \sqrt{0 + 0}} = \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11.2. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{2-x} - 2)(\sqrt{2-x} + 2)}{x(x+2)(\sqrt{2-x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - x - 4}{x(x+2)(\sqrt{2-x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)}{x(x+2)(\sqrt{2-x} + 2)} = \\
 &= \frac{-1}{-2 \times (\sqrt{4} + 2)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - |x - x^3|}{x + x^3} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - (x - x^3)}{x + x^3} = \quad \text{Quando } x \rightarrow -\infty, \quad x - x^3 > 0 \\
 &\quad \text{Logo } |x - x^3| = x - x^3 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - x}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \\
 &= \frac{4 - 0}{0 + 1} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11.4. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x| - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{-x-1} = \quad \begin{array}{c|cc} -1 & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{-(x+1)} = \frac{-4}{-1} = 4 \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x
 \end{aligned}$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2} & \text{se } x > 2 \\ x^2 - 2x + k & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

12.1. • Para $x > 2$, f é contínua por ser o quociente de funções polinomiais, logo contínuas, e $x^3 - 2x^2 \neq 0, \forall x \in]2, +\infty[$

• Para $x < 2$, f é contínua por ser uma função polinomial.

• Para $x = 2$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x^2(x-2)} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

2	1	-1	-2
	1	1	0

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + k) = \\
 &= 4 - 4 + k = k \\
 f(2) &= 4 - 4 + k = k
 \end{aligned}$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ e f seja contínua neste ponto, é

necessário e suficiente que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

12.2. Se $k = 0$, para $x < 2$ temos $f(x) = x^2 - 2x$ e

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) + k - (-1+k)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 2 - 2h + 1 + k - k}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0
 \end{aligned}$$

13. $g(x) = a(x - x_0)^2, a > 0$

$$f(x) = bx^2(x - x_0)^2, b < 0$$

$$\begin{aligned}
 13.1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x - x_0)^2}{bx^2(x - x_0)^2} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{a}{b} \times (+\infty) = -\infty \quad \text{porque } \frac{a}{b} < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (bx^4) = \quad bx^4 \text{ é o termo de maior grau de } f(x) + g(x) \\
 &= b \times (+\infty) \\
 &= -\infty, \text{ pois } b < 0
 \end{aligned}$$

$$1.10. \quad o(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ -1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$D_o = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e o é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} o(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} o(x) = 1$$

Não há assíntotas verticais ao gráfico de o .

$$1.11. \quad p(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$D_p = \mathbb{R}$ e p é contínua.

Não há assíntotas verticais ao gráfico de p .

Pág. 42

$$2. \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - (x-3)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 1}{x} - x + 3 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x - 1 - x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\pm\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x - 3$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$3. \quad f(x) = \sqrt{x^2+1} + x + 1$$

$$\begin{aligned} 3.1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\begin{aligned} 3.2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + x + 1 - 2x - 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = 2x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

$$4.1. \quad y = 2x + 3$$

$$4.2. \quad y = x - 1$$

$$4.3. \quad y = 3$$

$$4.4. \quad y = x + \frac{1}{2}$$

5. O gráfico de g é uma reta que passa em $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$.

$$g(x) = mx + 1$$

$$m = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

$$g(x) = -x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+1)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$$

Resposta: (B)

$$6.1. \quad f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}; \quad f \text{ é contínua.}$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^-} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{-\frac{5}{3}}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{-\frac{5}{3}}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = -\frac{2}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

A reta de equação $y = \frac{2}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de f

em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$6.2. \quad g(x) = \frac{1}{3x+1}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \quad \text{e} \quad g \text{ é contínua.}$$

Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^+} \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -\frac{1}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$ e em $+\infty$.

$$6.3. \quad h(x) = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{e} \quad h \text{ é contínua.}$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

$$h(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x+1}$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{\pm\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 0) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = \\
 &= \frac{3}{\pm\infty} = 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.4. $i(x) = \frac{3x^3 - 2x}{x^2 + 2}$
 $D_i = \mathbb{R}$ e i é contínua.

Assíntotas verticais:

Não há porque i é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 2x}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3 \\
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^3 - 2x}{x^2 + 2} - 3x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 2x - 3x^2 - 6x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-8x}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-8}{x} = \frac{-8}{\pm\infty} = 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 3x$ é uma assíntota ao gráfico de i em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.5. $j(x) = \frac{3x - x^2}{x - 2}$
 $D_j = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e j é contínua.

Assíntotas verticais

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^-} j(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x - x^2}{x - 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 2^+} j(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - x^2}{x - 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de j .

Assíntotas não verticais:

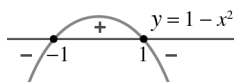
$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \\
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x - x^2}{x - 2} + x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - x^2 + x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x - 2} = 1
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de j em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.6. $l(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 2x}{1 - x^2}$
 $D_l = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e l é contínua.

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} l(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 - x^2 - 2x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -1^+} l(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3 - x^2 - 2x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} l(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - x^2 - 2x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 1^+} l(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - x^2 - 2x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty
 \end{aligned}$$



As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas do gráfico de l .

Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x}{x - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = -2 \\
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (l(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - x^2 - 2x}{1 - x^2} + 2x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 2x - 2x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{1 - x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{-x^2} = 1
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de l em $-\infty$ e em $+\infty$.

6.7. $h(x) = \frac{x^5 + 1}{(x^2 - 2)^2}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

h é contínua

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^5 + 1}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-\left(\sqrt{2}\right)^5 + 1}{0^+} = -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^5 + 1}{(x^2 - 2)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^5 + 1}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{x^5 + 1}{x^4 - 4x^2 + 4} \\
 m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5 + 1}{x^5 - 4x^3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5}{x^5} = 1 \\
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^5 + 1}{x^4 - 4x^2 + 4} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5 + 1 - x^5 + 4x^3 - 4x}{x^4 - 4x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$ e em $+\infty$.

7. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x+1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \sqrt{x+1}} = \frac{1+0}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}} - 0 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \\
 &= \frac{1+0}{\sqrt{0^+ + 0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

Logo, apesar de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ser um número real o gráfico de f não admite assíntota em $+\infty$, dado que $b \notin \mathbb{R}$.

Pág. 45

8.1. $f(x) = \sqrt{x-2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0\} = [2, +\infty[$$

f é contínua.

• Assíntotas verticais:

Como f é contínua e a aderência de D_f é D_f , o gráfico de f não tem assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$$

$b \notin \mathbb{R}$

O gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

8.2. $g(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{x}$

$D_g = \mathbb{R}^+$ e g é contínua.

• Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 =$$

$$= \frac{1}{0^+} + 1 = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de g .

• Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + 1 \right) =$$

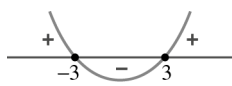
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 0 + 1 = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de g (em $+\infty$).

8.3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 9} + 3x$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0\}$$

$$=]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$



• Assíntotas verticais:

O gráfico de h não tem assíntotas verticais porque h é contínua e todos os pontos aderentes a D_h pertencem a D_h .

• Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9} + 3x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{1} + 3 = -\sqrt{1 - 0} + 3 = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 9} + 3x - 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 9} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} + x)(\sqrt{x^2 - 9} - x)}{\sqrt{x^2 - 9} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9} + 3x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = \sqrt{1 - 0} + 3 = 4$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 9} + 3x - 4x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 4x$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

8.4. $i(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$; $D_i = \mathbb{R}$

• Assíntotas verticais:

O gráfico de i não tem assíntotas verticais dado que i é contínua em $\mathbb{R}$.

• Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{3}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{3}{x^2}}}{1} = -\sqrt{4 + 0} = -2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} + 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = -2x$ é uma assíntota do gráfico de i em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{4 + \frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}} = \sqrt{4 + 0} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 3 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de i em $+\infty$.

8.5. $j(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x + 1$; $D_j = \mathbb{R}$

• A função j é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} - 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

$$= -\sqrt{1 + 0} - 1 + 0 = -2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x + 1 + 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x + 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + (x + 1))(\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1))}{\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + 1 + 0} = 1$$

A reta de equação $y = -2x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de j em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x + 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1))(\sqrt{x^2 + 1} + (x - 1))}{\sqrt{x^2 + 1} + (x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + 1 - 0} = 1$$

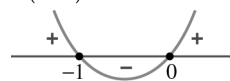
A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de j em $+\infty$.

8.6. $k(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$



• O gráfico de k não admite assíntotas verticais porque k é contínua e todos os pontos aderentes a D_k pertencem a D_k .

• Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} \right) =$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1 - (-\sqrt{1 + 0}) = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (k(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + x} - 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2 + x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x - \sqrt{x^2 + x})(-x + \sqrt{x^2 + x})}{-x + \sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2 - (x^2 + x)}{-x + \sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}$$

A reta de equação $y = 2x + \frac{1}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de k em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x} = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1} = 1 - \sqrt{1 + 0} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (k(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x})(x + \sqrt{x^2 + x})}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x)}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

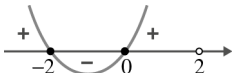
A reta de equação $y = -\frac{1}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de

k em $+\infty$.

8.7. $l(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x - 2}$

$$\begin{aligned} D_l &= \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + 8x \geq 0 \wedge x \neq 2\} = \\ &=]-\infty, -2] \cup [0, 2[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x &= 0 \Leftrightarrow 4x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \end{aligned}$$


- Assíntotas verticais:

l é contínua.

$2 \notin D_f$ e 2 é ponto aderente a D_f .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} l(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x - 2} = \frac{\sqrt{32}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} l(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x - 2} = \frac{\sqrt{32}}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de l .

- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{8}{x}\right)}}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{8}{x}}}{x - 2} = \\ &= \frac{-\sqrt{4 + 0}}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (l(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{8}{x}}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{-\sqrt{4 + 0}}{1 - 0} = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -2$ é uma assíntota ao gráfico de l em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{8}{x}}}{x - 2} = \frac{\sqrt{4 + 0}}{+\infty} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (l(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 8x}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{8}{x}}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{4 + 0}}{1 - 0} = 2 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota ao gráfico de l em $+\infty$.

8.8. $m(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \geq 0 \wedge x \neq 1\} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$



- O gráfico de m não tem assíntotas verticais dado que m é contínua e todos os pontos aderente a D_f pertencem a D_f .
- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x - 1} = \frac{-\sqrt{1 - 0}}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (m(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{-\sqrt{1 - 0}}{1 - 0} = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de m em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x - 1} = \frac{\sqrt{1 - 0}}{+\infty} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (m(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - 0}}{1 - 0} = 1 \end{aligned}$$

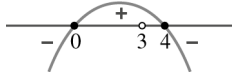
A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de m em $+\infty$.

$$8.9. \quad n(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-3}$$

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} : 4x - x^2 \geq 0 \wedge x - 3 \neq 0\} = [0, 3[\cup]3, 4]$$

Cálculo auxiliar

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$



- Assíntotas verticais:

n é contínua e 3 é o único ponto aderente a D_n que não lhe pertence:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} n(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} n(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 3$ é uma assíntota ao gráfico de n .

- Assíntotas não verticais:

D_n é um conjunto limitado. Logo, o gráfico da função n não admite assíntotas não verticais.

$$8.10. \quad o(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2-x} & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x^2-4} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$D_o = \mathbb{R}$$

A função o é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} o(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} o(x) = o(2)$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de o .

- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (o(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x - 2$ é uma assíntota ao gráfico da função o em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}} = \\ &= \sqrt{1-0} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (o(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-4} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4} - x)(\sqrt{x^2-4} + x)}{\sqrt{x^2-4} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico da função o em $+\infty$.

Pág. 46

$$9.1. \quad f(x) = \frac{|2x-1|}{x+2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+1}{x+2} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x-1}{x+2} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ e } f \text{ é contínua.}$$

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|2x-1|}{x+2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|2x-1|}{x+2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota ao gráfico de f .

- Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x+2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$$

As retas de equações $y = -2$ e $y = 2$ são assíntotas ao gráfico de f (em $-\infty$ e em $+\infty$, respetivamente).

$$9.2. \quad g(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x^2+1}{-x+1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

- Assíntotas verticais:

O gráfico de g não tem assíntotas verticais porque g é contínua em $\mathbb{R}$.

- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{-x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{-x+1} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x+1} = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

Em $+\infty$:

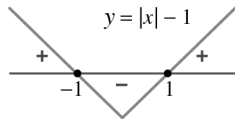
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$.

$$9.3. \quad h(x) = \frac{x^2+1}{|x|-1}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$



- Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{|x| - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{|x| - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{|x| - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{|x| - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas ao gráfico de f .

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x(|x| - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x(-x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{-x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{-x - 1} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x - 1} = 1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x(|x| - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - 1} = 1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

9.4. $i(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 5|}$

$D_i = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ e i é contínua.

- Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 5} i(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4}{|x - 5|} = \frac{21}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 5$ é uma assíntota ao gráfico de i .

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x|x - 5|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x(-x + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{-x + 5} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 + 5x}{-x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{-x} = -5 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x - 5$ é uma assíntota ao gráfico de i em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x|x - 5|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x(x - 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 5} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 + 5x}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = 5 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x + 5$ é uma assíntota ao gráfico de i em $+\infty$.

9.5. $j(x) = \frac{|x^3 - x|}{x^2 + 1}$

$D_j = \mathbb{R}$

- O gráfico de j não tem assíntotas verticais porque j é contínua em $\mathbb{R}$.

- Assíntotas não verticais: $(y = mx + b)$

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 - x|}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x}{x^3 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x + x^3 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de j em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x|}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{x^3 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (j(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de j em $+\infty$.

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$ e $g(x) = f(x) + \sqrt{x}$

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0$, então a reta de equação $y = -x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

$$D_g = \mathbb{R}^+$$

Seja $y = mx + b$ uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}} = -1 + 0 = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \sqrt{x} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = 0 + \infty = +\infty$$

Logo, como $b \notin \mathbb{R}$, não existe assíntota oblíqua ao gráfico de g em $+\infty$ pelo que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

11. Seja $r: y = mx + b$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{m}{m} = 1$$

12. f é par, ou seja, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

• Se f é par:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

Logo, as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f .

• Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$, então o

gráfico de f não tem assíntota em $+\infty$. Como f é uma função par, também não tem assíntota em $-\infty$.

Portanto, as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assíntotas ao gráfico de f .

Pág. 49

$$13.1. f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = 1$

$$13.2. g(x) = \frac{5-2x}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$$

Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizontal: $y = -2$

$$13.3. h(x) = \frac{2}{3-x} = 0 + \frac{-2}{x-3}$$

Assíntota vertical: $x = 3$

Assíntota horizontal: $y = 0$

$$13.4. i(x) = \frac{x-4}{3x-6} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x-6} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3(x-2)}$$

Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizontal: $y = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|l} x & x-1 \\ -x+1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -2x+5 & x-2 \\ 2x-4 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x+4 & 3x-6 \\ -x+2 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} \end{array}$$

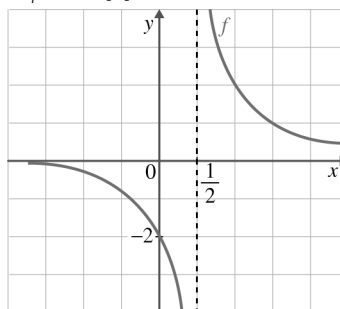
$$14.1. f(x) = \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Assíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$

Assíntota horizontal: $y = 0$

$$D_f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$f(0) = \frac{2}{-1} = -2$$

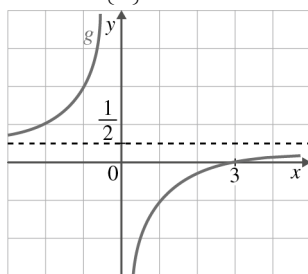
$$14.2. g(x) = \frac{x-3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assíntota vertical: $x = 0$

Assíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$

$$D_g' = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

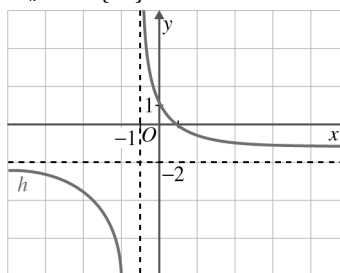
$$14.3. h(x) = \frac{1-2x}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Assíntota vertical: $x = -1$

Assíntota horizontal: $y = -2$

$$D_h' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$



$$h(0) = 1$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

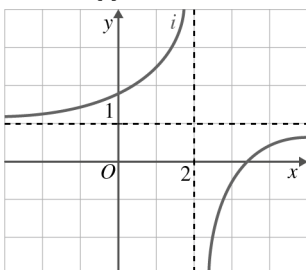
$$14.4. \quad i(x) = \frac{2x-7}{2x-4} = 1 - \frac{3}{2x-4} = 1 - \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$$

$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Assíntota vertical: $x = 2$

Assíntota horizontal: $y = 1$

$$D'_i = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



$$i(0) = \frac{7}{4}; \quad i(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-7=0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

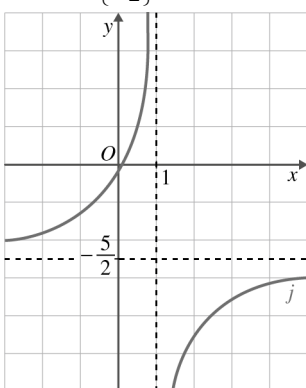
$$14.5. \quad j(x) = \frac{1-5x}{2x-2} = -\frac{5}{2} - \frac{4}{2x-2} = -\frac{5}{2} - \frac{2}{x-1}$$

$$D_j = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = -\frac{5}{2}$

$$D'_j = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$



$$j(0) = -\frac{1}{2}; \quad j(x) = 0 \Leftrightarrow 1-5x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\frac{2x-7}{-2x+4} \mid \frac{2x+4}{1}$$

$$\frac{-5x+1}{5x-5} \mid \frac{2x-2}{-5}$$

$$15.3. \quad \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x} = \frac{5}{4x} \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x(x-2)} - \frac{5}{4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16x+12-5(x-2)}{4x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x+12-5x+10=0 \wedge 4x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11x+22=0 \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$$S = \{-2\}$$

$$16.1. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-2)} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1+x-2}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \wedge x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x=1$$

$$S = \{1\}$$

$$16.2. \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{9-x^2} \times \frac{x^2+3x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-2x=0 \vee x^2+3x=0) \wedge (9-x^2 \neq 0 \wedge x-1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x=1 \vee x(x+3)=0] \wedge (x \neq -3 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

$$S = \{0\}$$

$$16.3. \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{x+6}{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{x+6}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2 + x-3 + x+6}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+9+2x+3}{(x-3)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x+12=0 \wedge (x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{2} \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = -2$$

$$S = \{-6, -2\}$$

Pág. 52

$$15.1. \quad \frac{x}{x-3} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2x+6}{x-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+6}{x-3} = 0 \Leftrightarrow -x+6=0 \wedge x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x=6; \quad S = \{6\}$$

$$15.2. \quad \frac{2x^2}{x+1} - x = \frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+1} - x - \frac{x^2-1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2(x+1) - (x^2-1)(x+1)}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^3 - x^2 - x^3 - x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + x + 1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \wedge x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$

Pág. 53

$$17.1. \quad \frac{x-3}{2x-4} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$$

$$S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

$$2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$2x-4$	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{2x-4}$	+	n.d.	-	0	+

$$\begin{aligned}
 17.2. \quad \frac{2-3x}{3-x} > 2 &\Leftrightarrow \frac{2-3x}{3-x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2-3x-6+2x}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{-x-4}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
x+4	-	0	+	+	+
x-3	-	-	-	0	+
$\frac{x+4}{x-3}$	+	0	-	n.d.	+

$$\begin{aligned}
 17.3. \quad x + \frac{x}{x-4} \leq 10 &\Leftrightarrow x + \frac{x}{x-4} - 10 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + x - 10x + 40}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 13x + 40}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 4[\cup]5, 8]
 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty, 4[\cup]5, 8]$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 13x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 8$$

	$-\infty$	4		5		8	$+\infty$
$x^2 - 13x + 40$	+	+	+	0	-	0	+
x-4	-	0	+	+	+	+	+
Q	-	n.d.	+	0	-	0	+

$$\begin{aligned}
 17.4. \quad \frac{x^2+1}{x+3} + 3 < x &\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+3} + 3 - x < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2+1+(3-x)(3+x)}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2+1+9-x^2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{10}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x+3 < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x < -3
 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty, -3[$$

$$\begin{aligned}
 17.5. \quad \frac{2x^2-3x-7}{2-x} \leq 1-x &\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7}{2-x} + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7+(x-1)(2-x)}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-7+2x-x^2-2+x}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in [-3, 2[\cup]3, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$S = [-3, 2[\cup]3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

x	$-\infty$	4		5		8	$+\infty$
$x^2 - 9$	+	0	-	-	-	0	+
2-x	+	+	+	0	-	-	-
Q	+	0	-	n.d.	+	0	-

$$17.6. \quad \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x+1} \geq x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x}{x+1}} + \frac{x^2}{\frac{x}{x+1}} - (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-x(x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-x(x^2+2x+1)}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+x^3-2x^2-x}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+1}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Cálculos auxiliares

$$\bullet -2x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
N	-	-	-	0	+	+	+	0	-
D	+	0	-	-	-	0	+	+	+
Q	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+	0	-

Pág. 54

$$18.1. \quad f(x) = \frac{3x-x^2}{x^2+x-2}$$

$$3x-x^2=0 \Leftrightarrow x(3-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-2		0		1		3	$+\infty$
N	-	-	-	0	+	+	+	0	-
D	+	0	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+	0	-

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[$$

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0[\cup]1, 3[$$

$$\begin{aligned}
 18.2. \quad g(x) &= \frac{6}{6-3x} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{-2}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \\
 &= \frac{-2x-4-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2x-8}{(x-2)(x+2)}
 \end{aligned}$$

$$\bullet -2x-8=0 \Leftrightarrow x=-4$$

$$\bullet (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$$

x	$-\infty$	-4		-2		2	$+\infty$
N	+	0	-	-	-	-	-
D	+	+	+	0	-	0	+
g(x)	+	0	-	n.d.	+	n.d.	-

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]-2, 2[$$

$$\begin{aligned} 18.3. \quad h(x) &= \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x} = \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x(x+1)} + \frac{2}{x} = \\ &= \frac{x^2-2+2x+2}{x(x+1)} = \frac{x^2+2x}{x(x+1)} = \frac{x(x+2)}{x(x+1)} = \\ &= \frac{x+2}{x+1}, \text{ se } x \neq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
x+2	-	0	+	+	+	+	+
x+1	-	-	-	0	+	+	+
h(x)	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[$$

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$18.4. \quad i(x) = \frac{2x-8}{9-3x} \times \frac{x^2-3x}{16-x^2}$$

- $2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$
- $x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$
- $9-3x=0 \Leftrightarrow x=3$
- $16-x^2=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=4$

x	$-\infty$	-4		0		3		4	$+\infty$
2x-8	-	-	-	-	-	-	-	0	+
x ² -3x	+	+	+	0	-	0	+	+	+
9-3x	+	+	+	+	+	0	-	-	-
16-x ²	-	0	+	+	+	+	+	0	-
i(x)	+	n.d.	-	0	+	n.d.	+	n.d.	+

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$i(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4, 0[$$

$$i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]0, 3[\cup]3, 4[\cup]4, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 18.5. \quad j(x) &= \frac{x^3-7x^2+8}{x^2-x-2} + 7 = \frac{x^3-7x^2+8+7x^2-14x}{x^2-x-2} = \\ &= \frac{x^3-7x-6}{x^2-x-2} \end{aligned}$$

Divisores de -6: -6, 6, -3, 3, -2, 2, -1, 1

$$(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = 0$$

$$x^3-7x-6 = (x+1)(x^2-x-6) \quad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Numerador

- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
- $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

Denominador

- $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-2		-1		2		3	$+\infty$
x+1	-	-	-	0	+	+	+	+	+
x ² -x-6x	+	0	-	-	-	-	-	0	+
x ² -x-2	+	+	+	0	-	0	+	+	+
j(x)	-	0	+	n.d.	+	n.d.	-	0	+

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

$$j(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, 3[$$

$$j(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]-1, 2[\cup]3, +\infty[$$

Pág. 55

19.1.

Tipo de farinha	Quantidade (kg)	Custo (€)
Milho	30	$0,80 \times 30$
Trigo	x	$0,60x$
Total	$30+x$	$24+0,6x$

$$\text{Custo por kg} = \frac{\text{Custo total}}{\text{Quantidade em kg}}$$

$$C(x) = \frac{24+0,6x}{30+x} = \frac{5(24+0,6x)}{5(30+x)}$$

$$C(x) = \frac{120+3x}{150+5x}$$

$$19.2. \quad C(x) \leq 0,68 \Leftrightarrow \frac{120+3x}{150+5x} - 0,68 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{120+3x-0,68 \times 150-0,68 \times 5x}{150+5x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3,4x+120-102}{150+5x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-0,4x+18}{150+5x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,4x+18 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4x \geq 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{18}{0,4} \Leftrightarrow x \geq 45$$

Como $150+5x > 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$, o sinal da fração depende de $-0,4x+18$

Devem ser usados 45 kg de farinha de trigo, no mínimo.

$$19.3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{120+3x}{150+5x} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja, quando a quantidade de farinha de trigo aumenta significativamente, o custo de cada quilograma de mistura tende a aproximar-se de 0,60 € que é o custo de cada quilograma de farinha de trigo.

Pág. 56

20. Seja x a velocidade do vento em km/h

Velocidade do avião sem vento: 300 km/h

Velocidade do avião a favor do vento: $(300+x)$ km/h

Velocidade do avião contra o vento: $(300-x)$ km/h

$$v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$$

$$\text{Tempo para percorrer 600 km a favor do vento: } \frac{600}{300+x}$$

$$\text{Tempo para percorrer 500 km contra o vento: } \frac{500}{300-x}$$

$$\frac{600}{300+x} = \frac{500}{300-x} \Leftrightarrow \frac{600}{300+x} - \frac{500}{300-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{600(300-x) - 500(300+x)}{(300+x)(300-x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100(1800-6x-1500-5x)}{(300+x)(300-x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100(300-11x) = 0 \wedge (300+x)(300-x) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 300-11x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{300}{11} \Rightarrow x \approx 27,3$$

A velocidade do vento é aproximadamente igual a 27,3 km/h.

Pág. 57

21. $V = 6 \text{ dm}^3 \text{ e } h = 2 \text{ dm}$

21.1. $A_{\text{total}} = 2 \times xy + 2 \times 2y + 2 \times 2x = 2xy + 4y + 4x$

Sabemos que:

$$V = 6 \text{ e } V = 2xy$$

Portanto:

$$2xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$$

$$A(x) = 2x \times \frac{3}{x} + 4 \times \frac{3}{x} + 4x = 6 + \frac{12}{x} + 4x = \frac{6x + 12 + 4x^2}{x}$$

$$A(x) = \frac{4x^2 + 6x + 12}{x}$$

21.2. $A(x) \leq 20 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 6x + 12}{x} \leq 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 6x + 12}{x} - 20 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 6x + 12 - 20x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 14x + 12}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 12 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 2$$

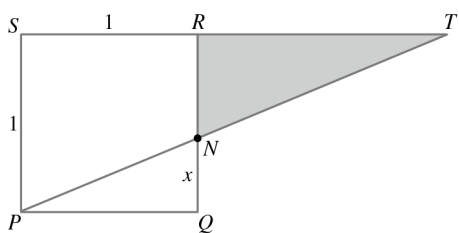


$$\frac{3}{2} < x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < \frac{3}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < y < 2$$

Sendo x e y as dimensões da base, em metros, terá de ser

$$1,5 < x < 2 \text{ e } y = \frac{3}{x}.$$

22.



22.1. $\overline{QN} = x$ e $\overline{NR} = 1 - x$

Os triângulos $[PTS]$ e $[NTR]$ são semelhantes (são triângulos retângulos com um ângulo agudo comum).

Logo, $\frac{\overline{TS}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{NR}}$.

$$\frac{\overline{TR} + 1}{\overline{TR}} = \frac{1}{1 - x}$$

$$1 + \frac{1}{\overline{TR}} = \frac{1}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{TR}} = \frac{1}{1 - x} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{TR}} = \frac{1 - 1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{TR} = \frac{1 - x}{x}$$

$$A_{[NTR]} = \frac{\overline{NR} \times \overline{TR}}{2}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \times (1 - x) \times \frac{1 - x}{x}$$

$$A(x) = \frac{(x - 1)^2}{2x}, \text{ dado que } (1 - x)^2 = (x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Portanto, $A(x) = \frac{(x - 1)^2}{2x}, x > 0$.

22.2. $A_{[PQN]} = \frac{x \times 1}{2} = \frac{x}{2}$.

$$A(x) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{2x} < \frac{x}{2} \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} - \frac{x}{2} < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2}{2x} < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 < 0 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow 2x > 1 \wedge 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1, x \text{ em decímetros}$$

Pág. 59

Atividade complementares

23.1. $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \text{ e } f \text{ é contínua;}$$

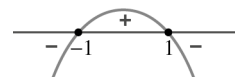
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas ao gráfico de f .



23.2. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 1}{x+1}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0 \wedge x \neq -1\} = [1, +\infty[$$

g é contínua

Como g é uma função contínua e o seu domínio contém todos os seus pontos aderentes, o gráfico de g não tem assíntota verticais.

$$23.3. h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} & \text{se } x \leq 0 \wedge x \neq -2 \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ e } h \text{ é contínua para } x \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = h(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)\sqrt{x}}{x} = (0-1) \times \sqrt{0} = 0$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, logo h não é contínua no ponto $x = 0$.

No entanto, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota ao gráfico de h .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\frac{0}{0}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{1}{-4}\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = -2$ também não é assíntota do gráfico de h . O gráfico de h não tem assíntotas verticais.

$$23.4. i(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x-1|}$$

$D_i = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e i é contínua

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$i(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)} & \text{se } x-1 < 0 \\ \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} & \text{se } x-1 > 0 \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } x < 1 \\ x-2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+2) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$$

A reta de equação $x = 1$ não é assíntota ao gráfico de i pelo que este gráfico não tem assíntotas verticais.

$$23.5. j(x) = \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x}$$

$D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e j é contínua.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} j(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\frac{0}{0}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+16} - 4)(\sqrt{x+16} + 4)}{x(\sqrt{x+16} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+16-16}{x(\sqrt{x+16} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x = 0$ não é assíntota ao gráfico de j , pelo que este gráfico não tem assíntotas verticais.

$$23.6. k(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \sqrt{x}-1 \neq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

k é contínua

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico de k .

$$23.7. l(x) = \frac{x}{2|x|-x} = \begin{cases} \frac{x}{2(-x)-x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2x-x} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{-3x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$D_l = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e l é contínua

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} l(x) = -\frac{1}{3} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} l(x) = 1$$

O gráfico de l não tem assíntotas verticais.

23.8. Atendendo a 23.7., temos:

$$m(x) = \frac{1}{2|x|-x} = \begin{cases} \frac{1}{-3x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$D_m = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e m é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-3x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de m .

$$23.9. n(x) = \frac{|x-1|}{1-x^2} = \begin{cases} \frac{-(x-1)}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x-1 < 0 \wedge x \neq -1 \\ \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x-1 > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \\ \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x < 1 \wedge x \neq -1 \\ \frac{-1}{x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$D_n = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e n é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

A reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de n .

$$24. f(x) = \frac{\sqrt{x+x^2}}{x+1} \text{ e } D_f = \mathbb{R}_0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x+x^2}}{x+1} - (x-1) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+x^2} - (x-1)(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+x^2} - (x^2-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$, a reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

25.1. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e f é contínua.

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f

- Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x-2} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ e em $+\infty$.

25.2. $g(x) = \frac{x^3+8}{(x+2)^2}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e g é contínua

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3+8}{(x+2)^2} = \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-2x+4}{x+2} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota ao gráfico de g .

- Assíntotas não verticais: ($y = mx + b$)

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+8}{x(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+8}{x^3+4x^2+4x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3+8}{(x+2)^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+8-x^3-4x^2-4x}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^2-x}{x^2+4x+4} = -4$$

A reta de equação $y = x - 4$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$ e em $+\infty$.

25.3. $h(x) = \frac{x^3-x}{x^3+x}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^3+x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x^3+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$$

h é contínua.

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-x}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x^2-1)}{\cancel{x}(x^2+1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

O gráfico de h não tem assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3-x}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$, a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $\pm\infty$

25.4. $i(x) = \frac{x^4-1}{(x-1)^3}$

$D_i = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e i é contínua

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 1} i(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2 \times 2}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota ao gráfico de i .

- Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

$$\text{Para } x \neq 1, i(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^3+x+x^2+1}{x^2-2x+1} =$$

$$= \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (i(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+x^2+x+1-x^3-2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

A reta de equação $y = x + 3$ é uma assíntota ao gráfico de i em $\pm\infty$.

26. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt[3]{x} + x) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} + 1 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} + 1 = +\infty + 1 = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico da função f .

- Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} + 1 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + 1 = \sqrt[3]{0} + 1 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x} + \cancel{x} - \cancel{x}) = -\infty$$

Não existe assíntota vertical ao gráfico de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^6}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^5}} + 0 = 0 + 0 = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

27.1. $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$ e $D_f = \mathbb{R}_0^+$

- Como f é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} - x + 1}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{x} \right) = 0 - 1 + 0 = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x + 1 + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + 1) = +\infty \end{aligned}$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não tem assíntota não vertical.

27.2. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \geq 0 \wedge x + 1 \neq 0\} \\ &=]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x + 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -2 \vee x = 0 \end{aligned}$$

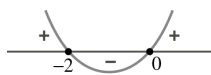
- g é contínua e D_g contém todos os pontos aderentes.

Logo, o gráfico de g não tem assíntotas verticais.

- Assíntotas não verticais

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 + x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x(x+1)} = \frac{1+0}{-\infty} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{1+0}}{1+0} = -1 \end{aligned}$$



A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

De igual modo, em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}}{x^2 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{1+0}}{+\infty} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de h em $+\infty$.

27.3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{2}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

- Como h é contínua e D_h contém todos os seus pontos aderentes, o gráfico de h não tem assíntotas verticais.
- Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} - \frac{1}{2} = -\sqrt{1-0} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x \right) \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)(\sqrt{x^2 - 1} - x)}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -\frac{3}{2}x$ é uma assíntota ao gráfico de

h em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{1-0} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é uma assíntota ao gráfico de

h em $+\infty$.

28. $f(x) = \frac{2x|x| + 2x^2 - x}{x+1}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x \times (-x) + 2x^2 - x}{x+1} & \text{se } x < 0 \wedge x \neq -1 \\ \frac{2x \times x + 2x^2 - x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{se } x < 0 \text{ e } x \neq -1 \\ \frac{4x^2 - x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

• Assíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 - x}{x+1} = 0 = f(0)$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota ao gráfico de f e f é contínua no ponto $x = 0$.

• Assíntotas não verticais ($y = mx + b$)

Em $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - x}{x+1} - 4x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - x - 4x^2 - 4x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x} = -5
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 4x - 5$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

29. Dado que a reta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de h , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + x}{h(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{h(x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{h(x)}{x}} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x}{h(x)} - \frac{x}{2} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - xh(x)}{2h(x)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xh(x) - 2x^2 - 2x}{h(x)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(h(x) - 2x - 2)}{h(x)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{h(x)} \times (h(x) - 2x - 2) \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{h(x)} \times \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) - 2 \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (0 - 2) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, ou seja, $y = \frac{x+1}{2}$,

é uma assíntota ao gráfico da função f .

30.1. $f(x) = \frac{1-3x}{x-3}$

$$= -3 + \frac{10}{x-3}$$

$$\begin{array}{r|l} -3x+1 & x+3 \\ \hline +3x+9 & -3 \\ \hline & 10 \end{array}$$

Assíntota vertical: $x = 3$

Assíntota horizontal: $y = -3$

30.2. $g(x) = \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}}{2x-2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2x-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2}x+\sqrt{2} & 2x-2 \\ \hline -\sqrt{2}x+\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline & 2\sqrt{2} \end{array}$$

Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pág. 60

31.1. $f(x) = \frac{6x-5}{3x-3} = 2 + \frac{1}{3x-3} = 2 + \frac{1}{3(x-1)}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = 2$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x-5 & 3x-3 \\ \hline -6x+6 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

31.2. $g(x) = \frac{7-4x}{2x-3} = -2 + \frac{1}{2x-3} = -2 + \frac{1}{2(x-\frac{3}{2})}$

$$\begin{array}{r|l} -4x+7 & 2x-3 \\ \hline 4x-6 & -2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Assíntota vertical: $x = \frac{3}{2}$

Assíntota horizontal: $y = -2$

$$D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$32.1. f(x) = -1 + \frac{k}{x-2}$$

$$\text{Como } f(-1) = 0: -1 + \frac{k}{-1-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{-3} = 1 \Leftrightarrow k = -3$$

$$\text{Logo, } f(x) = -1 + \frac{-3}{x-2} \text{ ou } f(x) = \frac{-x+2-3}{x-2} = \frac{-x-1}{x-2}.$$

$$32.2. d = 4$$

$$f(x) = \frac{-x-1}{x-2} = \frac{-2(-x-1)}{-2(x-2)} = \frac{2x+2}{-2x+4}$$

$$\text{Como } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Se $d = -4$ temos $a = 2$, $b = 2$ e $c = 2$.

$$32.3. f(0) = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}$$

$$B\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$33. f(x) = \frac{5x+9}{3} \text{ e } g(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{5x+9}{3} = \frac{3x-1}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+9}{3} - \frac{3x-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x+9)(x-2) - 3(3x-1)}{3(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 - 10x + 9x - 18 - 9x + 3}{3(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 - 10x - 15}{3(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 - 2x - 3) = 0 \wedge 3(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+10}}{2} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$f(-1) = \frac{5 \times (-1) + 9}{3} = \frac{4}{3}$$

$$f(3) = \frac{5 \times 3 + 9}{3} = 8$$

$\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ e $(3, 8)$ são os pontos pedidos.

$$34. f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ e } g(x) = \frac{5-x}{3}$$

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} \geq \frac{5-x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{5-x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x-3-(5-x)(x+1)}{3(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-3-5x-5+x^2+x}{3(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-8}{3(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4, -1] \cup [2, +\infty[$$

$$S = [-4, -1] \cup [2, +\infty[$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$

$$3(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-4		-1		2	$+\infty$
$x^2 + 2x - 8$	+	0	-	-	-	0	+
$3(x+1)$	-	-	-	0	+	+	+
Q	-	0	+	n.d.	-	0	+

$$35.1. \frac{x-5}{x+7} \geq \frac{x-4}{20} \Leftrightarrow \frac{x-5}{x+7} - \frac{x-4}{20} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20(x-5) - (x+7)(x-4)}{20(x+7)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20x - 100 - x^2 + 4x - 7x + 28}{20(x+7)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 17x - 72}{20(x+7)} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -7[\cup [8, 9]$$

$$S =]-\infty, -7[\cup [8, 9]$$

Cálculos auxiliares

$$-x^2 + 17x - 72 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times 72}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 9$$

x	$-\infty$	-7		8		9	$+\infty$
$-x^2 + 17x - 72$	-	-	-	0	+	0	-
$20(x+7)$	-	0	+	+	+	+	+
Q	+	n.d.	-	0	+	0	-

$$35.2. \frac{2x+4}{x} \geq \frac{3x^2+30x+20}{x^2+5x} \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x} - \frac{3x^2+30x+20}{x(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+4x+10x+20-3x^2-30x-20}{x(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-16x}{x(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+16)}{x(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+16}{x+5} \leq 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \in [-16, -5[$$

$$S = [-16, -5[$$

x	$-\infty$	-16		-5		0	$+\infty$
$x+16$	-	0	+	+	+	+	+
$x+5$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x+16}{x+5}$	+	0	-	n.d.	+	n.d.	+

$$36. f(x) = \frac{81x-x^5}{10-x^2} = \frac{x(81-x^4)}{10-x^2} = \frac{x(9-x^2)(9+x^2)}{10-x^2}$$

$$\bullet x(9-x^2)(9+x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3$$

$$\bullet 10-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{10} \vee x = \sqrt{10}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{10}$		-3		0		3		$\sqrt{10}$	$+\infty$
N_1	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
N_2	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
D	-	0	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-	0	+	0	-	n.d.	+

$$N_1: x; N_2: 9 - x^2; D: 10 - x^2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{10}[\cup]-3, 0[\cup]3, \sqrt{10}[$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{10}, -3[\cup]0, 3[\cup]\sqrt{10}, +\infty[$$

$$37. f(x) = \frac{8-x}{x-3}$$

$$37.1. A(x, f(x))$$

Sabemos que $f(x) = k$ e $k > 0$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 8$$

x	$-\infty$	3		8	$+\infty$
$8-x$	+	+	+	0	-
$x-3$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-

37.2. a) O triângulo $[OAB]$ é retângulo em B .
 $\overline{OB} = \overline{BA}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} = x \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} - x = 0 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-x-x^2+3x}{x-3} = 0 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 4) \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$b) A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{OA}}{2} = \frac{1}{2} \times f(x) \times x = \frac{(8-x)x}{2(x-3)}$$

$$A_{[OAB]} < 2 \Leftrightarrow \frac{(8-x)x}{2(x-3)} < 2 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x-x^2}{2(x-3)} - 2 < 0 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x-x^2-4x+12}{2(x-3)} < 0 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+12}{2(x-3)} < 0 \wedge 3 < x < 8 \Leftrightarrow 6 < x < 8$$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$$

$$2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	3		6		8
$-x^2+4x+12$		+	0	-	
$2(x-3)$		+	+	+	
$A_{[OAB]}$		+	0	-	

Pág. 61

38.1.

	Água (litros)	Sal (gramas)
Água pura	9000	0
Água c/sal	15t	20 × 15t
Total	9000 + 15t	20 × 15t

$$C(t) = \frac{20 \times 15t}{9000 + 15t} = \frac{20t}{600 + t} \text{ em g/l}$$

$$38.2. C(t) > 8 \Leftrightarrow \frac{20t}{600+t} > 8 \Leftrightarrow \frac{20t}{600+t} - 8 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20t - 4800 - 8t}{600+t} > 0 \Leftrightarrow \frac{12t - 4800}{600+t} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12t - 4800 > 0 \Leftrightarrow (\text{dado que } \forall t > 0, 600+t > 0)$$

$$\Leftrightarrow 12t > 4800 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t > 400 \Leftrightarrow$$

$$400 = 6 \times 60 + 40$$

$$\Leftrightarrow t > 6 \text{ h } 40 \text{ min}$$

$$400 \text{ min} = 6 \text{ h } 40 \text{ min}$$

Decorreram 6 h 40 min.

$$38.3. \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{600+t} = \frac{20}{1} = 20$$

Com o decorrer do tempo, a concentração de sal na água do depósito tenderá a ser de 20 g por litros, ou seja, tenderá a aproximar-se da concentração de sal da água que está a ser introduzida no depósito.

39.1. Torneira A : 2 h

$$\text{Torneira B: } t \text{ h com } t = \frac{10\,000}{C}, 0 \leq C \leq 50\,000$$

Torneira A :

Tempo	Fração da piscina
2 h	1
1 h	P_A

$$P_A = \frac{1 \times 1}{2}. \text{ A torneira A enche } \frac{1}{2} \text{ tanque por hora.}$$

Torneira B :

Tempo	Fração da piscina
t h	1
1 h	P_B

$$P_B = \frac{1}{t}. \text{ A torneira B enche } \frac{1}{t} \text{ do tanque por hora.}$$

Torneira A + Torneira B	Fração da piscina
1 h	$\frac{1}{2} + \frac{1}{t}$
$h(t)$	1

$$h(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{t}} = \frac{1}{\frac{t+2}{2t}} = \frac{2t}{t+2}$$

$$h(t) = \frac{2t}{t+2}, t > 0$$

$$\text{Como } t = \frac{10\,000}{C} :$$

$$h(C) = \frac{2 \times \frac{10\,000}{C}}{\frac{10\,000}{C} + 2} = \frac{\frac{20\,000}{C}}{\frac{10\,000 + 2C}{C}} =$$

$$= \frac{20\,000}{10\,000 + 2C} =$$

$$= \frac{10\,000}{5000 + C}, C > 0$$

$$h(C) = \frac{10\,000}{5000 + C}$$

39.2. 30 min = 0,5 h

$$h(C) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{10\,000}{5000+C} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{10\,000}{5000+C} - 0,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\,000 - 2500 - 0,5C}{5000+C} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7500 - 0,5C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5C = 7500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = 15\,000$$

A segunda torneira deve ser regulada por 15 000 l/h.

$$40. \quad f(x) = \frac{4-x}{x-2} = -1 + \frac{2}{x-2} \quad \begin{array}{r|l} -x-4 & 3x-2 \\ \hline x-2 & -1 \end{array}$$

$$AB: y = -1 \text{ e } BD: x = 2$$

$$A(0, -1); B(2, -1) \text{ e } D(2, 0)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 4-x = 0 \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$C(4, 0)$$

$$\overline{AB} = |2-0| = 2 \text{ e } \overline{CD} = |4-2| = 2$$

[ABCD] é um paralelogramo.

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{OA} = 2 \times 1 = 2$$

$$A_{[ABCD]} = 2 \text{ u.a.}$$

Pág. 62

$$41. \quad f(x) = \frac{4}{x+1} + 2 \text{ e } g(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$41.1. \quad f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} + 2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x+1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-2x-2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-2x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

$$S =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$2-2x$	+	+	+	0	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$\frac{2-2x}{x+1}$	-	n.d.	+	0	-

$$41.2. \quad r: y = 2; A(0, 2)$$

$$s: x = -1; D(-1, 0)$$

$$f(0) = 4 + 2 = 6; B(0, 6)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4+2x+2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+6 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3; C(-3, 0)$$

$$\text{Área}_{[OBC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9 \text{ u.a.}$$

$$\text{Área}_{[OAD]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OD}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \text{ u.a.}$$

$$\text{Área}_{[ABCD]} = (9-1) \text{ u.a.} = 8 \text{ u.a.}$$

41.3. Se a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros, então o zero de f também ézero de g . Logo, se -3 é zero de g usamos a regra de Ruffini para fatorizar $g(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ & & -3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$g(x) = (x+3)(x^2-1)$$

$$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) = 0 \vee g(x) = 0) \wedge x \in D_{f \times g} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x^2 - 1 = 0) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$S = \{-3, 1\}$$

42.1. 30% da solução é ácido

$$0,3 \times 5 = 1,5$$

$$5 - 1,5 = 3,5$$

A solução é obtida com 1,5 l de ácido e 3,5 l de água.

42.2. a) Seja x a quantidade de água a adicionar (em litros)

Solução existente:

$$\text{ácido: } 0,4 \times 5 = 2$$

$$\text{água: } 5 - 2 = 3$$

Nova solução:

$$\frac{2}{x+5} = 0,32 = \frac{2}{x+5} - 0,32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-0,32x-1,6}{x+5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4 - 0,32x = 0 \wedge x+5 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,32x = 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1,25$$

Devem ser adicionados 1,25 l de água.

b) $5 + 1,25 = 6,25$

Vão ser obtidos 6,25 l de solução a 32%.

42.3. 20 litros a 30%

$$\text{ácido: } 0,3 \times 20 = 6 \text{ l}$$

$$\text{água: } 20 - 6 = 14 \text{ l}$$

 x litros a 45%

$$\text{ácido: } 0,45x$$

$$\text{água: } x - 0,45x = 0,55x$$

$$a) \quad P(x) = \frac{6 + 0,45x}{20 + x} = \frac{20(0,45x + 6)}{20(x + 20)}$$

$$P(x) = \frac{9x + 120}{20x + 400}$$

$$b) \quad P(x) = 0,35 \Leftrightarrow \frac{9x + 120}{20x + 400} = 0,35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x + 120}{20x + 400} - 0,35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x + 120 - 7x - 140}{20x + 400} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 20 = 0 \wedge 20x + 400 \neq 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Devem ser acrescentados 10 l de solução a 35%.

c) $20 + x = 50 \Leftrightarrow x = 30$

$$P(30) = \frac{9 \times 30 + 120}{20 \times 30 + 400} = 0,39$$

A percentagem de ácido obtida é 39%.

$$42.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+120}{20x+400} = \frac{9}{20} = 0,45$$

Quando a quantidade de solução a 45% se tornar significativamente grande, a concentração da poluição obtida tende a aproximar-se de 45%.

Pág. 63

$$43. C(x) = \frac{1000x+3800}{x+10}$$

$$43.1. C(x) = 600 \Leftrightarrow \frac{1000x+3800}{x+10} = 600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000x+3800}{x+10} - 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000x+3800-600x-6000}{x+10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 400x - 2200 = 0 \wedge x+10 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2200}{400} \Leftrightarrow x = 5,5$$

$$5,5 \times 1000 = 5500$$

A empresa CPU terá de investir 5500 €.

$$43.2. C(0) = \frac{3800}{10} = 380$$

$$C(15) = \frac{1000 \times 15 + 3800}{15 + 10} = 752$$

$$C(30) = \frac{1000 \times 30 + 3800}{30 + 10} = 845$$

Venderá 380, 752 e 845 computadores, respetivamente.

43.3. Lucro se investir 0 € em publicidade:

$$C(0) \times 150 = 380 \times 150 = 57\,000 \text{ €}$$

Lucro se investir 15 000 € em publicidade:

$$C(15) \times 150 - 15\,000 = 752 \times 150 - 15\,000 = 97\,800 \text{ €}$$

Lucro se investir 30 000 € em publicidade:

$$C(30) \times 150 - 30\,000 = 845 \times 150 - 30\,000 = 96\,750 \text{ €}$$

Compensa mais gastar 15 000 € em publicidade do que 30 000 €.

43.4. a) Se forem investidos x milhares de euros em publicidade, temos:

$C(x) \rightarrow$ número de computadores vendidos

$0,15 \times C(x) \rightarrow$ lucro obtido se $x = 0$

$0,15 \times C(x) - x \rightarrow$ lucro obtido após um investimento de x milhares de euros em publicidade

b) $L(x) = 0,15 \times C(x) - x$

$$L(x) > 99 \Leftrightarrow 0,15 \times C(x) - x > 99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,15 \times \frac{1000x+3800}{x+10} - x > 99 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{150x+570}{x+10} - x - 99 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{150x+570-x^2-10x-99x-990}{x+10} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+41x-420}{x+10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2+41x-420 > 0 \Leftrightarrow$$

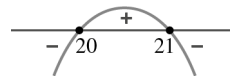
$$\Leftrightarrow 20 < x < 21$$

Devem ser investidos entre 20 mil e 21 mil euros.

Cálculo auxiliar:

$$-x^2+41x-420=0 \Leftrightarrow x = \frac{-41 \pm \sqrt{41^2 - 4 \times 420}}{-2} \Leftrightarrow$$

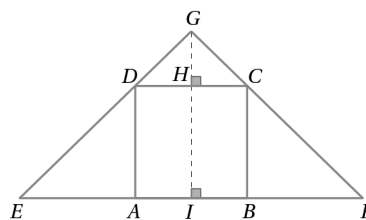
$$\Leftrightarrow x = \frac{-41 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = 20 \vee x = 21$$



44.1. $\overline{IG} > \overline{IH}$ pelo que $x > 4$.

$$D_f =]4, +\infty[$$

$$44.2. A_{[EFG]} = \frac{\overline{EF} \times \overline{IG}}{2}$$



Os triângulos $[IFG]$ e $[BFC]$ são semelhantes:

$$\frac{\overline{IG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{IF}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{\overline{IF}}{\overline{IF}-2}$$

Seja $\overline{IF} = y$.

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{y-2} \Leftrightarrow xy - 2x = 4y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy - 4y = 2x \Leftrightarrow y(x-4) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x}{x-4}$$

$$\overline{IF} = \frac{2x}{x-4}$$

$$\overline{EF} = 2\overline{IF} = 2 \times \frac{2x}{x-4}$$

$$\overline{IG} = x$$

$$A_{[EFG]} = \frac{\overline{EF} \times \overline{IG}}{2} = \frac{2 \times \frac{2x}{x-4} \times x}{2} = \frac{2x^2}{x-4}$$

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{2x^2}{x-4}.$$

$$44.3. 16 = \frac{f(x)}{2} \Leftrightarrow f(x) = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x-4} = 32 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x-4} - 32 = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 32x + 128}{x-4} = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-8)^2 = 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow x = 8$$

$$44.4. f(x) < 36 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x-4} < 36 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x-4} - 36 < 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 36x + 144}{x-4} < 0 \wedge x > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 72 < 0 \wedge x > 4 \text{ (dado que } x-4 > 0)$$

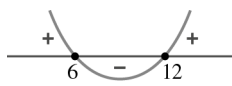
$$\Leftrightarrow x \in]6, 12[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 18x + 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times 72}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 12$$

44.5. $D_f =]4, +\infty[$ e f é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2}{x-4} = \frac{32}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 4$ é uma assíntota ao gráfico de f .Quando a altura do triângulo ($x = \overline{IG}$) tende para $+\infty$, amedida da base, EF , tende para 4, pelo que a medida da área do triângulo $[EFG]$, ou seja, $f(x)$, tende para $+\infty$.

$$44.6. m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-4} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 8x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x} = 8$$

A reta de equação $y = 2x + 8$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Pág. 64

Avaliação 2

1. $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) = 0 + \infty = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

Resposta: (A)

2. $D_h = \mathbb{R}_0^+$ e h é contínua

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - x + \sqrt{x}}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{h(x)}{x} - 1 + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} - 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow m - 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow m = 2$$

Como h é contínua no ponto O , existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. Logo, como $O \in D_h$, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$.

Resposta: (C)

3. $f(x) = a + \frac{1}{x+b}$ A reta de equação $y = a$ ($a < 0$) é uma assíntota ao gráfico de f (fica excluída a opção (A)).A reta de equação $x = -b$ ($-b > 0$) é uma assíntota ao gráfico de f (fica excluída a opção (C)).Como $+1 > 0$, f é decrescente em cada intervalo onde está definida (fica excluída a opção (B)).

Resposta: (D)

4. $g(x) = \frac{1}{kx-1}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{k} \right\}$

$$h(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \frac{1}{k\frac{x}{2}-1} + 1 = \frac{1}{\frac{kx-2}{2}} + 1 = \frac{2}{k\left(x-\frac{2}{k}\right)} + 1$$

A reta de equação $x = \frac{2}{k}$ é uma assíntota ao gráfico de h .

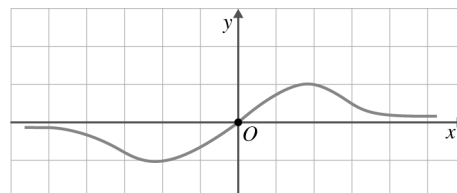
$$\text{Logo, } \frac{2}{k} = 8 \Leftrightarrow 8k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{8} = k = \frac{1}{4}.$$

Resposta: (C)

5. $\forall x \in \mathbb{R}^-, g(x) < 0$ g é ímparA reta de equação $y = 0$ é uma assíntota do gráfico.

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^- \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+$$

Por exemplo:



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{g(x)} = \frac{+\infty(1-0)}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Resposta: (B)

$$6. f(x) = \frac{4}{x-2} + 3; g(x) = f(x+3) - 4$$

$$6.1. g(x) = f(x+3) - 4 = \frac{4}{x+3-2} + 3 - 4 = \frac{4}{x+1} - 1$$

Assíntotas ao gráfico de g : $x = -1$ e $y = -1$

Resposta: (B)

$$6.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resposta: (A)

Pág. 65

$$7. g(x) = \frac{5x}{x+3}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$B(x, g(x)), x > 0$$

$$7.1. \overline{OA} = \overline{AB} \Leftrightarrow x = g(x) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{x+3} = x \wedge x > 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{x+3} - x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x - x^2 - 3x}{x+3} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2-x) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x=2$$

 $B(2, 2)$

$$7.2. P = 2\overline{OA} + 2\overline{AB}$$

$$P(x) = 2x + 2g(x) = 2x + 2 \times \frac{5x}{x+3} = \frac{2x^2 + 6x + 10x}{x+3}$$

$$P(x) = \frac{2x^2 + 16x}{x+3}$$

$$\begin{aligned}
7.3. \quad P(x) = 21 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 16x}{x+3} = 21 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 16x}{x+3} - 21 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 16x - 21x - 63}{x+3} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 63 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 2 \times 63}}{4} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 23}{4} \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(x = 7 \vee x = -\frac{9}{2} \right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = 7
\end{aligned}$$

$$g(7) = \frac{5 \times 7}{7+3} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

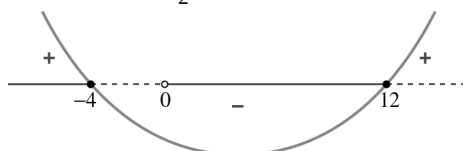
$$B\left(7, \frac{7}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
7.4. \quad P(x) \leq 32 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 16x}{x+3} \leq 32 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 16x}{x+3} - 32 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 16x - 32x - 96}{x+3} \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \quad \downarrow \forall x \in \mathbb{R}_0^+, x+3 > 0 \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 16x - 96 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 - 8x - 48 \leq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in]0, 12]
\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 8x - 48 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \times 48}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 16}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 12$$



8. Se a reta de equação $y = 2x - 3$ é uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -3$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(g(x))^2}{x} - 2g(x) \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g(x))^2 - 2xg(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(g(x) - 2x)}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times (-3) = -6
\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = -6$ é uma assíntota ao gráfico de h .

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + \sqrt{2}}{3 - 2x} & \text{se } x < 1 \\ k & \text{se } x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{2x} - \sqrt{2}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

9.1. • Em $]-\infty, 1[$ f é contínua por ser definida pelo quociente de funções contínuas (funções polinomiais) e $3 - 2x \neq 0, \forall x \in]-\infty, 1[$.

• Em $]1, +\infty[$ f é contínua por ser definida pelo quociente de duas funções contínuas: uma função polinomial e outra que é uma diferença de funções contínuas, pois uma potência de expoente racional de uma função contínua é uma função contínua. Sabe-se ainda que $\forall x \in]1, +\infty[, 2x > 0$ e $\sqrt{2x} - \sqrt{2} \neq 0$.

• No ponto $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + \sqrt{2}}{3 - 2x} = \frac{1 - 1 + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{2x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2x} - \sqrt{2})(\sqrt{2x} + \sqrt{2})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{2x} + \sqrt{2})}{2(x-1)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$f(1) = k$$

Portanto, existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ se e só se:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \sqrt{2} = k$$

Podemos portanto concluir que se $k = \sqrt{2}$ a função f é contínua.

9.2. • f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{2}.$$

Logo, o gráfico de f não tem assíntotas verticais.

• Assíntotas não verticais

Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + \sqrt{2}}{3x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + \sqrt{2}}{3 - 2x} + \frac{1}{2}x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x + 2\sqrt{2} + 3x - 2x^2}{2(3 - 2x)} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2\sqrt{2}}{6 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-4x} = -\frac{1}{4}$$

A reta de equação $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ é uma assíntota ao gráfico

de f em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(\sqrt{2x} - \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} (\sqrt{2x} - \sqrt{2})} = \frac{1-0}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \left(\frac{\sqrt{2x}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{x}} = \quad \downarrow \frac{\sqrt{2x}}{x} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, não existe assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

Portanto, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ é a única assíntota

ao gráfico de f .

10. Fração da piscina que cada uma das torneiras enche numa hora.

Torneira A: $\frac{1}{4}$

Torneira B: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Torneira C: $\frac{1}{t}$

10.1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Tempo (h)	Fração da piscina
1	$\frac{3}{4}$
t	1

$$t = \frac{1 \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \text{ h} = 1 \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min}$$

10.2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{t} = \frac{3}{4} + \frac{1}{t} = \frac{3t+4}{4t}$

Tempo (h)	Fração da piscina
1	$\frac{3t+4}{4t}$

$h(t) = 1$

$$h(t) = \frac{1 \times 1}{\frac{3t+4}{4t}} = \frac{4t}{3t+4}$$

$$h(t) = \frac{4t}{3t+4}$$

10.3. $1 \text{ h} = 12 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{12}{60} \text{ h} = 1,2 \text{ h}$

$$h(t) = 1,2 \Leftrightarrow \frac{4t}{3t+4} = 1,2 \wedge t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t}{3t+4} - 1,2 = 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t-3,6t-4,8}{3t+4} = 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,4t - 4,8 = 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4,8}{0,4} \Leftrightarrow t = 12$$

10.4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t}{3t+4} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t}{3t} = \frac{4}{3}$

A reta de equação $y = \frac{4}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de h

em $+\infty$.

Quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja, quando o caudal da torneira C tende para zero, o tempo necessário para encher a piscina

tende para $\frac{4}{3}$ que é o tempo necessário para que torneiras

A e B enchem a piscina.

Atividade inicial 3

Pág. 66

$$C(x) = 0,1x^2 + 20x + 1000$$

$$1. \quad C(100) = 0,1 \times 100^2 + 20 \times 100 + 1000 = 4000$$

O custo de produção de 100 peças é 4000 €.

$$2. \quad \frac{C(100)}{100} = \frac{4000}{100} = 40$$

Cada peça custou, em média, 40 €.

$$3. \quad C(150) = 0,1 \times 150^2 + 20 \times 150 + 1000 = 6250$$

O custo de produção de 150 peças é 6250 €.

$$4. \quad \frac{C(150)}{150} = \frac{6250}{150} \approx 41,67 \text{ €}$$

$$5. \quad C(150) - C(100) = 6250 - 4000 = 2250$$

O custo de produzir 50 peças quando já foram produzidas 100 é de 2250 €.

$$6. \quad \frac{C(150) - C(100)}{150 - 100} = \frac{2250}{50} = 45$$

O custo médio de cada uma das 50 peças produzidas depois de produzir 100 é de 45 €.

$$7. \quad \text{Custo médio de cada peça produzida acima de 100 quando foram produzidas 150 peças.}$$

Pág. 67

$$1. \quad f(-2) = f(4) = 5; \quad f(2) = f(6) = 2$$

$$1.1. \quad f(6) - f(-2) = 2 - 5 = -3$$

$$1.2. \quad \text{a) } \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{2 - 5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{2 - 2}{4} = 0$$

$$1.3. \quad \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{f(8) - 5}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(8) - 5 = -2 \Leftrightarrow f(8) = -2 + 5 \Leftrightarrow f(8) = 3$$

Pág. 68

$$2. \quad A(-4, 3); \quad f(-4) = 3$$

$$m_{AB} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \text{ e } m_{CD} = \frac{4}{3}$$

$$2.1. \quad \text{t.m.v.}_{(f, -4, b)} = m_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$2.2. \quad \text{t.m.v.}_{(f, c, d)} = m_{CD} = \frac{4}{3}$$

Pág. 69

$$3.1. \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x} = -3$$

$$3.2. \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x + 1 - (-3 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x - 1)}{x - 1} = -3$$

$$3.3. \quad g'(0) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$$

$$3.4. \quad g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - (1 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$$

1	1	2	-3
1	1	3	0

Pág. 70

$$4. \quad f(x) = \frac{2}{x}$$

$$4.1. \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2 - 2x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x} = -2$$

$$4.2. \quad f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{x} - (-2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2 + 2x}{x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x} = -2$$

$$5. \quad g(x) = \sqrt{x + 1} - 1$$

$$5.1. \quad g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + 1} - 1)(\sqrt{x + 1} + 1)}{x(\sqrt{x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$5.2. \quad g'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3 + h) - g(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + h + 1} - 1 - (2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4 + h} - 2)(\sqrt{4 + h} + 2)}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} = \frac{1}{4}$$

Pág. 71

$$6. \quad f(x) = -2x^2 + 8x - 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x + 1}, \quad D_g = [-1, +\infty[$$

$$6.1. \quad f(3) = -2 \times 3^2 + 8 \times 3 - 4 = 2$$

$$g(3) = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Logo, o ponto $A(3, 2)$ pertence ao gráfico de f e ao gráfico de g .

6.2. $y = mx + b$

$$m = f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + 8x - 4 - 2}{x - 3} =$$

3		-2	8	-6
		-2	2	0

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + 8x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(-2x+2)}{(x-3)} = -4$$

Ponto de tangência: $A(3, 2)$

$$r: y - 2 = -4(x - 3) \Leftrightarrow y = -4x + 12 + 2 \Leftrightarrow y = -4x + 14$$

6.3. $y = mx + b$

$$m = g'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Ponto de tangência: $A(3, 2)$

$$t: y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

6.4. $m_r \times m_s = -4 \times \frac{1}{4} = -1$. Logo, as retas r e s são perpendiculares.

Pág. 72

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 + 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Ponto de tangência: $A(1, 3)$ pois $f(1) = 3$

Declive:

$$m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} =$$

1		1	2	-3
		1	3	0

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3) = 4$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3}{x} - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3-3x}{x}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3(x-1)}{x(x-1)} = -3$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ dado que os limites laterais

neste ponto são diferentes. Logo, não existe $f'(1)$ pelo que

não existe tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

$$8. \quad f(x) = x^2 - x; \quad g(x) = x^2 + x$$

$$8.1. \quad m_r = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x} = 1$$

$$m_s = g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

Como $m_r \times m_s = -1$, as retas r e s são perpendiculares.

8.2. Reta r :Ponto de tangência: $(0, 0)$

$$m_r = -1$$

$$r: y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$$

Reta s :Ponto de tangência: $(0, 0)$

$$m_s = 1$$

$$s: y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Pág. 75

$$9. \quad P(t) = 12 + 4t - t^2$$

$$9.1. \quad P(t) = 0 \Leftrightarrow 12 + 4t - t^2 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-2} \Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm 8}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = 6$$

Nos instantes $t = -2$ s e $t = 6$ s.

$$9.2. \quad \frac{P(2) - P(1)}{2 - (-1)} = \frac{(12 + 8 - 4) - (12 - 4 - 1)}{3} = \frac{16 - 7}{3} = 3$$

A velocidade média de P entre $t = -1$ s e $t = 2$ s é 3 cm/s.

$$9.3. \quad v(0) = P'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - P(0)}{t - 0} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 - t)}{t} = 4$$

$$v(0) = 4 \text{ cm/s}$$

Pág. 76

$$10. \quad g(x) = -3x + 1$$

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x + 1 - (-3a + 1)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x + 3a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3(x - a)}{x - a} = -3$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, g'(a) = -3$$

$$11. \quad f(x) = x^2$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)} = a + a = 2a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 2a$$

Pág. 77

$$12. \quad f(x) = \frac{2}{1-x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{2(1-a) - 2(1-x)}{(1-x)(1-a)}}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(1-a) - 2(1-x)}{(1-x)(1-a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2-2a-2+2x}{(1-x)(1-a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x-2a}{(1-x)(1-a)(x-a)} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)}{(1-x)(1-a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2}{(1-x)(1-a)} = \frac{2}{(1-a)^2} \\
f'(a) &= \frac{2}{(1-a)^2}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}
\end{aligned}$$

13. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$; $D_f = [1, +\infty[$

13.1. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{a-1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(\sqrt{x-1} - \sqrt{a-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})}{(x-a)(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-1) - 2(a-1)}{(x-a)(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{a-1}} = \frac{2}{2\sqrt{a-1}} = \frac{1}{\sqrt{a-1}}$

$f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a-1}}, \forall a \in]1, +\infty[$

13.2. Ponto de tangência:

$(5, 4)$, pois $f(5) = 2\sqrt{5-1} = 2 \times 2 = 4$

Declive:

$m = f'(5) = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2}$, pois

$f(a) = \frac{1}{\sqrt{a-1}}$ para $a > 1$.

Equação da reta tangente:

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + 4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Pág. 79

14. $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 1-1 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-(x-1)] = -(1-1) = 0 = f(1)$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e,

portanto, f é contínua no ponto $x = 1$.

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| - 0}{x - 1}$

$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)} = -1$

$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} = 1$

Como $f'(-1) \neq f'(1^+)$, então não existe $f'(1)$ pelo que f não é diferenciável no ponto $x = 1$.

15. $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $D_g = \mathbb{R}$

15.1. $g(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

g é contínua em $\mathbb{R}$ porque toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$ e uma potência de expoente racional de uma função contínua é uma função contínua.

15.2. $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^-}} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = +\infty$

Logo, não existe $g'(0)$ pelo que g não é diferenciável no ponto $x = 0$.

Pág. 81

16.1. $f(x) = 5x - 7$; $f'(x) = (5x - 7)' = 5$

16.2. $g(x) = 1 - 7x$; $g'(x) = (1 - 7x)' = -7$

16.3. $h(x) = -\frac{x}{2} + 1$; $h'(x) = \left(-\frac{x}{2} + 1\right)' = -\frac{1}{2}$

Pág. 82

17.1. $f(x) = x^2 + x$

$f'(x) = (x^2 + x)' = (x^2)' + x' = 2x + 1$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

17.2. $g(x) = -2(1 - 2x) + \sqrt{x}$

$g'(x) = [-2(1 - 2x) + \sqrt{x}]'$

$= -2(1 - 2x)' + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= -2 \times (-2) + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= 4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D_{g'} = \mathbb{R}^+$

$g'(1) = 4 + \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{9}{2}$

17.3. $h(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

$h'(x) = (x^3 - x^2 + x + 1)'$

$= (x^3)' - (x^2)' + (x + 1)' =$

$= 3x^2 - 2x + 1$

$D_{h'} = \mathbb{R}$

$h'(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$

$$\begin{aligned}
 17.4. \quad j(x) &= 3\left(x - \frac{1}{3x}\right) \\
 j'(x) &= \left[3\left(x - \frac{1}{3x}\right)\right]' = 3\left(x - \frac{1}{3x}\right)' = 3\left[x' - \left(\frac{1}{3x}\right)'\right] = \\
 &= 3\left[1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)'\right] = 3\left[1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \\
 &= 3 - \frac{3}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3 + \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 j'(x) &= \left[3\left(x - \frac{1}{3x}\right)\right]' = \left(3x - \frac{1}{x}\right)' = \\
 &= (3x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 3 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3 + \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$j'(1) = 3 + \frac{1}{1^2} = 4$$

$$17.5. \quad p(x) = \frac{4}{x} + 2\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= \left(\frac{4}{x} + 2\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{4}{x}\right)' + (2\sqrt{x})' = \\
 &= 4\left(\frac{1}{x}\right)' + 2(\sqrt{x})' = 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\
 &= -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$D_{p'} = \mathbb{R}$$

$$p'(1) = -\frac{4}{1^2} + \frac{1}{\sqrt{1}} = -4 + 1 = -3$$

$$17.6. \quad q(x) = 4x^3 - \frac{3x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 q'(x) &= \left(4x^3 - \frac{3x^2}{2}\right)' = (4x^3)' - \left(\frac{3}{2}x^2\right)' = \\
 &= 4(x^3)' - \frac{3}{2}(x^2)' = 4 \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x = \\
 &= 12x^2 - 3x
 \end{aligned}$$

$$D_{q'} = \mathbb{R}$$

$$q'(1) = 12 \times 1^2 - 3 \times 1 = 12 - 3 = 9$$

$$\begin{aligned}
 18.3. \quad h(x) &= \left[(x^2 + 1)(x - 3)\right]' = \\
 &= (x^2 + 1)'(x - 3) + (x^2 + 1)(x - 3)' = \\
 &= \left((x^2)' + 1'\right)(x - 3) + (x^2 + 1) \times 1 = \\
 &= 2x(x - 3) + x^2 + 1 = 2x^2 - 6x + x^2 + 1 = \\
 &= 3x^2 - 6x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18.4. \quad j(x) &= \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 - 3x)\right]' = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)'(1 - 3x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)(1 - 3x)' = \\
 &= \left[1' + \left(\frac{1}{x}\right)'\right](1 - 3x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times (-3) = \\
 &= \left(0 - \frac{1}{x^2}\right)(1 - 3x) - 3 - \frac{3}{x} = \\
 &= -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3 - \frac{3}{x} = -3 - \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$19. \quad g(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 19.1. \quad g'(x) &= (x^3 + 1)' \sqrt{x} + (x^3 + 1)(\sqrt{x})' = \\
 &= \left((x^3)' + 1'\right) \sqrt{x} + (x^3 + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\
 &= (3x^2 + 0) \sqrt{x} + \frac{x^3 + 1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 \sqrt{x} + \frac{x^3 + 1}{2\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{6x^2 \sqrt{x} \sqrt{x} + x^3 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x^2 \times x + x^3 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 + 1}{2\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{(7x^3 + 1)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{(7x^3 + 1)\sqrt{x}}{2x}
 \end{aligned}$$

$$19.2. \text{ Ponto de tangência: } P(1, 2) \text{ dado que } g(1) = (1^3 + 1)\sqrt{1} = 2$$

$$\text{Declive: } m = g'(1) = \frac{(7 \times 1^3 + 1)\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Equação: } y - 2 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 4 + 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2$$

Pág. 83

$$\begin{aligned}
 18.1. \quad f'(x) &= [x(2x + 1)]' = x'(2x + 1) + x(2x + 1)' = \\
 &= 1(2x + 1) + x \times 2 = 2x + 1 + 2x = 4x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18.2. \quad g'(x) &= (3x\sqrt{x})' = (3x)' \sqrt{x} + 3x(\sqrt{x})' = \\
 &= 3\sqrt{x} + 3x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x + 3x}{2\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{9x}{2\sqrt{x}} = \frac{9}{2} \times \frac{x\sqrt{x}}{x} = \frac{9}{2}x
 \end{aligned}$$

Pág. 84

$$\begin{aligned}
 20.1. \quad f'(x) &= \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \\
 &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20.2. \quad g'(x) &= \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+1) - (x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\
 &= \frac{1 \times (x^2+1) - (x+1)\left[(x^2)'+1'\right]}{(x^2+1)^2} = \\
 &= \frac{x^2+1 - (x+1)(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1 - (x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \\
 &= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$20.3. \quad h'(x) = \left(x + \frac{2}{x^2}\right)' = x' + \left(\frac{2}{x^2}\right)' =$$

$$= 1 + \frac{2' \times x^2 - 2 \times (x^2)'}{x^4} = 1 + \frac{0 \times x^2 - 2 \times 2x}{x^4} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

$$20.4. \quad j'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{1(x^2-1) - x[(x^2)' - 1']}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1 - x(2x-0)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$$20.5. \quad p'(x) = \left(\frac{-2}{1+x^2}\right)' = \frac{(-2)'(1+x^2) - (-2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{0 \times (1+x^2) + 2[1' + (x^2)']}{(1+x^2)^2} = \frac{0 + 2(0+2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$20.6. \quad q'(x) = \left[(2+x^2)\frac{2-x^2}{2-x}\right]' =$$

$$= (2+x^2)' \frac{2-x^2}{2-x} + (2+x^2) \left(\frac{2-x^2}{2-x}\right)' =$$

$$= (0+2x) \frac{2-x^2}{2-x} + (2+x^2) \times \frac{(2-x^2)'(2-x) - (2-x^2)(2-x)'}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2x(2-x^2)}{2-x} + (2+x^2) \times \frac{(0-2x)(2-x) - (2-x^2)(-1)}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{2x(2-x^2)}{2-x} + (2+x^2) \times \frac{-4x+2x^2+2-x^2}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{4x-2x^3}{2-x} + \frac{(2+x^2)(x^2-4x+2)}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{(4x-2x^3)(2-x) + 2x^2-8x+4+x^4-4x^3+2x^2}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{8x-4x^2-4x^3+2x^4+x^4-4x^3+4x^2-8x+4}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{3x^4-8x^3+4}{(x-2)^2}$$

Pág. 85

$$21. \quad f'(x) = (x^2\sqrt{x})' = (x^2)' \sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' =$$

$$= 2x\sqrt{x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4x \times x + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{5f(x)}{2x}$$

$$22. \quad f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(a) = 2 \quad \text{e} \quad g'(a) = -8$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$22.1. \quad (f \circ g)'(a) = g'(a) \times f'(g(a)) = -8 \times f'(2) =$$

$$= -8 \times \left(-\frac{1}{2^2}\right) = 2$$

$$22.2. \quad (fg)'(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{a^2} \times 2 + \frac{1}{a} \times (-8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{a^2} - \frac{8}{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2-8a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2-8a = 0 \wedge a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{8} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$23. \quad f(x) = 3x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{3}{1+x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = \frac{1}{1+(3x)^2} = \frac{1}{1+9x^2}$$

$$f'(x) = (3x)' = 3$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{1'(1+x^2) - 1(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{0 - (0+2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$23.1. \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) =$$

$$= 3 \times g'(3x) = 3 \times \left(-\frac{2 \times (3x)}{[1+(3x)^2]^2}\right) = -\frac{18x}{(1+9x^2)^2}$$

ou

$$(g \circ f)'(x) = \left(\frac{1}{1+9x^2}\right)' = \frac{1'(1+9x^2) - 1(1+9x^2)'}{(1+9x^2)^2} =$$

$$= \frac{0 - (0+9 \times 2x)}{(1+9x^2)^2} = -\frac{18x}{(1+9x^2)^2}$$

$$23.2. \quad (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) =$$

$$= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \times f'\left(\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \times 3 = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}$$

ou

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{3}{1+x^2}\right)' = \frac{3'(1+x^2) - 3(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{0 - 3(0+2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}$$

$$23.3. (f \circ f)'(x) = f'(x) \times f'(f(x)) = 3 \times 3 = 9$$

ou

$$(f \circ f)'(x) = [f(f(x))]' = [f(3x)]' = (3 \times 3x)' = (9x)' = 9$$

Pág. 87

$$\begin{aligned} 24.1. f'(x) &= (2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 1)' = \\ &= (2x^4)' - (4x^3)' + (5x^2)' + (-x + 1)' = \\ &= 2(4x^3) - 4(3x^2) + 5(2x) + (-1) = \\ &= 2 \times 4x^3 - 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 10x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24.2. g'(x) &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3\right)' = \\ &= \left(-\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + (x + 3)' = \\ &= -\frac{1}{3}(x^3)' + \frac{1}{2}(x^2)' + 1 = \\ &= -\frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x + 1 = -x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24.3. h'(x) &= (1 - 2x^5 - x^4)' = 1' - (2x^5)' - (x^4)' = \\ &= 0 - 2(x^5)' - 4x^3 = -2 \times 5x^4 - 4x^3 = \\ &= -10x^4 - 4x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24.4. j'(x) &= (x^{-5} - 3x^{-3})' = (x^{-5})' - (3x^{-3})' = \\ &= -5x^{-5-1} - 3(x^{-3})' = -5x^{-6} - 3 \times (-3)x^{-3-1} = \\ &= -5x^{-6} + 9x^{-4} \end{aligned}$$

$$24.5. p'(x) = (x^2 + x^{-2})' = (x^2)' + (x^{-2})' = 2x - 2x^{-3}$$

Pág. 88

$$25.1. f'(x) = (x + \sqrt[4]{x})' = x' + (\sqrt[4]{x})' = 1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\begin{aligned} 25.2. g'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \frac{1' \times \sqrt[3]{x} - 1 \times (\sqrt[3]{x})'}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{0 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \\ &= -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x^2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 \times x}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

$$25.3. h'(x) = (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[5]{x})' = (\sqrt[3]{x})' - 2(\sqrt[5]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

Pág. 90

$$\begin{aligned} 26.1. f'(x) &= \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \\ &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.2. g'(x) &= [(2x+1)^3]' = 3(2x+1)^2 (2x+1)' = \\ &= 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.3. h'(x) &= [(3-2x)^3(1+2x)]' = \\ &= [(3-2x)^3]'(1+2x) + (3-2x)^3(1+2x)' = \\ &= 3(3-2x)^2(3-2x)'(1+2x) + (3-2x)^3 \times 2 = \\ &= 3(3-2x)^2 \times (-2)(1+2x) + 2(3-2x)^3 = \\ &= (3-2x)^2[-6(1+2x) + 2(3-2x)] = \\ &= (2x-3)^2(-6-12x+6+4x) = \\ &= -16x(2x-3)^2 \end{aligned}$$

$$26.4. j'(x) = (\sqrt{2x+1})' = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{(2x+1)^1}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$26.5. p'(x) = (\sqrt[3]{2x+1})' = \frac{(2x+1)'}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

$$\begin{aligned} 26.6. q'(x) &= [(x^3+x)^2]' = 2(x^3+x)^1(x^3+x)' = \\ &= 2(x^3+x)(3x^2+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.7. r'(x) &= \left[\frac{x}{(x-1)^2}\right]' = \frac{x'(x-1)^2 - x[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2} = \\ &= \frac{(x-1)^2 - x \times 2(x-1) \times (x-1)'}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1) \times 1}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(x-1) - 2x]}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{-x-1}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.8. s'(x) &= [\sqrt{x^2+1}(x+1)]' = \\ &= (\sqrt{x^2+1})'(x+1) + \sqrt{x^2+1}(x+1)' = \\ &= \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1) + \sqrt{x^2+1} \times 1 = \\ &= \frac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} = \\ &= \frac{x^2+x + (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x^2+x+x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26.9. u'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{x^2+2} - x(\sqrt{x^2+2})'}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2+2} - x \frac{(x^2+2)'}{2\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{\sqrt{x^2+2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}} \\ & = \frac{2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} \end{aligned}$$

Pág. 91

27. $x(t) = 0,1t^2 - 3t + 20$

27.1. $x(0) = 0,1 \times 0^2 - 3 \times 0 + 20 = 20$

$x(0) = 20$ m ; 20 m da origem no sentido positivo.

27.2. $x(5) = 0,1 \times 5^2 - 3 \times 5 + 20 = 7,5$

$$\frac{x(5) - x(0)}{5 - 0} = \frac{7,5 - 20}{5} = -\frac{12,5}{5} = -2,5$$

A velocidade média do ponto nos cinco primeiros segundos é igual a $-2,5$ m/s.

27.3. $v(t) = x'(t) = 0,2t - 3$

$$v(5) = 0,2 \times 5 - 3 = -2$$

$$v(5) = -2 \text{ m/s}$$

27.4. $x(t) = 0 \Leftrightarrow 0,1t^2 - 3t + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \times 0,1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3-1}{0,2} \vee t = \frac{3+1}{0,2} \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$$

$$v(10) = 0,2 \times 10 - 3 = -1$$

$$v(20) = 0,2 \times 20 - 3 = 1$$

O ponto passa na origem nos instantes $t = 10$ s e $t = 20$ s com as velocidades de -1 m/s e 1 m/s, respetivamente.

Pág. 92

28. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $D_f = [-2, +\infty[$

$$g(x) = ax^2 + b, D_g = \mathbb{R}$$

28.1. $f'(x) = (\sqrt{x+2})' = \frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

Declive:

$$m = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}+2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ponto de tangência

$$P\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{ dado que } f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Equação da reta tangente:

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{12}$$

28.2. A bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$) tem declive -1 .

Uma reta perpendicular a esta tem declive igual a 1 . Portanto, vamos determinar x tal que $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 1 = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}} = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x+2} = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x+2) = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8 = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$$

$$\text{Verificação: } f'\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{7}{4}+2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$$

Declive: $m = 1$

Ponto de tangência:

$$P\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ dado que } f\left(-\frac{7}{4}\right) = \sqrt{-\frac{7}{4}+2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Equação da reta tangente:

$$y - \frac{1}{2} = 1\left(x + \frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{9}{4}$$

28.3. r é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2 .

Ponto de tangência:

$$P(2, 2) \text{ dado que } f(2) = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\text{Declive: } m = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4}$$

$$r: y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{2}{4} + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Sabemos que r é tangente ao gráfico de g no mesmo ponto.

Portanto, temos $g(2) = 2$ e $g'(2) = \frac{1}{4}$.

$$g(2) = a \times 2^2 + b = 4a + b$$

$$g'(x) = (ax^2 + b)' = 2ax$$

$$g'(2) = 2a \times 2 = 4a$$

$$\begin{cases} g(2) = 2 \\ g'(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 2 \\ 4a = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \times \frac{1}{16} + b = 2 \\ a = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{4} \\ a = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{16}, b = \frac{7}{4} \text{ e } r: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

Pág. 93

29. Se f é uma função ímpar, então:

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$$

Como f é diferenciável vem $D_{f'} = D_f$ pelo que

$$\forall x \in D_{f'}, -x \in D_{f'}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow [f(-x)]' &= [-f(x)]' \Rightarrow && \text{Regra da derivada da} \\ &&& \text{função composta} \\ \Rightarrow (-x)' f'(-x) &= -f'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow -f'(-x) &= -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x) \end{aligned}$$

Portanto:

$\forall x \in D_{f'}, -x \in D_{f'} \wedge f'(-x) = f'(x)$, ou seja, f' é uma função par.

Pág. 95

Atividades complementares

30. $h(t) = \sqrt[3]{\frac{60t}{\pi}}$

30.1. a) $t.m.v_{(h, 0, 5)} = \frac{h(5) - h(0)}{5 - 0} = \frac{\sqrt[3]{\frac{600 \times 5}{\pi}} - 0}{5} \approx 0,91$

0,91 dm = 9,1 cm

$t.m.v_{(h, 0, 5)} \approx 9,1$ cm/min

b) $t.m.v_{(h, 20, 25)} = \frac{h(25) - h(20)}{25 - 20} = \frac{\sqrt[3]{\frac{60 \times 25}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{60 \times 20}{\pi}}}{5} \approx 0,11$

0,11 dm = 1,1 cm

$t.m.v_{(h, 20, 25)} \approx 1,1$ cm/min

c) $t.m.v_{(h, 45, 50)} = \frac{h(50) - h(45)}{50 - 45} = \frac{\sqrt[3]{\frac{60 \times 50}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{60 \times 45}{\pi}}}{5} \approx 0,07$

0,07 dm = 0,7 cm

$t.m.v_{(h, 45, 50)} \approx 0,7$ cm/min

30.2. Nos primeiros 5 min após a abertura da torneira, a altura da água no depósito aumentou, em média, 9,1 cm/min. Entre os instantes correspondentes a 20 min e a 25 min após a abertura da torneira, a altura da água aumentou, em média, 1,1 cm/min e entre os instantes 45 min e 50 min essa altura aumentou, em média 0,7 cm/min. Atendendo à forma do depósito a taxa de variação da altura diminui com o tempo.

31. $A(-2, 0)$, $B(0, b)$, $C(2, 2)$, $D(4, b)$ e $E(a, f(a))$

31.1. $t.m.v_{(f, 4, a)}$ = declive de DE =

= declive de $AC = \frac{2 - 0}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$

31.2. $t.m.v_{(f, 0, 4)} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{b - b}{4} = 0$

31.3. Reta r :

$m_r = m_{AC} = \frac{1}{2}$

Como $C(2, 2) \in r$: $r: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

O ponto $D(4, b)$ pertence a r . Então:

$b = \frac{1}{2} \times 4 + 1 \Leftrightarrow b = 3$

Portanto $B(0, 3)$, $D(4, 3)$

$t.m.v_{(f, 0, 2)} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 3}{2} = -\frac{1}{2}$

32.1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \quad | f(1) = 0$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3 - 0}{x - 1} =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} = \quad \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$

$= 1 - 3 = -2$

$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 3 - (-1)}{x - 2} =$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{x - 2} =$

$= \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$

32.2. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \quad | f(3) = 3$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3}{x-2} - 3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3 - 3x + 6}{x-2}}{x-3} =$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - 3x}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = -3$

$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \quad | f(-1) = -1$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{3}{x-2} + 1}{x + 1} =$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{3 + x - 2}{x-2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

32.3. $h(x) = \sqrt{2x + 1} + 1$

$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 1} + 1 - 2}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x + 1} - 1)(\sqrt{2x + 1} + 1)}{x(\sqrt{2x + 1} + 1)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1 - 1}{x(\sqrt{2x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x + 1} + 1} = \frac{2}{2} = 1$

$h'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - h(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} + 1 - 4}{x - 4} =$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x + 1} - 3)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 1 - 9}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} =$

$= \frac{2}{3 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

32.4. $p(x) = x + \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} p'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{p(x) - p(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \frac{1}{x} - (-2)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x^2 + 2x + 1}{x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x} = 0 \\ p'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{p(x) - p(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x^2 - 5x + 2}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-1)}{2x(x-2)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2	2	-5	2
		4	-2
2	2	-1	0

33. $f(x) = x^3 - 9x$

33.1. $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 9x - 8}{x + 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 8)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x - 8) = -6$$

-1	1	0	-9	-8
		-1	1	8
-1	1	-1	-8	0

33.2. $m_r = f'(-1) = -6$

Ponto de tangência: $A(-1, 8)$ porque $f(-1) = 8$

$r: y - 8 = -6(x + 1) \Leftrightarrow y = -6x - 6 + 8 \Leftrightarrow y = -6x + 2$

33.3. $f(x) = -6x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 9x = -6x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$

Sabemos que -1 é uma das soluções:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+1 &= 0 \vee x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -1 \vee x = -1 \vee x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \\ f(2) &= 2^3 - 9 \cdot 2 = -10 \end{aligned}$$

-1	1	0	-3	-2
		-1	1	2
-1	1	-1	-2	0

As coordenadas do ponto são: $(2, -10)$

34. $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 6 - 4\sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

34.1. $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)} = -2 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{6 - 4\sqrt{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - 4\sqrt{x}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(x-1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(1 - \sqrt{x})}{-(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}$$

Logo, $f'(1) = -2$.

34.2. $m = f'(1) = -2$

Ponto de tangência: $(1, 2)$ pois, $f(1) = 2$

$y - 2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 + 2 \Leftrightarrow y = -2x + 4$

35. $p(t) = 8t - t^2$

35.1. $p(0) = 0$. O ponto está na origem.

35.2. a) $t.m.v_{(p, 1, 3)} = \frac{p(3) - p(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 7}{2} = 4$

$t.m.v_{(p, 1, 3)} = 4 \text{ m/s}$

b) $t.m.v_{(p, 5, 7)} = \frac{p(7) - p(5)}{7 - 5} = \frac{7 - 15}{2} = -4$

$t.m.v_{(p, 5, 7)} = -4 \text{ m/s}$

35.3. $p'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{p(t) - p(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{8t - t^2 - 12}{t - 2} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(-t+6)}{(t-2)} = 4$$

2	-1	8	-12
		-2	12
2	-1	6	0

$p(2) = 12$

No instante $t = 2 \text{ s}$, a velocidade do ponto é 4 m/s e a distância à origem é igual a 12 m .

$p'(6) = \lim_{t \rightarrow 6} \frac{p(t) - p(6)}{t - 6} = \lim_{t \rightarrow 6} \frac{8t - t^2 - 12}{t - 6} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 6} \frac{(t-6)(-t+2)}{(t-6)} = -4$$

6	-1	8	-12
		-6	12
6	-1	2	0

$p(6) = 12$

No instante $t = 6 \text{ s}$, a velocidade do ponto é -4 m/s e a distância à origem é igual a 12 m .

Pág. 96

36.1. $g(x) = 1 - \frac{1}{2x}$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{1}{2x} - \left(1 - \frac{1}{2a}\right)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-1}{2x} + \frac{1}{2a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-a + x}{2ax}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{2ax(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2ax} = \frac{1}{2a^2}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

36.2. a) $m_r = g'(-1) = \frac{1}{2 \times (-1)^2} = \frac{1}{2}$ (faz-se $a = -1$)

Ponto de tangência: $A\left(-1, \frac{3}{2}\right); g(-1) = 1 - \frac{1}{-2} = \frac{3}{2}$

$r: y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

b) $s: y = \frac{1}{2}x + 2$

Ponto de tangência. É um ponto de abscissa a tal que:

$g'(a) = \frac{1}{2}$

$g'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1$

Como a reta s é estritamente paralela à reta r , temos $a = 1$.

Logo, o ponto de tangência é $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, pois $g(1) = \frac{1}{2}$.

$$s: y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$37. f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{0} = 0 = f(1)$$

Como, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Logo, f é contínua no ponto $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como não existe $f'(1)$, f não é diferenciável no ponto $x = 1$.

$$38.1. f'(x) = (5x^2 - 5x - 3x^{-2})' = 10x^1 - 5 - (-2) \times 3x^{-3} =$$

$$= 10x + \frac{6}{x^3} - 5$$

$$38.2. g'(x) = \left(2x^{-2} - \frac{1}{x}\right)' = -2 \times 2x^{-3} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} = \frac{x-4}{x^3}$$

$$38.3. h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{2}{x^2}\right)' + \left(\frac{1}{x^3}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{2' \times x^2 - 2 \times (x^2)'}{x^4} + \frac{1' \times x^3 - 1 \times (x^3)'}{x^6} =$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{0 + 2 \times 2x}{x^4} - \frac{0 + 3x^2}{x^6} = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$$38.4. i'(x) = \left[(2-x^2)(1-x)\right]' =$$

$$= (2-x^2)'(1-x) + (2-x^2)(1-x)' =$$

$$= -2x(1-x) + (2-x^2)(-1) =$$

$$= -2x + 2x^2 - 2 + x^2 = 3x^2 - 2x - 2$$

$$38.5. j'(x) = \left(\frac{2x+3}{3x-5}\right)' = \frac{(2x+3)'(3x-5) - (2x+3)(3x-5)'}{(3x-5)^2} =$$

$$= \frac{2(3x-5) - (2x+3) \times 3}{(3x-5)^2} =$$

$$38.6. k'(x) = \left(\frac{x^2-4x}{x-1}\right)' = \frac{(x^2-4x)'(x-1) - (x^2-4x)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-1) - x^2 + 4x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

$$38.7. l'(x) = \left[(1-2x)^3\right]' = 3(1-2x)^2(1-2x)' =$$

$$= 3(1-2x)^2 \times (-2) = -6(1-2x)^2$$

$$38.8. m'(x) = \left(\frac{x^2-2}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(x^2-2)'(x-1)^2 - (x^2-2)[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x-1)^2 - (x^2-2) \times 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)[2x(x-1) - 2(x^2-2)]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 4}{(x-1)^3} = \frac{-2x + 4}{(x-1)^3}$$

$$38.9. n'(x) = \left[(3x+1)(3x-1)^3\right]' =$$

$$= (3x+1)'(3x-1)^3 + (3x+1)[(3x-1)^3]' =$$

$$= 3(3x-1)^3 + (3x+1) \times 3(3x-1)^2 \times (3x-1)' =$$

$$= 3(3x-1)^3 + 3(3x+1)(3x-1)^2 \times 3 =$$

$$= (3x-1)^2 [3(3x-1) + 9(3x+1)] =$$

$$= (3x-1)^2 (9x-3+27x+9) =$$

$$= (3x-1)^2 (36x+6) = 6(3x-1)^2 (6x+1)$$

$$38.10. o'(x) = \left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)' =$$

$$= \frac{(x^2+2x+2)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$38.11. p'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{x'\sqrt{x+1} - x(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} - x \times \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2(x+1) - x}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{2x+2-x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$38.12. q'(x) = \left(2x\sqrt{4-x^2}\right)' =$$

$$= (2x)'\sqrt{4-x^2} + 2x(\sqrt{4-x^2})' =$$

$$= 2\sqrt{4-x^2} + 2x \times \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{4-x^2} + \frac{2x \times (-2x)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(4-x^2) - 2x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\begin{aligned}
38.13. \quad r'(x) &= (x\sqrt[3]{1-2x})' = \\
&= x'\sqrt[3]{1-2x} + x(\sqrt[3]{1-2x})' = \\
&= \sqrt[3]{1-2x} + x \times \frac{(1-2x)'}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \\
&= \frac{3\sqrt[3]{1-2x} \times \sqrt[3]{(1-2x)^2} - 2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \\
&= \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3} - 2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{3(1-2x) - 2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \\
&= \frac{3-8x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{(1-2x)^3} - 2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \\
&= \frac{3(1-2x) - 2x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} = \frac{3-8x}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
38.14. \quad s'(x) &= \left[x(1-3x)^{-\frac{2}{3}} \right]' = \\
&= x'(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + x \left[(1-3x)^{-\frac{2}{3}} \right]' = \\
&= (1-3x)^{-\frac{2}{3}} + x \left[-\frac{2}{3}(1-3x)^{-\frac{2}{3}-1} \times (1-3x)' \right] = \\
&= (1-3x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x(1-3x)^{-\frac{5}{3}} \times (-3) = \\
&= (1-3x)^{-\frac{2}{3}} \left[(1-3x)^1 + 2x \right] = \\
&= \frac{1-3x+2x}{(1-3x)^{\frac{5}{3}}} = \frac{1-x}{\sqrt[3]{(1-3x)^5}}
\end{aligned}$$

$$39.1. \quad f(x) = x - 2x^2 \text{ e } f'(x) = 1 - 4x$$

Ponto de tangência: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pois, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{4}{2} = -1$$

$$y - 0 = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2}$$

$$39.2. \quad h(x) = \sqrt{x-1} - x \text{ e } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - 1$$

Ponto de tangência: $(2, -1)$ pois $h(2) = -1$

$$m = h'(2) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

$$40. \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$g(2) = 2 \text{ e } g'(2) = 4$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-3) - (2x+1)(x-3)'}{(x-3)^2} = \\
&= \frac{2(x-3) - (2x+1)x'}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \\
&= \frac{-7}{(x-3)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40.1. \quad (f \circ g)'(2) &= g'(2) \times f'(g(2)) = 4 \times f'(2) = \\
&= 4 \times \frac{-7}{(2-3)^2} = 4 \times (-7) = -28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40.2. \quad (f \circ f)'(2) &= f'(2) \times f'(f(2)) = \\
&= \frac{-7}{(2-3)^2} \times f'(-5) = \quad | f(2) = \frac{4+1}{2-3} = -5 \\
&= -7 \times \frac{-7}{(-5-3)^2} = \frac{49}{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40.3. \quad (fg)'(2) &= f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2) = \\
&= -7 \times 2 + (-5) \times 4 = -14 - 20 = -34
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40.4. \quad \left(\frac{f}{g} \right)'(2) &= \frac{f'(2)g(2) - f(2) \times g'(2)}{[g(2)]^2} = \\
&= \frac{-7 \times 2 - (-5) \times 4}{2^2} = \frac{-14 + 20}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$41. \quad f(x) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2x-4}$$

$$41.1. \quad f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{0 - (2x-4)'}{(2x-4)^2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{(2x-4)^2}$$

Ponto de tangência:

$$\left(4, \frac{23}{4}\right): f(4) = \frac{3}{2} \times 4 - \frac{1}{2 \times 4 - 4} = \frac{23}{4}$$

$$m = f'(4) = \frac{3}{2} + \frac{2}{16} = \frac{13}{8}$$

$$y - \frac{23}{4} = \frac{13}{8}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{13}{8}x - \frac{13}{2} + \frac{23}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{13}{8}x - \frac{3}{4}$$

$$41.2. \quad m = 2$$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{2}{(2x-4)^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(2x-4)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(2x-4)^2} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-4)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x-4 = -2 \vee 2x-4 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2 \vee 2x = 6 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

No ponto de abscissa 1: $(1, 2)$ pois $f(1) = 2$

$$m = 2$$

$$y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

No ponto de abscissa 3: $(3, 4)$ pois $f(3) = 4$

$$m = 2$$

$$y - 4 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

$$42. \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 1 = x - 1$$

$$42.1. \quad \text{No ponto de tangência, o declive } (m) \text{ é igual a } f'(x): m = f'(x)$$

As retas de declive m que passam em $(0, 1)$ têm equações do tipo $y = mx + 1$

O ponto de tangência é comum à reta e ao gráfico de $f: mx + 1 = f(x)$

Temos de determinar x tal que:

$$m = f'(x) \wedge mx + 1 = f(x)$$

$$m = x - 1 \wedge mx + 1 = \frac{x^2}{2} - x + 3$$

Desta conjunção resulta:

$$(x-1)x + 1 = \frac{x^2}{2} - x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x^2}{2} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Logo, existem duas retas tangentes ao gráfico de f que passam no ponto $(0, 1)$.

42.2. No ponto de abscissa -2 : $(-2, 7)$

$$m = f'(-2) = -2 - 1 = -3$$

$$r: y - 7 = -3(x + 2) \Leftrightarrow y = -3x + 1$$

No ponto de abscissa 2 : $(2, 3)$

$$m = f'(2) = 1, \text{ logo } y - 3 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Pág. 97

43. $f(x) = k + \sqrt{x-1}$

43.1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de f num ponto de abscissa x tal que: $f(x) = x$ e $f'(x) = 1$.

$$k + \sqrt{x-1} = x \wedge \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 1$$

• Resolvendo a 2.ª equação, temos:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow 4(x-1) = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\text{Verificação: } f'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{5}{4}}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$$

• Substituindo x por $\frac{5}{4}$ na 1.ª equação:

$$k + \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow k = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow k = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

43.2. $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

A reta $y = mx$ é tangente ao gráfico de f .

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \wedge mx = \sqrt{x-1}$$

Resulta que:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times x = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{x - 2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x - 2x + 2 = 0 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Para } x = 2, m = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $y = \frac{1}{2}x$ é a equação pedida.

44. $p(t) = t^2 - 22t + 112$

44.1. $p(8) = 8^2 - 22 \times 8 + 112 = 0$

O ponto P encontra-se na origem da reta.

44.2. $p'(t) = 2t - 22$

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 22 = 0 \Leftrightarrow t = 11$$

44.3. $t.v.m._{(p, 0, 10)} = \frac{p(10) - p(0)}{10 - 0} = \frac{-8 - 112}{10} = -12$

$$p'(t) = -12 \Leftrightarrow 2t - 22 = -12 \Leftrightarrow 2t = 10 \Leftrightarrow t = 5$$

45. $4h + 8x = 1, 2$

45.1. $1, 2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$

$$4h + 8x = 120 \Leftrightarrow h + 2x = 30 \Leftrightarrow h = 30 - 2x$$

$$V = x^2 \times h$$

$$V(x) = x^2(30 - 2x) \Leftrightarrow V(x) = 30x^2 - 2x^3$$

Como $x > 0 \wedge h > 0$:

$$x > 0 \wedge 30 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 2x < 30 \Leftrightarrow 0 < x < 15$$

45.2. $t.m.v._{(V, 4, 6)} = \frac{V(6) - V(4)}{6 - 4} = \frac{648 - 352}{2} = 148$

$$t.m.v._{(V, 4, 6)} = 148 \text{ cm}^3/\text{cm}$$

45.3. A embalagem é um cubo se $h = x$.

$$h = x \Leftrightarrow 30 - 2x = x \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$$

$$V'(x) = 60x - 6x^2$$

$$V'(10) = 600 - 600 = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}$$

46. $f(x) = ax^2 + bx + c$

46.1. $y = x$

$$f'(0) = 1 \text{ e } f(0) = 0$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$2a \times 0 + b = 1 \text{ e } a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0$$

$$b = 1 \wedge c = 0$$

46.2. De 46.1. temos $f(x) = ax^2 + x$.

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a \times 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1. \text{ Logo, } f(x) = -x^2 + x.$$

47. Altura: $h(t) = \sqrt[3]{3t+1} - a$

47.1. $h(0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0+1} - a = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow a = 1$

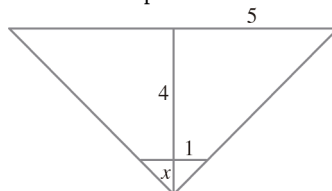
47.2. $h(t) = \sqrt[3]{3t+1} - 1$

$$h(t) = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3t+1} - 1 = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3t+1} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t + 1 = 5^3 \Leftrightarrow 3t = 125 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{124}{3} \Leftrightarrow t = 41\frac{1}{3}$$

$$41\frac{1}{3} \text{ h} = 41 \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = 41 \text{ h } 20 \text{ min}$$

47.3. Volume do depósito:



Pela semelhança dos triângulos:

$$\frac{4+x}{5} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow 4+x = 5x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Altura da pirâmide: $4 + 1 = 5$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 5 - \frac{1}{3} \times 2^2 \times 1 = \frac{500}{3} - \frac{4}{3} = \frac{496}{3} \text{ em m}^3$$

Tempo (h)	Volume de água (m³)
$\frac{124}{3}$	$\frac{496}{3}$
1	x

$$x = \frac{1 \times \frac{496}{3}}{\frac{124}{3}} = \frac{496 \times 3}{124 \times 3} = 4$$

A torneira tem um caudal de 4 m³/h.

$$47.4. \text{ t.m.v.}_{(h, 0, 5)} = \frac{h(5) - h(0)}{5 - 0} = \frac{\sqrt[3]{16} - 1 - 0}{5} \approx 0,30$$

$$\text{t.m.v.}_{(h, 35, 40)} = \frac{h(40) - h(35)}{40 - 35} = \frac{\sqrt[3]{121} - 1 - \sqrt[3]{106} + 1}{5} \approx 0,04$$

$$\text{t.m.v.}_{(h, 35, 40)} \approx 0,04 \text{ m/h} = 4 \text{ cm/h}$$

Nas primeiras 5 h após a abertura da torneira a altura da água no depósito aumentou, em média, 30 cm/h. Entre os instantes correspondentes as 35 h e 40 h após a abertura da torneira a altura da água aumentou, em média, 4 cm/h.

Atendendo à forma do depósito a taxa de variação da altura diminui com o tempo.

$$47.5. h'(t) = \frac{(3t+1)'}{3\sqrt[3]{(3t+1)^2}} = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3t+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3t+1)^2}}$$

$$h'(5) = \frac{1}{\sqrt[3]{16^2}} \approx 0,157 \text{ m/h} \approx 16 \text{ cm/h}$$

$$h'(40) = \frac{1}{\sqrt[3]{40^2}} \approx 0,041 \text{ m/h} \approx 4 \text{ cm/h}$$

5 horas após a abertura da torneira a altura da água no depósito aumentava a uma taxa de 16 cm/h e 40 h após a abertura da torneira a altura da água aumentava a uma taxa de 4 cm/h.

Pág. 98

Avaliação 3

1. A reta de equação $y = -x$ é tangente ao gráfico de f em $(0, 0)$. Logo, $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^2 + 2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0}{h(h+2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} = f'(0) \times \frac{1}{2} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Resposta: (C)

2. $f(x) = \pi^2$; $f'(x) = 0$ e $g(x) = 2x\sqrt{x}$

$$g'(x) = 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{\sqrt{x}} = \frac{3x}{\sqrt{x}}$$

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 0 + \frac{3 \times 1}{\sqrt{1}} = 3$$

Resposta: (C)

3. $r: y = mx + 4$

$$A(2, 3) \in r, 3 = m \times 2 + 4 \Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Assim, $r: y = -\frac{1}{2}x + 4$.

$$f'(2) = m = -\frac{1}{2} \text{ e } f(2) = 3$$

$$g(x) = \sqrt{x+1}, \text{ logo } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$(g \circ f)'(2) = f'(2) \times g'(f(2)) = -\frac{1}{2} \times g'(3) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

Resposta: (A)

$$4. h(x) = f(x^3)$$

$$h(x) = f(g(x)) \text{ com } g(x) = x^3 \text{ e } g'(x) = 3x^2$$

$$h'(1) = g'(1) \times f'(g(1)) = 3 \times 1^2 \times f'(1^3) = 3f'(1)$$

Resposta: (B)

$$5. g(x) = \frac{4x+2}{f(x)}$$

$$\text{Ponto de tangência: } (1, 3); g(1) = \frac{4 \times 1 + 2}{f(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

Declive:

$$m = g'(1)$$

$$g'(x) = \frac{(4x+2)' f(x) - (4x+2) f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{4f(x) - (4x+2) f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$g'(1) = \frac{4f(1) - 6 \times f'(1)}{[f(1)]^2} = \frac{4 \times 2 - 6 \times 2}{2^2} = \frac{8-12}{4} = -1$$

$$m = g'(1) = -1$$

$$\text{Equação: } y - 3 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 3 \Leftrightarrow y = -x + 4$$

Resposta: (B)

$$6. f(x) = 2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x\sqrt{x})' = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = -\frac{x}{\sqrt{x}} = -\sqrt{x}$$

$$m_r = \tan \frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$f'(a) = m_r, \text{ logo } -\sqrt{a} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 3.$$

Resposta: (A)

Pág. 99

$$7. f(x) = \sqrt{2x-1} + 1$$

$$7.1. \text{ t.m.v.}_{(f, 5, 13)} = \frac{f(13) - f(5)}{13 - 5} = \frac{6 - 4}{8} = \frac{1}{4}$$

$$7.2. f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x-1} - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(x - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1$$

$$8.1. f'(x) = \left(\frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x^2 - x)' \sqrt{x} - (x^2 - x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(2x - 1)\sqrt{x} - (x^2 - x) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2(2x - 1)x - (x^2 - x)}{2\sqrt{x}x} = \frac{4x^2 - 2x - x^2 + x}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 - x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x(3x - 1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
 8.2. \quad g'(x) &= [x(1-2x)^{-3}]' = x'(1-2x)^{-3} + x[(1-2x)^{-3}]' = \\
 &= (1-2x)^{-3} + x \times (-3)(1-2x)^{-4}(1-2x)' = \\
 &= (1-2x)^{-4}[(1-2x) + 6x] = \frac{1-2x+6x}{(1-2x)^4} = \frac{4x+1}{(2x-1)^4}
 \end{aligned}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{x^3}{6}; g(x) = \frac{x+a}{x}, D_f = D_g = \mathbb{R}^+$$

$$9.1. \quad f'(x) = \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2} \text{ e } f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ponto de tangência: } \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$m = f'(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 y - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{3}{2}(x - \sqrt{3}) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$9.2. \quad g'(x) = \left(\frac{x+a}{x} \right)' = \left(1 + \frac{a}{x} \right)' = -\frac{a}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) \times g'(x) &= -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \times \left(-\frac{a}{x^2} \right) = -1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = 2
 \end{aligned}$$

$$9.3. \quad g(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x} = 1 - \frac{1}{2x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x^2}$$

$$m_r = g'(k) = \frac{1}{2k^2}$$

$$m_s = f'(k) = \frac{k^2}{2}$$

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{k^2}{2} \Leftrightarrow 2k^4 = 1 \Leftrightarrow k^4 = 1 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$$

$$\text{Como } D_f = D_g = \mathbb{R}^+, \text{ temos } k = 1.$$

$$10. \quad p(t) = t^2 - 15t + 50$$

$$p'(t) = 2t - 15$$

$$10.1. \quad p'(0) = -15 \text{ m/s}$$

$$10.2. \quad p(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 50 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 200}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 5 \vee t = 10$$

$$p'(5) = (2 \times 5 - 15) \text{ m/s} = -5 \text{ m/s}$$

$$p'(10) = (2 \times 10 - 15) \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

$$11. \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$r: y = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$g'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$g(2) = -\frac{1}{2} \times 2 - 3 = -4$$

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x}$$

$$f(2) = g(2) + \frac{1}{2} = -4 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Ponto de tangência: } \left(2, -\frac{7}{2} \right)$$

$$f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x^2}$$

$$m = f'(2) = g'(2) - \frac{1}{2^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 y + \frac{7}{2} &= -\frac{3}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2
 \end{aligned}$$

$$12. \quad f(x) = x^2 + 5x + 1; f'(x) = 2x + 5$$

$$g(0) = 1 \text{ e } g'(0) = \frac{1}{7}$$

$$h(x) = f(x + g(x))$$

$$\begin{aligned}
 12.1. \quad (f \circ g)'(0) &= g'(0) \times f'(g(0)) = \\
 &= \frac{1}{7} \times f'(1) = \frac{1}{7} \times (2 + 5) = \frac{7}{7} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.2. \quad h'(x) &= [f(x + g(x))]' = (x + g(x))' f'(x + g(x)) = \\
 &= (1 + g'(x)) f'(x + g(x)) \\
 h'(0) &= (1 + g'(0)) f'(0 + g(0)) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{7} \right) \times f'(1) = \frac{8}{7} \times (2 + 5) = 8
 \end{aligned}$$

$$13. \quad h(t) = \sqrt[3]{kt}, 0 \leq t \leq 6$$

$$h(t) \text{ em metros, } t \text{ em horas.}$$

$$13.1. \quad h'(6) = \frac{1}{3}$$

$$h'(t) = (\sqrt[3]{kt})' = \frac{(kt)'}{3\sqrt[3]{(kt)^2}} = \frac{k}{3\sqrt[3]{(kt)^2}}$$

$$h'(6) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{3\sqrt[3]{(6k)^2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{\sqrt[3]{36k^2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{36k^2} = k \Leftrightarrow 36k^2 = k^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^3 - 36k^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2(k - 36) = 0 \Leftrightarrow k = 36$$

$$13.2. \quad \text{Altura do depósito} = h(6) = \sqrt[3]{36 \times 6} = \sqrt[3]{6^3} = 6 \text{ m}$$

$$\text{Seja } a \text{ a medida do lado da base da pirâmide em metros}$$

$$V = 72 \text{ m}^3$$

$$\frac{1}{3} \times a^2 \times 6 = 72 \Leftrightarrow a^2 = 36 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\text{O lado da base da pirâmide mede 6 metros.}$$

Atividade inicial 4

Pág. 100

1. $P = 100 \Leftrightarrow 2x + 2y = 100$
 $\Leftrightarrow x + y = 50 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = 50 - x$
2. $A = x \times y$
 $A(x) = x(50 - x)$
3. $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 50 - x > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 50 \Leftrightarrow 0 < x < 50$
 $D_A =]0, 50[$
4. $A(x) = 50x - x^2 = -x^2 + 50x =$
 $= -(x^2 - 50x) =$
 $= -(x^2 - 50x + 25^2 - 25^2) =$
 $= -(x^2 - 50x + 25^2) + 625 =$
 $= -(x - 25)^2 + 625 \quad \text{com } 0 < x < 50$

Portanto, o gráfico de A é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice $V(25, 625)$

5. A área é máxima para $x = 25$ e $y = 50 - 25 = 25$
 Logo, o retângulo de área máxima é um quadrado de lado 25 cm.
6. $A'(x) = 50 - 2x$
 $A'(25) = 50 - 50 = 0$

Pág. 102

- 1.1. $f(x) = x^5 + x, D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = 5x^4 + 1$
 $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ então f não tem extremos.
- 1.2. $g(x) = x - \frac{1}{x}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ é a reunião de dois intervalos abertos e $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 Logo, g não tem extremos.

Pág. 104

- 2.1. $f(x) = 3 + 2x - x^2, D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = 2 - 2x, D_{f'} = \mathbb{R}$
 f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$ pelo que é contínua em $[0, 4]$ e diferenciável em $]0, 4[$. Então, pelo Teorema de Lagrange:
 $\exists c \in]0, 4[: f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$
 $f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \Leftrightarrow 2 - 2c = \frac{-5 - 3}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 - 2c = -2 \Leftrightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2$
- 2.2. $g(x) = x^3 + x + 2, D_g = \mathbb{R}$
 $g'(x) = 3x^2 + 1, D_{g'} = \mathbb{R}$

g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, g é contínua em $[0, 3]$ e diferenciável em $]0, 3[$. Então, pelo Teorema de Lagrange:

$$\begin{aligned} \exists c \in]0, 3[: g'(c) &= \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} \\ g'(c) &= \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 1 = \frac{32 - 2}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3c^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow 3c^2 = 9 \Leftrightarrow c^2 = 3 \Leftrightarrow c = -\sqrt{3} \vee c = \sqrt{3} \\ \text{Como } c &\in]0, 3[, \text{ temos } c = \sqrt{3} \end{aligned}$$

- 2.3. $h(x) = \sqrt{x - 2}, D_h = [2, +\infty[$
 $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 2}}, D_{h'} =]2, +\infty[$
 h é contínua em $[2, +\infty[$ e diferenciável em $]2, +\infty[$.
 Logo, h é contínua em $[2, 3]$ e diferenciável em $]2, 3[$.
 Então, pelo Teorema de Lagrange:

$$\begin{aligned} \exists c \in]2, 3[: h'(c) &= \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} \\ h'(c) &= \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{c - 2}} = \frac{1 - 0}{1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{c - 2} = 1 \Leftrightarrow 4(c - 2) = 1 \Leftrightarrow c - 2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c = 2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow c = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

- 2.4. $j(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, D_j = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 $j'(x) = \frac{(x - 1)'(x + 1) - (x - 1)(x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 - x + 1}{(x + 1)^2} =$
 $= \frac{2}{(x + 1)^2}; D_{j'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 j é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Logo, j é contínua em $[0, 3]$ e diferenciável em $]0, 3[$.
 Então, pelo Teorema de Lagrange:

$$\begin{aligned} \exists c \in]0, 3[: j'(c) &= \frac{j(3) - j(0)}{3 - 0} \\ j'(c) &= \frac{j(3) - j(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow \frac{2}{(c + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{(c + 1)^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(c + 1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (c + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c + 1 = -2 \vee c + 1 = 2 \Leftrightarrow c = -3 \vee c = 1 \end{aligned}$$

Como $c \in]0, 3[$, temos $c = 1$.

3. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$
- 3.1. $f(0) = 1; A(0, 1)$
 $f(1) = 0; B(1, 0)$
 $m_{AB} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$
 Para $x \in]0, 1[$, $f'(x) = 3x^2$
 $f'(c) = m_{AB} \Leftrightarrow 3c^2 = -1$ (equação impossível)

Logo, não existe $c \in]0, 1[$ tal que $f'(c)$ seja igual ao declive da reta AB .

3.2. Não, f é diferenciável em $]0, 1[$ mas não é contínua em $[0, 1]$ atendendo a que como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 1) = -1 \neq f(0) \text{ não existe}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e, portanto, f não é contínua no ponto $x = 0$

Pág. 106

4.1. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 1, D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	-	0	-
f	$\searrow$		$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3]$ e é estritamente crescente em $[3, +\infty[$

4.2. $g(x) = 1 - 2x - 4x^2, D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = -2 - 8x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 8x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
g'	+	0	-
g	$\nearrow$		$\searrow$

g é estritamente crescente em $]-\infty, -\frac{1}{4}]$ e estritamente decrescente em $[-\frac{1}{4}, +\infty[$

4.3. $h(x) = x^3 - 3x, D_h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = 3x^2 - 3$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$



x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
h'	+	0	-	0	+
h	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

h é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 1]$.

4.4. $j(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

$$j'(x) = x - x^2$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
j	-	0	+	0	-
j'	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

j é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente crescente em $[0, 1]$.

Pág. 107

5.1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x, D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$



x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

Máx.

Mín.

$$f(-1) = \frac{5}{3} \text{ e } f(3) = -9$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[3, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 3]$.

f tem um máximo relativo igual a $\frac{5}{3}$ para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a -9 para $x = 3$.

5.2. $g(x) = -x^2(2x + 9) = -2x^3 - 9x^2$

$$g'(x) = -6x^2 - 18x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

x	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
g'	-	0	+	0	-
g	$\searrow$	-27	$\nearrow$	0	$\searrow$

Máx.

Mín.

$$g(-3) = -27 \text{ e } g(0) = 0$$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, -3]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-3, 0]$.

g admite um mínimo relativo igual a -27 para $x = -3$ e um máximo relativo igual a 0 para $x = 0$.

5.3. $h(x) = x^4 - 10x^2 + 25, D_h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = 4x^3 - 20x$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$4x$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 5$	+	0	-	-	-	0	+
h'	-	0	+	0	-	0	+
h	$\searrow$	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0	$\nearrow$

Mín.

Máx.

Mín.

$$h(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^4 - 10(-\sqrt{5})^2 + 25 = 25 - 50 + 25 =$$

$$= h(0) = 25$$

h é estritamente decrescente em $]-\infty, -\sqrt{5}]$ e em $[0, \sqrt{5}]$ e estritamente crescente em $[-\sqrt{5}, 0]$ e em $[\sqrt{5}, +\infty[$

h admite um mínimo relativo igual a 0 para $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{5}$ e um máximo relativo igual a 25 para $x = 0$.

5.4. $j(x) = 2x^4 - x$, $D_j = \mathbb{R}$

$$j'(x) = 8x^3 - 1$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
j'	-	0	+
j	$\searrow$	$-\frac{3}{8}$	$\nearrow$

Min.

$$j\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

j é estritamente decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e estritamente crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$

j admite um mínimo relativo igual a $-\frac{3}{8}$ para $x = \frac{1}{2}$.

Pág. 108

6.1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$
, $D_{f'} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$15x^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
f'	+	0	-	0	-	0	+
f	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$

Máx

Mín.

$$f(-1) = -3 + 5 = 2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3 - 5 = -2$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-1, 1]$.

f admite um máximo relativo igual a 2 para $x = -1$ e um mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.

6.2. $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$

$$g'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$D_{g'} = D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 12x(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$12x$	-	0	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+
g'	-	0	+	0	+
g	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$

Min.

$$g(0) = 1; g(1) = 2$$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

g admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a 1 para $x = 0$.

6.3. $h(x) = x^4 + 6x^2 + 9$

$$h'(x) = 4x^3 + 12x$$

$$D_{h'} = D_h = \mathbb{R}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O sinal de h' depende apenas do Sinal de $4x$.

x		0	
h'	-	0	+
h	$\searrow$	9	$\nearrow$

Mín.

h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$

h admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a 9 para $x = 0$.

6.4. $j(x) = x^3 - x^5$

$$j'(x) = 3x^2 - 5x^4$$

$$D_{j'} = D_j = \mathbb{R}$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - 5x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$		0		$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$3 - 5x^2$	-	0	+	+	+	0	-
j'	-	0	+	0	+	0	-
j	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Min

$$j\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^5 = -\frac{15\sqrt{15}}{5^3} + \frac{15^2\sqrt{15}}{5^5} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{15}}{5^2} + \frac{9\sqrt{15}}{5^3} = \frac{-15\sqrt{15} + 9\sqrt{15}}{5^3} = -\frac{6\sqrt{15}}{125}$$

$$j\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = \frac{3\sqrt{15}}{5^2} - \frac{9\sqrt{15}}{5^3} = \frac{6\sqrt{15}}{125}$$

j é estritamente decrescente em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{5}\right]$ e em

$\left[\frac{\sqrt{15}}{5}, +\infty\right[$ e estritamente crescente em

$\left[-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right]$.

j admite um mínimo relativo igual a $-\frac{6\sqrt{15}}{125}$ para

$x = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ e um máximo relativo igual a $\frac{6\sqrt{15}}{125}$ para

$x = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Pág. 109

7.1. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x+3) - x^2(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \wedge x+3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 0$$

x	$-\infty$	-6		-3		0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-12	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

Máx

Mín.

$$f(-6) = \frac{36}{-3} = -12, f(0) = 0$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -6]$ e em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $[-6, -3[$ e em $]-3, 0]$

f admite um máximo relativo igual a -12 para $x = -6$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$

7.2. $g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{x+1}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g'(x) = \frac{(4x^2 - 8x + 4)'(x+1) - (4x^2 - 8x + 4)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(8x - 8)(x+1) - 4x^2 + 8x - 4}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{8x^2 + 8x - 8x - 8 - 4x^2 + 8x - 4}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 8x - 12}{(x+1)^2}, D_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 12 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	-32	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

Máx

Mín

$$g(-3) = -32; g(1) = 0$$

g é estritamente crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-3, -1[$ e em $]-1, 1]$

g admite um máximo relativo igual a -32 para $x = -3$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x = 1$.

7.3. $h(x) = \frac{2}{1-x} - 2x$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$h'(x) = \frac{2'(1-x) - 2(1-x)'}{(1-x)^2} - 2 = \frac{-2}{(1-x)^2} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2 - 2(1-2x+x^2)}{(1-x)^2} = \frac{-2 + 2 + 4x - 2x^2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{4x - 2x^2}{(1-x)^2}, D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2x^2 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow 2x(2-x) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
h	$\searrow$	2	$\nearrow$		$\nearrow$	-6	$\searrow$

Mín

Máx

$$h(0) = 2; h(2) = -2 - 4 = -6$$

h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e estritamente crescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2]$.

h admite um mínimo relativo igual a 2 para $x = 0$ e um máximo relativo igual a -6 para $x = 2$.

7.4. $j(x) = \frac{4}{x-2} + 9x$, $D_j = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$j'(x) = \frac{0 - 4(x-2)'}{(x-2)^2} + 9 = \frac{-4 + 9(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-4 + 9x^2 - 36x + 36}{(x-2)^2} = \frac{9x^2 - 36x + 32}{(x-2)^2}; D_{j'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 36x + 32 = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \times 9 \times 32}}{18} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{36 \pm 12}{18} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = \frac{8}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2		$\frac{8}{3}$	$+\infty$
j'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
j	$\nearrow$	6	$\searrow$		$\searrow$	30	$\nearrow$

Máx

Mín.

$$j\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{\frac{4}{3}-2} + 9 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{-\frac{2}{3}} + 12 = -6 + 12 = 0$$

$$j\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{\frac{8}{3}-2} + 9 \times \frac{8}{3} = 6 + 24 = 30$$

j é estritamente crescente em $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right]$ e em $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right[$

e estritamente decrescente em $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$ e em $\left]2, \frac{8}{3}\right]$

j tem um máximo relativo igual a 6 para $x = \frac{4}{3}$ e um

mínimo relativo igual a 30 para $x = \frac{8}{3}$

7.5. $p(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$, $D_p = \mathbb{R}$

$$p'(x) = \frac{x'(x^2 + 4) - x(x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 + 4 - x \times 2x}{(x^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}; D_{p'} = \mathbb{R}$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
p'	$-$	0	$+$	0	$-$
p	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
	Min			Máx	

p é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e em

$[2, +\infty[$ e estritamente crescente em $[-2, 2]$.

p admite um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{4}$ para $x = -2$ e um

máximo relativo igual a $\frac{1}{4}$ para $x = 2$.

7.6. $q(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$, $D_q = \mathbb{R}$

$$q'(x) = \frac{(x^3)'(x^2 + 2) - x^3(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2(x^2 + 2) - x^3 \times 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2}; D_{q'} = \mathbb{R}$$

$$q'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$q'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } q'(0) = 0$$

Logo, q é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ pelo que não tem extremos.

Pág. 110

8.1. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $x \in [3, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(x-3)'}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

f é diferenciável em $]3, +\infty[$

$$\forall x \in]3, +\infty[, f'(x) > 0$$

x	3	$+\infty$
f'		$+$
f	0	$\nearrow$
	Min.	

f é estritamente crescente em $[3, +\infty[$ e $f(3) = 0$ e o mínimo absoluto de f .

8.2. $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in [0, 2]$

$$g'(x) = \frac{(2x - x^2)'}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

g é diferenciável em $]0, 2[$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \wedge x \in]0, 2[\Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1		2
$1 - x$		$+$	0	$-$	
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
	Min		Máx		Min

g é estritamente crescente em $[0, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, 2]$.

g tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$ e $x = 2$ e máximo absoluto igual a 1 para $x = 1$.

8.3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$; $D_h =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 3x)'}{2\sqrt{x^2 + 3x}} = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}; D_{h'} = D_h \setminus \{-3, 0\}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \wedge x \in D_h$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \wedge x \in D_h \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

O Sinal de h' depende de $2x + 3$

x	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
h'	$-$				$+$
h	$\searrow$	0		0	$\nearrow$
	Min			Máx	

h é estritamente decrescente em $]-\infty, -3]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$

h tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = -3$ e $x = 0$.

8.4. $j(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $D_j = [-1, 1]$

$$j'(x) = x'\sqrt{1-x^2} + x(\sqrt{1-x^2})' =$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; D_{j'} =]-1, 1[$$

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \wedge x \in]-1, 1[\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$1-2x^2$		-	0	+	0	-	
j'		-	0	+	0	-	
j	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
	Máx		Mín		Máx		Mín

j é estritamente decrescente em $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ e estritamente crescente em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

j tem um máximo relativo igual a 0 para $x = -1$ e um

mínimo relativo igual a 0 para $x = 1$, $j\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ é o

mínimo absoluto e $j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ é o máximo absoluto de j .

8.5. $p(x) = \frac{x+2}{1-x}$, $D_p = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$p'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}; D_{p'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$p'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

p' é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$

p não tem extremos.

8.6. $q(x) = \frac{3-x}{x+2}$, $D_q = [3, +\infty[$

$$q'(x) = \frac{-1 \times (x+2) - (3-x) \times 1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-x-2-3+x}{(x+2)^2} = \frac{-5}{(x+2)^2}; D_{q'} = [3, +\infty[$$

$$q'(x) < 0, \forall x \in [3, +\infty[$$

q é estritamente decrescente em $[3, +\infty[$

$q(3) = 0$ é o máximo absoluto de q .

Pág. 111

9. $h(t) = 4,9 + 48,51t - 4,9t^2$

9.1. $h(t) = 0 \Leftrightarrow 4,9 + 48,51t - 4,9t^2 = 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-48,51 \pm \sqrt{(-48,51)^2 - 4 \times 4,9 \times 4,9}}{-2 \times 4,9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t = -0,1 \vee t = 10) \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t = 10$$

$$h(t) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$$

O corpo esteve no ar durante 10 segundos.

9.2. $h'(t) = 48,51 - 2 \times 4,9t = 48,51 - 9,8t$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 48,51 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{48,51}{9,8} \Leftrightarrow t = 4,95$$

t	0		4,95		10
h'		+	0	-	
h	4,9	$\nearrow$		$\searrow$	0

Máx

$$h(4,95) = 4,9 + 48,51 \times 4,95 - 4,9 \times (4,95)^2 \approx 124,96$$

O corpo atingiu a altura máxima de 124,96 m.

9.3. $t.m.v'_{(h; 0; 4,95)} = \frac{h(4,95) - h(0)}{4,95 - 0} = \frac{1,24,96255 - 4,9}{4,95} =$

$$= \frac{120,06255}{4,95} = 24,255$$

$$t.m.v'_{(h; 0; 4,95)} = 24,255 \text{ m/s}$$

9.4. $h'(3,7) = 48,51 - 9,8 \times 3,7 = 12,25$

$$h'(3,7) = 12,25 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ s} \quad \text{---} \quad 12,25 \text{ m}$$

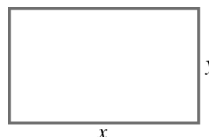
$$3600 \text{ s} \quad \text{---} \quad x \text{ m}$$

$$x = \frac{3600 \times 12,25}{1} = 44\,100 \text{ m} = 44,1 \text{ km}$$

$$h'(3,7) = 44,1 \text{ km/h}$$

Pág. 112

10.



$$2x + 2y = 60 \Leftrightarrow x + y = 30 \Leftrightarrow y = 30 - x$$

10.1. $A = xy$; $A(x) = x(30-x) \Leftrightarrow A(x) = 30x - x^2$

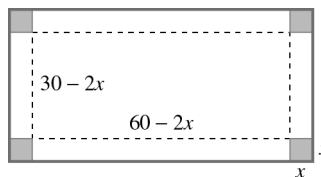
10.2. $A'(x) = 30 - 2x$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 30 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 15$

t	0		15		30
A'		+	0	-	
A		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx

A área do retângulo é máxima para $x = 15 \text{ cm}$

11.



11.1. $V(x) = (30-2x)(60-2x)x$

$$V(x) = (4x^2 - 180x + 1800)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 180x^2 + 1800x, 0 < x < 15$$

11.2. $V'(x) = 12x^2 - 360x + 1800$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 360x + 1800 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 30x + 150 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 600}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{100 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30 \pm 10\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 15 - 5\sqrt{3} \vee x = 15 + 5\sqrt{3}$$

Como $0 < x < 15$, temos $x = 15 - 5\sqrt{3}$.

x'	0		$15-5\sqrt{3}$		15
V'		+	0	-	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

 O volume é máximo para $x = 15 - 5\sqrt{3}$ cm $\approx 6,34$ cm

Pág. 113

12. $6x + 4y = 300 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + y = 75 \Leftrightarrow y = 75 - \frac{3}{2}x$

12.1. $A = 3x \times y$

$$A(x) = 3x \left(75 - \frac{3}{2}x \right) = 3x \times \frac{150 - 3x}{2} = \frac{450x - 9x^2}{2}$$

$$A(x) = 225x - 4,5x^2$$

12.2. $A'(x) = 225 - 9x$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 225 - 9x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{225}{9} \Leftrightarrow x = 25$$

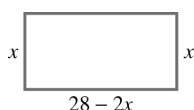
x	0	25	
A'	+	0	-
A	$\nearrow$		$\searrow$

Máx.

Se $x = 25$, $y = 75 - \frac{3}{2} \times 25 = 37,5$

 A área é máxima para $x = 25$ m e $y = 37,5$ m.

13.



$$\text{Área total da base} = (28 - 2x)x$$

$$A(x) = 28x - 2x^2$$

A capacidade de caldeira é máxima se a área da base for máxima:

$$A'(x) = 28 - 4x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 28 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 7$$

x	0		7		14
A'		+	0	-	
A		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

 A capacidade é máxima para $x = 7$ cm.

Pág. 114

14. $A\left(-\frac{5}{2}, 0\right), B(0, 3)$

$$m_{AB} = \frac{3-0}{0+\frac{5}{2}} = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$AB: y = \frac{6}{5}x + 3$$

$$A_{OPQI} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{QP}}{2} = A(x)$$

 Sendo x a abscissa de Q , $x < 0$.

$$A(x) = \frac{-x \times \left(\frac{6}{5}x + 3 \right)}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{6}{5}x^2 + 3x \right)$$

$$= -\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$A(x) = -\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{2}x, -\frac{5}{2} < x < 0$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \times \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

x	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{4}$		0
A'		+	0	-	
A		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

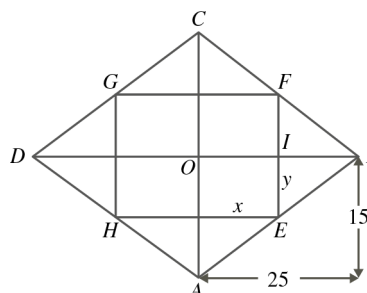
 A área é máxima para $x = -\frac{5}{4}$.

Se $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{4} \right) + 3 = \frac{3}{2}$.

Logo, $P\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

Pág. 115

15.



$$A = 4xy$$

 Pela semelhança dos triângulos $[ABO]$ e $[EBI]$ temos:

$$\frac{\overline{V}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BO}}$$

$$\overline{AO} = 15; \overline{BO} = 25 \text{ e } \overline{BI} = 25 - x$$

Então:

$$\frac{y}{15} = \frac{25-x}{25} \Leftrightarrow y = \frac{15}{25}(25-x)$$

$$A = 4xy$$

$$A(x) = 4x \times \frac{15}{25}(25-x) =$$

$$= \frac{12}{5}x(25-x) =$$

$$= 60x - \frac{12}{5}x^2, 0 < x < 25$$

$$A'(x) = 60 - \frac{24}{5}x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 60 - \frac{24}{5}x = 0 \Leftrightarrow 300 = 24x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{300}{24} \Leftrightarrow x = 12,5$$

	0		12,5		25
A'		+	0	-	
A		↗		↘	

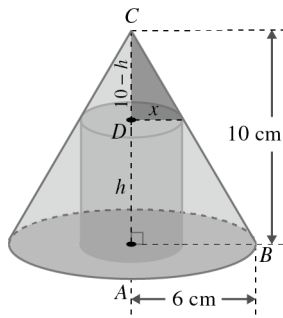
Máx.

$$\text{Se } x=12,5, y=\frac{15}{25}(25-12,5)=7,5$$

$$2x=25 \text{ e } 2y=15$$

A área é máxima se o canteiro tiver 25 m por 15 m.

16.1.


 Pela semelhança dos triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ temos

$$\frac{x}{6} = \frac{10-h}{10} \Leftrightarrow 5x = 30x - 3h \Leftrightarrow 3h = 30 - 5x \Leftrightarrow h = 10 - \frac{5}{3}x$$

16.2. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$

$$V(x) = \pi x^2 \times h(x)$$

$$V(x) = \pi x^2 \left(10 - \frac{5}{3}x \right), 0 < x < 6$$

16.3. $V'(x) = \pi \left(10x^2 - \frac{5}{3}x^3 \right)' =$

$$= \pi (20x - 5x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\pi x(4-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

 Como $x > 0$, temos que $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	0		4		6
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

Máx.

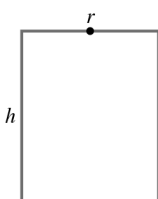
O cilindro de volume máximo tem 4 cm de altura.

16.4. $h(4) = 10 - \frac{5}{3} \times 4 = \frac{30}{3} - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$

$$h = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

Pág. 116

17. $V = 48\pi \text{ cm}^3$



$$\pi r^2 h = 48\pi \Leftrightarrow h = \frac{48}{r^2}$$

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \times h = 2\pi r \times \frac{48}{r^2} = \frac{96\pi}{r}$$

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$

Função custo:

$$C(r) = \left(\pi r^2 + \frac{96\pi}{r} \right) \times 2 + 3 \times \pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{192\pi}{r} + 3\pi r^2$$

$$C'(r) = 10\pi r - \frac{192\pi}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 192\pi}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow 10\pi r^3 - 192\pi = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{192\pi}{10\pi} \wedge r > 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{19,2}$$

x	0		$\sqrt[3]{19,2}$	
C'		-	0	+
C		↘		↗

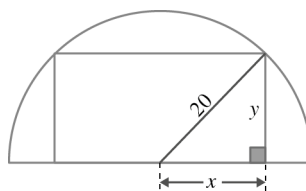
Mín.

$$\text{Se } r = \sqrt[3]{19,2} \approx 2,7 \text{ então } h = \frac{48}{r^2} \approx 6,7.$$

 O custo é mínimo para $r \approx 2,7$ cm e $h \approx 6,7$ cm.

Pág. 117

18.1.



$$A = 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$$

$$A = 2x\sqrt{400 - x^2}, y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$A = 2x\sqrt{400 - x^2}, 0 < x < 20$$

$$A'(x) = (2x)' \sqrt{400 - x^2} + 2x \left(\sqrt{400 - x^2} \right)' =$$

$$= 2\sqrt{400 - x^2} + 2x \times \frac{(400 - x^2)'}{2\sqrt{400 - x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{400 - x^2} + x \frac{-2x}{\sqrt{400 - x^2}} =$$

$$= \frac{2(400 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{800 - 4x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 800 - 4x^2 = 0 \wedge 0 < x < 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 200 \wedge 0 < x < 20$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{100 \times 2} \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$$



x	0		$10\sqrt{2}$		20
A'		+	0	-	
A		↗		↘	

Máx.

$$\begin{aligned} \text{Se } x=10\sqrt{2}, y=\sqrt{400-(10\sqrt{2})^2} &= \sqrt{400-200} = \\ &= \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

As dimensões do retângulo de área máxima são

$$2x = 20\sqrt{2} \text{ m por } y = 10\sqrt{2} \text{ m.}$$

$$18.2. A(10\sqrt{2}) = 2 \times 10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} = 400$$

$$A(10\sqrt{2}) = 400 \text{ m}^2$$

Pág. 119

$$19. f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{0 - (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = 1 - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \\ &= 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Como $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ (intervalo aberto) então f não tem extremos.

$$20.1. f(x) = x^3 - 2x, D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2, D_{f'} = \mathbb{R}$$

f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $]0, 2[$. Assim, pelo teorema de

$$\text{Lagrange, } \exists c \in]0, 2[: f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 - 2 = \frac{4 - 0}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 = 4 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Como } c \in]0, 2[, \text{ temos } x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$20.2. g(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ em } [2, 3]$$

$$g'(x) = \frac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Logo, g é contínua em $[2, 3]$ e diferenciável em $]2, 3[$.

Portanto, pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c \in]2, 3[: g'(c) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2}$$

$$g'(c) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow -\frac{3}{(c-1)^2} = \frac{5-4}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(c-1)^2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2 = 2 \Leftrightarrow c-1 = -\sqrt{2} \vee c-1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 1 - \sqrt{2} \vee c = 1 + \sqrt{2}$$

Como $c \in]2, 3[$, temos $c = \sqrt{2} + 1$.

$$21.1. f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 3)^2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times 2(x^2 - 3) \times 2x = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	-	-	0	+
f'	-	0	+	0	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -\sqrt{3}]$ e em $[0, \sqrt{3}]$

e estritamente crescente em $[-\sqrt{3}, 0]$ e em $[\sqrt{3}, +\infty[$.

$$21.2. g(x) = x^4 + 2x^2 + 1, D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 4x^3 + 4x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

O sinal de g' depende apenas de $4x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	$\searrow$		$\nearrow$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

$$22.1. f(x) = 3x^5 + 5x^3; D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 15x^4 + 15x^2; D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ pelo que não tem extremos.

$$22.2. g(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}, D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = x^3 + 2x^2 + x \quad D_{g'} = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	1		0	$+\infty$
x	-	-	-	0	+
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
g'	-	0	-	0	+
g	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$$g(0) = 0$$

4.4. Aplicações das derivadas ao estudo de funções

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

g admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a 0, para $x = 0$.

22.3. $h(x) = x^4 - 2x^2 + 1, D_h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = 4x^3 - 4x, D_{h'} = \mathbb{R}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$4x$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
h'	-	0	+	0	-	0	+
h	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$
		Mín.		Máx.		Mín.	

h é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e $[0, 1]$ e

estritamente crescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$.

h admite mínimo relativo (e absoluto) igual a 0 para $x = -1$ e $x = 1$ e máximo relativo igual a 1 para $x = 0$.

23.1. $f(x) = x + \frac{1}{x-1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}, D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1) = 1 \vee (x-1) = -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$$

O sinal de f' depende do sinal de

$$(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$
		Máx.			Mín.		

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$ e é

estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2[$ f tem um

máximo relativo igual a -1 para $x = 0$ e um mínimo relativo igual a 3 para $x = 2$.

23.2. $g(x) = \frac{-4(3-x)'}{(3-x)^2} - 1 = \frac{-4x \times (-1)}{(3-x)^2} - 1$

$$= \frac{4 - (3-x)^2}{(3-x)^2}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - (3-x)^2 = 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-x)^2 = 4 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow (3-x) = 2 \vee (3-x) = -2 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

O sinal de g' depende de $4 - (3-x)^2 = 4 - (9 - 6x + x^2) = -x^2 + 6x - 5$ cujos zeros são 1 e 5.

x	$-\infty$	1		3		5	$+\infty$
g'	-	0	+		+	0	-
g	$\searrow$	1	$\nearrow$		$\nearrow$	-7	$\searrow$
		Mín.			Máx.		

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e em $[5, +\infty[$ e

estritamente crescente em $[1, 3[$ e em $]3, 5]$.

g tem um mínimo relativo igual a 1 para $x = 1$ e um máximo relativo igual a -7 para $x = 5$.

23.3. $h(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}, D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$h'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4) \times 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
h'	+	0	-		-	0	+
h	$\nearrow$	-3	$\searrow$		$\searrow$	5	$\nearrow$
		Máx.			Mín.		

h é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[3, +\infty[$ e

estritamente decrescente em $[-1, 1[$ e em $]1, 3]$.

h tem um máximo relativo igual a -3 para $x = -1$ e um número relativo igual a 5 para $x = 3$.

23.4. $i(x) = \frac{2x+9}{x+2}, D_i = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$i'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+9) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-9}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-5}{(x+2)^2}; D_{i'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$i'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

i é estritamente decrescente em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, +\infty[$.

Logo, i não tem extremos.

24.1. $f(x) = \sqrt{x+5}, D_f = [-5, +\infty[$ e f é contínua

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}, D_{f'} =]-5, +\infty[$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in]-5, +\infty[$$

f é estritamente crescente em $[5, +\infty[$

$f(-5) = 0$ é o mínimo absoluto de f .

24.2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}, D_g =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}},$$

4.4. Aplicações das derivadas ao estudo de funções

$$D_{g'} =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

g é contínua

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow x \in \mathbb{O}$$

O sinal de g' depende do sinal de $x - 1$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'	-				+
g	$\searrow$	0		0	$\nearrow$
		Mín.		Máx.	

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$

g tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$ e para $x = 2$.

24.3. $h(x) = \sqrt{5x - x^2}$, $D_h = [0, 5]$

$$h'(x) = \frac{(5x - x^2)'}{2\sqrt{5x - x^2}} = \frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$$

h é diferenciável em $]0, 5[$ e contínua em $[0, 5]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0 \wedge x \in]0, 5[\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
h'		+	0	-	+
h	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0
			Máx.		

$$h\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{2} - \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ e estritamente

decrescente em $\left[\frac{5}{2}, 5\right]$.

h tem mínimo absoluto igual a 0 para $x = 0$ e $x = 5$ e

máximo absoluto igual a $\frac{5}{2}$ para $x = \frac{5}{2}$.

24.4. $j(x) = \frac{x}{2}\sqrt{8 - 2x^2}$, $D_j = [-2, 2]$

$$j'(x) = \left(\frac{x}{2}\right)' \sqrt{8 - 2x^2} + \frac{x}{2} (\sqrt{8 - 2x^2})'$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{8 - 2x^2} + \frac{x}{2} \times \frac{(8 - 2x^2)'}{2\sqrt{8 - 2x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8 - 2x^2}}{2} + \frac{x}{2} \times \frac{-4x}{2\sqrt{8 - 2x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8 - 2x^2}}{2} - \frac{x^2}{\sqrt{8 - 2x^2}} =$$

$$= \frac{8 - 2x^2 - 2x^2}{2\sqrt{8 - 2x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{8 - 2x^2}}$$

j é diferenciável em $]-2, 2[$ e contínua em $[-2, 2]$.

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \wedge x \in]-2, 2[$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge x \in]-2, 2[$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

O sinal de j' depende do sinal de $4 - 2x^2$

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
j'		-	0	+	0	-	
j	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
		Máx.	Mín.		Máx.		Mín.

$$j(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{8 - 2 \times (-\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{8 - 4} = -\sqrt{2}$$

$$j(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

j é estritamente decrescente em $[-2, -\sqrt{2}]$ e em $[\sqrt{2}, 2]$

e estritamente crescente em $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

j tem um máximo relativo igual a 0 para $x = -2$ e um mínimo relativo igual a 0 para $x = 2$; tem mínimo absoluto igual a $-\sqrt{2}$ para $x = -\sqrt{2}$ e máximo absoluto igual a $\sqrt{2}$ para $x = \sqrt{2}$.

24.5. $p(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$, $D_p = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$p'(x) = \frac{3(x + 3) - (3x - 2) \times 1}{(x + 3)^2} = \frac{3x + 9 - 3x + 2}{(x + 3)^2}$$

$$= \frac{11}{(x + 3)^2}, D_{p'} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$p'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

p é estritamente crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, +\infty[$.

p não tem extremos.

24.6. $q(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$, em $[3, +\infty[$

$$q'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 4) \times 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 4}{(x + 1)^2} = \frac{6}{(x + 1)^2}$$

q é diferenciável em $[3, +\infty[$.

$$q'(x) > 0, \forall x \in [3, +\infty[$$

Logo, q é estritamente crescente em $[3, +\infty[$ e $q(3) = \frac{1}{2}$ é

o mínimo absoluto de q .

25. $h(t) = -4,9t^2 + 53,9t + 3$

25.1. $h(0) = 3$

O projétil estava a 3 cm de altura quando foi lançado.

25.2. $h'(t) = -2 \times 4,9t + 53,9 = -9,8t + 53,9$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 53,9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-53,9}{-9,8} \Leftrightarrow t = 5,5$$

x	0	5,5	
h'	+	0	-
h	$\nearrow$		$\searrow$

Máx.

$$h(5,5) = -4,9 \times 5,5^2 + 53,9 \times 5,5 + 3 = 151,225$$

A altura máxima atingida pelo projétil foi de 151,225 m.

$$25.3. h(t) > 150 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 53,9t + 3 > 150$$

$$\Leftrightarrow -4,9t^2 + 53,9t - 147 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5 < t < 6$$

O projétil esteve acima de 150 m durante 1 s.

Cálculos auxiliares

$$-4,9t^2 + 53,9t - 147 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-53,9 \pm \sqrt{53,9^2 - 4 \times 4,9 \times 147}}{-9,8}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-53,9 \pm 4,9}{-9,8} \Leftrightarrow t = 5 \vee t = 6$$



$$25.4. t.m.v._{(h,0,3)} = \frac{h(3) - h(0)}{3 - 0} = \frac{120,6 - 3}{3} = 39,2 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$39,2 \text{ m} \text{ ----- } 1 \text{ s}$$

$$x \text{ ----- } 3600 \text{ s}$$

$$x = 3600 \times 39,2 = 141120$$

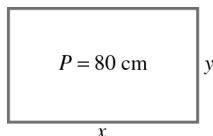
$$141120 \text{ m} = 141,12 \text{ km}$$

$$t.m.v._{(h,0,3)} = 141,12 \text{ km/h}$$

$$25.5. h'(4,5) = -1,8 \times 4,5 + 53,9 = 9,8$$

$$h'(4,5) = 9,8 \text{ m/s}$$

26.



$$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x(40 - x) = 40x - x^2$$

$$x > 0 \wedge 40 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 40$$

$$A'(x) = 40 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

x	0		20		40
A'			0		
A		↗		↘	

Máx.

$$x = 20 \Rightarrow y = 40 - 20 = 20$$

O retângulo de área máxima é o quadrado de lado 20 cm.

$$27.1. \text{Área lateral} = 2x^2 + 3xy \text{ sendo } y \text{ o comprimento}$$

$$54 = 2x^2 + 3xy \Leftrightarrow 3xy = 54 - 2x^2 \Leftrightarrow y = \frac{54 - 2x^2}{3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{18}{x} - \frac{2}{3}x$$

$$V = x^2y$$

$$V(x) = x^2 \left(\frac{18}{x} - \frac{2}{3}x \right) = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

$$27.2. V'(x) = 18 - 2x^2$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

Como $x > 0$, temos $x = 3$.

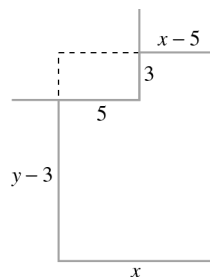
x	0		3	
V'		+	0	-
V		↗		↘

Máx.

O volume é máximo para $x = 3$ m

Pág. 120

28.



$$28.1. x + x - 5 + y + y - 3 = 100$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y = 100 + 8 \Leftrightarrow 2x + 2y = 108$$

$$\Leftrightarrow x + y = 54 \Leftrightarrow y = 54 - x$$

$$A = xy = 5 \times 3$$

$$A(x) = x(54 - x) - 15 = 54x - x^2 - 15$$

$$A(x) = -x^2 + 54x - 15$$

$$28.2. x > 5 \wedge y > 3 \Leftrightarrow x > 5 \wedge 54 - x > 3$$

$$x > 5 \wedge x < 51$$

$$A'(x) = -2x + 54$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 54 = 0 \Leftrightarrow x = 27$$

x	5		27		51
A'		+	0	-	
A		↗	714	↘	

Máx.

$$A(27) = -27^2 + 54 \times 27 - 15 = 714$$

A área é máxima para $x = 27$ m. A área máxima é 714 m².

$$29. \overline{AB} = 2y \text{ (y é o raio dos semicírculos)}$$

$$29.1. 2y \times x = 200 \Leftrightarrow y = \frac{200}{2x} \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$P = 2\pi y \times \frac{100}{x} + 2x$$

$$P(x) = \frac{200\pi}{x} + 2x$$

$$29.2. P'(x) = \left(\frac{200\pi}{x} + 2x \right)' = -\frac{200\pi}{x^2} + 2 = \frac{2x^2 - 200\pi}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200\pi = 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100\pi \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 10\sqrt{\pi}$$

x	0		$10\sqrt{\pi}$	
P'		-	0	+
P		↘	$40\sqrt{\pi}$	↗

Mín.

$$P(10\pi) = \frac{200\pi}{10\sqrt{\pi}} + 20\sqrt{\pi} = \frac{20\pi\sqrt{\pi}}{\pi} + 20\sqrt{\pi}$$

$$= 20\sqrt{\pi} + 20\sqrt{\pi} = 40\sqrt{\pi}$$

O perímetro mínimo da figura é $40\sqrt{\pi}$ m.

30.1. $4x + 3y = 20 \Leftrightarrow 3y = 20 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{20 - 4x}{3}$

$$x > 0 \wedge y > 0$$

$$x > 0 \wedge \frac{20 - 4x}{3} > 0$$

$$x > 0 \wedge x < 5$$

Altura do triângulo

$$h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = y^2$$

$$h^2 = y^2 - \frac{y^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}y^2$$

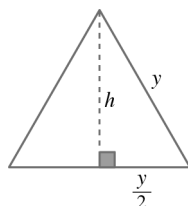
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

A = área do quadrado + área do triângulo

$$A = x^2 + \frac{y \times \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$$

$$A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{20 - 4x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{(20 - 4x)^2}{9}$$

$$A(x) = x^2 + \frac{(20 - 4x)^2 \sqrt{3}}{36}$$



30.2. $A'(x) = (x^2)' + \frac{\sqrt{3}}{36} \times [(20 - 4x)^2]' =$

$$= 2x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(20 - 4x)(20 - 4x)' =$$

$$= 2x + \frac{\sqrt{3}}{18} (20 - 4x) \times (-4) = 2x - \frac{2\sqrt{3}}{9} (20 - 4x) =$$

$$= 2x - \frac{40\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9}x$$

$$= \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x - \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)x - \frac{40\sqrt{3}}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{18 + 8\sqrt{3}}{9}x = \frac{40\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{9} \times \frac{9}{18 + 8\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{18 + 8\sqrt{3}}$$

Seja $x_0 = \frac{40\sqrt{3}}{18 + 8\sqrt{3}} \approx 2,175$.

x	0		x_0		5
A'		-	0	+	
A		↘		↗	

Mín.

A área é mínima para $x = x_0 \approx 2,175$ m

Quadrado: $4x \approx 4 \times 2,175$ m = 8,7 m

Triângulo: 20 m - 8,7 m = 11,3 m

31. $(x - 2 \times 1,6)(y - 2 \times 2) = 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x - 3,2)(y - 4) = 20 \Leftrightarrow y - 4 = \frac{20}{x - 3,2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 + \frac{20}{x - 3,2}, x > 3,2$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x \left(4 + \frac{20}{x - 3,2}\right) = 4x + \frac{20x}{x - 3,2}$$

$$A'(x) = (4x)' + \left(\frac{20x}{x - 3,2}\right)' =$$

$$= 4 + \frac{20(x - 3,2) - 20x \times 1}{(x - 3,2)^2}$$

$$= 4 + \frac{20x - 64 - 20x}{(x - 3,2)^2} =$$

$$= \frac{4(x - 3,2)^2 - 64}{(x - 3,2)^2}$$

$$A'(x) \Leftrightarrow 4(x - 3,2)^2 - 64 = 0 \wedge x > 3,2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3,2)^2 = 16 \wedge x > 3,2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3,2 = 4 \vee x - 3,2 = -4) \wedge x > 3,2$$

$$\Leftrightarrow (x = 7,2 \vee x = -0,8) \wedge x > 3,2$$

$$\Leftrightarrow x = 7,2$$

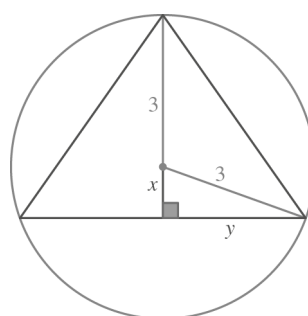
x	3,2		7,2	
A'		-	0	+
A		↘		↗

Mín.

Se $x = 7,2$, $y = 4 + \frac{20}{7,2 - 3,2} = 4 + \frac{20}{4} = 9$

O gasto de papel é mínimo para $x = 7,2$ cm e $y = 9$ cm.

32. $r = 3$ cm



$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 (x + 3)$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(9 - x^2)(x + 3) = \frac{\pi}{3}(9x + 27 - x^3 - 3x^2)$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27), 0 < x < 3$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge 0 \leq x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \wedge 0 \leq x < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1		3
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

Máx.

$$V(1) = \frac{\pi}{3}(9-1)(1+3) = \frac{32\pi}{3}$$

O volume máximo do cone é igual a $\frac{32\pi}{3}$ cm.

Pág. 121

33.1. $V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$

$$V = \pi r^2 \times h$$

$$1 = \pi r^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

33.2. $S = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

$$= \pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1}{\pi r^2}$$

$$S(r) = \pi r^2 + \frac{2}{r^2}$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\pi r - \frac{2}{r^3} = 0 \wedge r > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi r^3 - 2}{r^3} = 0 \wedge r > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r^3 - 2 = 0 \wedge r > 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{2}{2\pi} \wedge r > 0$$

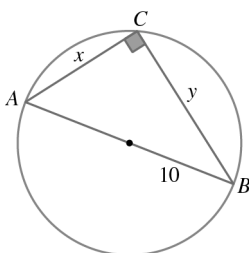
$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	
S'		-	0	+
S		↘		↗

Mín.

g é mínima para $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ dm

34.


 $\overline{AB} = 20$

Se um triângulo retângulo está inscrito numa circunferência, então a hipotenusa é um diâmetro.

Sejam x e y os catetos do triângulo:

$$x^2 + y^2 = 20^2 \Leftrightarrow y^2 = 400 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{400 - x^2} \quad y > 0$$

$$A = \frac{xy}{2}$$

$$A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2}, 0 < x < 20$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left(x' \sqrt{400 - x^2} + x \left(\sqrt{400 - x^2} \right)' \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{400 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{400 - x^2 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{200 - x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - x^2 = 0 \wedge 0 < x < 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 200 \wedge 0 < x < 20 \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$$

	0		$10\sqrt{2}$		20
A'		+	0	-	
A		↗		↘	

Máx.

Se $x = 10\sqrt{2}$:

$$y = \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

O triângulo retângulo de área máxima é isósceles, cada um dos catetos mede $10\sqrt{2}$ cm e a hipotenusa mede 20 cm.

35. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

$$r^2 + h^2 = 6^2$$

$$r^2 = 36 - h^2$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(36 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(36h - h^3)$$

$$0 < h < 6$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(36 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi(36 - 3h^2) = 0 \wedge 0 < h < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 - 3h^2 = 0 \wedge 0 < h < 6 \Leftrightarrow h^2 = 12 \wedge 0 < h < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{12} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3}$$

x	0		$2\sqrt{3}$		6
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

Máx.

O volume é máximo para $h = 2\sqrt{3}$ cm.

$$V(2\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \left[36 - (2\sqrt{3})^2 \right] \times 2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \times 24 \times 2\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

36. Área do setor circular

$$A = \frac{\theta \times r^2}{2}$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$100 = \frac{\theta r^2}{2} \Leftrightarrow 200 = \theta r^2 \Leftrightarrow \theta = \frac{200}{r^2}$$

Comprimento do arco de circunferência = θr

$$P = 2r + \theta r$$

$$P(r) = 2r + \frac{200}{r^2} \times r$$

$$P(r) = 2r + \frac{200}{r}, r > 0$$

$$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}$$

$$P'(r) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{200}{r^2} = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2r^2 - 200}{r^2} = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 - 200 = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 100 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 10$$

r	0		10	
V'		-	0	+
P		$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

$$\text{Se } r = 10 \text{ cm, } \theta = \frac{200}{10^2} \text{ rad} = 2 \text{ rad}$$

O perímetro é mínimo para $r = 10 \text{ cm}$ e $\theta = 2 \text{ rad}$.

$$37. V = \pi r^2 \times h$$

$$h + 2\pi r = 30 \Leftrightarrow h = 30 - 2\pi r$$

$$V(r) = \pi^2 (30 - 2\pi r) = 2\pi (15r^2 - \pi^3)$$

$$V'(r) = 2\pi (30r - 3\pi r^2) = 6\pi r (10 - \pi r)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 6\pi r (10 - \pi r) = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6\pi r = 0 \vee 10 - \pi r = 0) \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{10}{\pi}$$

r	0		$\frac{10}{\pi}$	
V'		+	0	-
V		$\nearrow$		$\searrow$

Máx.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{10}{\pi}\right) &= 2\pi \left[15\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 - \pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^3 \right] = \\ &= 2\pi \left(15 \times \frac{100}{\pi^2} - \pi \times \frac{1000}{\pi^3} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{1500}{\pi^2} - \frac{1000}{\pi^2} \right) = 2\pi \times \frac{500}{\pi^2} \\ &= \frac{1000}{\pi} \end{aligned}$$

O volume máximo da embalagem é $\frac{1000}{\pi} \text{ cm}^3$.

$$38. f(x) = \frac{4}{x}, D_f = \mathbb{R}^+$$

$$38.1. P(x, f(x)) \text{ ou } P\left(x, \frac{4}{x}\right), x > 0$$

$$\overline{OP} = P - O = \left(x, \frac{4}{x}\right)$$

$$\|\overline{OP}\| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$$

$$\text{Logo, } d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}.$$

$$\begin{aligned} 38.2. d'(x) &= \frac{\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)'}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{2x + \frac{0 - 16 \times (x^2)'}{x^4}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} \quad x > 0 \\ &= \frac{2x + \frac{-16 \times 2x}{x^4}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \\ &= \frac{\frac{2x^4 - 32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{2(x^4 - 16)x}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x^4 - 16}{x^2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 2$$

O sinal de d' depende de $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

Logo, como $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, vem:

x	0		2	
d'		-	0	+
d		$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

d é mínima para $x = 2$

Para $x = 2, \frac{4}{x} = 2$. Logo, $P(2, 2)$

$$1. f(x) = \frac{a}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -a = \frac{4}{2} \Leftrightarrow a = -2$$

Resposta: (B)

$$2. f'(2) = m_t$$

t passa nos pontos $(0, 1)$ e $(2, 0)$

$$m_t = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2}$$

Se $x = 2$

$$\bullet -\frac{\sqrt{2x}}{2x} = -\frac{\sqrt{4}}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{2x}}{2x} = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{2x} - 2}{2x} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4} = 0$$

$$\bullet \frac{2 - \sqrt{2x}}{2 + x} = \frac{2 - \sqrt{4}}{2 + 2} = 0$$

Apenas $-\frac{\sqrt{2x}}{2x}$ pode definir f'

Resposta: (A)

3. $f(2) = 4$ e $f(4) = 2$

f é contínua em $[2, 4]$ e diferenciável em $]2, 4[$ dado que f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c \in]2, 4[: f'(c) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]2, 4[: f'(c) = \frac{2 - 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]2, 4[: f'(c) = -1$$

Resposta: (C)

4.

x	$-\infty$	0		4	
f'	-	0	+	0	-
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Mín.

Máx.

f tem um máximo relativo para $x = 4$

Resposta: (B)

5. $f'(x) < 0, \forall x \in]0, 2[$

f é estritamente decrescente em $[0, 2]$. Logo $f(0) > f(2)$.

Resposta: (B)

Pág. 123

6.1. $f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 9}{x - 2}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(8x - 8)(x - 2) - (4x^2 - 8x + 9) \times 1}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{8x^2 - 16x - 8x + 16 - 4x^2 + 8x - 9}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 16x + 7}{(x - 2)^2}, D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 16 \times 7}}{8} \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f	$\nearrow$	-4	$\searrow$		$\searrow$	20	$\nearrow$

Máx

Mín.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \text{ e } f\left(\frac{7}{2}\right) = 20$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, \frac{1}{2}[$ e em $]\frac{7}{2}, +\infty[$

e estritamente decrescente em $]\frac{1}{2}, 2[$ e em $]\frac{7}{2}, 2[$.

f admite um máximo relativo igual a -4 para $x = \frac{1}{2}$ e um

mínimo relativo igual a 20 para $x = \frac{7}{2}$.

6.2. Ponto de tangência:

$$A(5, 23); f(5) = \frac{4 \times 25 - 8 \times 5 + 9}{3} = 23$$

$$\text{Declive: } m = f'(5) = \frac{4 \times 25 - 16 \times 5 + 7}{9} = 3$$

$$y - 23 = 3(x - 5) \Leftrightarrow y = 3x - 15 + 23 \Leftrightarrow y = 3x + 8$$

6.3. f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Logo, f é contínua em $[-2, 1]$ e diferenciável em $] -2, 1[$.

Assim, pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c \in] -2, 1[: f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4c^2 - 16c + 7}{(c - 2)^2} = \frac{-5 - \left(-\frac{41}{4}\right)}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4c^2 - 16c + 7}{(c - 2)^2} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{4c^2 - 16c + 7}{(c - 2)^2} - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16c^2 - 64c + 28 - 7(c^2 - 4c + 4)}{(c - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16c^2 - 64c + 28 - 7c^2 + 28c - 28 = 0 \wedge c \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9c^2 - 36c = 0 \wedge c \neq 2 \Leftrightarrow 9c(c - 4) = 0 \wedge c \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \vee c = 4$$

Como $c \in] -2, 1[$, temos $c = 0$.

7. $f(0) = 0$

$$f'(x) = x + \sqrt{x} + 1$$

7.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0 + \sqrt{0} + 1 = 1$

7.2. $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) > 0$. Logo, f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, pelo que $f(0)$ é o mínimo absoluto de f .

Como $f(0) = 0$, temos que: $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$

8. $g(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$g(1) = 2$$

$$g'(x) = 2x + a$$

g é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Se $g(1) = 2$ é um extremo relativo de g em $[0, 5]$:

$$\begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 2 \\ 2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 + b = 2 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -2 \end{cases}$$

9. 16 litros = 16 dm^3

$$V = \pi r^2 \times h$$

$$16 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{16}{\pi r^2}$$

$$A = 2A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{16}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{32}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2}, r > 0$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 32 = 0 \wedge r > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{32}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \Leftrightarrow r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$$

r	0		$\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$	
A'		-	0	+
A'		$\searrow$		$\nearrow$

Mín

A área é mínima para $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ e $h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = 2r$, dado que:

$$\text{Se } r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}, h = \frac{16}{\pi \times \left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{16}{\pi \times \frac{4}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{16\sqrt[3]{\pi^2}}{4\pi} = 4\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{\pi^3}} = 4\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = 2r$$

10. Seja $x \in \mathbb{R}^+$

Pretende-se mostrar que $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Seja $f(x) = x + \frac{1}{x} \wedge x \in \mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

	0		1	$+\infty$
f'		-	0	+
f		$\searrow$	2	$\nearrow$

Mín.

$$f(1) = 2$$

f é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

Logo, $f(1) = 2$ é o mínimo absoluto de f , pelo que,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Portanto, a soma de um número positivo com o seu inverso é pelo menos 2.

11. $h(t) = -4,9t^2 + 196t + 40$

11.1. $h'(t) = -9,8t + 196$

$$h'(0) = 196 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ s} \quad \quad \quad 196 \text{ m}$$

$$3600 \text{ s} \quad \quad \quad x$$

$$x = (3600 \times 196) \text{ m} = 705\,600 \text{ m} = 705,6 \text{ km}$$

$$h'(0) = 705,6 \text{ km/h}$$

11.2. $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 196 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{196}{9,8} \Leftrightarrow t = 20$

t	0		20	
h'		+	0	-
h	40	$\nearrow$		$\searrow$

Máx.

$$h(20) = -4,9 \times 20^2 + 196 \times 20 + 40 = 2000$$

A altura máxima atingida pelo corpo foi 2000 m.

11.3. $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 196t + 40 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-196 \pm \sqrt{196^2 + 4 \times 4,9 \times 40}}{-9,8} \wedge t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-196 \pm \sqrt{39\,200}}{-9,8} \wedge t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow t \approx 40,2$$

O corpo esteve no ar durante 40,2 s.

11.4. h é contínua em $[0, 20]$ e diferenciável em $]0, 20[$, por ser uma função polinomial.

Então, pelo Teorema de Lagrange:

$$\exists c \in]0, 20[: f'(c) = \frac{f(20) - f(0)}{20 - 0}$$

Portanto, houve um instante em que a velocidade do corpo foi igual à velocidade média nos primeiros 20 segundos.

12. $f(x) = 1 - x^2$

$$P(x, f(x)) \text{ ou } P(x, 1 - x^2)$$

12.1. $\overline{OP} = P - O = (x, 1 - x^2)$

$$\|\overline{OP}\| = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Portanto, $d(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

$$12.2. d'(x) = \frac{(x^4 - x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} =$$

$$= \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
d'	-	0	+	0	-	0	+
d	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Mín.

Máx.

Mín.

A distância é mínima para $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Os pontos do gráfico cuja distância à origem é mínima, tem

$$\text{coordenadas } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Avaliação global

1. A reta r passa nos pontos $(0, -2)$ e $(4, 0)$

$$m_r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como r é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = \frac{1}{2}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}$.

(Opções (A) e (D))

Por outro lado, $g(1) = \frac{f(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$ (opção (A))

Resposta: (A)

2. A reta de equação $y = -2x + 4$ é uma assíntota ao gráfico de f :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= -2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x^2}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[f(x) + 2x]}{f(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}} \times 4 = \frac{1}{-2} \times 4 = -2 \end{aligned}$$

Resposta: (B)

Pág. 125

3.

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
f'	+	0	+	0	-
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Máx.

f é estritamente crescente em $]-\infty, b] \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, b]$ porque $[0, b] \subset]-\infty, b]$

Resposta: (B)

4. $g(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{4x}$

A reta de equação $y = x$ tem declive 1.

$$\begin{aligned} g'(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{4}{2\sqrt{4x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4x}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Resposta: (D)

5. • Se $x_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1^+$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
 • Se $x_n = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1^-$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
 • Se $x_n = \frac{1}{n} + n \rightarrow +\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ✓
 • Se $x_n = \frac{1}{n} - n \rightarrow -\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Resposta: (C)

6. $h(t) = -4,9t^2 + 102t$

$$h'(t) = -9,8t + 102$$

$$h'(10) = (-9,8 \times 10 + 102) \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Resposta: (A)

7.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6} & \text{se } x < 3 \\ k & \text{se } x = 3 \\ \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

- 7.1. f é contínua em $x = 3$ se e somente se existir $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Para tal é necessário que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x-2)}{2(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-2)}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & -5 & 6 \\ & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt{3x} - 3)(\sqrt{3x} + 3)}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x - 9}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{9} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

• $f(3) = k$

f é contínua em $x = 3$ se e só se $k = \frac{1}{2}$

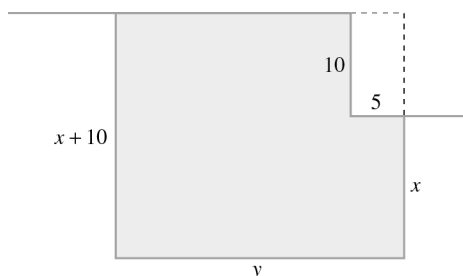
- 7.2. Seja $y = mx + b$ a assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{\sqrt{3x}}{x^2} - \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x}{x^4}} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{x^3}} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{\sqrt{3x}}{x} - \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

8.



8.1. $x+10+y+x=110 \Leftrightarrow y=100-2x$

$$A(x+10) \times y - 5 \times 10$$

$$A(x) = (x+10)(100-2x) - 50 =$$

$$= 100x - 2x^2 + 1000 - 20x - 50$$

$$A(x) = -2x^2 + 80x + 950$$

$$x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge 100 - 2x \geq 5 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \leq 47,5$$

8.2. $A'(x) = -4x + 80$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

x	0		20		47,5
A'		+	0	-	
A		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

$$A(20) = -2 \times 20^2 + 80 \times 20 + 950 = 1750$$

 A área máxima é igual a 1750 m² para $x = 20$ m

8.3. $A(x) = 1300 \Leftrightarrow -2x^2 + 80x + 950 = 1300 \wedge 0 < x < 47,5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 80x - 350 = 0 \wedge 0 < x < 47,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 8 \times 350}}{-4} \wedge 0 < x < 47,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 35 \vee x = 5$$

$$x = 35 \text{ m, } y = (100 - 70) \text{ m} = 30 \text{ m e } x + 10 = 45 \text{ m ou}$$

$$x = 5 \text{ m, } y = (100 - 10) \text{ m} = 90 \text{ m e } x + 10 = 15 \text{ m}$$

10. $ABC: x + y + 2z - 8 = 0$

10.1. $V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h\right)$

 Determinemos h sabendo que V pertence ao plano ABC :

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2h - 8 = 0 \Leftrightarrow a + 2h - 8 = 0 \Leftrightarrow 2h = 8 - a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 4 - \frac{a}{2}$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} a^2 \times \left(4 - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{3} \times \frac{8-a}{2}$$

$$V(a) = \frac{8a^2 - a^3}{6}$$

10.2. $V'(a) = \frac{1}{6} (16a - 3a^2) = \frac{a}{6} (16 - 3a)$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{6} (16 - 3a) = 0 \wedge a \in]0, 8[\Leftrightarrow a = \frac{16}{3}$$

x	0		$\frac{16}{3}$		8
V'		+	0	-	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

Para $a = \frac{16}{3}$, $h = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

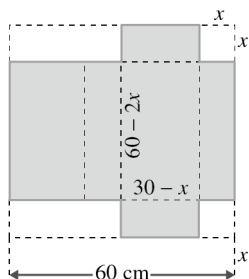
 V é estritamente crescente em $\left]0, \frac{16}{3}\right]$ e estritamente

 decrescente em $\left[\frac{16}{3}, 8\right]$.

 O volume da pirâmide é máximo para $a = \frac{16}{3}$ e $h = \frac{4}{3}$.

Pág. 127

9.



9.1. $V(x) = (30-x)(60-2x)x = (1800 - 60x - 60x + 2x^2)x =$

$$= 1800x - 120x^2 + 2x^3$$

$$V(x) = 2x^3 - 120x^2 + 1800x$$

9.2. $V'(x) = 6x^2 - 240x + 1800$ (:8)

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - 40x + 300) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1200}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \vee x = 10$$

 Como $0 < x < 30$, temos $x = 10$

x	0		10		30
V'		+	0	-	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Máx.

 O volume da caixa é máximo para $x = 10$ cm