

Atividade de diagnóstico

Pág. 96

- 1.1. Sejam os pontos
- $A(2, -2)$
- ,
- $B(0, 1)$
- e
- $C(x, 0)$
- .

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{AC} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (0+2)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4+9 = (x-2)^2 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-2 = -3 \vee x-2 = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5\end{aligned}$$

$$C(-1, 0) \text{ ou } C(5, 0)$$

- 1.2. Centro:

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$$

$$M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Raio: } r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

- 2.
- $A(-3, 5)$
- ,
- $B(-2, -3)$
- e
- $C(5, -7)$

- 2.1.
- $D = A + \overline{BC} = (-3, 5) + (7, -4) = (4, 1)$

$$D(4, 1)$$

- 2.2.
- $\overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5+2)^2 + (-7+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

O paralelogramo $[ABCD]$ é um losango.

$$\begin{aligned}3.1. \quad \|\overline{AC} - \overline{BC} + \overline{EH} - \overline{ED}\| &= \\ &= \|\overline{AC} - \overline{BC} + \overline{BC} + \overline{CF}\| = \\ &= \|\overline{AC} + \overline{CF}\| = \\ &= \|\overline{AF}\| \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ cm} = \sqrt{8} \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3.2. \quad D + \overline{AF} - \overline{BC} &= D + \overline{DG} + \overline{GF} = \\ &= G + \overline{GF} = \\ &= F\end{aligned}$$

$$4. \quad \vec{u}(2; -2, 1)$$

$$4.1. \quad \vec{v}(-k, k+1); k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{-k}{2} = \frac{k+1}{-2,1} \Leftrightarrow 2,1k = 2k+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,1k = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 20$$

$$4.2. \quad \vec{w}(2k; -2, 1k); k \in \mathbb{R}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(2k)^2 + (-2, 1k)^2}$$

$$\|\vec{w}\| = 8,7 \Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + 4,41k^2} = 8,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8,41k^2 = 8,7^2 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -3 \vee k = 3$$

$$\vec{w}(-6; 6, 3) \text{ ou } \vec{w}(6; -6, 3)$$

Pág. 97

- 5.
- $A(3, -4)$
- e
- $B(-1, -2)$

$$5.1. \quad m_{AB} = \frac{-2+4}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}AB: y+4 &= -\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

- 5.2.
- $C(1, 0)$
- e
- $\vec{s}(-2, 1)$

$$s: (x, y) = (1, 0) + k(-4, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$5.3. \quad \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

Logo, A pertence à mediatriz de $[BC]$.

- 6.
- $A(1, -5, 4)$
- ;
- $C(4, 0, -4)$
- e
- $G(2, 6, -1)$

$$\begin{aligned}6.1. \quad \overline{CG} &= \sqrt{(2-4)^2 + (6-0)^2 + (-1+4)^2} = \\ &= \sqrt{4+36+9} = \\ &= \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

$$V = 7^3 = 343$$

- 6.2.
- $E = A + \overline{AE}$

$$= A + \overline{CG} =$$

$$= (1, -5, 4) + (-2, 6, 3) =$$

$$= (-1, 1, 7)$$

- 6.3. Centro:
- $M\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-5+0}{2}, \frac{4-4}{2}\right)$

$$M\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned}\text{Raio: } r = \overline{MA} &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}+5\right)^2 + (0-4)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 16} = \sqrt{\frac{49}{2}}\end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{49}{2}$$

- 7.
- $A(-8, 4, 2)$
- e
- $B(-5, 2, 1)$

$$7.1. \quad \overline{AB} = B - A = (3, -2, -1)$$

$$AB: (x, y, z) = (-8, 4, 2) + k(3, -2, -1), k \in \mathbb{R}$$

- 7.2. Coordenadas do ponto de interseção:
- $I(x, 0, 0)$

$$(x, 0, 0) = (-8, 4, 2) + k(3, -2, -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 + 3k \\ 0 = 4 - 2k \\ 0 = 2 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$I(-2, 0, 0)$$

Atividade inicial 1

Pág. 98

1. $\tan \alpha = \frac{1}{1} = 1$; $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
2. $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ e $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$
 $\beta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ e $\tan \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Pág. 100

1. $A(-2, \sqrt{3})$, $B(0, 3\sqrt{3})$, $C(1, 0)$ e $D(2, -1)$

$$1.1. \text{ a) } m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } m = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$1.2. \text{ a) } m_{AB} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{0 + 2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad ou } \alpha = 60^\circ$$

$$\text{b) } m_{AC} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 - (-2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{ou } \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\text{c) } m_{CD} = \frac{-1}{2 - 1} = -1$$

$$\alpha = \pi - \tan^{-1}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\text{ou } \alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

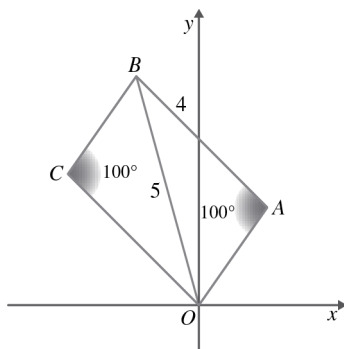
$$1.3. m_{BC} = \frac{-3\sqrt{3}}{1} = -3\sqrt{3}$$

$$\alpha = \pi - \tan^{-1}(3\sqrt{3}) \approx 1,8 \text{ rad}$$

$$2. \quad \widehat{OCB} = 100^\circ; \quad \widehat{AOC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$2.1. \text{ Inclinação de } CB = \text{inclinação de } OA = 135^\circ - 80^\circ = 55^\circ$$

2.2.



$$\frac{\sin(100^\circ)}{5} = \frac{\sin(\widehat{AOB})}{4}$$

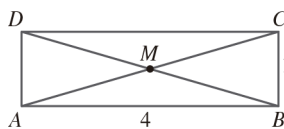
$$\sin(\widehat{AOB}) = \frac{4 \sin(100^\circ)}{5} \approx 0,7878$$

$$\widehat{AOB} \approx \sin^{-1}(0,7878) \approx 51,98^\circ$$

$$\text{Inclinação de } OB \approx 51,98^\circ + 55^\circ \approx 107,0^\circ$$

Pág. 101

3.



$$3.1. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = 4 \times 4 = 16$$

$$3.2. \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD} \times \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = 4 \times 2 = 8$$

$$3.3. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = -4 \times 2 = -8$$

Pág. 103

$$4.1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$$

$$= 3 \times 4 \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$4.2. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2,5 \times 3 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= 7,5 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -7,5 \times \cos \frac{\pi}{6} = -7,5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$4.3. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos 90^\circ =$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \times 0 = 0$$

$$4.4. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos \pi = -12$$

$$5.1. \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \times 2 \times \cos(120^\circ) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

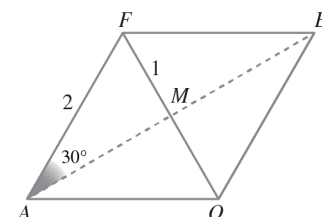
$$5.2. \quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OF} = 2 \times 2 \times \cos(120^\circ) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$5.3. \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = 2 \times 2 \times \cos(120^\circ) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$5.4. \quad \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 2 \times 4 \times \cos(180^\circ) = 8 \times (-1) = -8$$

$$5.5. \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos 0^\circ = 16 \times 1 = 16$$

5.6.



$$\overrightarrow{AM}^2 + 1^2 = 2^2$$

$$\overrightarrow{AM} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AM} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$$

$$6.1. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$6.2. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AM} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$6.3. \quad \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \times 2 \times \cos(120^\circ) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$6.4. \quad \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \|\overline{MA}\| \times \|\overline{MC}\| \times \cos 90^\circ = 0$$

Pág. 106

$$7.1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 12 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$$

$$7.2. \quad (\sqrt{3}\vec{u}) \cdot (-\sqrt{12}\vec{v}) = -\sqrt{3} \times \sqrt{12} \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -\sqrt{36} \times (-6) = 36$$

$$7.3. \quad (3\vec{v} + 2\vec{u}) \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v} \cdot \vec{v} - 4\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= -6\|\vec{v}\|^2 - 4 \times (-6) = -6 \times 4^2 + 24 = -72$$

$$7.4. \quad (-\vec{u}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u}) = -2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} =$$

$$= -2 \times (-6) + \|\vec{u}\|^2 = 12 + 9 = 21$$

$$8.1. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times 9 \cos \frac{\pi}{3} = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CA} = (\overline{CA} + \overline{AB}) \cdot \overline{CA} =$$

$$= \overline{CA} \cdot \overline{CA} + \overline{AB} \cdot \overline{CA} =$$

$$= \|\overline{CA}\|^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} =$$

$$= 9^2 - 18 = 63$$

$$8.2. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times 2 \times \cos 120^\circ =$$

$$= 8 \times \cos(180^\circ - 60^\circ) = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CA} = (\overline{CA} + \overline{AB}) \cdot \overline{CA} =$$

$$= \overline{CA} \cdot \overline{CA} + \overline{AB} \cdot \overline{CA} = \|\overline{CA}\|^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} =$$

$$= 2^2 - (-4) = 8$$

$$8.3. \quad \widehat{CBA} = \widehat{ACB} = 15^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 2 \times 15^\circ = 150^\circ$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times 4 \times \cos 150^\circ =$$

$$= 16 \times \cos(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$= 16 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8\sqrt{3}$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CA} = (\overline{CA} + \overline{AB}) \cdot \overline{CA} =$$

$$= \overline{CA} \cdot \overline{CA} + \overline{AB} \cdot \overline{CA} =$$

$$= \|\overline{CA}\|^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} =$$

$$= 4^2 + 8\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3}$$

Pág. 107

$$9. \quad \overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} \cdot \overline{BC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) =$$

$$= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{BC} - \overline{AB}) =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} - \overline{BC} \cdot \overline{AB} =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 - \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$= -\|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{AB}\|^2 = 0$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

Logo, as diagonais de um losango são perpendiculares.

$$10. \quad V = 3\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

$$\overline{AB} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt{3}$$

$$10.1. \quad \overline{AC} \cdot \overline{AF} = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AF} =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AF} + \overline{BC} \cdot \overline{AF} =$$

$$= \overline{AB} \times \overline{AB} + 0 =$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

$$10.2. \quad \overline{AH} \cdot \overline{AG} = \overline{AH} \cdot (\overline{AH} + \overline{HG}) =$$

$$= \overline{AH} \cdot \overline{AH} + \overline{AH} \cdot \overline{HG} =$$

$$= \|\overline{AH}\|^2 + 0 = \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 = 3 + 3 = 6$$

Pág. 108

$$11. \quad A(2, -1), B(5, -3) \text{ e } \vec{u}(1, 4)$$

$$11.1. \text{ a) } \vec{u} \cdot \overline{AB} = (1, 4) \cdot (3, -2) = 1 \times 3 + 4 \times (-2) = 3 - 8 = -5$$

$$\text{b) } \vec{e}_1(1, 0); \vec{e}_2(0, 1); \vec{u}(1, 4); \overline{AB}(3, -2)$$

$$(\vec{u} + \vec{e}_1) \cdot (\vec{e}_2 - \overline{AB}) = (2, 4) \cdot (-3, 3) = -6 + 12 = 6$$

$$11.2. \quad P(x, x+1)$$

$$\overline{OP}(x, x+1)$$

$$\overline{OP} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overline{OP} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x, x+1) \cdot (1, 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 4(x+1) = 0 \Leftrightarrow 5x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Se } x = -\frac{4}{5}, x+1 = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}.$$

$$P\left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Pág. 109

$$12.1. \quad \vec{u}(1, -2) \text{ e } \vec{v}(2, 3)$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(1, -2) \cdot (2, 3)}{\sqrt{1+4}\sqrt{4+9}} = \frac{2-6}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{-4}{\sqrt{65}}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \approx 119,7^\circ$$

$$12.2. \quad \vec{u}(-1, 1) \text{ e } \vec{v}(-3, 1)$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(-1, 1) \cdot (-3, 1)}{\sqrt{1+1}\sqrt{9+1}} = \frac{3+1}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right) \approx 26,6^\circ$$

$$12.3. \quad \vec{u}(4, -2) \text{ e } \vec{v}(2, 1)$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(4, -2) \cdot (2, 1)}{\sqrt{16+4}\sqrt{4+1}} = \frac{8-2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos(0,6) \approx 53,1^\circ$$

$$13.1. \quad \vec{u}(1, 0, 1) \text{ e } \vec{v}(-1, 5, 1)$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (-1, 5, 1)}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{1+25+1}} = \frac{-1+0+1}{\sqrt{2}\sqrt{27}} = 0$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$$

13.2. $\vec{u}(2, -2, 0)$ e $\vec{v}(-2, 1, -2)$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(2, -2, 0) \cdot (-2, 1, -2)}{\sqrt{4+4+0}\sqrt{4+1+4}} = \frac{-4-2+0}{\sqrt{8}\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{-6}{3\sqrt{8}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

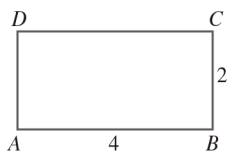
13.3. $\vec{u}(\sqrt{3}, 1, 0)$ e $\vec{v}(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{(\sqrt{3}, 1, 0) \cdot (\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})}{\sqrt{3+1+0}\sqrt{3+1+12}} =$$

$$= \frac{3+1+0}{\sqrt{4}\sqrt{16}} = \frac{4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$$

14.



14.1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) =$

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} =$$

$$= -\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AD} + 4 \times 4 =$$

$$= -2 \times 2 + 16 = 12$$

14.2. $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{DB}\|} =$

$$= \frac{12}{\sqrt{4^2 + 2^2} \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,1^\circ$$

Pág. 110

15. $r: x - 8y - 17 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{17}{8}$

$$s: (x, y) = (3, 8) + k(4, 7), k \in \mathbb{R}$$

$$A(1, -2) \text{ e } B(-1, 1)$$

15.1. $1 - 8 \times (-2) - 17 = 0 \Leftrightarrow 1 + 16 - 17 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Logo, $A \in r$.

$$(-1, 1) = (3, 8) + k(4, 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 3 + 4k \\ 1 = 8 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -4 \\ 7k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow k = -1$$

Logo, $B \in s$.

15.2. a) A reta a é perpendicular à reta r .

$$m_a \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_a \times \frac{1}{8} = -1 \Leftrightarrow m_a = -8$$

A reta a passa em $A(1, -2)$.

$$a: y + 2 = -8(x - 1) \Leftrightarrow y = -8x + 6$$

A reta b é perpendicular à reta s .

$$m_b \times m_s = -1 \Leftrightarrow m_b \times \frac{7}{4} = -1 \Leftrightarrow m_b = -\frac{4}{7}$$

A reta b passa em $B(-1, 1)$.

$$b: y - 1 = -\frac{4}{7}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}$$

b) $\begin{cases} y = -8x + 6 \\ y = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8x + 6 \\ -8x + 6 = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8x + 6 \\ -56x + 42 = -4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8x + 6 \\ 52x = 39 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8x + 6 \\ x = \frac{39}{52} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 \times \frac{3}{4} + 6 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$C\left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

c) $\overline{AC} = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 4} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(-1 - \frac{3}{4}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{49}{16} + 1} = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

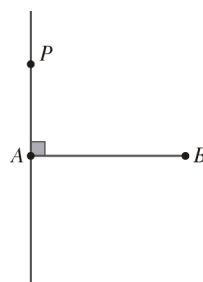
$\overline{AC} = \overline{BC}$, logo B pertence à circunferência de centro C que passa no ponto A .

A reta r passa no ponto A da circunferência e é perpendicular à reta AC que passa no centro da circunferência. Logo, a reta r é tangente à circunferência no ponto A .

De igual modo, s passa no ponto B da circunferência e é perpendicular a BC . Logo, a reta s é tangente à circunferência no ponto B .

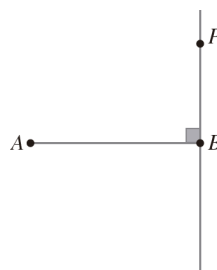
Pág. 112

16.1.



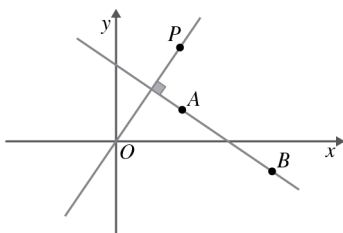
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ define a reta perpendicular à reta AB no ponto A .

16.2.



$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ define a reta perpendicular a AB no ponto B .

16.3.



$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ define a reta perpendicular a AB e que passa pela origem, O .

Pág. 113

17. $A(2, -1, 2)$, $B(4, 1, 1)$ e $V(3, 3, 3)$

17.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, -1)$; $\overrightarrow{BC}(\lambda, 1, \lambda)$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2, 2, -1) \cdot (\lambda, 1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda + 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2$$

17.2. $\overrightarrow{BC}(-2, 1, -2)$

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (4, 1, 1) + (-2, 1, -2) = (2, 2, -1)$$

17.3. a) Seja $P(x, y, z) \in \alpha$.

Ponto médio de $[AB]$:

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = M\left(3, 0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x-3, y, z-\frac{3}{2}\right) \cdot (2, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + 2y - z + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 2z - 12 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 2z - 9 = 0$$

b) $\alpha: 4x + 4y - 2z - 9 = 0$; $V(3, 3, 3)$

$$4 \times 3 + 4 \times 3 - 2 \times 3 - 9 = 0 \Leftrightarrow 12 + 12 - 6 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 = 0 \text{ (Falso)}$$

Logo, $V \notin \alpha$.

Pág. 114

18. $A(-3, 2)$ e $B(3, 0)$

18.1. Seja $P(x, y)$ um ponto da circunferência de diâmetro $[AB]$.

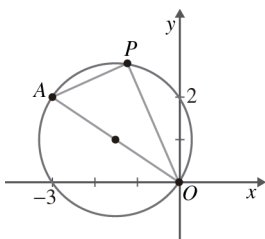
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x+3, y-2) \cdot (x-3, y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) + (y-2)y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$$

18.2.



$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$ define a circunferência de diâmetro $[AO]$.

Pág. 115

19. $A(2, -1, 3)$ e $B(-2, 3, 1)$

19.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto da superfície esférica de

diâmetro $[AB]$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow$$

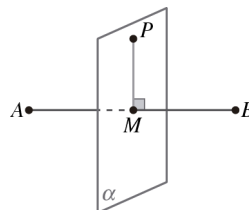
$$\Leftrightarrow (x-2, y+1, z-3) \cdot (x+2, y-3, z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + (y+1)(y-3) + (z-3)(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 + y^2 - 3y + y - 3 + z^2 - z - 3z + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

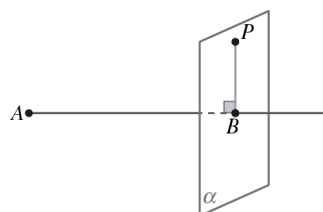
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 4 = 0$$

19.2. a)



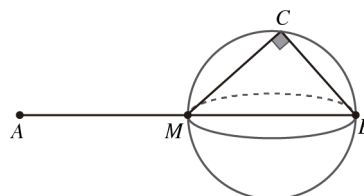
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ define o plano medidor de $[AB]$.

b)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define o plano perpendicular à reta AB no ponto B .

c)



$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define a superfície esférica de diâmetro $[MB]$.

Pág. 116

20. $A(0, 7)$, $B(8, -9)$ e $C(2, -2)$

$$s: (x, y) = (8, -9) + k(7, 6), k \in \mathbb{R}$$

20.1. Seja $P(x, y)$ um ponto da reta tangente à circunferência

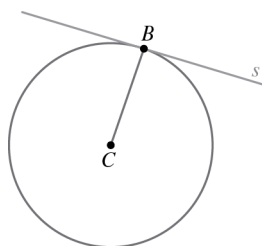
de centro C no ponto A .

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow (x, y-7) \cdot (2, -9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 9y + 63 = 0 \Leftrightarrow 9y = 2x + 63 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{9}x + 7$$

20.2.



$B(8, -9)$ é o ponto que se obtém na equação vetorial de s para $k = 0$. Logo, $B \in s$.

$$\overrightarrow{BC}(-6, 7)$$

$\vec{s}(7, 6)$ é um vetor diretor de s .

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{s} = (-6, 7) \cdot (7, 6) = -42 + 42 = 0$$

Logo, $s \perp BC$.

Portanto, como a reta s é perpendicular a BC no ponto B , s é tangente no ponto B à circunferência de centro C que passa em B .

Pág. 117

$$21. A(1, -3, 1) \text{ e } B(-1, 5, 3)$$

Seja $P(x, y, z)$ um ponto de α .

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1, y+3, z-1) \cdot (-2, 8, 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) + 8(y+3) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 + 8y + 24 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8y + 2z + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4y - z - 12 = 0$$

$$\alpha: x - 4y - z - 12 = 0$$

Seja $Q(x, y, z)$ um ponto de β .

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1, y-5, z-3) \cdot (-2, 8, 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 8(y-5) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2 + 8y - 40 + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8y + 2z - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4y - z + 24 = 0$$

$$\beta: x - 4y - z + 24 = 0$$

Atividades complementares

Pág. 119

$$22.1. x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ$$

$$22.2. x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = -x - 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 180^\circ - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \approx 153,4^\circ$$

$$22.3. 9x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 9x + 3$$

$$m = 9$$

$$\alpha = \arctan(9) \approx 83,7^\circ$$

$$22.4. 3x + 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow 5y = -3x - 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$$

$$m = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha = 180^\circ - \arctan \left(\frac{3}{5} \right) \approx 149,0^\circ$$

$$23.1. (x, y) = (1, 2) + k(6, -\sqrt{12}), k \in \mathbb{R}$$

$$m = \frac{-\sqrt{12}}{6} = -\frac{2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \pi - \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}; \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$23.2. (x, y) = (1, -1) + k(-1, 0), k \in \mathbb{R}$$

$$m = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\alpha = 0 \text{ rad}$$

$$24.1. A(\sqrt{3}, 1) \text{ e } \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$m = \tan \frac{5\pi}{6} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3}) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$$

$$24.2. A(\sqrt{12}, -1) \text{ e } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$m = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$y + 1 = \sqrt{3}(x - \sqrt{12}) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}\sqrt{12} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{36} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 7$$

$$24.3. A(-3, 2) \text{ e } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$m = \tan \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

$$y - 2 = -1(x + 3) \Leftrightarrow y = -x - 3 + 2 \Leftrightarrow$$

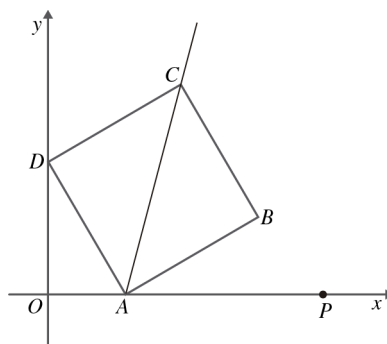
$$\Leftrightarrow y = -x - 1$$

$$24.4. A(\sqrt{3}, -2) \text{ e } \alpha = 0$$

$$m = \tan 0 = 0$$

$$y = -2$$

25.1.



$$\widehat{PAC} = \frac{5\pi}{12}; \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{PAB} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

DC e AB são retas paralelas. Logo, a inclinação de DC é igual à inclinação de AB , ou seja, é $\frac{\pi}{6}$ rad.

$$P\hat{A}D = P\hat{A}C + C\hat{A}D = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$$

A inclinação de BC é igual à inclinação de AD , ou seja, é igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

25.2. Reta AD

$$m = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$A(1, 0)$$

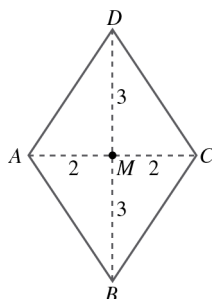
$$y = -\sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

Reta AB

$$m = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

26.



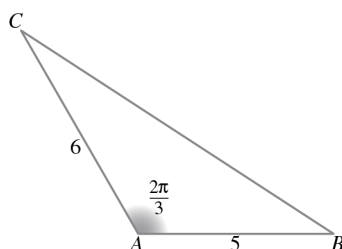
$$26.1. \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AM} = 4 \times 2 = 8$$

$$26.2. \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BM} = 6 \times 3 = 18$$

$$26.3. \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CM} = -4 \times 2 = -8$$

$$26.4. \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DM} = -6 \times 3 = -18$$

27.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \\ &= -5 \times 6 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 5^2 = \\ &= -5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 40 \end{aligned}$$

$$28.1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$$

$$= 3 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{4} =$$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$28.2. \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= \sqrt{12} \times \frac{1}{2} =$$

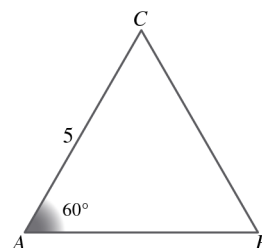
$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$28.3. \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{27} \times \frac{1}{3} \times \cos \frac{5\pi}{6} =$$

$$= 3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

29.



$$29.1. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times 5 \times \cos 60^\circ = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times 5 \times \frac{1}{2} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} = 30 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 6$$

$$29.2. \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \cos 60^\circ \quad (\text{Teorema de Carnot})$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = 36 + 25 - 30$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = 31$$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{31}$$

$$30. \|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = \sqrt{3} \text{ e } (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

$$30.1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} = 6 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times 3 = 9$$

$$30.2. (-2\vec{v}) \cdot \vec{u} = -2(\vec{v} \cdot \vec{u}) =$$

$$= -2(\vec{u} \cdot \vec{v}) =$$

$$= -2 \times 9 = -18$$

$$30.3. (3\vec{u}) \cdot (2\vec{v} - 3\vec{u}) =$$

$$= 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 9\vec{u} \cdot \vec{u} =$$

$$= 6 \times 9 - 9\|\vec{u}\|^2 =$$

$$= 54 - 9 \times 36 = -270$$

$$30.4. (2\vec{v} - \sqrt{2}\vec{u}) \cdot (-\vec{v}) =$$

$$= -2\vec{v} \cdot \vec{v} + \sqrt{2}\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= -2\|\vec{v}\|^2 + \sqrt{2} \times 9 =$$

$$= -2 \times 3 + 9\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 6 = -6 + 9\sqrt{2}$$

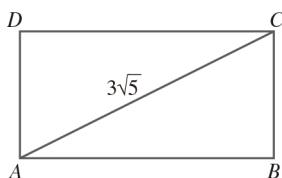
$$31.1. \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} \times \cos(\widehat{CDA})$$

$$= 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\begin{aligned}
 31.2. \quad \overline{BC} \cdot \overline{DC} &= -\overline{CB} \cdot (-\overline{CD}) = \\
 &= \overline{CB} \cdot \overline{CD} = \\
 &= \overline{CB} \times \overline{CD} \times \cos 60^\circ = \\
 &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 32. \quad \|\vec{u}\| &= \frac{1}{2}, \quad \|\vec{v}\| = 3, \quad (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{2\pi}{3} \\
 \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 &= (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - 3\vec{v}) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \\
 &= 4\vec{u} \cdot \vec{u} - 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{u} + 9\vec{v} \cdot \vec{v} = \\
 &= 4\|\vec{u}\|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2 = \\
 &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9 \times 3^2 = \\
 &= 1 - 12 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 81 = \\
 &= 82 - 18 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 82 + 9 = 91
 \end{aligned}$$

33.



$$\begin{aligned}
 \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \overline{AB} \times \overline{AB} = \overline{AB}^2 \\
 \overline{AD} \cdot \overline{AC} &= \overline{AD} \times \overline{AD} = \overline{AD}^2 \\
 \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 4\overline{AD} \cdot \overline{AC} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 4\overline{AD}^2
 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 &= (3\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4\overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 &= 45 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 5\overline{AD}^2 &= 45 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 &= 9 \Leftrightarrow \\
 \overline{AD} > 0 \quad \Leftrightarrow \overline{AD} &= 3 \\
 \overline{AB}^2 = 4\overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 4 \times 9 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 36 \\
 \overline{AB} > 0 \quad \Leftrightarrow \overline{AB} &= 6 \\
 \overline{AB} = 6 \text{ e } \overline{AD} &= 3
 \end{aligned}$$

Pág. 120

$$\begin{aligned}
 34. \quad \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} &= -6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\overline{BA} \cdot \overline{BC} - \overline{CB} \cdot \overline{CA} - \overline{AC} \cdot \overline{AB} &= -6 \Leftrightarrow \\
 \text{Sabemos que } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} \text{ e} & \\
 \widehat{CBA} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60^\circ. & \\
 \Leftrightarrow -3\overline{BA} \cdot \overline{BC} &= -6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} &= 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{BA} \times \overline{BC} \times \cos 60^\circ &= 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{BA} \times \overline{BA} \times \frac{1}{2} &= 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 4 \Leftrightarrow \overline{AB} &= 2
 \end{aligned}$$

$$35. \quad \overline{AB} = a = \overline{AC}$$

$$\overline{BC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\begin{aligned}
 35.1. \quad \overline{BN} \cdot \overline{NC} &= (\overline{NC} = \overline{BN}) \\
 &= \overline{BN} \cdot \overline{BN} = \|\overline{BN}\|^2 = \\
 &= \left(\frac{\|\overline{BC}\|}{2}\right)^2 = \frac{\|\overline{BC}\|^2}{4} = \\
 &= \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 35.2. \quad \overline{AN} \cdot \overline{AB} &= (\overline{AM} + \overline{MN}) \cdot \overline{AB} = \\
 &= \overline{AM} \cdot \overline{AB} + \overline{MN} \cdot \overline{AB} = \left. \begin{array}{l} \overline{AM} \perp \overline{AB} \\ \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} \end{array} \right\} \\
 &= 0 + \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \\
 &= \frac{1}{2}\|\overline{AB}\|^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$36. \quad A(-1, 2, 0), B(0, 1, 3) \text{ e } C(2, 1, 2)$$

$$\begin{aligned}
 36.1. \text{ a) } \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= (1, -1, 3) \cdot (2, 0, -1) = \\
 &= 1 \times 2 - 1 \times 0 + 3 \times (-1) = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 2\overline{AB} - \overline{BC} &= \\
 &= (2, -2, 6) - (2, 0, -1) = (0, -2, 7) \\
 \overline{CA}(-3, 1, -2) & \\
 (2\overline{AB} - \overline{BC}) \cdot \overline{CA} &= \\
 &= (0, -2, 7) \cdot (-3, 1, -2) = \\
 &= 0 - 2 - 14 = -16
 \end{aligned}$$

$$36.2. \quad P(0, 0, z)$$

$$\begin{aligned}
 \overline{PC}(2, 1, 2-z) & \\
 \overline{AC}(3, -1, 2) & \\
 \overline{PC} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow 6 - 1 + 2(2-z) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 5 + 4 - 2z = 0 \Leftrightarrow 2z = 9 \Leftrightarrow z &= \frac{9}{2} \\
 P\left(0, 0, \frac{9}{2}\right) &
 \end{aligned}$$

$$37.1. \quad \vec{u}(1, -1, 0) \text{ e } \vec{v}(-2, 2, 1)$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{(1, -1, 0) \cdot (-2, 2, 1)}{\sqrt{1+1+0} \times \sqrt{4+4+1}} = \\
 &= \frac{-2-2}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right) \approx 2,8 \text{ rad}$$

$$37.2. \quad \vec{u}(2, -3, 1) \text{ e } \vec{v}(-1, 0, 3)$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) &= \frac{(2, -3, 1) \cdot (-1, 0, 3)}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{1+0+9}} = \\
 &= \frac{-2+3}{\sqrt{14}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{140}}
 \end{aligned}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{140}}\right) \approx 1,5 \text{ rad}$$

38.1. $\vec{u}(-3, k, 2)$ e $\vec{v}(2, 1, -k)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -6 + k - 2k = 0 \Leftrightarrow k = -6$$

38.2. $\vec{u}(k+1, k, 1)$ e $\vec{v}(k-1, 1, 1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k+1)(k-1) + k + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 1 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k(k+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -1$$

38.3. $\vec{u}(k+2, -k, k+2)$ e $\vec{v}(k+2, k+2, 1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k+2)^2 - k(k+2) + k+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+2)(k+2-k+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+2) \times 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k+2 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

39. $\vec{u}(a, b)$, $M(3, -1)$ e $A(1, -5)$

39.1. $\vec{v}(-b, a)$ e $\vec{w}(b, -a)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-b, a) \cdot (a, b) = -ba + ab = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (b, -a) \cdot (a, b) = ba - ab = 0$$

Logo, $\vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{u}$.

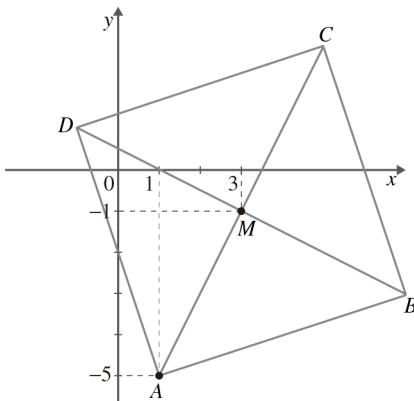
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{b^2 + (-a)^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Logo, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.

39.2.



$$\overrightarrow{AM} = M - A = (2, 4)$$

Vetores perpendiculares a $\overrightarrow{AM}$ com a mesma norma:

$$(-4, 2) \text{ e } (4, -2)$$

$$C = M + \overrightarrow{AM} = (3, -1) + (2, 4) = (5, 3)$$

$$B = M + \overrightarrow{MB} = (3, -1) + (4, -2) = (7, -3)$$

$$D = M + \overrightarrow{MD} = (3, -1) + (-4, 2) = (-1, 1)$$

$$B(7, -3), C(5, 3) \text{ e } D(-1, 1)$$

40.1. $\widehat{DCO} = 90^\circ - \widehat{ODC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Inclinação da reta s : $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$m_s = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ)$$

$$m_s = -\sqrt{3}$$

Declive da reta r :

$$m_r \times m_s = -1 \Leftrightarrow m_r \times (-\sqrt{3}) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A reta r passa em $A(-12, 0)$, logo:

$$r: y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 12) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$$

40.2. $B(3, y)$

$$B \in r. \text{ Logo, } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 5\sqrt{3}.$$

$$B(3, 5\sqrt{3})$$

$$s: y - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

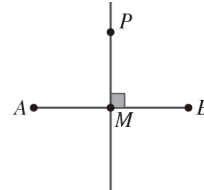
$$\Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$$

Coordenadas de $C(x, 0)$

$$-\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x = -8\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 8$$

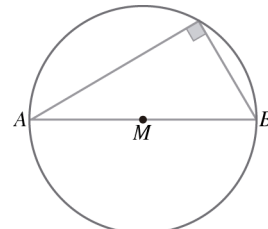
$$C(8, 0)$$

41.1. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$



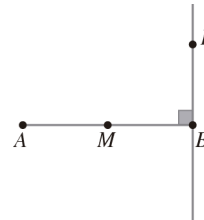
Mediatriz do segmento de reta $[AB]$

41.2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$



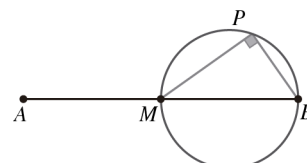
Circunferência de diâmetro $[AB]$

41.3. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$



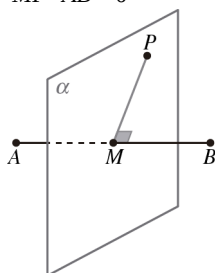
Reta perpendicular à reta AB no ponto B

41.4. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

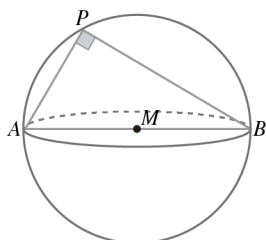


Circunferência de diâmetro $[MB]$

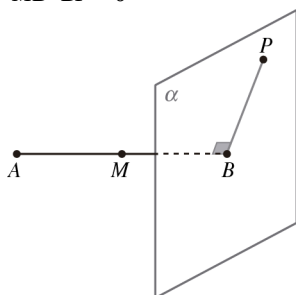
42.1. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$


Plano medidor de $[AB]$

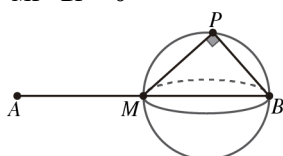
42.2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$


Superfície esférica de diâmetro $[AB]$

42.3. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$


Plano perpendicular a $[AB]$ em B

42.4. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$


Superfície esférica de diâmetro $[MB]$

43. Área do setor $BOD: \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$

Seja $\widehat{BOD} = \theta$. Então

$$\frac{\theta r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow r = 2$$

$$\frac{\theta \times 4}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{DOA} = \pi - \widehat{BOD} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} \times \cos(\widehat{OA, OD}) =$$

$$= 2 \times 2 \times \cos \frac{3\pi}{4} = 4 \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2\sqrt{2}$$

44. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2$$

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = 6,1^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = 6,1^2 - 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = 1,21 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{BC} > 0 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = 1,1$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}}{2} = \frac{6 \times 1,1}{2} = 3,3$$

$$A_{[ABC]} = 3,3 \text{ cm}^2$$

45. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} =$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} =$$

$$= 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} =$$

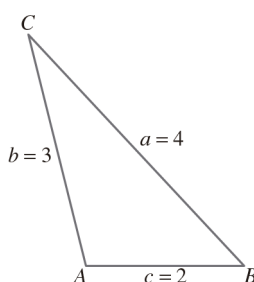
$$= 2\|\overrightarrow{AO}\|^2 + 2\|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OP}\|\cos(\widehat{OB, OP}) =$$

$$= 2r^2 + 2 \times r \times r \times \cos \alpha =$$

$$= 2r^2 (1 + \cos \alpha)$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OB}$$

46.1.



Pelo Teorema de Carnot:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 4 - 16}{2 \times 3 \times 2} =$$

$$= \frac{-3}{4 \times 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \cos A =$$

$$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{3}{2}$$

46.2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{CA} =$

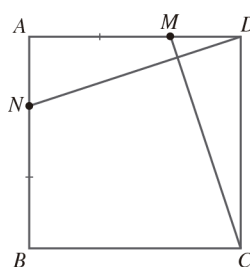
$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} =$$

$$= (-\overrightarrow{AB}) \cdot (-\overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \|\overrightarrow{AC}\|^2 =$$

$$= -\frac{3}{2} - 3^2 = -\frac{3}{2} - 9 = -\frac{21}{2}$$

47.



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DN} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN}) = \\
 &= \left(\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{DA} \right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right) = \\
 &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{9} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \\
 &= 0 - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \|\overrightarrow{DA}\|^2 + \frac{1}{9} \times 0 = \quad (\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}) \\
 &= -\frac{1}{3} \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \frac{1}{3} \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 0 \quad (\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|)
 \end{aligned}$$

Logo, $CM \perp DN$.

$$\begin{aligned}
 \text{48.1. a)} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\
 &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\
 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \\
 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u} + (-\vec{v})\|^2 = \\
 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = \\
 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2
 \end{aligned}$$

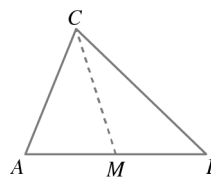
$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\
 &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{v} - \vec{v}) &\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| &= \|\vec{v}\| \text{ dado que } \|\vec{u}\| \geq 0 \text{ e } \|\vec{v}\| \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{48.2. } \|\vec{u}\| &= \sqrt{3}, \|\vec{v}\| = 1 \text{ e } \vec{u} \perp \vec{v} \\
 \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}}) &= \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}{\|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \\
 &= \frac{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2} \times \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{3})^2 - 1^2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 0 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{4} \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\
 (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}}) &= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{48.3. } \|\vec{u}\| &= \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| \\
 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}}) &= \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{u} + \vec{v}\|} = \quad (\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|) \\
 &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}{\|\vec{u}\|^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = \quad (\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{1}{2} \\
 \text{Logo, } (\widehat{\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}}) &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$

49.



$$\begin{aligned}
 \text{49.1. } \overrightarrow{AC}^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\|^2 = \\
 &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} + \|\overrightarrow{MC}\|^2 \quad (1) \\
 \overrightarrow{BC}^2 &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\|^2 = \quad (\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM}) \\
 &= \|\overrightarrow{AM}\|^2 + 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AM} + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \\
 &= \|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AM} + \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \\
 &= \|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} + \|\overrightarrow{AM}\|^2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Logo, de (1) e (2):

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 &= 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \\
 &= 2\overrightarrow{MC}^2 + 2\overrightarrow{AM}^2 = \\
 &= 2\overrightarrow{MC}^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 = \quad \left(\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
 &= 2\overrightarrow{MC}^2 + 2\frac{\overrightarrow{AB}^2}{4} = 2\overrightarrow{MC}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{49.2. } \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 &= 2\overrightarrow{MC}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\
 3^2 + 4^2 &= 2\overrightarrow{MC}^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 25 &= 2\overrightarrow{MC}^2 + 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}^2 &= \frac{23}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \sqrt{\frac{23}{2}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} &= \frac{\sqrt{23}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \frac{\sqrt{46}}{2}
 \end{aligned}$$

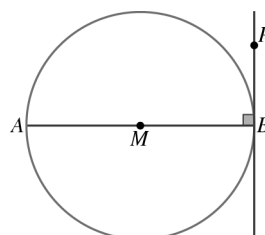
Avaliação 1

Pág. 122

$$\begin{aligned}
 1. \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 2^2 = 4 \\
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} &= 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = 2\|\overrightarrow{CB}\|^2 = 2 \times 1^2 = 2 \\
 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = -\|\overrightarrow{CA}\|^2 = -1
 \end{aligned}$$

Resposta: (C)

2.



O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ é a reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto B .

Resposta: (A)

3. $A(4, 2)$ e $B(8, -1)$

$$m_{AB} = \frac{-1-2}{8-4} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

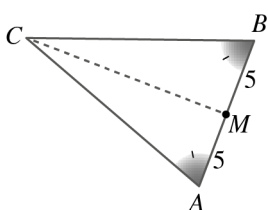
$$1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Como } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Resposta: (D)

4.

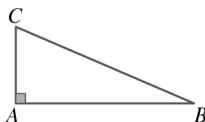


$$\overline{AB} = 10, \overline{AC} = \overline{BC} \text{ e } \widehat{BAC} = \widehat{CBA}$$

- $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AM} = 10 \times 5 = 50$
- $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -\overline{BA} \times \overline{BM} = -10 \times 5 = -50$
- $\overline{AB} \cdot \overline{CB} = -\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -(-50) = 50 > 0$
- $\overline{BC} \cdot \overline{BA} = \overline{BA} \times \overline{BM} = 10 \times 5 = 50$

Resposta: (C)

5. $A(1, 0, 1)$, $B(2, k-1, -2k)$ e $C(k+1, 1, 4)$



$$\overline{AC}(k, 1, 3); \overline{AB}(1, k-1, -2k-1)$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow k + (k-1) + 3(-2k-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4k = 4 \Leftrightarrow k = -1$$

Resposta: (D)

6. $\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 + 8^2 = 10^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{AM}^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} = 6 \quad (\overline{AM} > 0)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{AM} = 10 \times 6 = 60$$

Resposta: (A)

Pág. 123

7.1. $\overline{AB} \cdot \overline{AP} = 2\overline{OB} \cdot (\overline{AO} + \overline{OP}) =$

$$= 2\overline{OB} \cdot \overline{AO} + 2\overline{OB} \cdot \overline{OP} =$$

$$= 2\overline{OB} \cdot \overline{OB} + 2\overline{OB} \times \overline{OP} \times \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= 2\|\overline{OB}\|^2 + 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= 2 \times 2^2 + 4 = 12$$

7.2. $\overline{PO} \cdot \overline{PA} = \overline{PO} \cdot (\overline{PO} + \overline{OA}) =$

$$= \overline{PO} \cdot \overline{PO} + \overline{PO} \cdot \overline{OA} =$$

$$= \|\overline{PO}\|^2 - \overline{OP} \cdot \overline{OA} =$$

$$= 2^2 - \overline{OP} \times \overline{OA} \times \cos(\widehat{OP, OA}) =$$

$$= 4 - 2 \times 2 \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 - 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

8. Se $\overline{RC} = \overline{CS}$, então $\overline{BR} = \overline{DS}$ pelo que os triângulos [ABR] e [ASD] são iguais.

$$\text{Área de [ABR]} = \frac{36-20}{2} \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$$

$$\frac{6 \times \overline{BR}}{2} = 8 \Leftrightarrow \overline{BR} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{BR} = \overline{DS} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{AR} \cdot \overline{AS} = (\overline{AB} + \overline{BR}) \cdot (\overline{AD} + \overline{DS}) =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{DS} + \overline{BR} \cdot \overline{AD} + \overline{BR} \cdot \overline{DS} =$$

$$= 0 + \overline{AB} \times \overline{DS} + \overline{BR} \times \overline{AD} + 0 =$$

$$= 6 \times \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \times 6 = 16 + 16 = 32$$

9. $A(4, 0)$

$$r: x + 3y = 3 \Leftrightarrow 3y = -x + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1$$

9.1. $m_r = -\frac{1}{3}$

$$\alpha = \pi - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2,8 \text{ rad}$$

9.2. $m_s \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_s \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow m_s = 3$

$$s: y - 0 = 3(x - 4) \Leftrightarrow y = 3x - 12$$

9.3. $C(x, y); \overline{OC}(x, y); \overline{OA}(4, 0)$

$$\overline{OC} \cdot \overline{OA} = 4x$$

Logo, $\overline{OC} \cdot \overline{OA}$ não depende de y , ou seja, da ordenada do ponto C .

10.1. $\overline{BH} \cdot \overline{AG} = (\overline{BA} + \overline{AH}) \cdot (\overline{AH} + \overline{HG}) =$

$$= (\overline{AH} + \overline{BA}) \cdot (\overline{AH} - \overline{BA}) =$$

$$= \|\overline{AH}\|^2 - \|\overline{BA}\|^2 =$$

$$= (a^2 + a^2) - a^2 = \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

$$= a^2$$

10.2. $\|\overline{AG}\| = \|\overline{BH}\| = \sqrt{3}a$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{AG}}{\|\overline{BH}\| \|\overline{AG}\|} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a \sqrt{3}a} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5^\circ$$

11. $r: x - 7y + 20 = 0$

$A(1, y) \in r$

11.1. $\alpha_s = 135^\circ$

$m_s = \tan(135^\circ) = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

$B(-1, -3) \in s$

$y + 3 = -1(x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x - 1 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y + 4 = 0$

$1 - 7y + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7y = 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 3$

$A(1, 3)$

11.2. $A(1, y) \in r$

11.3. Seja p a reta perpendicular a r no ponto A .

$x - 7y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{20}{7}$

$m_r = \frac{1}{7}$

$m_p \times m_r = -1 \Leftrightarrow m_p \times \frac{1}{7} = -1 \Leftrightarrow m_p = -7$

$A(1, 3) \in p$

$p: y - 3 = -7(x - 1) \Leftrightarrow y = -7x + 10$

Seja q a reta perpendicular à reta s no ponto B .

$m_q \times m_s = -1 \Leftrightarrow m_q \times (-1) = -1 \Leftrightarrow m_q = 1$

$B(-1, -3) \in q$

$q: y + 3 = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x - 2$

C é o ponto de interseção das retas p e q .

$\begin{cases} y = -7x + 10 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -7x + 10 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 12 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$C\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Atividade inicial 2

Pág. 124

1. $\vec{u}(2, -1, 0), \vec{v}(1, 2, -1), \vec{n}(a, b, c)$
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (2, -1, 0) = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$
 Substituindo b por $2a$ em $\vec{n}$, $\vec{n}(a, 2a, c)$ que é uma expressão geral dos vetores perpendiculares ao vetor $\vec{u}$.
2. Por exemplo, $\vec{n}_1(1, 2, 0), \vec{n}_2(1, 2, 1)$ e $\vec{n}_3(1, 2, -1)$
3. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + 2 \times 2a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 5a \end{cases}$$

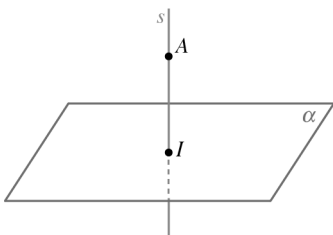
 Substituindo em $\vec{n}(a, b, c)$, b por $2a$ e c por $5a$, obtemos $\vec{n}(a, 2a, 5a)$, expressão geral dos vetores perpendiculares a u e a v .
4. Por exemplo, para $a = 1$, $\vec{n}(1, 2, 5)$

Pág. 127

- 1.1. $A(1, 0, -1)$ e $\vec{n}(-2, 3, 1)$
 $\alpha: -2(x-1) + 3(y-0) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x + 2 + 3y + z + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x + 3y + z + 3 = 0$
- 1.2. $A(-2, 1, 3)$ e $\vec{n}(0, -1, 2)$
 $\alpha: 0(x+2) - 1(y-1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -y + 1 - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -y + 2z - 5 = 0$
- 1.3. $A(-2, 1, 0)$ e $\vec{n}(3, 0, 0)$
 $\alpha: 3(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Pág. 128

2. $\alpha: 4x - 8y + z + 3 = 0$; $A(-2, 9, -4)$
- 2.1. $\vec{n}(4, -8, 1)$ é um vetor normal do plano α . Logo, $\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular a α , em particular da reta s que passa em A .
 $s: (x, y, z) = (-2, 9, -4) + k(4, -8, 1), k \in \mathbb{R}$
- 2.2.



Trata-se de determinar $\overline{AI}$ sendo I o ponto de interseção da reta s com o plano α .

$$s: (x, y, z) = (-2, 9, -4) + k(4, -8, 1), k \in \mathbb{R}$$

Equações paramétricas de s :

$$\begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 9 - 8k \\ z = -4 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Qualquer ponto da reta s é da forma:

$$(-2 + 4k, 9 - 8k, -4 + k), k \in \mathbb{R}$$

O ponto I é o ponto de s que pertence a:

$$\alpha: 4x - 8y + z + 3 = 0$$

$$4(-2 + 4k) - 8(9 - 8k) + (-4 + k) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 + 16k - 72 + 64k - 4 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81k = 81 \Leftrightarrow k = 1$$

$$I(-2 + 4, 9 - 8, -4 + 1) = I(2, 1, -3)$$

$$r = \overline{AI} = \sqrt{(-2-2)^2 + (9-1)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{16 + 64 + 1} = \sqrt{81} = 9$$

$$I(2, 1, -3)$$

- 2.3. a) $r: (x, y, z) = (n, -1, m) + k(3m, m, m-5), k \in \mathbb{R}$

Vetor diretor de $r: \vec{r}(3m, m, m-5)$

Vetor normal ao plano $\alpha: \vec{n}(4, -8, 1)$

$$r // \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 3m - 8m + m - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12m - 7m = 5 \Leftrightarrow 5m = 5 \Leftrightarrow m = 1$$

- b) r está contida em α se e só se $r // \alpha$

e o ponto $(n, -1, m) \in \alpha$

$$r // \alpha \wedge (n, -1, m) \in \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge (n, -1, 1) \in \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge 4n - 8 \times (-1) + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge 4n = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge n = -3$$

Pág. 129

3. $ABC: x + 2y + 2z - 6 = 0$ e $V(3, 6, 9)$
- 3.1. $(x, y, z) = (3, 6, 9) + k(1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$
- 3.2. E é a interseção de r com ABC .

Qualquer ponto de r é da forma:

$$(3 + k, 6 + 2k, 9 + 2k)$$

O valor de k para o qual este ponto pertence ao plano ABC é dado por:

$$3 + k + 2(6 + 2k) + 2(9 + 2k) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k + 3 + 12 + 18 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k = -27 \Leftrightarrow k = -3$$

Assim:

$$E(3 - 3, 6 - 2 \times 3, 9 - 2 \times 3) \text{ ou } E(0, 0, 3)$$

- 3.3. $B(0, y, 0)$ e $B \in ABC$

$$0 + 2y + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$$

$$B(0, 3, 0)$$

- 3.4. $\overline{BV} \cdot \overline{BD} = \overline{BD} \cdot \overline{BV} =$

$$= \overline{BD} \times \overline{BE} = (E \text{ é a projeção ortogonal de } V \text{ na reta } BD)$$

$$= 2\overline{BE} \times \overline{BE} = 2\overline{BE}^2 =$$

$$= 2(\sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2})^2 = 2 \times 18 = 36$$

Pág. 130

4. $\alpha: 3x + y - 2z + 1 = 0$
 $A(1, 1, -1)$ e $B(1, 0, -2)$
- 4.1. $3(x-1) + (y-1) - 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x + y - 2z - 6 = 0$
- 4.2. $\beta_k: k^2x + ky + z + 1 = 0$
- a) $A(1, 1, -1) \in \beta_k$
 $k^2 \times 1 + k \times 1 + (-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k(k+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -1$
- b) $B(1, 0, -2) \in \beta_k$
 $k^2 \times 1 + k \times 0 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$
- c) Se β_k passa em A e B então $k = -1$ e
 $\beta_{-1}: x - y + z + 1$
 $n_{\beta}(1, -1, 1)$ é um vetor normal a β
 $n_{\alpha}(3, 1, -2)$ é um vetor normal a α
 $n_{\beta} \cdot n_{\alpha} = (1, -1, 1) \cdot (3, 1, -2) =$
 $= 3 - 1 - 2 = 0$
 Como $n_{\beta} \cdot n_{\alpha} = 0$, então β_{-1} é perpendicular ao plano α .

Pág. 131

5. $ABC: 3x - 6y + 2z + 12 = 0$; $E(6, -8, 10)$
- 5.1. O plano EFG passa em E e é paralelo ao plano ABC .
 $3(x-6) - 6(y+8) + 2(z-10) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x - 6y + 2z - 18 - 48 - 20 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x - 6y + 2z - 86 = 0$
- 5.2. $M(1-k, k, 1)$
 $\overline{EM} = (1-k-6, k+8, -9) = (-k-5, k+8, -9)$
 $\overline{EM}$ é um vetor da reta EM .
 $\vec{n}(3, -6, 2)$ é um vetor normal ao plano ABC .
 A reta EM é paralela ao plano $ABC \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \overline{EM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-k-5, k+8, -9) \cdot (3, -6, 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -3k - 15 - 6k - 48 - 18 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9k = -81 \Leftrightarrow k = -9$
- 5.3. $\vec{n}(3, -6, 2)$ é normal ao plano ABC . Logo é um vetor
 diretos da reta FB .
 Assim, $\vec{u}\left(m + \frac{1}{2}, 2m-2, 2m\right)$ é um vetor diretor da reta
 FB se e só se $\vec{u}$ e $\vec{n}$ forem colineares:
 $\frac{m + \frac{1}{2}}{3} = \frac{2m-2}{-6} = \frac{2m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m-3 = 6m-6 \\ m-1 = -3m \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 12m = 3 \\ 4m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$
- 5.4. $(x, y, z) = (6, -8, 10) + k(3, -6, 2), k \in \mathbb{R}$
- 5.5. O ponto A é a interseção da reta EA com o plano ABC .
 Qualquer ponto de EA é da forma:
 $I(6+3k, -8-6k, 10+2k)$

$$I \text{ pertence a } ABC: 3x - 6y + 2z + 12 = 0.$$

$$3(6+3k) - 6(-8-6k) + 2(10+2k) + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k + 36k + 4k + 18 + 48 + 20 + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49k = -98 \Leftrightarrow k = -2$$

Para $k = -2$ obtemos as coordenadas de A :
 $A(6-6, -8+12, 10-4)$ ou $A(0, 4, 6)$

Pág. 133

6. $\alpha: (x, y, z) =$
 $= (1, -1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-2, 1, -1); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $A(3, -3, 0)$ e $B(2, -2, 1)$
- 6.1. $(3, -3, 0) = (1, -1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-2, 1, -1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 + \lambda - 2\mu \\ -3 = -1 + \mu \\ 0 = \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -2 \\ \lambda = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$
 O sistema é possível. Logo, $A \in \alpha$.
 $B \notin \alpha$?
 $(2, -2, 1) = (1, -1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-2, 1, -1)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + \lambda - 2\mu \\ -2 = -1 + \mu \\ 1 = \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ 1 = \lambda - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + 0 + 2 \text{ (F)} \\ \mu = -1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$
 O sistema é impossível.
 Logo, $B \notin \alpha$.
- 6.2. $\vec{e}_1(1, 0, 0)$ e $\vec{e}_2(0, 1, 0)$ são vetores diretores do plano
 xOy e, portanto, de qualquer plano paralelo a xOy .
 $(x, y, z) = (2, -2, 1) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
7. $A(1, 0, 0), B(0, 2, -1)$ e $C(1, 2, 1)$
 $\vec{v}(1, 0, -1)$
- 7.1. $\overline{AB} = B - A = (-1, 2, -1)$
 $\overline{AC} = C - A = (0, 2, 1)$
 $\alpha: (x, y, z) =$
 $= (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, -1) + \mu(0, 2, 1); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- 7.2. $\beta: (x, y, z) =$
 $= (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, -1) + \mu(1, 0, -1); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- 7.3. $C(1, 2, 1) \in \beta$?
 $(1, 2, 1) =$
 $= (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, -1) + \mu(1, 0, -1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 - \lambda + \mu \\ 2 = 2\lambda \\ 1 = -\lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 - 1 - 2 \text{ (F)} \\ \lambda = 1 \\ \mu = -2 \end{cases}$
 O sistema é impossível.
 Logo, $C \notin \beta$.

8. $(x, y, z) = (1, 3, -1) + \lambda(2, 1, 0) + \mu(1, -1, 1); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a α . Então:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot (2, 1, 0) = 0 \\ \vec{n} \cdot (1, -1, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + 2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -3a \end{cases}$$

$\vec{n}(a, -2a, -3a)$ define a família de vetores normais a α .

Para $a = 1$, $\vec{n}(1, -2, -3)$.

$$(1, 3, -1) \in \alpha$$

$$\begin{aligned} \alpha: 1(x-1) - 2(y-3) - 3(z+1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - 2y - 3z - 1 + 6 - 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - 2y - 3z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

9. $A(1, 0, 1)$; $\overline{AB}(2, -2, 1)$; $\overline{AC}(3, 0, 3)$

9.1. a) $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -2, 1) + \mu(3, 0, 3); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABC .

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, -2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (3, 0, 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b + c = 0 \\ 3a + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - a = 0 \\ c = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}a \\ c = -a \end{cases}$$

$\vec{n}\left(a, \frac{1}{2}a, -a\right)$ define a família de vetores normais ao

plano ABC .

Para $a = 2$, $\vec{n}(2, 1, -2)$.

$$2(x-1) + 1(y-0) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0$$

9.2. $E = A + \frac{1}{2}\overline{AC} =$

$$\begin{aligned} &= (1, 0, 1) + \frac{1}{2}(3, 0, 3) = \\ &= (1, 0, 1) + \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

9.3. $\|\overline{AB}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$V_{\text{pirâmide}} = 9$

$$\frac{1}{3} \times \|\overline{AB}\|^2 \times h = 9$$

$$\frac{1}{3} \times 3^2 \times h = 9 \Leftrightarrow h = 3$$

$$V(x, y, z), y < 0$$

Sabemos que $\overline{EV}$ é um vetor normal ao plano ABC e

$$\|\overline{EV}\| = h = 3.$$

$\overline{VE}$ é colinear com $\vec{n}(2, 1, -2)$ e $\|\overline{EV}\| = 3$.

$$\overline{EV} = k(2, 1, -2) = (2k, 1, -2k)$$

$$\begin{aligned} \|\overline{EV}\| = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + k^2 + (-2k)^2} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4k^2 + k^2 + 4k^2 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9k^2 = 9 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1 \end{aligned}$$

Se $k = 1$, $\overline{EV} = (2, 1, -2)$ e

$$\begin{aligned} V = E + \overline{EV} &= \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right) + (2, 1, -2) = \\ &= \left(\frac{9}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Se $k = -1$, $\overline{EV} = (-2, 1, 2)$ e

$$\begin{aligned} V = E + \overline{EV} &= \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right) + (-2, -1, 2) = \\ &= \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{9}{2}\right) \end{aligned}$$

Como $y < 0$, temos $V\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{9}{2}\right)$.

10. $A(2, 1, 0)$, $B(-1, -2, -3)$ e $C(-3, 0, 1)$

10.1. $\overline{AB} = (-3, -3, -3)$

$$\overline{AC} = (-5, -1, -1)$$

$$\frac{-3}{-5} \neq \frac{-3}{-1}$$

Como $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ não são colineares, A, B e C definem um plano.

10.2. Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a ABC .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, -3, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-5, -1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 3b - 3c = 0 \\ -5a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ -5a - b - a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - b \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a + 3a \\ b = -3a \end{cases} = \begin{cases} c = 2a \\ b = -3a \end{cases} \end{aligned}$$

$\vec{n}(a, -3a, 2a)$. Para $a = 1$, temos que $\vec{n}(1, -3, 2)$ é

um vetor normal a ABC .

$$A(2, 1, 0) \in ABC$$

$$1(x-2) - 3(y-1) + 2z = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2z + 1 = 0$$

11. $E(2, 0, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $G(0, 2, 2)$

11.1. $\overline{EB}(0, 2, -2)$ e $\overline{EG}(-2, 2, 0)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano EBG .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{EB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{EG} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (0, 2, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-2, 2, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ -2a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ -2a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{n}(c, c, c)$$

Para $c = 1$, $\vec{n}(1, 1, 1)$.

$$E(2, 0, 2) \in EBG$$

$$EBG: 1(x-2) + 1(y-0) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0$$

11.2. A reta r que passa em $D(0, 0, 2)$ e é perpendicular a EBG é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Todo o ponto de r é da forma $(k, k, 2+k)$.

A interseção de r com o plano EBG obtém-se para k tal que:

$$k + k + (2+k) - 4 = 0 \Leftrightarrow 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

O ponto de interseção de r com EBG é:

$$I\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2+\frac{2}{3}\right), \text{ ou seja, } I\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Raio da superfície esférica:

$$r = \overline{DI} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

A equação pedida é:

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{4}{3}$$

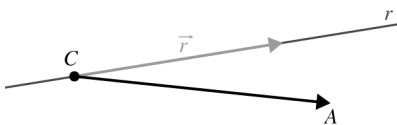
Pág. 136

12. $r: x=1 \wedge z=2$

$$A(3, 1, 1) \text{ e } B(2, 1, 0)$$

12.1. $C(1, 0, 2)$ é um ponto de r

$\vec{r}(0, 1, 0)$ é um vetor diretor de r



α passa em C e tem a direção dos vetores $\vec{r}$ e $\overline{CA}$.

$$\overline{CA}(2, 1, -1)$$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a α .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{CA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n}(a, 0, 2a)$$

Para $a = 1$, $\vec{n}(1, 0, 2)$ que é um vetor normal a α .

$$A(3, 1, 1) \in \alpha$$

$$\alpha: 1(x-3) + 0(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2z - 5 = 0$$

12.2. $\overline{AB}(-1, 0, -1)$

$$\vec{r}(0, 1, 0)$$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a β .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 0, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n}(a, 0, -a)$$

Para $a = 1$, vem $\vec{n}(1, 0, -1)$ que é um vetor normal a β .

$$A(3, 1, 1) \in \beta$$

$$\beta: 1(x-3) + 0(y-1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - z - 2 = 0$$

12.3. $\vec{r}(0, 1, 0)$ é um vetor normal a π

$$A(3, 1, 1) \in \pi$$

$$\pi: 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

13. $r: (x, y, z) = (1, 0, 4) + k(-1, 2, -3), k \in \mathbb{R}$

$$s: (x, y, z) = (-1, 4, -2) + t(1, 0, 1), t \in \mathbb{R}$$

13.1. $(-1, 4, -2) = (1, 0, 4) + k(-1, 2, -3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 1 - k \\ 4 = 2k \\ -2 = 4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

O sistema é possível. Logo $A(-1, 4, -2) \in r$.

$(-1, 4, -2) \in s$ pois é o ponto que se obtém para $t = 0$.

$\vec{r}(-1, 2, -3)$ é um vetor diretor de r .

$\vec{s}(1, 0, 1)$ é um vetor diretor de s .

Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares, as retas r e s não são paralelas.

Como r e s não são paralelas, $A \in r$ e $A \in s$, então r e s são concorrentes no ponto A .

13.2. O plano α passa em A e tem a direção dos vetores:

$$\vec{r}(-1, 2, -3) \text{ e } \vec{s}(1, 0, 1)$$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a α .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - 3c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 2b - 3c = 0 \\ a = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2c \\ a = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = -c \end{cases}, \text{ logo } \vec{n}(-c, c, c).$$

Para $c = -1$, $\vec{n}(1, -1, 1)$ que é o vetor normal a α .

$$\alpha: 1(x+1) - 1(y-4) - 1(z+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - y - z + 3 = 0$$

Pág. 137

14. $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(1, -1, 3), k \in \mathbb{R}$

$$s: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right), t \in \mathbb{R}$$

14.1. $\vec{r}(1, -1, 3)$ e $\vec{t}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$

$r = -3t$. Logo, $\vec{r}$ e $\vec{t}$ são colineares pelo que as retas r e t são paralelas. Assim, $A(1, 0, 0) \in r$.

$A \in s$?

$$(1, 0, 0) = (0, 0, 1) + t\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{t}{3} \\ 0 = \frac{t}{3} \\ 0 = r - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

O sistema é impossível. Logo, $A \notin s$. Portanto, as retas são paralelas e não coincidentes, ou seja, são estritamente paralelas.

14.2. $\vec{r}(1, -1, 3)$ é um vetor diretor de r .

$$A(1, 0, 0) \in r \text{ e } B(0, 0, 1) \in s$$

A e B são pontos de α .

$$\overrightarrow{AB}(-1, 0, 1)$$

α é o plano que passa em $A(1, 0, 0)$ e tem a direção dos vetores $\vec{r}$ e $\overrightarrow{AB}$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a α .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - b + 3c = 0 \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4c \\ a = c \end{cases}$$

$\vec{n}(c, 4c, c)$. Para $c = 1$, obtém-se $\vec{n}(1, 4, 1)$ que é um vetor normal a α . $A(1, 0, 0) \in \alpha$

$$\alpha: 1(x-1) + 4(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 4y + z - 1 = 0$$

15. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 12$

$$\alpha: x - y + z = 1$$

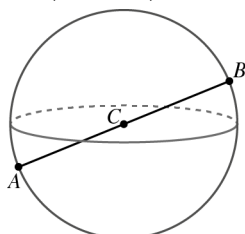
$$A(1, -1, 2)$$

15.1. $(1-3)^2 + (-1-1)^2 + 2^2 = 12 \Leftrightarrow$

O ponto A pertence à superfície esférica.

15.2. $C(3, 1, 0)$ é o centro da superfície esférica.

$$\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$$



$$B = C + \overrightarrow{AC} =$$

$$= (3, 1, 0) + (2, 2, -2) =$$

$$= (5, 3, -2)$$

$$B(5, 3, -2)$$

15.3. a) Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano tangente à superfície esférica no ponto A .

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow$$

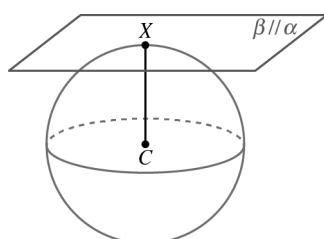
$$\Leftrightarrow (x-1, y+1, z-2) \cdot (2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + y + 1 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$$

b) Seja X o ponto de tangência.



Então, $\overrightarrow{CX}$ é normal a β . Como $\beta \parallel \alpha$, então $\overrightarrow{CX}$ é normal a α . Logo, $\overrightarrow{CX}$ é colinear com $\vec{n}(1, -1, 1)$, ou seja:

$$\overrightarrow{CX} = \lambda(1, -1, 1) = (\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\text{Por outro lado, } \|\overrightarrow{CB}\| = r = \sqrt{12}.$$

$$\|\overrightarrow{CX}\| = \sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + (-\lambda)^2 + \lambda^2} = \sqrt{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda^2 = 12 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

$$\overrightarrow{CX}(2, -2, 2) \text{ ou } \overrightarrow{CX}(-2, 2, -2)$$

$$X = C + \overrightarrow{CX}$$

$$X = (3, 1, 0) + (2, -2, 2) = (5, -1, 2) \text{ ou}$$

$$X = (3, 1, 0) + (-2, 2, -2) = (1, 3, -2)$$

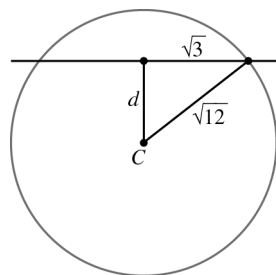
Como $\beta \parallel \alpha$, $\vec{n}(1, -1, 1)$ é um vetor normal a β .

$$\beta: (x-5) - (y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 8 = 0$$

ou

$$\beta: (x-1) - (y-3) + (z+2) = 0 \Leftrightarrow x - y + z + 4 = 0$$

c)



$$d^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{12})^2 \Leftrightarrow d^2 = 12 - 3 \Leftrightarrow d^2 = 9 \Leftrightarrow d = 3$$

Qualquer plano que diste 3 unidades do centro $C(3, 1, 0)$ da superfície esférica intersesta-a segundo uma circunferência de raio $\sqrt{3}$.

Os planos $x = 3$, $y = 1$ e $z = 0$ são perpendiculares aos eixos coordenados e passam no centro da superfície esférica.

Os planos perpendiculares aos eixos coordenados que distam 3 unidades do centro são:

$$x = 3 - 3 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x = 3 + 3 \Leftrightarrow x = 6$$

$$y = 1 - 3 \Leftrightarrow y = -2$$

$$y = 1 + 3 \Leftrightarrow y = 4$$

$$z = 0 - 3 \Leftrightarrow z = -3$$

$$z = 0 + 3 \Leftrightarrow z = 3$$

Por exemplo, o plano de equação $x = 0$ intersesta a superfície esférica segundo uma circunferência de raio $\sqrt{3}$.

Atividades complementares

Pág. 139

16.1. $A\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ e $\vec{u}(2, -1, 3)$

$$\pi: 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1(y - 0) + 3(z + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3z + 2 = 0$$

16.2. $A(-1, 0, 0)$ e $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$
 $\pi: \frac{1}{2}(x+1) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - y + z + \frac{1}{2} = 0$

16.3. $A(1, -1, 3)$, $\vec{u}(2, 0, -1)$
 $\pi: 2(x-1) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - z + 1 = 0$

16.4. $A(2, -1, 5)$ e $\vec{u}(1, 0, 0)$
 $\pi: 1(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

16.5. $A(-3, -2, 1)$ e $\vec{u}(0, -2, 0)$
 $\pi: -2(y+2) = 0 \Leftrightarrow y = -2$

17.1. $x - y + z = 0$
 $\vec{n}(1, -1, 1)$ e $A(0, 0, 0)$

17.2. $2x = z \Leftrightarrow 2x - z = 0$
 $\vec{n}(2, 0, -1)$ e $A(0, 0, 0)$

17.3. $\frac{x}{2} + z = y \Leftrightarrow \frac{x}{2} - y + z = 0$
 $\vec{n}\left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$ e $A(0, 0, 0)$

17.4. $y = 3$
 $\vec{n}(0, 1, 0)$ e $A(0, 3, 0)$

18. $\alpha: x - 3y + z = 5$
 $A(1, -3, 1)$

18.1. $\vec{r}(1, -3, 1)$ é um vetor diretor de r , dado que é normal a α .
 $r: (x, y, z) = (1, -3, 1) + k(1, -3, 1)$

18.2. Trata-se do ponto I de interseção de r com α .

Todo o ponto de r é da forma:

$$(1+k, -3-3k, 1+k), k \in \mathbb{R}$$

O ponto de r que pertence a $\alpha: x - 3y + z = 5$ é o que se obtém para k tal que:

$$(1+k) - 3(-3-3k) + (1+k) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11k = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{6}{11}$$

Para $k = -\frac{6}{11}$:

$$1+k = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

$$-3-3k = -3 + \frac{18}{11} = -\frac{15}{11}$$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(\frac{5}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

18.3. $s: (x, y, z) =$
 $= (1, -1, 2m) + k(m-1, m, 3m), k \in \mathbb{R}$

$\vec{s}(m-1, m, 3m)$ é um vetor diretor de s .

$\vec{n}(1, -3, 1)$ é um vetor normal a α

a) $s \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{s}$ é colinear com $\vec{n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{1} = \frac{m}{-3} = \frac{3m}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3m+3 = m \wedge m = -9m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m = 3 \wedge m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \wedge m = 0$$

A condição é impossível. Não existe m para o qual s é perpendicular a α .

b) $s // \alpha \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (m-1, m, 3m) \cdot (1, -3, 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m-1-3m+3m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

c) $A(1, -1, 2m)$ é um ponto de s .

s está contida em α se e só se r é paralela a α e

$$A \in \alpha \Leftrightarrow m = 1 \wedge 1 - 3 \times (-1) + 2m = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge 2m = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge m = \frac{1}{2}$$

Como a condição é impossível, não existe $m \in \mathbb{R}$ para o qual a reta r está contida em α .

19. $ABC: 2x + y + 2z - 4 = 0$

19.1. $A(x, 0, 0)$

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$A(2, 0, 0); B(0, y, 0)$$

$$y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4$$

$$B(0, 4, 0); C(0, 0, z)$$

$$2z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2$$

$$C(0, 0, 2)$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 4}{2} \times 2 = \frac{8}{3}$$

19.2. $\vec{n}(2, 1, 2)$ é um vetor normal a ABC

$$r: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(2, 1, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$r: \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

19.3. Interseção de r com o plano ABC :

Qualquer ponto de r é da forma $(2k, k, 2k)$, $k \in \mathbb{R}$

O ponto de r que pertence ao plano ABC obtém-se para k tal que:

$$2 \times (2k) + k + 2(2k) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4k + k + 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{4}{9}$$

Se $k = \frac{4}{9}$, $2k = \frac{8}{9}$.

O ponto de tangência, T , tem coordenadas $\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

O raio da superfície esférica é:

$$r = \overline{OT} = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{16}{81} + \frac{64}{81}} = \frac{4}{3}$$

Equação pedida: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{9}$

19.4. $\beta: kx + ky + y + kz - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow kx + (k+1)y + kz - 1 = 0$$

$\vec{u}(k, k+1, k)$ é um vetor normal a β .

$\vec{v}(2, 1, 2)$ é um vetor normal a α .

a) $\beta // \alpha \Leftrightarrow \vec{u}$ é colinear com $\vec{v} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} = \frac{k+1}{1} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k + 2 = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

b) $\beta \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k, k+1, k) \cdot (2, 1, 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k + k + 1 + 2k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$$

c) $B(0, 4, 0) \in \beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k \times 0 + k \times 4 + 4 + k \times 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

20. $C(3, 0, 0)$

20.1. $V_{\text{prisma}} = \overline{OC}^2 \times \overline{OD} \Leftrightarrow 18 = 3^2 \times \overline{OD}$
 $\overline{OD} = 2$

a) $E(0, -3, 2)$ e $C(3, 0, 0)$

Ponto médio de $[EC]$:

$$M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\overline{EC}(3, 3, -2)$$

Plano mediador de $[EC]$:

$$3\left(x - \frac{3}{2}\right) + 3\left(y + \frac{3}{2}\right) - 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 2z - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 2z + 2 = 0$$

b) $D(0, 0, 2)$, $E(0, -3, 2)$ e $C(3, 0, 0)$

$$\overline{DC}(3, 0, -2) \text{ e } \overline{DE}(0, 3, 0)$$

$$\overline{EDC}: (x, y, z) =$$

$$= (0, 0, 2) + \alpha(3, 0, -2) + \beta(0, 3, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

20.2. a) $F(3, -3, 2)$, $D(0, 0, 2)$ e $B(3, -3, 0)$

$$\overline{DB}(3, -3, -2)$$

$$\beta: 3(x-3) - 3(y+3) - 2(z-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y + 2z - 9 - 9 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y - 2z - 14 = 0$$

b) $A(0, -3, 0)$ e $C(3, 0, 0)$

$$\overline{AC}(3, 3, 0) \text{ é um vetor diretor de } AC$$

$$\vec{n}(3, -3, -2) \text{ é um vetor normal a } \beta.$$

$$\overline{AC} \cdot \vec{n} = (3, 3, 0) \cdot (3, -3, 2) =$$

$$= 9 - 9 + 0 = 0$$

Como $\overline{AC} \cdot \vec{n} = 0$, a reta AC é paralela a β .

$$A \in \beta?$$

$$3 \times 0 - 3 \times (-3) - 2 \times 0 - 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 14 = 0 \text{ (Falso)}$$

A é um ponto da reta AC e $A \notin \alpha$. Logo, como sabemos que a reta AC é paralela a α , podemos concluir que a reta AC é estritamente paralela a β .

Pág. 140

21. $V(0, 6, 3)$

$$AC: (x, y, z) = (0, 2, 1) + k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

$$AB: (x, y, z) = (0, 2, 1) + t(1, 1, 0), t \in \mathbb{R}$$

$$BVC: x + y + z - 9 = 0$$

21.1. O ponto A pertence às retas AC e AB . Como estas retas não são paralelas, pois os seus vetores diretores $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, 0)$ não são colineares, então são concorrentes no ponto A .

Da equação das retas conclui-se que o ponto de coordenadas $(0, 2, 1)$ pertence às duas retas. Logo, $A(0, 2, 1)$.

21.2. O plano ABC contém as retas AB e AC . Logo, este plano passa em A e tem a direção dos vetores de coordenadas $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

$$ABC: (x, y, z) = (0, 2, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 1, 0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Equação cartesiana:

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a ABC :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - a + c = 0 \\ b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -a \end{cases}$$

$$\vec{n}(a, -a, 0)$$

Para $a = 1$, obtemos $\vec{n}(1, -1, 0)$ que é um vetor normal a ABC .

$$ABC: 1(x-0) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow -x + y - 2 = 0$$

21.3. B é o ponto de interseção da reta AB com o plano BVC de equação: $x + y + z - 9 = 0$

$$\text{Ponto genérico de } AB: (t, 2+t, 1), t \in \mathbb{R}$$

Como B pertence ao plano BVC :

$$t + (2+t) + 1 - 9 = 0 \Leftrightarrow 2t = 6 \Leftrightarrow t = 3$$

Logo, $B(3, 5, 1)$.

C é o ponto de interseção da reta AC com o plano BVC .

$$\text{Ponto genérico de } AC: (k, 2+k, 1+k), k \in \mathbb{R}$$

$$k + (2+k) + (1+k) - 9 = 0 \Leftrightarrow 3k = 6 \Leftrightarrow k = 2$$

Logo, $C(2, 4, 3)$

21.4. $A(0, 2, 1)$

$$\overline{CA} = (-2, 2-4, 1-3) = (-2, -2, -2)$$

$$\overline{CB} = (2-3, 4-5, 3-1) = (-1, -1, 2)$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = (-2, -2, -2) \cdot (-1, -1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Logo, $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ pelo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C .

21.5. $\overline{VC} = C - V = (2, 4, 3) - (0, 6, 3) = (2, -2, 0)$

$\overline{VC}(2, -2, 0)$ é um vetor diretor da reta VC .

$\vec{n}(1, -1, 0)$ é um vetor normal ao plano ABC .

Como $\overline{VC} = 2\vec{n}$, $\overline{VC}$ é colinear com $\vec{n}$. Logo, a reta VC é perpendicular ao plano ABC .

21.6. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \frac{\overline{CA} \times \overline{CB}}{2} \times \overline{CV}$

$$\overline{CA} = \|\overline{CA}\| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{CB} = \|\overline{CB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\overline{CV} = \|\overline{VC}\| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{pirâmide}} &= \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{2} \times 2\sqrt{2} = \\ &= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{36}}{3} = \\ &= \frac{2 \times 6}{3} = 4 \end{aligned}$$

22. $A(3, 0, 0)$

$$r: (x, y, z) = (0, 6, 0) + k(0, 1, -2), k \in \mathbb{R}$$

22.1. $A(3, 0, 0) \in \alpha$, $B(0, 6, 0) \in r$

Como α contém a reta r , $B \in \alpha$.

Assim, $\overline{AB}(-3, 6, 0)$ é um vetor diretor de α .

$\vec{r}(0, 1, -2)$ é um vetor diretor da reta r .

Portanto, α passa em $A(3, 0, 0)$ e tem a direção dos vetores $\overline{AB}(-3, 6, 0)$ e $\vec{r}(0, 1, -2)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a α .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 6, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 1, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{1}{2}b \end{cases}$$

$\vec{n}\left(2b, b, \frac{b}{2}\right)$. Para $b = 2$ obtemos $\vec{n}(4, 2, 1)$ que é um

vetor normal a α .

$$\alpha: 4(x-3) + 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 12 = 0$$

22.2. $s: x = 1 \wedge y = 2$

Substituindo na equação de α temos

$$4 \times 1 + 2 \times 2 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 4$$

Logo, $C(1, 2, 4)$, pelo que tem cota 4.

22.3. A base $[OAB]$ da pirâmide é um triângulo retângulo em O contido no plano xOy . Logo, a altura da pirâmide relativa a esta base é a cota de C .

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times \text{cota } C = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 4 = 12$$

22.4. $\vec{r}(0, 1, -2)$ é normal ao plano β .

a) $\beta: 0(x-0) + 1(y-0) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - 2z = 0$$

b) A origem O pertence a β

O ponto $A(3, 0, 0)$ pertence a β pois $0 - 2 \times 0 = 0$.

Logo, a reta AO , ou seja, o eixo Ox está contido no plano β .

23. $\alpha: 2x + 3y + 6z + 1 = 0$

$$V\left(\frac{5}{3}, 2, 1\right)$$

$$S: (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 50$$

23.1. A reta VC passa em V e é perpendicular a α . Logo, $\vec{n}(2, 3, 6)$, por ser um vetor normal a α , é um vetor diretor de VC .

$$VC: (x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, 2, 1\right) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} + 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 1 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

23.2. C é a interseção de VC com α .

C é o ponto $\left(\frac{5}{3} + 2k, 2 + 3k, 1 + 6k\right)$ para k tal que

$$2\left(\frac{5}{3} + 2k\right) + 3(2 + 3k) + 6(1 + 6k) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k + 9k + 36k + \frac{10}{3} + 6 + 6 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49k = -\frac{49}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$C\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}, 2 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right), 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$C(1, 1, -1)$$

$$\begin{aligned} 23.3. \overline{VC} &= \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + (2 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{9} + 1 + 4} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

23.4. Centro da superfície esférica: $A(3, 4, 5)$

Substituindo nas equações paramétricas de VC , vem:

$$\begin{cases} 3 = \frac{5}{3} + 2k \\ 4 = 2 + 3k \\ 5 = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 5 + 6k \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{4}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

Logo, o centro da superfície esférica pertence a VC .

23.5. Seja r o raio da base do cone.

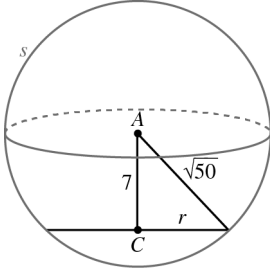
$A(3, 4, 5)$ é o centro da superfície esférica.

A distância de A a α é $\overline{AC}$, dado que o ponto A pertence à reta VC perpendicular a α .

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{49} = 7$$

O raio da superfície esférica S é $\sqrt{50}$.

Temos, então:



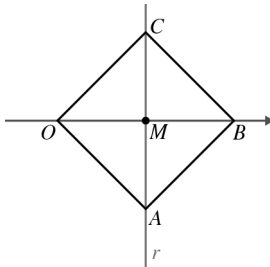
(O desenho não está à escala)

$$r^2 + 7^2 = (\sqrt{50})^2 \Leftrightarrow r^2 = 50 - 49 \Leftrightarrow r = 1$$

Portanto, o cone tem altura $\frac{7}{3}$ e raio da base igual a 1.

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{9}$$

24. $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$



Seja M o centro do quadrado $[OABC]$.

O, M e B pertencem ao plano α que passa em O e é perpendicular a r .

$\vec{r}(0, 1, 1)$ é um vetor perpendicular a α .

$$\alpha: 0(x-0) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow y + z = 0$$

M é o ponto de interseção de r com α .

Todo o ponto de r é da forma $R(1, k, k)$.

Como $R(1, k, k)$ pertence a α vem:

$$k + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Logo, $M(1, 0, 0)$.

$$B = M + \overrightarrow{OM} = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = 1$$

A e B são os pontos da reta r cuja distância a M é igual a 1.

$$M(1, 0, 0) \text{ e } R(1, k, k)$$

$$\overrightarrow{MR}(0, k, k)$$

$$\|\overrightarrow{MR}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + k^2} = 1 \Leftrightarrow 2k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$A\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), C\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } B(2, 0, 0)$$

25.1. $B(2, y, 2)$ pertence ao plano $\alpha: y + z - 2 = 0$.

$$\text{Então, } y + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 0. \text{ Logo, } B(2, 0, 2).$$

$$D(0, y, 0) \text{ pertence ao plano } \alpha: y + z - 2 = 0.$$

$$\text{Então, } y + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2. \text{ Logo, } D(0, 2, 0).$$

As diagonais de um retângulo bissectam-se.

Portanto, E é o ponto médio de $[BD]$:

$$E\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right), \text{ ou seja, } E(1, 1, 1)$$

25.2. $E(1, 1, 1)$

Como E é a projeção ortogonal de V no plano da base, a reta EV é perpendicular ao plano $\alpha: y + z - 2 = 0$. Portanto,

$\vec{n}(0, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta EV .

$$EV: (x, y, z) = (1, 1, 1) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

$$EV: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + k \end{cases}$$

25.3. $A(0, 0, z)$ pertence ao plano $\alpha: y + z - 2 = 0$.

$$\text{Logo, } 0 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2, \text{ pelo que } A(0, 0, 2).$$

$$A(0, 0, 2), B(2, 0, 2) \text{ e } D(0, 2, 0).$$

$$\overrightarrow{AB}(2, 0, 0); \|\overrightarrow{AB}\| = 2$$

$$\overrightarrow{AD}(0, 2, -2); \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

Seja h a altura da pirâmide.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \times k$$

$$8 = \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 = 4\sqrt{2}h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{24}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt{2}$$

Como V pertence à reta EV é da forma $(1, 1+k, 1+k)$ e

$$\|\overrightarrow{EV}\| = 3\sqrt{2}.$$

$$\overrightarrow{EV}(1-1, 1+k-1, 1+k-1), \text{ logo } \overrightarrow{EV}(0, k, k)$$

$$\|\overrightarrow{EV}\| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + k^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2k^2 = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 3$$

Como $1-3=-2$ e $1+3=4$:

$$V(1, -2, -2) \text{ ou } V(1, 4, 4)$$

Dado que V tem cota positiva, então $V(1, 4, 4)$.

25.4. $V(1, 4, 4)$

O vetor $\vec{n}(0, 1, 1)$ é normal ao plano por ser normal a α

$$1(y-4) + 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow y + z - 8 = 0$$

25.5. $\beta: 3x - y + z = 3$

a) $\vec{n}(0, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano α .

$$\vec{u}(3, -1, 1) \text{ é um vetor normal ao plano } \beta.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (0, 1, 1) \cdot (3, -1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

Logo, α e β são perpendiculares.

25. $\alpha \equiv ABC: y + z - 2 = 0$

$$B(2, y, 2), A(0, 0, z) \text{ e } D(0, y, 0)$$

b) $B(2, 0, 2)$ e $D(0, 2, 0)$

$$\overrightarrow{BD}(-2, 2, -2)$$

$$BD: (x, y, z) = (2, 0, 2) + k(-2, 2, -2), k \in \mathbb{R}$$

O ponto de interseção de BD com β é da forma

$$(2-2k, 2k, 2-2k).$$

Como este ponto pertence a β : $3x - y + z = 3$:

$$3(2-2k) - 2k + (2-2k) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6k - 2k - 2k + 6 + 2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10k = -5 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } k = \frac{1}{2}, 2k = 1 \text{ e } 2-2k = 1.$$

Portanto, BD intersesta β no ponto $(1, 1, 1)$, ou seja, no ponto E .

26. $A(-1, -1, -2)$, $B(1, 1, -2)$ e $C(-2, 4, -2)$

$$\overrightarrow{BF} = 6$$

26.1. Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano ABC .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 5, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ -a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + b = 0 \\ a = 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}(0, 0, c)$ é a família de vetores normais ao plano ABC

Para $c = 1$, $\vec{n}(0, 0, 1)$.

$\overrightarrow{BF}$ é colinear com $\vec{n}(0, 0, 1)$ e tem norma 6.

Logo, $\overrightarrow{BF}(0, 0, 6)$ dado que a cota de F é maior do que a cota de B .

$$F = B + \overrightarrow{BF} = (1, 1, -2) + (0, 0, 6) = (1, 1, 4)$$

$$F(1, 1, 4) \text{ e } C(-2, 4, -2)$$

$$\overrightarrow{CF}(3, -3, 6)$$

Reta CF :

$$(x, y, z) = (1, 1, 4) + k(3, -3, 6), k \in \mathbb{R}$$

$$L(-8, 10, -14) \in CF ?$$

$$(-8, 10, -14) = (1, 1, 4) + k(3, -3, 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 = 1 + 3k \\ 10 = 1 - 3k \\ -14 = 4 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -9 \\ 3k = -9 \\ 6k = -18 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3$$

O sistema é possível. Logo, o ponto L pertence à reta CF .

26.2. $A(-1, -1, -2)$, $F(1, 1, 4)$ e $C(-2, 4, -2)$

$$\overrightarrow{AF}(2, 2, 6) \text{ e } \overrightarrow{AC}(-1, 5, 0)$$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano AFC .

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 2, 6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 5, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 6c = 0 \\ -a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + b + 3c = 0 \\ a = 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = 5b \end{cases}$$

$\vec{n}(5b, b, -2b)$. Para $b = 1$ obtemos $\vec{n}(5, 1, -2)$ que é

um vetor normal ao plano AFC .

$$AFC: 5(x-1) + (y-1) - 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + y - 2z + 2 = 0$$

26.3. O lugar geométrico dos pontos $S(x, y, z)$ tais que

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \text{ é a superfície esférica de diâmetro } [AB].$$

27. $EFG: x - 2y - 2z + 18 = 0$

$$C(4, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{EH}(2, 2, -1) \text{ e } \overrightarrow{GH}(\lambda, 1, \lambda)$$

27.1. $\vec{n}(1, -2, -2)$ é um vetor normal ao plano EFG .

Logo, $\vec{n}$ é um vetor diretor da reta CG .

$$CG: (x, y, z) = (4, 1, 1) + k(1, -2, -2), k \in \mathbb{R}$$

27.2. G é a interseção da reta CG com o plano EFG .

Os pontos da reta CG são da forma:

$$(4+k, 1-2k, 1-2k)$$

O ponto de CG que pertence ao plano EFG obtém-se para o valor de k tal que:

$$(4-k) - 2(1-2k) - 2(1-2k) + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k + 18 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

$$G(4-2, 1-2 \times (-2), 1-2 \times (-2)) = G(2, 5, 5)$$

27.3. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GH} = 0 \Leftrightarrow (2, 2, -1) \cdot (\lambda, 1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\lambda + 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

27.4. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} =$

$$= (-2, 1, -2) + (-2, -2, 1) =$$

$$= (-4, -1, -1)$$

$$A = C + \overrightarrow{CA} = (4, 1, 1) + (-4, -1, -1) =$$

$$= (0, 0, 0)$$

Logo, A é a origem do referencial.

28. $A(2, 3, -1)$ e $E(1, 2, 4)$

$$ABC: 2x - y + 2z + 1 = 0$$

28.1. $P(x, 0, 0)$

$$\overrightarrow{AP}(x-2, -3, 1)$$

$$\overrightarrow{OA}(2, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow (x-2, -3, 1) \cdot (2, 3, -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

$$P(7, 0, 0)$$

28.2. F é a interseção da reta EF com o plano ABC .

$\vec{n}(2, -1, 2)$ é um vetor normal ao plano ABC . Logo, $\vec{n}$

é um vetor diretor da reta EF .

$$EF: (x, y, z) = (1, 2, 4) + k(2, -1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos de EF são da forma:

$$(1+2k, 2-k, 4+2k), k \in \mathbb{R}$$

O ponto de EF que pertencem ao plano ABC obtém-se para k tal que:

$$2(1+2k) - (2-k) + 2(4+2k) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k + k + 4k + 9 = 0 \Leftrightarrow 9k = -9 \Leftrightarrow k = -1$$

Portanto, F tem coordenadas $(1-2, 2+1, 4-2)$ ou

$$F(-1, 3, 2).$$

Avaliação 2

Pág. 142

1. $(x, y, z) = (1, m, -2) + k(2, -1, m), k \in \mathbb{R}$
 $\alpha: 3mx + 3y + 3z + 1 = 0$
 $(2, -1, m)$ é um vetor diretor da reta.
 $(3m, 3, 3)$ é um vetor normal ao plano α .
 $(2, -1, m) \cdot (3m, 3, 3) = 0 \Leftrightarrow 6m - 3 + 3m = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$
 Resposta: (A)
2. $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + k(1, 1, 0), k \in \mathbb{R}$
 $\theta: (x, y, z) =$
 $= (1, 1, -1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $\vec{r}(1, 1, 0)$ é um vetor diretor de r
 Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal a θ .

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -a \end{cases}$$

 Logo, $\vec{n}(a, -a, -a)$. Para $a = 1$, obtemos o vetor
 $\vec{n}(1, -1, -1)$ é o vetor normal a θ .
 $\vec{n} \cdot \vec{r} = (1, -1, -1) \cdot (1, 1, 0) = 1 - 1 = 0$
 Logo, a reta r é paralela ao plano θ .
 $A(1, 0, 0) \in r$
 $\theta: 1(x-1) - 1(y-1) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y - z - 1 = 0$
 $1 - 0 - 0 - 1 = 0$ (verdadeiro). Logo, $A \in \theta$.
 A reta r é paralela ao plano θ e existe um ponto de r que pertence a θ . Assim, a reta r está contida em θ .
 Resposta: (B)
3. $r: x = -1 \wedge z = 1$
 $\vec{r}(0, 1, 0)$ é um vetor diretor de r . Logo, $\vec{r}$ é um vetor normal ao plano $\alpha: ax + by + cz + d = 0$.
 Portanto, $\vec{r}(0, 1, 0)$ é colinear com $\vec{n}(a, b, c)$.
 Logo, $a = 0 \wedge c = 0 \wedge b \neq 0$.
 Resposta: (D)
4. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$
 Centro: $(1, 0, 2)$; raio: 3
 Se $\overline{AB} = 6 = 2 \times \text{raio}$, então $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica, pelo que a reta r passa no seu centro.
 Resposta: (B)
5. $\alpha: x = z \Leftrightarrow x - z = 0$
 $\vec{n}(1, 0, -1)$ é um vetor normal a α .
 Qualquer vetor com a direção de α é perpendicular a $\vec{n}$:
 (A) $(1, 1, 0) \cdot (1, 0, -1) = 1 + 0 - 0 \neq 0$
 (B) $(0, 1, 1) \cdot (1, 0, -1) = 0 + 0 - 1 \neq 0$
 (C) $(1, 0, 1) \cdot (1, 0, -1) = 1 + 0 - 1 = 0$
 $(1, 1, 1) \cdot (1, 0, -1) = 1 + 0 - 1 = 0$
 Resposta: (C)

6. $A(5, 4, 0)$ e $B(0, 4, 3)$
 Todos os planos passam na origem
 (A) $12 \times 5 - 15 \times 4 + 20 \times 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (V)
 $12 \times 0 - 15 \times 4 + 20 \times 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (V)
 Resposta: (A)
7. $A(-2, 1, -2); \overrightarrow{OA}(-2, 1, -2)$
 $C(-2, -2, 1); \overrightarrow{OC}(-2, -2, 1)$
 $D(-1, 2, 2); \overrightarrow{OD}(-1, 2, 2)$
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = (-3, 3, 0)$
 Como $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AE}$, temos:
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} = (-3, 3, 0)$
 $\overrightarrow{OE}(-3, 3, 0)$ é colinear com o vetor $(3, -3, 0)$.
 A reta dada passa em C e é paralela a AE , logo essa reta passa no vértice F .
 Resposta: (C)

Pág. 143

8. $ABC: 2x + y - 2z + 6 = 0$
 $A(0, 0, z)$ e $V(7, 8, -4)$
 - 8.1. A pertence ao plano ABC :
 $0 + 0 - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow z = 3$
 $A(0, 0, 3)$
 - 8.2. a) O vetor $\vec{n}(2, 1, -2)$, normal ao plano ABC , é um vetor diretor da reta VE .
 $VE: (x, y, z) = (7, 8, -4) + k(2, 1, -2), k \in \mathbb{R}$
 - b) E é o ponto de VE que pertence a ABC .
 Todo o ponto de VE é da forma:
 $(7 + 2k, 8 + k, -4 - 2k), k \in \mathbb{R}$
 Como E pertence ao plano ABC , temos:
 $2(7 + 2k) + 8 + k - 2(-4 - 2k) + 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4k + k + 4k + 14 + 8 + 8 + 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9k = -36 \Leftrightarrow k = -4$
 $E(7 - 8, 8 - 4, -4 + 8) = E(-1, 4, 4)$
 - 8.3. Centro: $V(7, 8, -4)$
 Raio: $\overline{OV} = \sqrt{49 + 64 + 16} = \sqrt{129}$
 $(x-7)^2 + (y-8)^2 + (z+4)^2 = 129$
9. $r: (x, y, z) = (0, 0, -1) + k(-1, 2, 1), k \in \mathbb{R}$
 $s: (x, y, z) = (1, 2, -1) + k(1, 2, 0), k \in \mathbb{R}$
 - 9.1. As retas r e s não são paralelas dado que os vetores $(-1, 2, 1)$ e $(1, 2, 0)$ não são colineares.
 $(0, 0, -1) \in r$
 $(0, 0, -1) \in s$?
 $(0, 0, -1) = (1, 2, -1) + k(1, 2, 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + k \\ 0 = 2 + 2k \\ -1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow k = -1$$

 O ponto $(0, 0, -1) \in s$, sendo obtido para $k = -1$.
 Portanto as retas r e s são concorrentes em $(0, 0, -1)$.

9.2. Trata-se do plano α que passa em $(0, 0, -1)$ e tem a direção dos vetores $\vec{r}(-1, 2, 1)$ e $\vec{s}(1, 2, 0)$.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano α .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 2, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2b + c = 0 \\ a = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b \\ a = -2b \end{cases} \end{aligned}$$

$\vec{n}(-2b, b, -4b)$. Para $b = -1$, obtemos $\vec{n}(2, -1, 4)$

que é um vetor normal ao plano α .

$$\alpha: 2(x-0) - 1(y-0) + 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + y - 4z - 4 = 0$$

9.3. $I(0, 0, -1)$ e $A(-3, 6, 2)$

$$\text{Ponto médio de } IA: M\left(-\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{IA}(-3, 6, 3)$$

Plano mediador de $[IA]$:

$$\theta: -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + 6\left(y - 3\right) + 3\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + 6y + 3z - \frac{9}{2} - 18 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + 6y + 3z - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - z + 8 = 0$$

Todo o ponto da reta s é da forma $(1+k, 2+2k, -1)$.

O ponto de s que pertence ao plano θ obtém-se para k tal que:

$$1+k-2(2+2k)+1+8=0 \Leftrightarrow -3k+6=0 \Leftrightarrow k=2$$

$$B(1+2, 2+4, -1) = B(3, 6, -1)$$

10. $C(2, -2, 0)$; $ACB: 3x+z=6$ e $\overline{CA} \cdot \overline{CD} = -2,5$

10.1. a) $E(0, y, 0)$

$$3(x-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x+z=0$$

b) Trata-se do plano mediador de $[EC]$ que é o plano perpendicular ao eixo Ox que passa no ponto médio de $[EC]$ cuja abscissa é $\frac{2}{2}=1$.

Logo, a equação do plano é $x=1$.

c) $[OECB]$ é um quadrado de lado $\overline{EC}=2$.

$$E(0, -2, 0)$$

$\vec{n}(3, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano ACB . Portanto,

$\vec{n}$ é um vetor diretor de qualquer reta perpendicular a ACB :

$$(x, y, z) = (0, -2, 0) + k(3, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

10.2. $P(1+\sin \alpha, \tan \alpha - 1, \cos \alpha)$

$$B(2, 0, 0) \text{ e } E(0, -2, 0)$$

Centro de superfície esférica: $M(1, -1, 0)$

$$\text{Raio da superfície esférica: } r = \overline{ME} = \sqrt{1^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Equação da superfície esférica: } (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2$$

Como P pertence à superfície esférica, temos:

$$(1+\sin \alpha - 1)^2 + (\tan \alpha - 1 + 1)^2 + \cos^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \tan^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 2 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = -1 \vee \tan \alpha = 1$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos $\tan \alpha = 1$, donde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e

$$P\left(1+\sin \frac{\pi}{4}, \tan \frac{\pi}{4}-1, \cos \frac{\pi}{4}\right).$$

$$P\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } P\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

10.3. $C(2, -2, 0)$

A projeção de A no plano Oxy é o centro do quadrado $[OECB]$. Logo, o ponto A tem abscissa 1 e ordenada -1 .

$$A(1, -1, z) \text{ pertence ao plano } 3x+z=6$$

Então, $3+z=6 \Leftrightarrow z=3$, pelo que $A(1, -1, 3)$.

Assim, a pirâmide $[OECBA]$ tem altura 3 e área da base

$$2^2=4 \text{ pelo que o seu volume é } V_1 = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4.$$

Para determinar o volume da pirâmide $[OECBD]$ precisamos de determinar a cota de D .

$$A(1, -1, 3), C(2, -2, 0), D(1, -1, z) \text{ e}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CD} = -2,5.$$

$$\overline{CA}(-1, 1, 3) \text{ e } \overline{CD}(-1, 1, z)$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CD} = -2,5 \Leftrightarrow 1+1+3z = -2,5 \Leftrightarrow 3z = -4,5 \Leftrightarrow z = -1,5$$

Logo, a altura da pirâmide $[OECBD]$ é 1,5 e o seu volume é

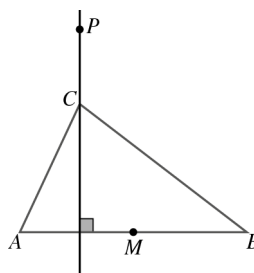
$$V_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 1,5 = 2, \text{ pelo que o volume do octaedro é}$$

$$V_1 + V_2 = 4 + 2 = 6.$$

Avaliação global

Pág. 144

1.



O lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{AB} \cdot \overline{CP} = 0$ é a reta perpendicular a AB que passa em C .

Resposta: (C)

2.

$$ACD: 2x+2y+z=4$$

$$A(x, 0, 0): 2x=4 \Leftrightarrow x=2, \text{ logo } A(2, 0, 0).$$

$$C(0, y, 0): 2y=4 \Leftrightarrow y=2, \text{ logo } C(0, 2, 0).$$

$$D(0, 0, z): z=4, \text{ logo } D(0, 0, 4).$$

$$V = 2 \times 2 \times 4 = 6$$

Resposta: (A)

3. $\alpha: x - 2y + z = 1$
 $r: (x, y, z) = (m, -1, m) + k(1, 1, n), k \in \mathbb{R}$

Ponto de α com $x = 2$ e $y = 0$:

$$2 - 0 + z = 1 \Leftrightarrow z = -1$$

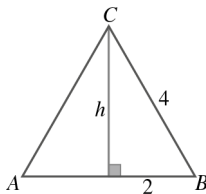
O ponto $(2, 0, -1)$ pertence à reta r .

$$(2, 0, -1) = (m, -1, m) + k(1, 1, n), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m + k \\ 0 = -1 + k \\ -1 = m + kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m + 1 \\ k = 1 \\ -1 = m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ -1 = 1 + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \\ n = -2 \end{cases}$$

Resposta: (C)

4. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 8$
 $\overline{AB} \times \frac{1}{2} \overline{AB} = 8 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{AB} = 4$



$$h^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \sqrt{12} \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Resposta: (B)

5. $S: (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3$
 $\alpha: z = 3$
 $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3 \wedge z = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (3-2)^2 = 3 \wedge z = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \wedge z = 3$

Circunferência de centro $(2, 2, 3)$ e raio $\sqrt{2}$ contida no plano $z = 3$.

Resposta: (C)

Pág. 145

6. O vetor $\vec{e}_2(0, 1, 0)$ é normal ao plano xOz .
 O vetor $\vec{r}(1, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta r .
 $\vec{e}_2 \cdot \vec{r} = (0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$. Logo, como $\vec{e}_2 \perp \vec{r}$, a
 reta r é paralela ao plano xOz .

7. $A(3, 2)$ e $B(x, 0)$

7.1. $m_{AB} = \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$
 $AB: y - 2 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 5$

7.2. $B(x, 0)$ é um ponto da reta $y = -x + 5$.
 Logo, $0 = -x + 5 \Leftrightarrow x = 5$ e $B(5, 0)$.

7.3. $C(0, y)$ e $B(5, 0)$
 $m_{AB} = -1$

$$m_{BC} = \frac{5-0}{0-y} = -\frac{5}{y}$$

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Leftrightarrow -1 \times \left(-\frac{5}{y}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{5}{y} = -1 \Leftrightarrow y = -5$$

$$C(0, -5)$$

8. $C(6, 4)$ e $A(9, 0)$

8.1. Seja $P(x, y)$ um ponto da reta t .

$$\overline{AP} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (x-9, y) \cdot (-3, 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + 27 + 4y = 0 \Leftrightarrow 4y = 3x - 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{27}{4}$$

8.2. Centro da circunferência: $C(6, 4)$

$$\text{Raio da circunferência: } r = \|\overline{AC}\| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\text{Equação da circunferência: } (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$$

8.3. Área de um setor circular = $\frac{\alpha r^2}{2}$

$$\frac{25\pi}{12} = \frac{\alpha \times 25}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \|\overline{CA}\| \|\overline{CB}\| \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$= 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

9. $A(6, 0, 0)$

$$\alpha: 3x - 4y + 2z = 18$$

9.1. $DE: y = 0 \wedge z = 6$

$$P(x, 0, 6)$$

Como $P \in \alpha$, vem:

$$3x + 2 \times 6 = 18 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

$$P(2, 0, 6)$$

$$EF: x = 6 \wedge z = 6$$

$$Q(6, y, 6)$$

Como $Q \in \alpha$, vem:

$$18 - 4y + 12 = 18 \Leftrightarrow y = 3$$

$$Q(6, 3, 6)$$

$$\overline{AQ}(0, 3, 6) \text{ e } \overline{AP}(-4, 0, 6)$$

$$\cos(\widehat{AP, AQ}) = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\|\overline{AP}\| \|\overline{AQ}\|} =$$

$$= \frac{(0, 3, 6) \cdot (-4, 0, 6)}{\sqrt{9+36} \sqrt{16+36}} = \frac{36}{\sqrt{45} \sqrt{52}} =$$

$$= \frac{36}{3\sqrt{5} \times 2\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\widehat{AP} = \arccos \frac{6}{\sqrt{65}} \approx 42^\circ$$

9.2. $\vec{n}(3, -4, 2)$ é um vetor diretor de s .

$$E(6, 0, 6)$$

Por exemplo:

$$s: (x, y, z) = (6, 0, 6) + k(3, -4, 2), k \in \mathbb{R}$$