

Atividade de diagnóstico

Pág. 148

1. $u_n = 2n - 3$

1.1. $u_n = 115 \Leftrightarrow 2n - 3 = 115 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n = 118 \Leftrightarrow n = 59$

A sequência tem 59 termos.

1.2. $u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3, u_4 = 5$ e $u_5 = 7$

1.3. $u_{21} = 2 \times 21 - 3 = 42 - 3 = 39$

1.4. $u_n = 96 \Leftrightarrow 2n - 3 = 96 \Leftrightarrow 2n = 99 \Leftrightarrow n = \frac{99}{2} \notin \mathbb{N}$

2.1. a) $3n + 5$ b) $\frac{n^2}{n+1}$

2.2. $u_1 = 8, u_2 = 11, u_3 = 14$ e $u_4 = 17$

3.1. $u_1 = 2^{2-1} = 2; u_2 = 2^{2-2} = 2^0 = 1$

$u_3 = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}; u_4 = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Logo, o termo geral pode ser $u_n = 2^{2-n}$.

3.2. a) $u_n = 2^{2-n}; u_{10} = 2^{2-10} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$

b) $u_{n+1} = 2^{2-(n+1)} = 2^{2-n-1} = 2^{1-n}$

Pág. 149

4.1. a) $[-6, -1]$ e em $[2, 6]$

b) $[-1, 4]$

4.2.

x	-6		-1		2		4		6
$f(x)$	-3	$\nearrow$	4	$\rightarrow$	-2	$\rightarrow$	-2	$\nearrow$	0

4.3. f é crescente em $[-6, -1]$ e em $[4, 6]$ e é decrescente em $[-1, 2]$.

5.1. a) Máximo absoluto: 6

b) Mínimo absoluto: não existe

5.2. A função é limitada, porque $-5 < g(x) \leq 6$, qualquer que seja $x \in D_g$.

Pág. 150

Atividade inicial 1

1. $D_f' =]-3, 3]$

2.1. $] -\infty, -3]$

2.2. $[3, +\infty[$

3. -5 é minorante de f e 5 é majorante de f , logo $\forall x \in D_f, -5 \leq f(x) \leq 5$.4.1. Máximo absoluto de f : 34.2. Mínimo absoluto de f : não existe5. f é decrescente em $[-3, 0]$ e em $]1, 4[$.

Pág. 152

1. $A = [-3, 0] \cup \{2, 5\}$

1.1. a) 5 e 6, por exemplo

b) -4 e -3, por exemplo

c) $[5, +\infty[$

d) $] -\infty, -3]$

1.2. Mínimo de A : -3; máximo de A : 51.3. O conjunto A tem minorantes e majorantes.Logo, A é limitado.1.4. Por exemplo, $B = [-4, +\infty[$.

2.

	Majorantes	Minorantes	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
2.1.	$[2, +\infty[$	$] -\infty, 1]$	2	1	2	1
2.2.	$[2, +\infty[$	$] -\infty, 1]$	2	1	não tem	1
2.3.	$[6, +\infty[$	$] -\infty, -5]$	6	-5	6	não tem
2.4.	$[6, +\infty[$	$\emptyset$	6	não tem	6	não tem
2.5.	$\emptyset$	$] -\infty, 1]$	não tem	1	não tem	1
2.6.	$\emptyset$	$\emptyset$	não tem	não tem	não tem	não tem
2.7.	$\emptyset$	$] -\infty, 3]$	não tem	3	não tem	3

Pág. 153

3.1. $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$ e $a_5 = 32$

3.2. $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 30$

3.3. $c_1 = -1, c_2 = -3, c_3 = -5, c_4 = -7$ e $c_5 = -9$

3.4. $d_1 = 1, d_2 = -\frac{1}{2}, d_3 = \frac{1}{3}, d_4 = -\frac{1}{4}$ e $d_5 = \frac{1}{5}$

3.5. $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = 5$

3.6. $f_1 = 0, f_2 = 2, f_3 = 0, f_4 = 2$ e $f_5 = 0$

4. $u_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

4.1. a) $u_1 = 0$

b) $u_2 = \frac{3}{2}$

c) $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$

4.2. $u_n = 9,9 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 1}{n} = 9,9 \Leftrightarrow n^2 - 9,9n - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{9,9 \pm \sqrt{9,9^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{9,9 \pm \sqrt{102,01}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{9,9 \pm 10,1}{2} \Leftrightarrow n = 10$

$u_{10} = 9,9$

4.3. $u_n = 6 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 1}{n} = 6 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \notin \mathbb{N}$

6 não é termo da sucessão.

Pág. 155

5.1. $u_n = 2n + 1$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) =$

$= 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$

 (u_n) é crescente.

5.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-2}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} =$

$= \frac{n^2 - n - n^2 - n + 2n + 2}{n(n+1)} = \frac{2}{n^2 + n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$

A sucessão (u_n) é crescente.

5.3. $u_n = 2^n$

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$$

A sucessão (u_n) é crescente.

6.1. $u_n = 1 - 3n$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - 3(n+1) - (1 - 3n) =$$

$$= 1 - 3n - 3 - 1 + 3n = -3 < 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

A sucessão (u_n) é decrescente.

6.2. $u_n = 1 + \frac{n+1}{n} =$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{n+2}{n+1} - 1 - \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

A sucessão (u_n) é decrescente.

Pág. 156

7.1. a) $a_n = 6 - \frac{1}{n}$

$$a_{n+1} - a_n = 6 - \frac{1}{n+1} - \left(6 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão (a_n) é monótona crescente.

b) $b_n = 6 + (-1)^n$

$$b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 5$$

$$b_2 > b_1 \text{ e } b_3 < b_2$$

A sucessão (b_n) é não monótona.

c) $c_n = \frac{n+3}{n+1}$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} =$$

$$= \frac{n^2 + 4n + n + 4 - n^2 - 3n - 2n - 6}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão (c_n) é monótona decrescente.

d) $d_n = (6-n)^2$

$$d_5 = 1, d_6 = 0, d_7 = 1$$

$$d_6 < d_5 \text{ e } d_7 > d_6$$

A sucessão (d_n) é não monótona.

7.2. $e_n = (-3)^n$

$$e_1 = -3, e_2 = 9, e_3 = -27$$

$$e_2 > e_1 \wedge e_3 < e_2$$

Logo, a sucessão (e_n) é não monótona.

7.3. $f_n = (-1)^n + 2n$

$$f_{n+1} - f_n = (-1)^{n+1} + 2(n+1) - (-1)^n - 2n =$$

$$= (-1)^n \times (-1) + 2n + 2 - (-1)^n - 2n =$$

$$= -(-1)^n - (-1)^n + 2 = -2(-1)^n + 2 =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 4 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$f_{n+1} - f_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão (f_n) é monótona crescente em sentido lato.

7.4. $g_n = 2n - 5$

$$g_{n+1} - g_n = 2(n+1) - 5 - (2n - 5) =$$

$$= 2n + 2 - 5 - 2n + 5 = 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1} - g_n > 0$$

A sucessão (g_n) é monótona crescente.

$$h_{n+1} - h_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1} - h_n > 0$$

(h_n) é monótona crescente.

Pág. 158

8.1. $a_n = -1 + \frac{1}{n}$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

$$-1 < -1 + \frac{1}{n} \leq 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 < a_n \leq 0$, logo a sucessão (a_n) é limitada.

8.2. $b_n = 3$

A sucessão (b_n) é constante, logo é limitada.

8.3. $c_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|c_n| = \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, |c_n| \leq 1$, (c_n) é limitada.

8.4. $d_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Se n é par:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < d_n \leq \frac{1}{2}$$

Se n é ímpar, $d_n = -1$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq d_n \leq \frac{1}{2}$.

A sucessão (d_n) é limitada.

$$8.5. \quad e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$e_{n+1} - e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} - e_n < 0$$

A sucessão (e_n) é monótona decrescente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq e_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq \frac{2}{3}$$

Por outro lado, como $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, vem que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < e_n \leq \frac{2}{3}$$

Logo, a sucessão (e_n) é limitada.

$$9. \quad u_n - n$$

O conjunto dos termos de (u_n) é $\mathbb{Z}^-$, ou seja, é não limitado.

Logo, (u_n) é uma sucessão não limitada.

$$10. \quad u_n = (-1)^n \times 3$$

$$u_n = \begin{cases} -3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -3 \leq u_n \leq 3$$

(u_n) é limitada

$$11. \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

$$-\frac{6}{u_n} \leq -3 \Leftrightarrow \frac{6}{u_n} \geq 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3u_n \leq 6 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

$$\Leftrightarrow u_n \leq 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2 \Rightarrow (u_n) \text{ é limitada.}$$

$$12.1. \quad u_n = 5 - \frac{3}{n+2}$$

$$0 < \frac{3}{n+2} \leq \frac{3}{1+2} \quad \left(\frac{3}{n+2} \text{ é decrescente} \right)$$

$$0 < \frac{3}{n+2} \leq 1$$

$$-1 \leq -\frac{3}{n+2} < 0$$

$$4 \leq 5 - \frac{3}{n+2} < 5$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq u_n < 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 5$$

$$12.2. \quad u_n = \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} \quad \left(\frac{1}{n+1} \text{ é decrescente} \right)$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$2 < 2 + \frac{1}{n+1} \leq 2 + \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_n \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{5}{2}$$

$$12.3. \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ define uma sucessão decrescente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \frac{1}{3}$$

Tomando $L = \frac{1}{3}$, temos $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq L$.

Pág. 160

$$13. \quad u_n = -2 + \frac{1}{n}$$

$$13.1. \quad u_p < -2 + 0,1 \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{p} < -2 + 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow p > 10$$

$$p = 11$$

$$13.2. \quad u_p < -2 + \varepsilon \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{p} < -2 + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} < \varepsilon \Leftrightarrow p\varepsilon > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{\varepsilon}$$

p é o menor inteiro maior que $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$13.3. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -2 + \frac{1}{n} > -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n > -2$$

Logo, -2 é um minorante de (u_n) .

Em 13.2. mostrou-se que, se $x > -2$, x não é minorante de (u_n) . Portanto, -2 é o maior dos minorantes de (u_n) .

$$u_n = -2 \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{n} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = 0$$

A equação é impossível, pelo que -2 não é termo de (u_n) e, portanto, não é mínimo de (u_n) . Logo, (u_n) não tem mínimo.

Pág. 161

14. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$8^n : 4^n = 2^n$$

• $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois

$$8^1 : 4^1 = 2^1 \Leftrightarrow 2 = 2$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H : 8^n : 4^n = 2^n$$

$$T : 8^{n+1} : 4^{n+1} = 2^{n+1} \quad \frac{2n+3}{-2n-2} \quad \frac{n+1}{2}$$

$$8^{n+1} : 4^{n+1} = (8^n \times 8) : (4^n \times 4) =$$

$$= (8^n : 4^n) \times (8 : 4) =$$

$$= 2^n \times 2 =$$

$$= 2^{n+1}$$

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$$

Por hipótese

Logo, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal em $\mathbb{N}$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, 8^n : 4^n = 2^n$.

15.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1^2 \Leftrightarrow 2-1=1 \quad (\text{verdadeira})$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$T: \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + \sum_{k=n+1}^{n+1} (2k-1) = \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1 = \\ &= n^2 + 2n + 1 = \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Assim, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é

universal, ou seja: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

15.2. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$P(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (2k) = n(n+1)$$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, dado que

$$\sum_{k=1}^1 (2k) = 1(1+1) \Leftrightarrow 2 \times 1 = 2 \quad (\text{verdadeiro})$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=1}^n (2k) = n(n+1)$$

$$T: \sum_{k=1}^{n+1} (2k) = (n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k) &= \sum_{k=1}^n (2k) + \sum_{k=n+1}^{n+1} (2k) = \\ &= n(n+1) + 2(n+1) = \\ &= (n+1)(n+2) \end{aligned} \quad \text{Por hipótese}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou

seja, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n (2k) = n(n+1)$.

15.3. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$P(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- $P(1)$ é uma proposição verdadeira, pois:

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = \frac{1^2 \times 2^2}{4} \Leftrightarrow 1^3 = \frac{4}{4} \Leftrightarrow 1=1$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$T: \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned} \quad \text{Por hipótese}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

16. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$,

$64^n - 1$ é múltiplo de 9

- $P(1)$ é verdadeira, dado que

$64^1 - 1 = 63$ e $63 = 9 \times 7$. Logo, $64^1 - 1$ é múltiplo de 9

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H: 64^n - 1$ é múltiplo de 9

$T: 64^{n+1} - 1$ é múltiplo de 9

$$\begin{aligned} 64^{n+1} - 1 &= 64^n \times 64 - 1 = \\ &= 64^n(63 + 1) - 1 = \\ &= 63 \times 64^n + 64^n - 1 = \\ &= 9 \times 7 \times 64^n + (64^n - 1) \end{aligned}$$

Como $9 \times 7 \times 64^n$ é múltiplo de 9 e, por hipótese, $64^n - 1$ é múltiplo de 9, então $64^{n+1} - 1$ é múltiplo de 9 por ser a soma de dois múltiplos de 9.

Logo, $P(n)$ é hereditária e, como $P(1)$ é verdadeira,

então, pelo princípio de indução matemática, é universal, ou seja,

$\forall n \in \mathbb{N}, 64^n - 1$ é múltiplo de 9

17.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$

$n^2 + 3n$ é um número par

- $P(1)$ é verdadeira porque

$1^2 + 3 \times 1 = 4$ pelo que é um número par

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$H: n^2 + n$ é um número par

$T: (n+1)^2 + n + 1$ é um número par

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + n + 1 &= \\ &= n^2 + 2n + 2 + n + 1 = \\ &= (n^2 + n) + 2n + 2 = \\ &= (n^2 + n) + 2(n+1) \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $n^2 + n$ é um número par e

$\forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1)$ é um número par, então

$(n+1)^2 + 2(n+1)$ é um número par por ser a soma de dois números pares.

Portanto, $P(n)$ é hereditária e como $P(1)$ é verdadeira, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 3n \text{ é um número par}$$

17.2. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$,

$$n < 3^n$$

• $P(1)$ é verdadeira porque $1 < 3^1$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: n < 3^n$$

$$T: n+1 < 3^{n+1}$$

$$n < 3^n \Rightarrow 3n < 3 \times 3^n \Rightarrow n+2n < 3^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 < 3^{n+1}, \text{ porque } \forall n \in \mathbb{N}, 1 < 2n$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, n < 3^n$.

Pág. 164

18. Em $\mathbb{N}$, se n é múltiplo de 5, então $n+1$ não é múltiplo de 5. Como $5n$ é múltiplo de 5, então $\forall n \in \mathbb{N}, 5n+1$ não é múltiplo de 5.

Se $5n+1$ é múltiplo de 5, $5(n+1)+1 = (5n+1)+5$ é múltiplo de 5 por ser a soma de múltiplos de 5.

Logo, a condição é hereditária.

19. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

• $P(0)$ é verdadeira pois:

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) \Leftrightarrow (0+1)^2 \Leftrightarrow (2 \times 0 + 1) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2; \quad T: \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = (n+2)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) &= \sum_{k=0}^n (2k+1) + \sum_{k=n+1}^{n+1} (2k+1) = \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = \\ &= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \end{aligned}$$

↙ Por hipótese

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou

seja, $\forall n \in \mathbb{N}_0, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.

Pág. 166

$$20. \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = \frac{1}{b_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$$

$$20.1. b_1 = 5, b_2 = \frac{1}{5}, b_3 = 5 \text{ e } b_4 = \frac{1}{5}$$

20.2. Por exemplo,

$$b_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{5} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{cases}$$

Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$b_n = 3n + 2$$

• $P(1)$ é verdadeira pois

$$b_1 = 3 \times 1 + 2 \Leftrightarrow 5 = 5$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: b_n = 3n + 2$$

$$T: b_{n+1} = 3(n+1) + 2$$

$$b_{n+1} = 3 + b_n \quad (\text{da fórmula de recorrência})$$

$$= 3 + 3n + 2 = \quad (\text{por hipótese})$$

$$= 3n + 3 + 2 = 3(n+1) + 2$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 3n + 2$.

Pág. 167

$$22.1. a_n = \frac{3-2n}{5}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3-2(n+1)}{5} - \frac{3-2n}{5} = \frac{3-2n-2-3+2n}{5} = -\frac{2}{5}$$

Como $a_1 = \frac{3}{5}$, (a_n) é uma progressão aritmética de razão

$$r = -\frac{2}{5} \text{ definida por } \begin{cases} a_1 = \frac{3}{5} \\ a_{n+1} = a_n - \frac{2}{5}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$22.2. v_n = \frac{n+1}{n}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Como $v_{n+1} - v_n$ não é constante, (v_n) não é uma progressão aritmética.

22.3. Pela definição, (w_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

Pág. 168

23.1. $a_1 = 12$ e $r = -1$

$$a_{100} = a_1 + (100-1) \times (-1) = 12 - 99 = -87$$

23.2. $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{3}$

$$a_{100} = a_1 + (100-1) \times \frac{1}{3} = -2 + \frac{99}{3} = 31$$

23.3. $a_1 = 0$ e $r = 1$

$$a_{100} = 0 + (100-1) \times 1 = 99$$

Pág. 169

24.1. $b_1 = 3$ e $r = -3$

$$b_n = 3 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow b_n = -3n + 6$$

24.2. $b_5 = -10$ e $b_{10} = -25$

Cálculo da razão:

$$b_{10} = b_5 + (10-5) \times r \Leftrightarrow -25 = -10 + 5r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5r = -15 \Leftrightarrow r = -3$$

$$b_n = b_5 + (n-5) \times (-3) \Leftrightarrow b_n = -10 - 3n + 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_n = -3n + 5$$

24.3. $b_2 + b_5 = 0$ e $r = \frac{1}{2}$

$$b_2 + b_5 = 0 \Leftrightarrow b_5 = -b_2$$

$$b_5 = b_2 + (5-2) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow -b_2 = b_2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2b_2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b_2 = -\frac{3}{4}$$

$$b_n = b_2 + (n-2) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow b_n = -\frac{3}{4} + \frac{n}{2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{n}{2} - \frac{7}{4}$$

24.4. $b_1 - b_2 = 3 \wedge b_4 + b_6 = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b_2 - b_1 - 3 \wedge b_4 + (b_4 + 2r) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = -3 \wedge 2b_4 - 6 = 2 \Leftrightarrow r = -3 \wedge b_4 = 4$$

$$b_n = b_4 + (n-4) \times (-3) \Leftrightarrow b_n = 4 - 3n + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_n = -3n + 16$$

25.1. $u_n = \frac{2n+1}{3}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3} - \frac{2n+1}{3} = \frac{2n+2+1-2n-1}{3} = \frac{2}{3}$$

 (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{3}$.

25.2. $100 < \frac{2n+1}{3} < 120 \Leftrightarrow 300 < 2n+1 < 360 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 299 < 2n < 359 \Leftrightarrow 150 \leq n \leq 179$$

$$179 - 150 + 1 = 30$$

Há 30 termos da sucessão entre 100 e 120.

Pág. 170

26.1. $a_n = \frac{\pi^n}{3}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\pi^{n+1}}{3}}{\frac{\pi^n}{3}} = \frac{3 \times \pi^{n+1}}{3 \times \pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi$$

 (a_n) é uma progressão geométrica de razão π .

26.2. $b_n = (\sqrt{3})^{n-1}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3})^{n-1}} = (\sqrt{3})^{n-n+1} = \sqrt{3}$$

 (b_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

26.3. $c_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2-(n+1)}}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-n-1-2+n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

 (c_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

27. $a_1 = -5$ e $a_4 = -40$

$$a_4 = a_3 \times r = (a_2 \times r) \times r = a_1 \times r \times r \times r$$

$$a_4 = a_1 \times r^3 \Leftrightarrow -40 = -5 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$$

Pág. 171

28.1. $u_1 = -4$ e $r = 2$

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$u_n = -4 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = -2^2 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = -2^{n+1}$$

28.2. $u_2 = \frac{1}{2}$ e $r = 2$

$$u_n = u_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-2} \Leftrightarrow u_n = 2^{-1} \times 2^{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2^{n-3}$$

28.3. $u_7 + u_6 = -36$ e $r = 3 \Leftrightarrow 3u_6 + u_6 = -36$ e $r = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4u_6 = -36 \text{ e } r = 3 \Leftrightarrow u_6 = -9 \text{ e } r = 3$$

$$u_n = u_6 \times r^{n-6} \Leftrightarrow u_n = -9 \times 3^{n-6} \Leftrightarrow u_n = -3^2 \times 3^{n-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = -3^{n-4}$$

Pág. 173

29.1. $u_n = 2n$

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{2 + 40}{2} \times 20 =$$

$$= 42 \times 10 = 420$$

29.2. $u_n = 2n - 1$

$$S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = \frac{1 + 199}{2} \times 100 =$$

$$= 100 \times 100 = 10\,000$$

29.3. $u_n = \frac{5n-1}{2}$

$$S_{35} = \frac{u_1 + u_{35}}{2} \times 35 = \frac{5-1}{2} + \frac{5 \times 35 - 1}{2} \times 35 =$$

$$= \frac{2+87}{2} \times 35 = \frac{89 \times 35}{2} = \frac{3115}{2}$$

29.4. $a_n = 2 - 3n$

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \times 40 = \frac{-1 + 2 \times 120}{2} \times 40 =$$

$$= -119 \times 20 = -2380$$

29.5. $b_n = \frac{n-1}{2}$

$$\sum_{n=10}^{20} b_n = \frac{b_{10} + b_{20}}{2} \times 11 = \frac{\frac{9}{2} + \frac{19}{2}}{2} \times 11 =$$

$$= \frac{14}{2} \times 11 = 7 \times 11 = 77$$

$$29.6. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$u_1 = 2$$

$$u_{20} = u_1 + (20-1) \times 1 = 2 + 19 = 21$$

$$u_{100} = u_1 + 99 \times 1 = 2 + 99 = 101$$

$$\sum_{n=20}^{100} u_n = \frac{u_{20} + u_{100}}{2} \times (100 - 20 + 1) = \frac{21 + 101}{2} \times 81 = 61 \times 81 = 4941$$

Pág. 175

30.1. Se a razão entre as áreas de dois triângulos consecutivos, t_{n+1} e t_n é $\frac{1}{4}$, então a razão entre as medidas dos lados dessestriângulos é $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.Logo, a sucessão (p_n) dos perímetros é uma progressãogeométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo:

$$p_1 = 3 \times 1 = 3$$

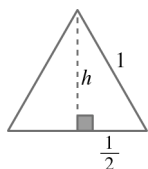
$$p_n = p_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow p_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow p_n = 3 \times 2^{1-n}$$

$$30.2. S_{10} = t_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}}$$

Calculemos t_1 :

$$h^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_1 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\text{Logo, } S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{\frac{3}{4}} \approx 0,58$$

$$30.3. S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$31.1. u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}; r = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = 2 \times \frac{1023}{1024} = \frac{1023}{512}$$

$$31.2. a_n = 3^{-n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)}}{3^{-n}} = 3^{-n-1+n} = \frac{1}{3} = r$$

$$\sum_{k=1}^8 3^{-k} = 3^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{6560}{6561} = \frac{3280}{6561}$$

$$31.3. u_3 = 208 \text{ e } u_5 = 3328$$

$$u_5 = u_3 \times r^2$$

$$3328 = 208 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = -4 \vee r = 4$$

Se $r = -4$:

$$u_8 = u_3 \times r^3 = 3328 \times (-4)^3 = -212\,992$$

$$S = u_8 \times \frac{1 \times (-4)^5}{1 - (-4)} = -212\,992 \times \frac{1 + 4^5}{5} = -43\,663\,360$$

Se $r = 4$:

$$u_8 = u_3 \times r^3 = 3328 \times 4^3 = 212\,992$$

$$S = u_8 \times \frac{1 - 4^5}{1 - 4} = 212\,992 \times \frac{1 - 4^5}{-3} = 72\,630\,272$$

Pág. 177

32.1. Minorantes: $]-\infty, 0]$; majorantes: $\emptyset$; máximo: não existe

Mínimo: 0

$$32.2. \frac{x+3}{2} \geq 1 \wedge \frac{3-x}{3} > 1 \Leftrightarrow x+3 \geq 2 \wedge 3-x > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \wedge -x > 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \wedge x < 0$$

$$B = [-1, 0[$$

Minorantes: $]-\infty, -1]$; majorantes: $[0, +\infty[$;

máximo: não tem; mínimo: -1

$$32.3. x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

Minorantes: $\emptyset$; majorantes: $\emptyset$; máximo: não tem; mínimo: não tem

$$33. u_n = (-1)^n \times \frac{n}{n+1}$$

$$33.1. u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = -\frac{3}{4} \text{ e } u_4 = \frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{13}{60}$$

$$33.2. a) u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}$$

$$b) u_{2n} = (-1)^{2n} \frac{2n}{1+2n} = \left[(-1)^2\right]^n \times \frac{2n}{1+2n} = 1^n \times \frac{2n}{1+2n} = \frac{2n}{1+2n}$$

$$33.3. u_{59} = (-1)^{59} \times \frac{59}{60} = -\frac{59}{60}$$

$$34.1. a_n = 2n^2 + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1)^2 + 1 - (2n^2 + 1) = 2n^2 + 4n + 2 + 1 - 2n^2 - 1 = 4n + 2 > 0$$

 $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$. Logo, (a_n) é crescente.

$$34.2. b_n = \frac{n-1}{2n}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n}{2n+2} - \frac{n-1}{2n} = \frac{2n^2 - 2n^2 + 2n - 2n + 2}{2n(2n+2)} = \frac{1}{n(2n+2)} > 0$$

 $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$. Logo, (b_n) é crescente.

$$35. \quad a_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq 5 \\ 10 & \text{se } n > 5 \end{cases}$$

$$\text{Se } n \leq 4, a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2.$$

$$\text{Se } n = 5, a_{n+1} - a_n = a_6 - a_5 = 10 - 10 = 0.$$

$$\text{Se } n > 5, a_{n+1} - a_n = 0.$$

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 0$. Logo, (a_n) é monótona

crescente em sentido lato.

$$36.1. \quad a_n = 1 - 2n$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 - 2(n+1) - (1 - 2n) = 1 - 2n - 2 - 1 + 2n =$$

$$= -2 < 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$. Logo, (a_n) é monótona decrescente.

$$36.2. \quad b_n = \frac{2-n}{n+1}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2-(n+1)}{n+1+1} - \frac{2-n}{n+1} = \frac{1-n}{n+2} - \frac{2-n}{n+1} =$$

$$= \frac{n-n^2+1-n-2n+n^2-4+2n}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n < 0$. Logo, (b_n) é monótona decrescente.

$$37.1. \quad a_n = 1 + (-1)^n$$

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0$$

$$a_2 > a_1 \text{ e } a_3 < a_2$$

Logo, (a_n) é não monótona.

$$37.2. \quad b_n = 4n + (-1)^n \times 2$$

$$b_{n+1} - b_n = 4(n+1) + (-1)^{n+1} \times 2 - (4n + (-1)^n \times 2) =$$

$$= 4n + 4 - (-1)^n \times 2 - 4n - (-1)^n \times 2 =$$

$$= 4 - 2 \times (-1)^n \times 2 = 4 - 4 \times (-1)^n =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 8 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n \geq 0$.

Logo, (b_n) é crescente em sentido lato.

$$37.3. \quad c_n = 4 - (3-n)^2$$

$$c_{n+1} - c_n = 4 - (3-(n+1))^2 - (4 - (3-n)^2) =$$

$$= -2(2-n)^2 + (3-n)^2 =$$

$$= -4 + 4n - n^2 + 9 - 6n + n^2 =$$

$$= -2n + 5$$

$$5 - 2n > 0 \Leftrightarrow 2n < 5 \Leftrightarrow n = 1 \vee n = 2$$

$$5 - 2n < 0 \Leftrightarrow n \geq 3$$

Logo, (c_n) é não monótona.

$$37.4. \quad d_n = (-1)^n - 2n$$

$$d_{n+1} - d_n = (-1)^{n+1} - 2(n+1) - [(-1)^n - 2n] =$$

$$= -(-1)^n - 2n - 2 - (-1)^n + 2n =$$

$$= -2 \times (-1)^n - 2 = \begin{cases} -4 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} - d_n \leq 0$.

Logo, (d_n) é decrescente em sentido lato.

$$38.1. \quad a_n = \frac{2}{n} + 3$$

$$0 < \frac{2}{n} \leq 2 \quad \left(\frac{2}{n} \text{ é decrescente} \right)$$

$$3 < \frac{2}{n} + 3 \leq 5$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3 < a_n \leq 5.$$

Logo, (a_n) é limitada.

$$38.2. \quad b_n = -2$$

(b_n) é constante. Logo, (b_n) é limitada.

$$38.3. \quad c_n = (-1)^n \times \frac{2}{n}$$

$$|c_n| = \frac{2}{n}$$

$$0 < \frac{2}{n} \leq 2 \text{ porque } \frac{2}{n} \text{ é decrescente}$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, |c_n| \leq 2$ pelo que (c_n) é limitada.

$$38.4. \quad e_n = \frac{2n+5}{n} = 2 + \frac{5}{n}$$

$$0 < \frac{5}{n} \leq 5 \quad \left(\frac{5}{n} \text{ é decrescente} \right)$$

$$2 < 2 + \frac{5}{n} \leq 2 + 5$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < e_n \leq 7$ pelo que (e_n) é limitada.

$$38.5. \quad f_n = -2 - \frac{1}{n^2}$$

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \left(\frac{1}{n^2} \text{ é decrescente} \right)$$

$$-1 \leq -\frac{1}{n^2} < 0$$

$$-3 \leq -2 - \frac{1}{n^2} < -2$$

$\forall n \in \mathbb{N}, -3 \leq f_n < -2$. Logo, (f_n) é limitada.

$$38.6. \quad g_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$n \curvearrowright n^2+1$ define uma sucessão crescente. Logo,

$n \curvearrowright \sqrt{n^2+1}$ é crescente e g_n é decrescente

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

$$0 < g_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < g_n < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, (g_n) é limitada.

$$38.7. \quad h_n = -\frac{3n}{n+1} = -\left(3 - \frac{3}{n+1}\right) \quad \frac{3n}{-3n-3} \quad \frac{n+1}{3}$$

$$h_n = -3 + \frac{3}{n+1}$$

$$0 < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{2} \quad \left(\frac{3}{n+1} \text{ é decrescente} \right)$$

$$-3 < -3 + \frac{3}{n+1} \leq -3 + \frac{3}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -3 < h_n \leq -\frac{3}{2}$$

Logo, (h_n) é limitada.

38.8. Se n é par:

$$0 < \frac{2}{n} \leq 1 \quad \left(\frac{2}{n} \text{ é decrescente} \right)$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq i_n \leq 1$ pelo que (i_n) é limitada.

39.1. $a_n = 2n - 1$

O conjunto dos números ímpares não é majorado. Logo, a sucessão (a_n) não é limitada.

39.2. $b_n = -n^2$

O conjunto dos quadrados perfeitos naturais não é majorado. Logo, o conjunto de termos de (b_n) não é minorado pelo que (b_n) é não limitada.

39.3. $c_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n > n$. Como $\mathbb{N}$ não é majorado (c_n) não é limitada.

39.4. O conjunto dos números primos não é limitado. Logo, (d_n) não é limitada.

40. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$ e $a_5 = 4$

Se $n > 5$

$$0 < \frac{3}{n} \leq \frac{3}{6} \quad \left(\frac{3}{n} \text{ é decrescente} \right)$$

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2}$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 4$ pelo que (a_n) é limitada.

41. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0 \wedge \frac{5}{2u_n} \geq 1$

$$u_n > 0 \wedge \frac{5}{2u_n} \geq 1 \Leftrightarrow u_n > 0 \wedge 5 \geq 2u_n \Leftrightarrow u_n > 0 \wedge u_n \leq \frac{5}{2}$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{5}{2}$ pelo que (u_n) é limitada.

42. $u_n = \frac{2-n}{n+2} = -1 + \frac{4}{n+2}$ $\frac{-n+2}{n+2} \begin{matrix} \frac{n+2}{-1} \end{matrix}$

$$0 < \frac{4}{n+2} \leq \frac{4}{3} \quad \left(\frac{4}{n+2} \text{ é decrescente} \right)$$

$$-1 < -1 + \frac{4}{n+2} \leq -1 + \frac{4}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1$$

Pág. 178

43.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• $P(1)$ é verdadeira:

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} \Leftrightarrow 1^2 = \frac{6}{6} \quad (\text{verdadeira})$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$T: \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \quad \text{Por hipótese} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[2n(n+2) + 3(n+2)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou

$$\text{seja, } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

43.2. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n}{n+1}$$

• $P(1)$ é verdadeira, dado que

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2 + k} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \quad (\text{verdadeira})$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n}{n+1}$$

$$T: \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + k} = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 + n+1} = \quad \text{Por hipótese} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n}{n+1}$$

43.3. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$

$9^n - 2^n$ é múltiplo de 7

• $P(1)$ é verdadeiro dado que $9^1 - 2^1 = 7$ é um múltiplo de 7.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: 9^n - 2^n \text{ é múltiplo de } 7; T: 9^{n+1} - 2^{n+1} \text{ é múltiplo de } 7$$

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 9 \times 9^n - 2 \times 2^n = (7+2) \times 9^n - 2 \times 2^n =$$

$$= 7 \times 9^n + 2 \times 9^n - 2 \times 2^n = 7 \times 9^n + 2(9^n - 2^n)$$

Logo, se por hipótese, $9^n - 2^n$ é múltiplo de 7, então $9^{n+1} - 2^{n+1}$ é múltiplo de 7 dado que o dobro de um múltiplo de 7 é um múltiplo de 7 e a soma de múltiplos de 7 é um múltiplo de 7. Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $9^n - 2^n$ é múltiplo de 7.

$$44. \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

44.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$, $a_n < 3$

• $P(1)$ é verdadeira porque $a_1 = 2$ logo, $a_1 < 3$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: a_n < 3$$

$$T: a_{n+1} < 3$$

$$a_n < 3 \Rightarrow \frac{2}{3}a_n < \frac{2}{3} \times 3 \Rightarrow \frac{2}{3}a_n < 2 \Rightarrow \frac{2}{3}a_n + 1 < 3 \Rightarrow a_{n+1} < 3$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < 3$.

$$44.2. a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}a_n + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{3}$$

Pela alínea anterior, temos:

$$a_n < 3 \Leftrightarrow -\frac{a_n}{3} > -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{a_n}{3} > 0$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n > 0$ pelo que (a_n) é monótona crescente.

$$45. b_n = \frac{2n+1}{3}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2(n+1)+1}{3} - \frac{2n+1}{3} = \frac{2n+2+1-2n-1}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo, (b_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{3}$.

$$46. u_1 = 10, r = 3$$

$$u_{100} = u_1 + (100-1) \times 3 = 10 + 300 - 3 = 307$$

$$47. u_{10} = 8, u_{20} = -2$$

$$u_{20} = u_{10} + (20-10) \times r \Leftrightarrow -2 = 8 + 10r \Leftrightarrow r = -1$$

$$u_n = u_{10} + (n-10) \times (-1) \Leftrightarrow u_n = 8 - n + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = -n + 18$$

$$48. a_1 = 10, a_2 = -5$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{30} = a_1 \times r^{30-1} = 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{29} = -10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{29} =$$

$$= -5 \times 2 \times 2^{-29} = -5 \times 2^{-28} = -\frac{5}{2^{28}}$$

$$49. \frac{x}{6} = \frac{8,64}{x} \Leftrightarrow x^2 = 6 \times 8,64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 51,84 \Leftrightarrow x = -7,2 \vee x = 7,2$$

Resposta: (A)

50. (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = 7$ sendo $a_1 = 2$.

$$a_{10} = a_1 + 9 \times r = 2 + 9 \times 7 = 65$$

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \times 10 = \frac{2+65}{2} \times 10 = 67 \times 5 = 335$$

51. Seja x o termo intermédio e r a razão da progressão geométrica:

$$\frac{x}{r}, x, rx \leftarrow \text{progressão geométrica}$$

$$\frac{x}{r}, x+8, rx \leftarrow \text{progressão aritmética}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{r} + x + rx = 52 \\ x + 8 - \frac{x}{r} = rx - (x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 52 - x \\ \frac{x}{r} + rx = 16 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 52 - x \\ 52 - x = 16 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 52 - x \\ 3x = 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{r} + 12r = 52 - 12 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{r} + 12r - 40 = 0 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12r^2 - 40r + 12 = 0 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \vee r = \frac{1}{3} \\ x = 12 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$$r = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \times 12 \times 12}}{24} \Leftrightarrow r = 3 \vee r = \frac{1}{3}$$

Se $r = 3$, $\frac{12}{r} = 4$ e $12r = 36$.

Se $r = \frac{1}{3}$, $\frac{12}{r} = 36$ e $12r = 4$.

Os números são 4, 12 e 36.

52.

$$\begin{cases} \frac{x}{r} + x + rx = 70 \\ 5x - \frac{4x}{r} = 4rx - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 70 - x \\ \frac{4x}{r} + 4rx = 10x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 70 - x \\ \frac{x}{r} + rx = \frac{10}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 70 - x \\ 70 - x = \frac{5}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + rx = 70 - x \\ 7x = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20}{r} + 20r = 70 - 20 \\ x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20}{r} + 20r - 50 = 0 \\ x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20r^2 - 50r + 20 = 0 \\ x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \vee r = \frac{1}{2} \\ x = 20 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$$2r^2 - 5r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Leftrightarrow r = 2 \vee r = \frac{1}{2}$$

Se $r = 2$, $\frac{x}{r} = 10$ e $rx = 40$.

Se $r = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{r} = 40$ e $rx = 10$.

Os números são 10, 20 e 40.

53.
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \times u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

53.1. $u_2 = \frac{1+1}{3} \times u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

$u_3 = \frac{2+1}{3 \times 2} \times u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$

53.2. $v_n = \frac{u_n}{n}$

$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{5}$

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{3n} \times u_n = \frac{u_n}{3n}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n}{3n}}{\frac{u_n}{n}} = \frac{1}{3}$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

53.3. $v_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$v_n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

54. $a_1 = 2$, $r = 3$
 $S_n = 2186$

$a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 2186 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} = 2186 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^n - 1 = 2186 \Leftrightarrow 3^n = 2187$

$\Leftrightarrow 3^n = 3^7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 7$

55. $u_2 = 52$ e $u_4 = 832$

$u_4 = u_2 \times r^{4-2} \Leftrightarrow 832 = 52 \times r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = 4$

$u_7 = u_4 \times r^3 = 832 \times 4^3 = 53\,248$

$S = u_7 \times \frac{1-r^6}{1-r} = 53\,248 \times \frac{1-4^6}{-3} =$
 $= 72\,683\,520$

56. $v_n = k^{u_n}$ e (u_n) é uma progressão aritmética de razão r .

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{k^{u_{n+1}}}{k^{u_n}} = k^{u_{n+1}-u_n} = k^r$

Logo, se (u_n) é uma progressão aritmética de razão r , (v_n)

é uma progressão geométrica de razão k^r

2187	3
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$l_{n+1} = d_n = \sqrt{l_n^2 + l_n^2}$

$l_{n+1} = \sqrt{2}l_n$

$\forall n \in \mathbb{N}, l_{n+1} = \sqrt{2}l_n$

57.1. $p_n = 4l_n$ (perímetro = $4 \times$ lado)

$p_{n+1} = 4l_{n+1} = 4(\sqrt{2}l_n) = \sqrt{2}(4l_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \sqrt{2}p_n$

Logo, (p_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

$a_n = (l_n)^2$ (área = (lado)²)

$a_{n+1} = (l_{n+1})^2 = (\sqrt{2}l_n)^2 = 2(l_n)^2 = 2a_n$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

57.2. $l_1 = 2$

$p_n = p_1 \times (\sqrt{2})^{n-1} = 4 \times 2 \times (\sqrt{2})^{n-1} = 8 \times (\sqrt{2})^{n-1}$

$a_n = a_1 \times 2^{n-1} = 2^2 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

58.
$$\begin{cases} (x-r) + x + (x+r) = 3 \\ (x-r) \times x \times (x+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (1-r)(1+r) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1-r^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r = -2 \vee r = 2 \end{cases}$$

Se $r = -2$ e $x = 1$, $x - r = 3$ e $x + r = -1$

Se $r = 2$ e $x = 1$, $x - r = -1$ e $x + r = 3$

Os números são -1, 1 e 3 ou 3, 1 e -1.

59. $u_1 + u_n = 120$

$u_6 + u_{n-5} = ?$

$u_6 = u_1 + 5r$

$u_n = u_{n-5} + 5r \Leftrightarrow u_{n-5} = u_n - 5r$

$u_6 + u_{n-5} = u_1 + 5r + u_n - 5r = u_1 + u_n = 120$

60. $1, 3, 9, 27, \dots$

$1 \text{ h} = 6 \times 10 \text{ min}$

$S_8 = 1 \times \frac{1-3^8}{1-3} = 3280$

3280 pessoas

61. $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$\bullet u_2 - u_1 = \frac{-1}{1 \times 2} \Leftrightarrow u_2 = u_1 - \frac{1}{2}$

$\bullet u_{n+1} - u_n$ não é constante.

$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$. Logo, (u_n) é estritamente decrescente. Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Portanto $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq u_1$, ou seja, (u_n) é limitada.

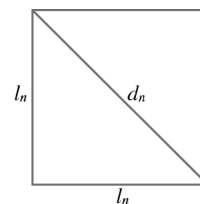
Resposta: (C)

62.
$$\begin{cases} v_1 = 1024 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

62.1. Pela definição, (v_n) é uma progressão geométrica de razão

$-\frac{1}{2}$.

62.2. $v_1 = 1024$, $v_2 = -\frac{1}{2} \times 1024 = -512$, $v_3 = -\frac{1}{2} \times 512 = -256$



57. Seja l_n o lado do quadrado q_n . Então, l_{n+1} é igual a d_n , diagonal do quadrado q_n .

62.3. Não. Por exemplo, $v_2 < v_1$ e $v_3 > v_2$

$$62.4. S_{10} = v_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r} = 1024 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1+\frac{1}{2}} = 1024 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = 1024 \times \frac{2}{3} \times \frac{1023}{1024} = 682$$

$$62.5. v_n = v_1 \times r^{n-1} = 1024 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Pág. 180

Avaliação 1

1. $u_n = \frac{2n+1}{2n}$

Resposta: (D)

2. $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} - d_n \leq 0 \Leftrightarrow (d_n)$ é monótona decrescente em sentido lato.

Resposta: (C)

3. $u_n = (-1)^{n+1}$
 $u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, logo (u_n) é limitada

Resposta: (C)

4. $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{3}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 $u_2 = \frac{2 \times (-4) - 1}{3} = \frac{-9}{3} = -3$; $u_3 = \frac{2 \times (-3) - 1}{3} = \frac{-7}{3}$

Resposta: (A)

5. $u_n = 2 - 3n$
 (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3 .

Resposta: (D)

6. $c_1 = c_2 = 1$
 $c_3 = 1 + 1 = 2$
 $c_4 = 2 + 1 = 3$
 $c_5 = 3 + 2 = 5$

Resposta: (B)

7. $\begin{cases} u_{10} = 5 \\ u_{n+1} = u_3 + 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3
 $u_{100} = u_{10} + (100 - 10) \times 3 = 5 + 90 \times 3 = 275$

Resposta: (B)

Pág. 181

8. $a_n = \frac{4n+1}{n}$

8.1. $a_n = \frac{41}{10} \Leftrightarrow \frac{4n+1}{n} = \frac{41}{10} \Leftrightarrow 40n + 10 = 41n \Leftrightarrow n = 10$
 $u_{10} = \frac{41}{10}$
 $\frac{41}{10}$ é o 10.º termo da sucessão.

8.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)+1}{n+1} - \frac{4n+1}{n} = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n} = \frac{4n^2 + 5n - 4n^2 - n - 4n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$. Logo (a_n) é monótona decrescente.

8.3. (a_n) não é uma progressão aritmética porque $a_{n+1} - a_n$ não é constante.

8.4. $a_n \leq 5 \Leftrightarrow \frac{4n+1}{n} \leq 5 \Leftrightarrow 4n+1 \leq 5n \Leftrightarrow n \geq 1$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, podemos concluir que

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq 5$

8.5. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{4n+1}{n} > 0$. Logo

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 5$, pelo que (a_n) é limitada.

9. $b_n = \frac{3-n}{4}$

9.1. $b_{n+1} - b_n = \frac{3-(n+1)}{4} - \frac{3-n}{4} = \frac{3-n-1-3+n}{4} = -\frac{1}{4}$

$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{4}$

(b_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{1}{4}$

9.2. $S_{21} = \frac{b_1 + b_{21}}{2} \times 21 = \frac{\frac{2}{4} - \frac{18}{4}}{2} \times 21 = \frac{-4}{2} \times 21 = -42$

9.3. $b_n < -10 \Leftrightarrow \frac{3-n}{4} < -10 \Leftrightarrow 3-n < -40 \Leftrightarrow n > 43$

O primeiro termo b_n tal que $b_n < -10$ é $b_{44} = -\frac{41}{4}$.

10. $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

• $P(1)$ é verdadeira, pois $a_1 = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (V)

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$T: a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} = \quad \text{(pela fórmula de recorrência)}$$

$$= \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \quad \text{(por hipótese)}$$

$$= \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{n}{n+1}$.

$$11. \sum_{n=1}^{100} (2n-1) = \frac{2 \times 1 - 1 + 2 \times 100 - 1}{2} \times 100 = \frac{200}{2} \times 100 = 10\,000$$

12. (a_n) é uma progressão aritmética

$$S_{11} = 176$$

$$a_{11} = a_1 + 30$$

$$S_{11} = 176 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_{11}}{2} \times 11 = 176 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_1 + 30}{2} = \frac{176}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 15 = 16 \Leftrightarrow a_1 = 1$$

$$a_{11} = a_1 + 10r \Leftrightarrow a_1 + 30 = a_1 + 10r \Leftrightarrow r = 3$$

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow a_n = 3n - 2$$

13. $a_2 = 1, r = 0,3$

$$a_1 = a_2 - 0,3 = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$a_{10} = a_2 + 8 \times 0,3 = 1 + 2,4 = 3,4$$

$$S_{10} = \frac{0,7 + 3,4}{2} \times 10 = \frac{4,1}{2} \times 10 = 2,05 \times 10 = 20,5$$

O Luís percorreu 20,5 km.

$$14. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

14.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$:

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

• $P(1)$ é verdadeira, pois

$$u_1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} \Leftrightarrow 2 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow 2 = 2 \times 1 \quad (\text{V})$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$H: u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$T: u_{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} = \frac{1}{3} \times u_n = \quad (\text{da fórmula de recorrência})$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \quad (\text{por hipótese})$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1+1} =$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} 14.2. u_{n+1} - u_n &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\ &= (2 - 2 \times 3) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\ &= -4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

Logo, (u_n) é monótona decrescente.

$$\begin{aligned} 14.3. S_7 &= u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r} = 2 \times \frac{2 - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \frac{1}{3}} = \\ &= 2 \times \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^7}\right) = \frac{2186}{729} \end{aligned}$$

$$15. \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(3n-10)(2n+3)}$$

15.1. (u_n) não é uma progressão aritmética porque,

$$u_{n+1} - u_n \text{ não é constante.}$$

15.2. $3n-10 > 0 \Leftrightarrow n \geq 4$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow n \geq 4$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow n < 4$$

Logo, (u_n) não é monótona.

15.3. $u_{n+1} > u_n$ para $n \geq 4$

$$u_{n+1} < u_n \text{ para } n \leq 3$$

Logo, $u_n \geq u_4, \forall n \in \mathbb{N}$ pelo que u_4 é um dos minorantes de (u_n) .

$$16. \forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \wedge -\frac{2}{v_n} \leq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \wedge -2 \leq -3v_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \wedge v_n \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n \leq \frac{2}{3}$$

Logo, (v_n) é limitada.

Atividade inicial 2

Pág. 182

1.1. $V_{0,2}(3) =]3-0,2; 3+0,2[=]2,8; 3,2[$

1.2. $V_{0,01}(3,5) =]3,5-0,01; 3,5+0,01[=]3,49; 3,51[$

2.1. $\frac{5-2}{2} = 1,5$

$$5-1,5 = 3,5$$

$$]-2, 5[= V_{3,5}(1,5)$$

2.2. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x-0,2| < \frac{1}{10}\right\} = V_{\frac{1}{10}}(0,2)$

3. $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$

$$u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+1} - 2 = \frac{2n+1-2n-2}{n+1} = \frac{-1}{n+1}$$

$$-\frac{1}{10} < u_n - 2 < \frac{1}{10} \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{10} \wedge -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10 < n+1 \Leftrightarrow n > 9$$

4. $u_n = 3 - \frac{1}{n}$

$$u_n - 3 = 3 - \frac{1}{n} - 3 = -\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{10} < u_n - 3 < \frac{1}{10} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} > -\frac{1}{10} \wedge -\frac{1}{n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n > 10$$

A partir do termo de ordem 11 (inclusive).

Pág. 184

1. $u_n = \frac{n+1}{n}$

1.1. $|u_n - 1| < 0,01 \Leftrightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > 100$$

A partir do termo de ordem 101.

1.2. Seja δ um número positivo qualquer

$$|u_n - 1| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} \quad (\text{da alínea anterior})$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq \frac{1}{\delta}$, tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - 1| < \delta, \text{ ou seja,}$$

$$\lim u_n = 1.$$

2.1. Seja $u_n = \frac{3}{n}$ e δ um número positivo qualquer

$$|u_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{3}{\delta}$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq \frac{3}{\delta}$, tem-se:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{3}{n} - 0\right| < \delta, \text{ ou seja,}$$

$$\lim \frac{3}{n} = 0.$$

2.2. Seja $u_n = \frac{3n}{2n+1}$ e δ um número positivo qualquer

$$\left|u_n - \frac{3}{2}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{6n-6n-3}{4n+2}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{4n+2} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 < 4n\delta + 2\delta \Leftrightarrow 4n\delta > 3 - 2\delta \Leftrightarrow n > \frac{3-2\delta}{4\delta}$$

Seja p um número natural maior ou igual a $\frac{3-2\delta}{4\delta}$,

$$\text{vem } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{3n}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \delta.$$

$$\text{Logo, } \lim \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

2.3. Seja δ um número positivo qualquer.

$$\left|1 - \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ e $p \geq \frac{1}{\delta}$, então:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|1 - \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| < \delta$$

$$\text{Logo, } \lim \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$$

Pág. 185

3.1. $\lim(-1) = -1$

3.2. $\lim \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

3.3. $\lim \sqrt{2} = \sqrt{2}$

3.4. $\lim(-\pi) + \lim \pi = -\pi + \pi = 0$

3.5. $\lim\left(-\frac{1}{3}\right) : \lim(-4) = -\frac{1}{3} : (-4) = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$

Pág. 186

4. Sabe-se que $\lim v_n = b$ e (v_n) é decrescente.

Como (v_n) é convergente, então é limitada.

Atendendo a que (v_n) além de convergente para b é

decrescente, então: $\forall n \in \mathbb{N}, b < v_n < v_1$

Assim, b é um minorante e v_1 é um majorante do conjunto de termos de (v_n) .

Pág. 187

5.
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{7}{7-u_n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$.

$$P(n) \Leftrightarrow u_n < \frac{3}{2}$$

• $P(1)$ é verdadeira, dado que $u_1 = 0$. Logo, $u_1 < \frac{3}{2}$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo, por hipótese, que para dado $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$u_n < \frac{3}{2}, \text{ pretendemos provar que } u_{n+1} < \frac{3}{2}.$$

$$u_n < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -u_n < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 - u_n > 7 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 7 - u_n > \frac{11}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7 - u_n} < \frac{2}{11} \Leftrightarrow \frac{7}{7 - u_n} < \frac{14}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{3}{2} \text{ porque } \frac{14}{11} < \frac{3}{2}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, $P(n)$ é universal, ou

seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{2}$.

5.2. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

• $P(1)$ é verdadeira dado que $u_2 = \frac{7}{7 - u_1} = \frac{7}{7 - 0} = 1$

e $u_1 = 0$ pelo que $u_2 > u_1$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo que para um dado $n \in \mathbb{N}$, se tem $u_{n+1} > u_n$,

pretendemos provar que então $u_{n+2} > u_{n+1}$

$$u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -u_{n+1} < -u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 - u_{n+1} < 7 - u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7 - u_{n+1}} > \frac{1}{7 - u_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{7 - u_{n+1}} > \frac{7}{7 - u_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

$$\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 7 - u_n > 0 \text{ porque} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

5.3. A sucessão (u_n) é monótona crescente e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{3}{2}$.

Logo, (u_n) é convergente porque toda a sucessão monótona crescente e majorada é convergente.

Pág. 188

6. $u_n = \frac{2n-3}{4}$

Seja L um número positivo qualquer.

$$u_n > L \Leftrightarrow \frac{2n-3}{4} > L \Leftrightarrow 2n-3 > 4L \Leftrightarrow 2n > 4L+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{4L+3}{2}$$

Portanto, sendo $p \in \mathbb{N}$ e $p > \frac{4L+3}{2}$, então:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

Logo, $\lim u_n = +\infty$.

7. $a_n = n^2 - 1$

Seja L um número positivo qualquer.

$$a_n > L \Leftrightarrow n^2 - 1 > L \Leftrightarrow n^2 > L+1$$

Como $n > 0$ e $L+1 > 0$, vem $n > \sqrt{L+1}$.

Sendo p um número natural superior a $\sqrt{L+1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

Portanto, $u_n \rightarrow +\infty$.

Pág. 189

8. $u_n = 1 - 8n$

Seja L um número positivo qualquer.

$$u_n < -L \Leftrightarrow 1 - 8n < -L \Leftrightarrow -8n < -L - 1 \Leftrightarrow n > \frac{L+1}{8}$$

Para $p \in \mathbb{N}$ e $p > \frac{L+1}{8}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$$

Logo, $u_n \rightarrow -\infty$.

Pág. 190

9.1. $u_n = \frac{4n+1}{3n+3}$

Seja δ um número positivo qualquer.

$$\left| \frac{4n+1}{3n+3} - \frac{4}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{12n+3-12n-12}{3(3n+3)} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-9}{9(n+1)} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n\delta + \delta > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\delta > 1 - \delta \Leftrightarrow n > \frac{1-\delta}{\delta}$$

Portanto, para cada $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{4n+1}{3n+3} - \frac{4}{3} \right| < \delta \text{ sendo } p \in \mathbb{N} \text{ e}$$

$$p \geq \frac{1-\delta}{\delta}. \text{ Logo, } \lim \frac{4n+1}{3n+3} = \frac{4}{3}.$$

9.2. Seja $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{4n+1}{3} > L \Leftrightarrow 4n+1 > 3L \Leftrightarrow 4n > 3L-1 \Leftrightarrow n > \frac{3L-1}{4}$$

Logo, para cada $L \in \mathbb{R}^+$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ e

$$p \geq \frac{3L-1}{4}.$$

$$\text{Logo, } \lim \frac{4n+1}{3} = +\infty.$$

9.3. Seja $L \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{-4n+1}{3} < -L \Leftrightarrow -4n+1 < -3L \Leftrightarrow -4n < -1-3L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3L+1}{4}$$

Sendo p um número natural maior ou igual a $\frac{3L+1}{4}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \frac{-4n+1}{3} < -L$$

$$\text{Logo, } \lim \frac{-4n+1}{3} = -\infty.$$

9.4. Como $\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right| = 0$, para qualquer $\delta > 0$ existe uma ordem

$p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right| < \delta.$$

$$\text{Portanto, } \lim \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pág. 191

$$10.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-4n}{4n+7} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$10.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3n}{7n+5} = \frac{3}{7}$$

$$10.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-6n}{9} = -\infty$$

$$10.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{-n} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$10.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3-8n} = 0$$

$$10.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n}{13} = -\infty$$

$$10.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+1}{2} = +\infty$$

$$10.8. \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n+7) = -\infty$$

$$10.9. \lim_{n \rightarrow \infty} (7-3n) = -\infty$$

$$10.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$10.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n+1} = 0$$

$$10.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10}{1-3n} = 0$$

Pág. 192

$$11. \quad u_n = \frac{1-3n}{n} \text{ e } a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{3} & \text{se } n \leq 100 \\ \frac{n+1}{n} & \text{se } n > 100 \end{cases}$$

$$11.1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$11.2. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{n} = -3$$

$$11.3. \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$$

$$12. \quad a_n = \begin{cases} -3n & \text{se } n < 500 \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } n \geq 500 \end{cases}$$

$$12.1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$12.2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Pág. 193

$$13. \quad a_n = (-1)^n \times \frac{3}{n}$$

$a_n \rightarrow 0$ dado ser o produto de uma sucessão limitada, $((-1)^n)$, por uma sucessão que tende para 0, $\left(\frac{3}{n}\right)$.

$$14.1. \quad a_n = \frac{\cos(-n)}{2n+1} = \cos(-n) \times \frac{1}{2n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \cos(-n) \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

$a_n \rightarrow 0$, por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

$$14.2. \quad b_n = \frac{1+2\sin n}{1-3n} = (1+2\sin n) \times \frac{1}{1-3n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \sin n < 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1+2\sin n \leq 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-3n} = 0$$

$b_n \rightarrow 0$, por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

Pág. 194

$$15.1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{10} = +\infty$$

$$15.2. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-4} = 0$$

$$15.3. \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{7}} = +\infty$$

$$15.4. \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{9}{5}} = 0$$

$$15.5. \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

$$15.6. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

$$15.7. \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times \sqrt[5]{n^{-2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times n^{-\frac{2}{5}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{5}} = +\infty$$

Pág. 195

$$16.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

$$16.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} + \frac{2-n}{n} + n^{-\frac{1}{2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}} = 2 - 1 + 0 = 1$$

$$16.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-n}{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}} = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$16.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(2n)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin(2n) \times \frac{1}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ dado que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin(2n) \times \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ porque } \forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \sin(2n) \leq 1 \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Pág. 196

$$17. \quad a_n = -3 + n^{-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-3 + n^{-2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-3) + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = -3 + 0 = -3$$

$$b_n = \frac{2-4n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{-4}{1} = -4$$

$$c_n = 2 + \frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 2 + 1 = 3$$

$$17.1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3 \times (-4) = 12$$

$$17.2. \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \times c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -4 \times 3 = -12$$

$$17.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -3 \times 3 = -9$$

$$17.4. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = -4 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -4 - 3 - 3 = -10$$

Pág. 197

$$18. \quad a_n = 3 + n^{-\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + n^{-\frac{1}{3}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{3}} = 3 + 0 = 3$$

$$b_n = 2 + \frac{1}{3n}$$

$$\lim b_n = \lim \left(2 + \frac{1}{3n} \right) = \lim 2 + \lim \frac{1}{3n} = 2 + 0 = 2$$

$$c_n = \frac{n+1}{2n} + \frac{n}{n+5}$$

$$\lim c_n = \lim \left(\frac{n+1}{2n} + \frac{n}{n+5} \right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$18.1. \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{3}{2}$$

$$18.2. \lim \frac{a_n + 1}{c_n} = \frac{\lim a_n + \lim 1}{\lim c_n} = \frac{3+1}{\frac{3}{2}} = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$18.3. \lim \frac{b_n + c_n}{a_n - b_n} = \frac{\lim b_n + \lim c_n}{\lim a_n - \lim b_n} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{3 - 2} = \frac{7}{2}$$

Pág. 198

$$19.1. \lim \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\sqrt{2n+1}}{n+\sqrt{2}} \right)^4 = \left(\lim \frac{1}{n+1} - \lim \frac{\sqrt{2n+1}}{n+\sqrt{2}} \right)^4 =$$

$$= (0 - \sqrt{2})^4 = 4$$

$$19.2. \lim \left(\frac{n}{2n+3} + 1 - n^{-2} \right)^{-2} = \left(\lim \frac{n}{2n+3} + 1 - \lim n^{-2} \right)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1 - 0 \right)^{-2} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} = \frac{4}{9}$$

$$19.3. \lim \left(\frac{n+1}{8n} - n^{-3} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\lim \frac{n+1}{8n} - \lim n^{-3} \right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \left(\frac{1}{8} - 0 \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} \right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$19.4. \lim \sqrt{\frac{n+1}{n} + 3} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{n} + 3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Pág. 200

$$20. a_n = -2n+1 \rightarrow -\infty; b_n = 1+3n^4 \rightarrow +\infty; c_n = \frac{3n+1}{n} \rightarrow 3;$$

$$d_n = \frac{-n-1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}; e_n = 1+n \rightarrow +\infty$$

$$20.1. \lim(b_n + e_n) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$20.2. \lim(e_n + c_n) = +\infty + 3 = +\infty$$

$$20.3. \lim(a_n + d_n) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$20.4. \lim(d_n + c_n) = -\infty + 3 = -\infty$$

Pág. 201

$$21. \lim a_n = \lim(n^2 + 2n + 1) = +\infty + \infty + 1 = +\infty$$

$$\lim b_n = \lim(1 - n^2) = 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim c_n = \lim(5 - 2n - n^2) = 5 - \infty - \infty = -\infty$$

$$\lim d_n = \lim(1 - 3n - n^2) = 1 - \infty - \infty = -\infty$$

$$21.1. \lim(a_n + b_n) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim(n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2) =$$

$$= \lim(2n + 2) = +\infty$$

$$21.2. \lim(a_n + c_n) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim(n^2 + 2n + 1 + 5 - 2n - n^2) =$$

$$= \lim 6 = 6$$

$$21.3. \lim(a_n + d_n) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim(n^2 + 2n + 1 + 1 - 3n - n^2) =$$

$$= \lim(-n + 2) = -\infty$$

Pág. 203

$$22. a_n = \frac{2n+1}{n+1} - 4; b_n = n^2 - \frac{n+1}{2n} \text{ e } c_n = \frac{1}{n} - n^{\frac{1}{3}}$$

$$22.1. \text{ a) } \lim a_n = \lim \left(\frac{2n+1}{n+1} - 4 \right) = 2 - 4 = -2$$

$$\text{ b) } \lim b_n = \lim \left(n^2 - \frac{n+1}{2n} \right) = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$$

$$\text{ c) } \lim c_n = \lim \left(\frac{1}{n} - n^{\frac{1}{3}} \right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

$$22.2. \text{ a) } \lim(a_n \times b_n) = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{ b) } \lim(c_n \times a_n) = -\infty \times (-2) = +\infty$$

$$\text{ c) } \lim(b_n \times c_n) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{ d) } \lim[(a_n + b_n) \times c_n] = (-2 + \infty) \times (-\infty) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

Pág. 204

$$23.1. \lim a_n = \lim(n+2) = +\infty; \lim b_n = \lim(2+3n^2) = +\infty;$$

$$\lim c_n = \lim(1-n^2) = -\infty \text{ e } \lim d_n = \lim\left(-\frac{2}{n}\right) = 0$$

$$23.2. \lim(a_n \times d_n) \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim \left[(n+2) \times \left(-\frac{2}{n}\right) \right] =$$

$$= \lim \left(-2 - \frac{4}{n} \right) = -2 - 0 = -2$$

$$23.3. \lim(b_n \times d_n) \stackrel{(\infty \times 0)}{=} \lim \left((2+3n^2) \times \left(-\frac{2}{n}\right) \right) =$$

$$= \lim \left(-\frac{4}{n} - 6n \right) = 0 - \infty = -\infty$$

$$23.4. \lim(c_n \times d_n) = \lim \left[(1-n^2) \times \left(-\frac{2}{n}\right) \right] =$$

$$= \lim \left(-\frac{2}{n} + 2n \right) = 0 + \infty = +\infty$$

Pág. 206

$$24. u_n = n^{\frac{2}{3}} + \frac{n}{n+1}, v_n = n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{n+1}$$

$$24.1. \lim u_n = \lim \left(n^{\frac{2}{3}} + \frac{n}{n+1} \right) = +\infty + 1 = +\infty$$

$$24.2. \lim v_n = \lim \left(n^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{n+1} \right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

$$24.3. \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$24.4. \lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Pág. 207

$$25. u_n = n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3}; v_n = \frac{3}{2n-n^{-3}}$$

$$25.1. \lim u_n = \lim \left(n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3} \right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

$$25.2. \lim v_n = \lim \frac{3}{2n - n^{-3}} = \frac{3}{+\infty - 0} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$25.3. \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\left(\frac{0}{0} \right)}{\frac{3}{2n - n^{-3}}} = \lim \left[\left(n^{-\frac{3}{2}} + n^{-3} \right) \times \frac{2n - n^{-3}}{3} \right] =$$

$$= \lim \frac{2n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{9}{2}} + 2n^{-2} - n^{-6}}{3} = \frac{0 - 0 + 0 - 0}{3} = 0$$

Pág. 209

$$26.1. \lim \left(\frac{2-n}{3} - \frac{5}{n} \right)^3 = (-\infty - 0)^3 = -\infty$$

$$26.2. \lim \left(\frac{2}{n^{-1} + \frac{1}{n+1}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{0^+ + 0^+} \right)^{\frac{2}{3}} = (+\infty)^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

$$26.3. \lim \sqrt[3]{\frac{1+n^4}{5n^{-1}}} = \sqrt[3]{\frac{+\infty}{0^+}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$26.4. \lim \left(\frac{3-2n}{1+n^{-2}} \right)^4 = (-\infty)^4 = +\infty$$

Pág. 210

$$27.1. \lim \left[\left(\frac{1}{5} \right)^n + 3^{1-n} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-n} \right] = 0 + \lim \left(3 \times \frac{1}{3^n} \right) - \lim 4^n =$$

$$= 3 \times \frac{1}{+\infty} - \infty = 3 \times 0 - \infty = -\infty$$

$$27.2. \lim \sqrt{2^{n+1} \times \frac{1+3^{-n}}{3+n^{-3}}} = \lim \sqrt{2 \times 2^n \times \frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \sqrt{+\infty \times \frac{1+0}{1+0}} = +\infty$$

$$27.3. \lim \left[\left(\frac{1}{9} \right)^n - \sqrt[3]{\frac{1-4n}{2^{-1}n+1}} \right] = 0 - \sqrt[3]{\frac{-4}{2^{-1}}} = -\sqrt[3]{-4 \times 2} =$$

$$= -\sqrt[3]{-8} = -(-2) = 2$$

$$27.4. \lim \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{4^{-n}} = \lim \frac{2^{-1} \times 2^n + 3 \times 3^n}{\left(\frac{1}{4} \right)^n} = \frac{+\infty + \infty}{0^+} = +\infty$$

Pág. 211

$$28. \lim \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \text{ dado que } u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ é uma}$$

progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e 1.º termo $\frac{1}{2}$.

$$29. \sqrt{n} = 4^{3-n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{3-(n+1)}}{4^{3-n}} = 4^{3-n-1-3+n} = \frac{1}{4}$$

$$v_1 = 4^{3-1} = 4^2 = 16$$

$$\lim s_n = \frac{v_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{\frac{3}{4}} = 16 \times \frac{4}{3} = \frac{64}{3}$$

$$30. \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) é uma progressão geométrica, sendo $u_1 = 3$ e $r = \frac{1}{4}$.

$$\lim \sum_{k=1}^n u_k = \frac{u_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

31. O comprimento c_n da linha é dado por:

$$c_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$$

$$= \frac{2\pi \times 1}{2} + \frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{2\pi \times \frac{1}{4}}{2} \times \dots \times \frac{2\pi \times \left(\frac{1}{2} \right)^n}{2} =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \dots + \frac{\pi}{2^n}$$

c_n é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, sendo $c_1 = \pi$.

$$\lim c_n = \frac{c_1}{1-r} = \frac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi$$

$$32. \text{Área do 1.º triângulo: } t_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

$$\text{Área do 2.º triângulo: } t_2 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Área do 3.º triângulo: } t_3 = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

As medidas dos lados dos triângulos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Logo, as áreas, $t_1, t_2, \dots, t_n$ estão

em progressão geométrica de razão $r = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$, sendo

$$t_1 = 2.$$

$$\lim (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{t_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Pág. 213

$$33.1. \lim (2 - 5n + 3n^5) = \lim (3n^5) = +\infty$$

$$33.2. \lim (2n^2 - 5n^3 + n) = \lim (-5n^3) = -\infty$$

$$33.3. \lim (3n^4 + 2n^3 + n^2 + 1)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[\lim (3n^4 + 2n^3 + n^2 + 1) \right]^{\frac{3}{2}} = \left[\lim (3n^4) \right]^{\frac{3}{2}} =$$

$$= (+\infty)^{\frac{3}{2}} = +\infty$$

$$33.4. \lim (2 - 3n^3 + n^{-2})^{-3} = \left[\lim (2 - 3n^3 + n^{-2}) \right]^{-3} =$$

$$= \left[\lim (-3n^3) + \lim \frac{1}{n^2} \right]^{-3} = (-\infty + 0)^{-3} = 0$$

$$33.5. \lim \sqrt{5 + 2n + n^4} = \sqrt{\lim n^4} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$33.6. \lim \sqrt[3]{1 - n^5} = \sqrt[3]{\lim (-n^5)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
33.7. \lim (2 + n^3 + 3^{n+1} - n^{-3} + 3^{-n}) &= \\
&= \lim n^3 + \lim (3 \times 3^n) - \lim \frac{1}{n^3} + \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = \\
&= +\infty + (+\infty) - 0 + 0 = +\infty
\end{aligned}$$

$$33.8. \lim \left(\frac{1}{n^3 + n} + \sqrt[n]{2} \right) = 0 + 1 = 1$$

Pág. 214

$$\begin{aligned}
34.1. \lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{(\infty-\infty)} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\
&= \lim \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
34.2. \lim (\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1}) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})(\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3-1})}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3-1}} = \\
&= \lim \frac{n^3+2-n^3+1}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3-1}} = \\
&= \lim \frac{3}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3-1}} = \frac{3}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
34.3. \lim (\sqrt{n^2+2} - n) &= \lim_{(\infty-\infty)} \frac{(\sqrt{n^2+2} - n)(\sqrt{n^2+2} + n)}{\sqrt{n^2+2} + n} = \\
&= \lim \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2} + n} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+2} + n} = \frac{2}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
34.4. \lim (\sqrt{2n} - \sqrt{1+2n^2}) &= \\
&= \lim \frac{(\sqrt{2n} - \sqrt{1+2n^2})(\sqrt{2n} + \sqrt{1+2n^2})}{\sqrt{2n} + \sqrt{1+2n^2}} = \\
&= \lim \frac{2n^2-1-2n^2}{\sqrt{2n} + \sqrt{1+2n^2}} = \lim \frac{-1}{\sqrt{2n} + \sqrt{1+2n^2}} = \frac{-1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
34.5. \lim \left(\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} - n^{\frac{2}{3}} \right) &= \lim_{(\infty-\infty)} \frac{\left(\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} - n^{\frac{2}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} + n^{\frac{2}{3}} \right)}{\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} + n^{\frac{2}{3}}} = \\
&= \lim \frac{n^{\frac{4}{3}} + 2 - \left(n^{\frac{2}{3}} \right)^2}{\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} + n^{\frac{2}{3}}} = \lim \frac{n^{\frac{4}{3}} + 2 - n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} + n^{\frac{2}{3}}} = \\
&= \lim \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{n^3} + 2} + n^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Pág. 215

$$35.1. \lim \frac{3-n-3n^4}{2n^4-n+1} = \lim_{\infty} \frac{\cancel{n^4} \left(\frac{3}{n^4} - \frac{1}{n^3} - 3 \right)}{\cancel{n^4} \left(2 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)} = \frac{0-0-3}{2-0-0} = -\frac{3}{2}$$

ou

$$\lim \frac{3-n-3n^4}{2n^4-n+1} = \lim \frac{-3n^4}{2n^4} = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
35.2. \lim \frac{2n^5-2n+1}{3n^3-n^2+3} &= \lim \frac{n^5 \left(2 - \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5} \right)}{n^3 \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3} \right)} = \\
&= \lim \frac{n^2 \left(2 - \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5} \right)}{3 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}} = \frac{+\infty \times 2}{3} = +\infty \quad \text{ou}
\end{aligned}$$

$$\lim \frac{2n^5-2n+1}{3n^3-n^2+3} = \lim \frac{2n^5}{3n^3} = \lim \frac{2n^2}{3} = +\infty$$

$$35.3. \lim \frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n^4+n+5} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4} \right)} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4} \right)} = \frac{\sqrt{2} + 0 + 0}{+\infty(1+0+0)} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\lim \frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{n^4+n+5} = \lim \frac{\sqrt{2n^2}}{n^4} = \lim \frac{\sqrt{2}}{n^2} = \frac{\sqrt{2}}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
35.4. \lim \left(\frac{3-n^3}{n+1} \right)^3 &= \left[\lim \frac{n^3 \left(\frac{3}{n^3} - 1 \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right]^3 = \left[\lim \frac{n^2 \left(\frac{3}{n^3} - 1 \right)}{1 + \frac{1}{n}} \right]^3 = \\
&= \left(\frac{+\infty(0-1)}{1+0} \right)^3 = (-\infty)^3 = -\infty \quad \text{ou}
\end{aligned}$$

$$\lim \left(\frac{3-n}{n+1} \right)^3 = \left(\lim \frac{-n^3}{n} \right)^3 = \left(\lim (-n^2) \right)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\begin{aligned}
35.5. \lim \sqrt{\frac{2n^3+n-1}{1+0,5n^3}} &= \sqrt{\lim \frac{\cancel{n^3} \left(2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right)}{\cancel{n^3} \left(\frac{1}{n^3} + 0,5 \right)}} = \\
&= \sqrt{\frac{2+0-0}{0+0,5}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{ou}
\end{aligned}$$

$$\lim \sqrt{\frac{2n^3+n-1}{1+0,5n^3}} = \sqrt{\lim \frac{2n^3}{0,5n^3}} = \sqrt{\frac{2}{0,5}} = \sqrt{4} = 2$$

$$35.6. \lim \sqrt[3]{\frac{1-n^3}{n^4}} = \sqrt[3]{\lim \left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n} \right)} = \sqrt[3]{0-0} = 0$$

ou

$$\lim \sqrt[3]{\frac{1-n^3}{n^4}} = \sqrt[3]{\lim \frac{-n^3}{n^4}} = \sqrt[3]{\lim \left(-\frac{1}{n} \right)} = \sqrt[3]{0} = 0$$

Pág. 216

$$36.1. \lim \frac{n + \sqrt{n^2+1}}{5n} = \lim_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \frac{n + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}}{5n} = \sqrt{n^2} = |n| = n$$

$$= \lim \frac{n + n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{5n} = \lim \frac{n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)}{5n} =$$

$$= \lim \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{5} = \frac{1 + \sqrt{1+0}}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned}
36.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n^2 + n}}{n + \sqrt{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{n + \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{n + n\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{0 + 0}} = \frac{2 + \sqrt{1}}{1 + \sqrt{0}} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
36.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{2n+1}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{\sqrt{2n+1}}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{0} + \sqrt{0+0}}{1+0} = 0
\end{aligned}$$

$$36.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{\sqrt{n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - n}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - n}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{0 - \infty}{0 + 1} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
36.5. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n) &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)(\sqrt{4n^2 + n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(4 + \frac{1}{n}\right)} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4+0} + 2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Pág. 217

$$\begin{aligned}
36.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{1}{n}} \times (n^2 + 1) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^4}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} + 0 = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
36.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{1}{n}} \times (\sqrt[3]{n} + \sqrt{2n}) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt{2n}}{\sqrt{n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{6}} + \sqrt{2} = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$36.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} + 2}{4^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2}{4^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{4^n}}{1 - \frac{1}{4^n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$36.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^{n-1}}{4^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n \times \frac{1}{5}}{4^n + 2^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{5^n} + \frac{1}{5}}{\frac{4^n}{5^n} + \frac{2^n}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{0 + \frac{1}{5}}{0^+ + 0^+} = +\infty$$

$$36.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 2^{n-1} - 3^{2n}}{4^n + 9^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \times 2 + 2^n \times 2^{-1} - 9^n}{4^n + 9^n \times 9} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{9^n} \times 2 + \frac{2^n}{9^n} \times 2^{-1} - 1}{\frac{4^n}{9^n} + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n \times 2 + \left(\frac{2}{9}\right)^n \times 2^{-1} - 1}{\left(\frac{4}{9}\right)^n + 9} =$$

$$= \frac{0 \times 2 + 0 \times 2^{-1} - 1}{0 + 9} = -\frac{1}{9}$$

$$36.11. \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[4^n \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right) \right] = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
36.12. \lim_{n \rightarrow \infty} (5^{n+1} - 2^n + 3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n \times 5 - 2^n + 3) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[5^n \left(5 - \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{3}{5^n} \right) \right] = +\infty \times (5 - 0 + 0) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
36.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - \cos n}{2^{n-1} + \sin n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - \cos n}{2^n \times 2^{-1} + \sin n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\cos n}{2^n}}{2^{-1} - \frac{\sin n}{2^n}} = \\
&= \frac{1 - 0}{2^{-1} - 0} = 2 \quad \text{dado que, como}
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \cos n \leq 1 \wedge -1 \leq \sin n \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^n} \rightarrow 0,$$

$$\text{podemos concluir que } \frac{\cos n}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sin n}{2^n} \rightarrow 0.$$

(O produto de uma sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo é uma sucessão que tende para 0.)

Pág. 218

$$37. \begin{cases} v_1 = 10 \\ v_{n+1} = \sqrt{6v_n - 4}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

37.1. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $v_{n+1} < v_n$

• $P(1)$ é verdadeira uma vez que:

$$v_1 = 10 \quad \text{e} \quad v_2 = \sqrt{6 \times 10 - 4} = \sqrt{56}, \quad \text{ou seja, } v_2 < v_1.$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que para dado $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} < v_n$. Pretendemos provar que $v_{n+2} < v_{n+1}$.

$$v_{n+1} < v_n \Rightarrow 6v_{n+1} < 6v_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6v_{n+1} - 4 < 6v_n - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6v_{n+1} - 4} < \sqrt{6v_n - 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{n+2} < v_{n+1}$$

Sabemos da definição de (v_n) que $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Fica, assim, provado que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} < v_n$, ou seja, (v_n)

é monótona decrescente.

b) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$, $v_n > 5$.

• $P(1)$ é verdadeira dado que $v_1 = 10$ e $10 > 5$.

$$\bullet P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Admitamos, por hipótese, que para dado $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 5$. Pretendemos provar, então, que $v_{n+1} > 5$.

$$v_n > 5 \Rightarrow 6v_n > 6 \times 5 \Rightarrow 6v_n - 4 > 30 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6v_n - 4} > \sqrt{26} \Rightarrow v_{n+1} > 5$$

pela propriedade transitiva e dado que $\sqrt{26} > 5$.

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Ficou, assim, provado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 5$.

37.2. (v_n) é monótona decrescente e minorada pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 5$. Logo, (v_n) é convergente.

37.3. Como (v_n) é convergente, $\lim v_n = \lim v_{n+1}$

$$\lim v_n = \lim v_{n+1} \Leftrightarrow \lim v_n = \lim \sqrt{6v_n - 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim v_n = \sqrt{6 \lim v_n - 4}$$

Fazendo $L = \lim v_n$, temos:

$$L = \sqrt{6L - 4} \Leftrightarrow L^2 = 6L - 4 \Leftrightarrow (L > 0 \text{ e } 6L - 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 6L + 4 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} \Leftrightarrow L = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = 3 - \sqrt{5} \vee L = 3 + \sqrt{5}$$

Como $v_n > 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim v_n = 3 + \sqrt{5}$.

Pág. 219

$$38. \begin{cases} v_1 = 20 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{5} + 8, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

38.1. Por indução matemática:

Seja $P(n)$ a condição: $v_n > 10$

• $P(1)$ é verdadeira porque $v_1 = 20$ e $20 > 10$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que para dado $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 10$. Então:

$$v_n > 10 \Leftrightarrow \frac{1}{5}v_n > \frac{1}{5} \times 10 \Leftrightarrow \frac{v_n}{5} + 8 > 2 + 8 \Leftrightarrow v_{n+1} > 10$$

Logo, $v_n > 10 \Rightarrow v_{n+1} > 10$ pelo que $P(n)$ é hereditário.

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 10$.

38.2. $u_n = v_n - 10$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1} - 10}{v_n - 10} = \frac{\frac{v_n}{5} + 8 - 10}{v_n - 10} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}v_n - 2}{v_n - 10} = \frac{\frac{1}{5}(v_n - 10)}{v_n - 10} = \frac{1}{5} \text{ pois, } v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{5}$.

38.3. $u_1 = v_1 - 10 = 20 - 10 = 10$

$$u_n = u_1 \times r^{n-1} = 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{Logo, } u_n = 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$u_n = v_n - 10 \Leftrightarrow v_n = u_n + 10$$

$$\text{Logo, } v_n = 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 10.$$

$$38.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n = \frac{u_1}{1-r} = \frac{10}{1-\frac{1}{5}} = 10 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{2}$$

Pág. 222

$$39. u_n = \frac{1-3n}{4n+1}$$

39.1. Seja δ um número positivo qualquer

$$\left| u_n - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n}{4n+1} + \frac{3}{4} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{4-12n+12n+3}{16n+4} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{7}{16n+4} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{16n+4} < \delta \Leftrightarrow 7 < 16n\delta + 4\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16n\delta > 7 - 4\delta \Leftrightarrow n > \frac{7-4\delta}{16\delta}$$

Sendo $p \in \mathbb{N}$ e p maior ou igual que $\frac{7-4\delta}{16\delta}$, qualquer que

$$\text{seja } \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| u_n - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| < \delta$$

$$\text{Ou seja, } \lim u_n = -\frac{3}{4}.$$

$$39.2. u_n \in]-0,76; -0,74[\Leftrightarrow u_n \in V_{\frac{1}{100}}(-0,75) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| u_n - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \text{por 39.1.}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{7-\frac{4}{100}}{16 \times \frac{1}{100}} \Leftrightarrow n > \frac{87}{2} \Leftrightarrow n > 43$$

Logo, há apenas 43 termos de (u_n) que não pertencem a $]-0,76; -0,74[$.

$$40. v_n = \frac{6}{1+2n}$$

40.1. Seja δ um número positivo qualquer.

$$|v_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{6}{1+2n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{6}{1+2n} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta + 2n\delta > 6 \Leftrightarrow 2n\delta > 6 - \delta \Leftrightarrow n > \frac{6-\delta}{2\delta}$$

Logo, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, para $p \in \mathbb{N}$ e p maior ou

igual a $\frac{6-\delta}{2\delta}$, temos $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow |v_n - 0| < \delta$.

Portanto, $\lim v_n = 0$.

40.2. Se $\delta = 0,05$.

$$p \in \mathbb{N} \wedge p \geq \frac{6-0,05}{2 \times 0,05} \Leftrightarrow p \in \mathbb{N} \wedge p \geq 59,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \in \mathbb{N} \wedge p \geq 60$$

$$u_{60} = \frac{6}{1+120} = \frac{6}{121}$$

Como (v_n) é decrescente, o maior termo de (v_n) que

pertence a $V_{0,05}(0)$ é $v_{60} = \frac{6}{121}$.

$$41. u_n = \frac{1-n}{n+2}$$

41.1. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
|u_n - (-1)| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{1-n}{n+2} + 1 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1-n+n+2}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{3}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \delta \Leftrightarrow n\delta + 2\delta > 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n\delta > 3 - 2\delta \Leftrightarrow n > \frac{3-2\delta}{\delta}
\end{aligned}$$

Portanto, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, para $p \in \mathbb{N}$ e p maior ou igual a $\frac{3-2\delta}{\delta}$, temos:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - (-1)| < \delta, \text{ ou seja, } \lim u_n = -1.$$

41.2. $] -1,005; -0,995[= V_{0,005}(-1)$

$$\delta = 0,005$$

$$p > \frac{3-2 \times 0,005}{0,005} \wedge p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p > 598 \wedge p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \geq 599 \wedge p \in \mathbb{N}$$

A partir da ordem $p = 599$.

41.3. Se (u_n) é convergente, então é limitada.

42.
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

42.1. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N} : u_n > 0$

• $P(1)$ é verdadeira pois $u_1 = 5$ e $5 > 0$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$u_n > 0 \Rightarrow u_n + 4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{u_n + 4} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

• $P(1)$ é verdadeira, porque $u_1 = 5$ e $u_2 = \sqrt{5+4} = 3$.

Logo, $u_2 < u_1$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo que, para dado $n \in \mathbb{N}$, se tem $u_{n+1} < u_n$, vamos provar que $u_{n+2} < u_{n+1}$.

$$u_{n+1} < u_n \Rightarrow u_{n+1} + 4 < u_n + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_{n+1} + 4} < \sqrt{u_n + 4} \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, ou seja, (u_n) é monótona

decrecente.

42.2. (u_n) é convergente dado que é monótona decrescente e minorada.

43. $a_n = 3n - 100$. Seja L um número real positivo qualquer.

$$a_n > L \Leftrightarrow 3n - 100 > L \Leftrightarrow 3n > L + 100 \Leftrightarrow n > \frac{L+100}{3}$$

Logo, para qualquer número positivo L existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, sendo p um número natural superior ou igual a $\frac{L+100}{3}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n > L$.

Portanto, $u_n \rightarrow +\infty$.

44. $b_n = n^2 - 2n + 1$

Seja L um número real positivo qualquer.

$$\begin{aligned}
b_n > L &\Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > L \Leftrightarrow (n-1)^2 > L \Leftrightarrow n-1 > \sqrt{L} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n > 1 + \sqrt{L}
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer número real positivo L , existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, sendo p um número natural maior ou igual a $1 + \sqrt{L}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow b_n > L$. Logo, $b_n \rightarrow +\infty$.

45.1. $u_n = 500 - 4n$

Seja L um número positivo qualquer.

$$u_n < -L \Leftrightarrow 500 - 4n < -L \Leftrightarrow 4n > 500 + L \Leftrightarrow n > \frac{500+L}{4}$$

Sendo p um número natural superior ou igual a $\frac{500+L}{4}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L.$$

Logo, $u_n \rightarrow -\infty$.

45.2. $u_n = 1 - \sqrt{n}$. Seja $L \in \mathbb{R}^+$.

$$u_n < -L \Leftrightarrow 1 - \sqrt{n} < -L \Leftrightarrow \sqrt{n} > 1 + L \Leftrightarrow n > (1+L)^2$$

Sendo p um número natural maior ou igual a $(1+L)^2$, vem

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L. \text{ Logo, } u_n \rightarrow -\infty.$$

46.1. $\lim \frac{2n-2}{1-3n} = -\frac{2}{3}$

46.2. $\lim \frac{4n}{2n-3} = \frac{4}{2} = 2$

46.3. $\lim \frac{-1}{5n+2} = 0$

46.4. $\lim \frac{1+4n}{n} = \frac{4}{1} = 4$

46.5. $\lim \frac{-1+4n}{2} = +\infty$

46.6. $\lim \frac{3-5n}{1-\sqrt{2}} = +\infty$

47.
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

47.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N} : u_n = \frac{2n-1}{2n+1}$

• $P(1)$ é verdadeira pois $u_1 = \frac{1}{3}$ e $\frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que, para dado $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2n-1}{2n+1}. \text{ Pretendemos provar que:}$$

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)+1} = \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{2n-1}{2n+1}} = \quad (\text{por hipótese})$$

$$= \frac{1}{\frac{4n+2-2n+1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, fica provado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n-1}{2n+1}$.

47.2. $\lim u_n = \lim \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2}{2} = 1$

48.1. $\lim a_n = \lim \frac{5n-1}{3n} = \frac{5}{3}$

48.2. $\lim b_n = \lim (1-3n) = -\infty$

48.3. $\lim c_n = \lim a_{n+1} = \lim a_n = \frac{5}{3}$

48.4. $\lim d_n = \lim b_{n+5} = \lim b_n = -\infty$

49. $u_n = \frac{2 \times (-1)^{n+1}}{1-5n}$ e $v_n = \frac{1-2\sin n}{1+\sqrt{2}n}$

49.1. Seja $a_n = 2 \times (-1)^{n+1}$ e $b_n = \frac{1}{1-5n}$.

(a_n) é limitada porque o conjunto dos termos de (a_n) é $\{-2, 2\}$.

$$\lim b_n = \lim \frac{1}{1-5n} = 0$$

Logo, $u_n \rightarrow 0$ por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

49.2. Seja $a_n = 1 - 2 \sin n$ e $b_n = \frac{1}{1+\sqrt{2n}}$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-2 \leq -2 \sin n \leq 2$$

$$-1 \leq 1 - 2 \sin n \leq 3$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq a_n \leq 3$, ou seja, (a_n) é limitada

$$\lim b_n = \lim \frac{1}{1+\sqrt{2n}} = 0.$$

Então, $v_n \rightarrow 0$ porque v_n é o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0.

49.3. u_n é convergente, logo é limitada.

$$v_n \rightarrow 0$$

$u_n \times v_n \rightarrow 0$ (produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para 0).

Pág. 223

50.1. $\lim a_n = \lim n^5 = +\infty$

50.2. $\lim b_n = \lim n^{-6} = 0$

50.3. $\lim c_n = \lim n^{-\frac{1}{2}} = 0$

50.4. $\lim d_n = \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} =$

$$= \lim n^{-\frac{2-3}{6}} = \lim n^{-\frac{1}{6}} = 0$$

50.5. $\lim e_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim n^{1-\frac{1}{2}} =$

$$= \lim n^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

50.6. $\lim f_n = \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \lim n^{\frac{1}{3}-1} = \lim n^{-\frac{2}{3}} = 0$

51.1. $\lim \left(n^{-3} \times \cos(2n) + \frac{2n+1}{n} \right) =$
 $= \lim \left(n^{-3} \times \cos(2n) + \lim \frac{2n+1}{n} \right) =$
 $= 0 + \frac{2}{1} = 2$, dado que $n^{-3} \rightarrow 0$ e

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(2n) \leq 1$$

51.2. $\lim \left(\frac{3n-1}{2n} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + 1 \right) = \lim \frac{3n-1}{2n} + \lim n^{-\frac{1}{3}} + \lim 1 =$
 $= \frac{3}{2} + 0 + 1 = \frac{5}{2}$

51.3. $\lim \left(\frac{2n+1}{\sqrt{2n}} + \frac{\sqrt{2n}+1}{n} \right) = \lim \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} + \lim \frac{\sqrt{2n}+1}{n} =$
 $= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

51.4. $\lim \left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1-2n}{2n+1} \right) = \lim n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} + \lim \frac{1-2n}{2n+1} =$
 $= \lim n^{-\frac{1}{4}} + \frac{-2}{2} = 0 - 1 = -1$

52.1. $\lim a_n = \lim \left[2(n^{-5} + 2) \right] = 2 \times (0 + 2) = 4$

$$\lim b_n = \lim \left(\frac{\sqrt{8n}+1}{1-\sqrt{2n}} - \frac{n-1}{n} \right) = \lim \frac{\sqrt{8n}+1}{1-\sqrt{2n}} - \lim \frac{n-1}{n} =$$

 $= \frac{\sqrt{8}}{-\sqrt{2}} - \frac{1}{1} = -\sqrt{4} - 1 = -3$

52.2. a) $\lim (a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n = 4 \times (-3) = -12$

b) $\lim (2a_n - b_n) = 2 \lim a_n - \lim b_n = 2 \times 4 + 3 = 11$

c) $\lim [(a_n - b_n) \times b_n] = (\lim a_n - \lim b_n) \times \lim b_n =$
 $= (4 + 3) \times (-3) = -21$

53. $u_n = (n^{-1} - 2) \times \frac{1-3n}{1+n}$ e $v_n = 3 \times \left(\frac{\sqrt[4]{n}}{n} - 1 \right)$

53.1. $\lim u_n = \lim \left[(n^{-1} - 2) \times \frac{1-3n}{1+n} \right] =$
 $= \lim (n^{-1} - 2) \times \lim \frac{1-3n}{1+n} = (0 - 2) \times \frac{-3}{1} = 6$

$$\lim v_n = \lim \left[3 \times \left(\frac{\sqrt[4]{n}}{n} - 1 \right) \right] = 3 \times \lim \left(n^{\frac{1}{4}-1} - 1 \right) =$$

 $= 3 \times \lim \left(n^{-\frac{3}{4}} - 1 \right) = 3 \times (0 - 1) = -3$

53.2. a) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{6}{-3} = -2$

b) $\lim \frac{u_n + 2v_n}{1 + u_n} = \frac{\lim u_n + 2 \lim v_n}{1 + \lim u_n} = \frac{6 + 2 \times (-3)}{1 + 6} = 0$

c) $\lim \left(\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \times 2u_n \right) = \frac{\lim u_n - \lim v_n}{\lim u_n + \lim v_n} \times 2 \lim u_n =$
 $= \frac{6 - (-3)}{6 + (-3)} \times 2 \times 6 = \frac{9 \times 12}{3} = 36$

d) $\lim \left(\frac{2u_n + 1}{4v_n} \times \frac{v_n + 2}{u_n} \right) = \frac{2 \lim u_n + 1}{4 \lim v_n} \times \frac{\lim v_n + 2}{\lim u_n} =$
 $= \frac{2 \times 6 + 1}{4 \times (-3)} \times \frac{-3 + 2}{6} = \frac{13}{-12} \times \frac{-1}{6} = \frac{13}{72}$

54.1. $\lim [2 + (2n)^{-1}]^{-3} = [\lim 2 + \lim (2n)^{-1}]^{-3} =$
 $= (2 + \lim 2^{-1} \times \lim n^{-1})^{-3} = (2 + 2^{-1} \times 0)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

54.2. $\lim \left(\frac{2}{n} + \frac{1+4n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\lim \frac{2}{n} + \lim \frac{1+4n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(0 + \frac{4}{1} \right)^{\frac{3}{2}} =$
 $= 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

54.3. $\lim \sqrt{3 \left(2 + \frac{n+1}{n} \right)} = \sqrt{3 \times \left(2 + \lim \frac{n+1}{n} \right)} =$
 $= \sqrt{3(2+1)} = 3$

54.4. $\sqrt[3]{1 - \left(\frac{3n-1}{n+1} \right)^2} = \sqrt[3]{1 - \left(\lim \frac{3n-1}{n+1} \right)^2} =$
 $= \sqrt[3]{1 - 3^2} = \sqrt[3]{1-9} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$$55. \quad u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow -\infty, w_n \rightarrow 2$$

$$55.1. \quad \lim(u_n - v_n) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$55.2. \quad \lim(w_n + u_n) = 2 + \infty = +\infty$$

$$55.3. \quad \lim(v_n - w_n) = -\infty - 2 = -\infty$$

$$55.4. \quad \lim(v_n - u_n) = -\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$56. \quad a_n = 1 + n^2, b_n = 2 - n^2 \text{ e } c_n = n^2 + n - 2$$

$$56.1. \quad \lim a_n = \lim(1 + n^2) = 1 + \infty = +\infty$$

$$\lim b_n = \lim(2 - n^2) = 2 - \infty = -\infty$$

$$\lim c_n = \lim(n^2 + n - 2) = +\infty + \infty - 2 = +\infty$$

$$56.2. \quad \lim(a_n + b_n) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim(1 + n^2 + 2 - n^2) = \lim 3 = 2$$

$$56.3. \quad \lim(b_n + c_n) \stackrel{(-\infty+\infty)}{=} \lim(2 - n^2 + n^2 + n - 2) = \lim n = +\infty$$

$$56.4. \quad \lim(a_n - c_n) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim(1 + n^2 - n^2 - n + 2) = \lim(-n + 3) = -\infty$$

$$57.1. \quad \lim\left[\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)(n^2 + 1)\right] = 2 \times (+\infty) = +\infty$$

$$57.2. \quad \lim\left[(n^2 - n^2)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right] = (0 - \infty)(1 + \infty) = -\infty$$

$$57.3. \quad \lim\left[\left(\frac{1}{n+1} - 3\right)(3 - 2n)\right] = (0 - 3) \times (-\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} 57.4. \quad \lim\left[\left(1 - \frac{n}{\sqrt{n}}\right)(1 - n) + n^2 \times n + 1\right] &= \\ &= \lim\left[\left(1 - \frac{n\sqrt{n}}{n}\right)(1 - n) + n^{-1} + 1\right] = \\ &= \lim\left[(1 - \sqrt{n})(1 - n) + n^{-1} + 1\right] = \\ &= (1 - \infty)(1 - \infty) + 0 + 1 = +\infty + 1 = +\infty \end{aligned}$$

$$58.1. \quad \lim a_n = \lim(n^{-2} + n^{-1}) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim u_n = \lim(n + 1) = +\infty; \quad \lim v_n = \lim(n^3 + n^2) = +\infty$$

$$\lim w_n = \lim[n(1 - n)] = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\begin{aligned} 58.2. \quad \lim(a_n \times u_n) &\stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim[(n^{-2} + n^{-1})(n + 1)] = \\ &= \lim(n^{-1} + n^{-2} + 1 + n^{-1}) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 58.3. \quad \lim(a_n \times v_n) &\stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim[(n^{-2} + n^{-1})(n^3 + n^2)] = \\ &= \lim(n + 1 + n^2 + n) = +\infty + 1 + \infty + \infty = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 58.4. \quad \lim(a_n \times w_n) &\stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim[(n^{-2} + n^{-1})(n - n^2)] = \\ &= \lim(n^{-1} + 1 + 1 - n) = 0 + 2 - \infty = -\infty \end{aligned}$$

$$59.1. \quad \lim \frac{2}{n^2(1 + n^{-3})} = 2 \times \frac{1}{+\infty} = 2 \times 0 = 0$$

$$59.2. \quad \lim \frac{3}{n^{-1} + n^{-2}} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$60.2. \quad \lim \frac{x_n - 2}{x_n^2 - 4} = \lim \frac{x_n - 2}{(x_n - 2)(x_n + 2)} = \lim \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 61.1. \quad \lim\left[\left(1 + \sqrt{n+1}\right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{1-n}\right] &= \\ &= (1 + \infty)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{-\infty} = +\infty + \infty = +\infty \end{aligned}$$

$$61.2. \quad \lim\left[(1-n)^5 \times \sqrt[4]{1+n}\right] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

$$62. \quad \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

62.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^{1-n}$

• $P(1)$ é verdadeira, pois $u_1 = 1 + 2^{1-1} \Leftrightarrow 2 = 1 + 1$ (V)

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, dados $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = 1 + 2^{1-n}$. Pretendemos, então, provar que:

$$u_{n+1} = 1 + 2^{1-(n+1)} = 1 + 2^{-n}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2} \quad (\text{pela fórmula de recorrência})$$

$$= \frac{1 + 1 + 2^{1-n}}{2} = \quad (\text{por hipótese})$$

$$= \frac{2 + 2^{1-n}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2^{1-n}}{2} = 1 + 2^{1-n-1} = 1 + 2^{-n}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária. Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^{1-n}$.

$$\begin{aligned} 62.2. \quad \lim u_n &= \lim(1 + 2^{1-n}) = \lim 1 + \lim(2 \times 2^{-n}) = \\ &= 1 + 2 \times \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 2 \times 0 = 1 \end{aligned}$$

$$63.1. \quad \lim \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{1+n-n^3}} = \frac{\lim \sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{\lim(-n)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-\infty}} = 0$$

$$63.2. \quad \lim(n + n^2 + 2^n)^{\frac{2}{3}} = (+\infty + \infty)^{\frac{2}{3}} = +\infty$$

$$\begin{aligned} 64.1. \quad \lim(\sqrt{n^2+1} - n) &\stackrel{(\infty-\infty)}{=} \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \\ &= \lim \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 64.2. \quad \lim(\sqrt{1+3n} - \sqrt{3} \sqrt{n}) &\stackrel{(\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim \frac{(\sqrt{1+3n} - \sqrt{3} \sqrt{n})(\sqrt{1+3n} + \sqrt{3} \sqrt{n})}{\sqrt{1+3n} + \sqrt{3} \sqrt{n}} = \\ &= \lim \frac{1 + 3n - 3n}{\sqrt{1+3n} + \sqrt{3} \sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 64.3. \quad \lim(3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 6n}) &\stackrel{(\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim \frac{(3n + 1 - \sqrt{9n^2 + 6n})(3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n})}{3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}} = \\ &= \lim \frac{9n^2 + 6n - 1 - 9n^2 - 6n}{3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}} = \lim \frac{1}{3n + 1 + \sqrt{9n^2 + 6n}} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60.1. \quad \lim \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{(x_n - 1)} = \\ &= \lim(x_n + 1) = \lim x_n + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$65.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{n+1}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+n}{2n-1}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$65.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(\sqrt{2}-1)n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$66.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+3}{4n-1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$66.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-2n}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-2n}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2n}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}-2}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

$$66.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{\frac{2n+1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \frac{2-\sqrt{1+0}}{\sqrt{2+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$66.4. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1-(n+2)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$66.5. \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1-\sqrt{9n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1-\sqrt{9n^2+n})(3n+1+\sqrt{9n^2+n})}{3n+1+\sqrt{9n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2-(9n^2+n)}{3n+1+\sqrt{9n^2+n}} = \frac{9n^2+6n+1-9n^2-1}{3n+1+n\sqrt{9+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{3n+1+n\sqrt{9+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}+\sqrt{9+\frac{1}{n}}\right)} = \frac{5+0}{3+0+\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3+3} = \frac{5}{6}$$

$$66.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \times 2}{4^n} = 2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 2 \times 0 = 0$$

$$66.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1}}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \times 5^{-1}}{3^n \times 3} = \frac{5^{-1}}{3} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{5^{-1}}{3} \times (+\infty) = +\infty$$

$$66.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^{n-1} - \pi^{n+1}}{2^{2n-2} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^n \times 2^{-1} - \pi^n \times \pi}{2^{2n} \times 2^{-2} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^n \times 2^{-1} - \pi^n \times \pi}{4^n \times 2^{-2} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2^n \times 2^{-1}}{4^n} - \frac{\pi^n \times \pi}{4^n}}{2^{-2} + \frac{3^n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n \times 2^{-1} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \times \pi}{2^{-2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1+0 \times 2^{-1} - 0 \times \pi}{2^{-2} \times 0} = \frac{1}{2^{-2}} = 4$$

$$66.9. \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[5^n \left(1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right) \right] = +\infty \times (1-0) = +\infty$$

$$66.10. \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 3 \times 5^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n \times 2 - 3 \times 5^n \times 5^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n \times 2 - \frac{3}{5} \right) \right] = +\infty \times \left(0 - \frac{3}{5} \right) = -\infty$$

$$66.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - \cos n}{n^3 + \cos n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{\cos n}{n^3}}{1 + \frac{\cos n}{n^3}} = \frac{2-0}{1+0} = 2, \text{ dado que,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \text{ e } \frac{1}{n^3} \rightarrow 0$$

$$\text{Logo, } \cos n \times \frac{1}{n^3} \rightarrow 0, \text{ ou seja, } \frac{\cos n}{n^3} \rightarrow 0.$$

$$66.12. \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^n \cos n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \times \cos n \right) \right] = +\infty(1-0) = +\infty, \text{ dado que,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \text{ e } \left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0$$

$$\text{Logo, } \left(\frac{2}{3} \right)^n \times \cos n \rightarrow 0.$$

$$67. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+2u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

67.1. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

• $P(1)$ é verdadeira, dado que $u_1 = 2$ e

$$u_2 = \sqrt{1+2 \times 2} = \sqrt{5}, \text{ logo, } u_2 > u_1$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos, por hipótese, que para um dado

$n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Pretendemos provar que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} > u_n &\Rightarrow 2u_{n+1} > 2u_n \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1 + 2u_{n+1} > 1 + 2u_n \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sqrt{1 + 2u_{n+1}} > \sqrt{1 + 2u_n} \Rightarrow \quad \left| \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N} \right. \\
 &\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}
 \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária. Portanto, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

b) Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_n < 3$

• $P(1)$ é verdadeira, pois como $u_1 = 2$, $u_1 < 3$.

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo, por hipótese, que $u_n < 3$ para determinado

$n \in \mathbb{N}$. Pretendemos provar que $u_{n+1} < 3$.

$$\begin{aligned}
 u_n < 3 &\Rightarrow 2u_n < 6 \Rightarrow 1 + 2u_n < 7 \Rightarrow \sqrt{1 + 2u_n} < \sqrt{7} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow u_{n+1} < 3, \text{ dado que } \sqrt{7} < 3 \text{ e a relação}
 \end{aligned}$$

“menor que” é transitiva

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

67.2. Toda a sucessão crescente e majorada é convergente. Logo, (u_n) é convergente.

67.3. Como (u_n) é convergente, $\lim u_{n+1} = \lim u_n$.

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n \Leftrightarrow \lim \sqrt{1 + 2u_n} = \lim u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2\lim u_n} = \lim u_n$$

Fazendo $L = \lim u_n$, vem:

$$\sqrt{1 + 2L} = L \Leftrightarrow (L > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2L = L^2 \Leftrightarrow L^2 - 2L - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \Leftrightarrow L = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = 1 - \sqrt{2} \vee L = 1 + \sqrt{2}$$

Como, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n < 3$, terá de ser $\lim u_n = 1 + \sqrt{2}$.

68.1. Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, a sucessão $n \mapsto a^n$ é uma progressão geométrica de razão $r = a$ e 1.º termo igual a a .

$$\sum_{k=1}^n a^k = a \times \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{a(1 - a^n)}{1 - a}$$

$$68.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a^k}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - a^n)}{1 - a} =$$

$$= \frac{a}{1 - a} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{a^n + b^n} = \quad (a > b > 1 \Rightarrow a^n \rightarrow +\infty \text{ e } b^n \rightarrow +\infty)$$

$$= \frac{a}{1 - a} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a^n} - 1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \quad \text{como } a > b > 1, 0 < \frac{b}{a} < 1$$

$$= \frac{a}{1 - a} \times \frac{0 - 1}{1 + 0} = \frac{a}{a - 1}$$

69.2. Como $u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow n = 5$ temos que $u_6 = u_5$

69.3. $u_n = an + b - n^2$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 10 - 2n \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(n+1) + b - (n+1)^2 - (an + b - n^2) = 10 - 2n \\ a + b - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} an + a + b - n^2 - 2n - 1 - an - b + n^2 = 10 - 2n \\ b = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 10 \\ b = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$70.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 3)}{(\sqrt{n} + 2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3\sqrt{n}}{n + 2\sqrt{n} + 4} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{4}{n}} = \quad \left| \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3\sqrt{\frac{1}{n}}}{1 + 2\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{4}{n}} = \frac{1 - 3 \times 0}{1 + 2 \times 0 + 0} = 1$$

$$70.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n \times |n - 10|}{2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(n - 10)}{2 - n^2} = \quad |n > 10 \Rightarrow n - 10 > 0|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 40n}{2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{-n^2} = -4$$

$$70.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4} = 1$$

$$70.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{(ab)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n b^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{a^n} = \frac{0 - 1}{+\infty} = 0 \quad \left| 1 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{b} < 1 \right|$$

$$71. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

71.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

• $P(1)$ é verdadeira porque $u_1 = 2 > 1$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo, por hipótese, que $u_n > 1$ para um dado $n \in \mathbb{N}$, pretendemos provar que $u_{n+1} > 1$.

$$u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{u_n} > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 \Rightarrow u_{n+1} > 1$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

$$71.2. u_2 = 2 - \frac{1}{u_1} = 2 - 1 = 1$$

$u_2 < u_1$. Logo, se (u_n) é monótona, é decrescente.

Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$.

$$69. \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 10 - 2n$$

$$69.1. \quad 10 - 2n > 0 \Leftrightarrow 2n < 10 \Leftrightarrow n < 5$$

$$10 - 2n = 0 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$$

$$10 - 2n < 0 \Leftrightarrow n > 5$$

Logo, (u_n) é não monótona.

• $P(1)$ é verdadeira, pois $u_2 < u_1$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitindo que para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, vamos provar que então $u_{n+2} < u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} < u_n &\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_{n+1}} < -\frac{1}{u_n} \Rightarrow 2 - \frac{1}{u_{n+1}} < 2 - \frac{1}{u_n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1} \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária e, pelo princípio de indução matemática, é universal, ou seja,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow (u_n)$ é monótona decrescente

71.3. A sucessão (u_n) é monótona decrescente e minorada.

Logo, (u_n) é convergente.

71.4. Como (u_n) é convergente, tem-se $\lim u_{n+1} = \lim u_n$.

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n \Leftrightarrow \lim \left(2 - \frac{1}{u_n} \right) = \lim u_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\lim u_n} = \lim u_n$$

Fazendo $L = \lim u_n$, vem:

$$2 - \frac{1}{L} = L \Leftrightarrow 2L - 1 - L^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow (L - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$$

Logo, $\lim u_n = 1$.

$$72. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

72.1. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $u_n = u_{n+3}$

Por indução matemática:

• $P(1)$ é verdadeira.

$$u_1 = 2; u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; u_3 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1;$$

$$u_4 = 1 - \frac{1}{-1} = 2 = u_1. \text{ Logo, } u_1 = u_{3+1}.$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+3}$.

$$\begin{aligned} u_n = u_{n+3} &\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+3}} \Rightarrow -\frac{1}{u_n} = -\frac{1}{u_{n+3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{1}{u_{n+3}} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n+4} \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Ficou provado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+3}$.

72.2. (u_n) é não monótona. Por exemplo: $u_3 < u_2$ e $u_4 > u_3$

72.3. Admitamos que (u_n) é convergente. Então, $\lim u_n = \lim u_{n+1}$

e o limite de (u_n) é solução desta equação.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} \Leftrightarrow \lim u_n = \lim \left(1 - \frac{1}{u_n} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim u_n = 1 - \frac{1}{\lim u_n} \Leftrightarrow \quad (\text{Fazendo } L = \lim u_n)$$

$$\Leftrightarrow L = 1 - \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = L - 1 \Leftrightarrow L^2 - L + 1 = 0$$

Esta equação é impossível, pois $\Delta = (-1)^2 - 4 < 0$.

Logo, (u_n) não é convergente pois não existe $\lim u_n$.

73. Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ e $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, então $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$.

73.1. Seja $u_n = 5^n + 2^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim \frac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{5^n + 2^n} = \lim \frac{5^n \times 5 + 2^n \times 2}{5^n + 2^n} = \\ &= \lim \frac{5 + \left(\frac{2}{5}\right)^n \times 2}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5 + 0 \times 2}{1 + 0} = 5 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \wedge \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{u_n} = 5 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{5^n + 2^n} = 5$$

73.2. Seja $u_n = n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

Logo, $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$, ou seja, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

73.3. Seja $u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}+1}{n+1+1}}{\frac{2^n+1}{n+1}} = \lim \frac{(n+1)(2^{n+1}+1)}{(n+2)(2^n+1)} =$$

$$= \lim \frac{n+1}{n+2} \times \lim \frac{2^n \times 2 + 1}{2^n + 1} = 1 \times \lim \frac{2 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} =$$

$$= 1 \times \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$\text{Logo, } \lim \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n+1}} = 2.$$

$$73.4. \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{Seja } u_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \lim \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\text{Logo, } \lim \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

74. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} - u_n = 4$

74.1. Se a sucessão (u_n) é constante, $u_{n+1} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$3u_{n+1} - u_n = 4 \Leftrightarrow 3u_n - u_n = 4 \Leftrightarrow 2u_n = 4 \Leftrightarrow u_n = 2$$

Logo, a sucessão (u_n) é constante se $u_1 = 2$.

74.2. a) Se (v_n) é uma progressão geométrica, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ é constante.

$$v_n = u_n + k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+1} - u_n = 4 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} + k}{u_n + k} = \frac{\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} + k}{u_n + k} = \\ &= \frac{\frac{1}{3}(u_n + 4 + 3k)}{u_n + k} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n + 4 + 3k}{u_n + k} \end{aligned}$$

A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica se

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 4 + 3k = u_n + k.$$

$$4 + 3k = k \Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2$$

Temos, portanto, $k = -2$ e $r = \frac{1}{3}$.

b) $v_n = u_n - 2$

$$v_1 = u_1 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ e } u_n = v_n + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2$$

c) $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n v_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n u_p &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} + 2 \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} + \sum_{p=1}^n 2 \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} + \lim_{p \rightarrow \infty} (2n) = \frac{3}{2} + \infty = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

75. $u_n = \frac{n^2}{5^n}$

75.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{n^2}{5^n}} = \frac{5^n (n+1)^2}{5^{n+1} \times n^2} = \frac{5^n (n^2 + 2n + 1)}{5^n \times 5n^2} =$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

75.2. $n^2 + 2n + 1 < 5n^2, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 4n^2 - 2n - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Proposição verdadeira porque $4 > 0$ e $\Delta = (-2)^2 + 16 < 0$.

Logo, $\frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \text{ pois } u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$, (u_n) é monótona decrescente.

75.3. $\frac{n^2}{5^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é convergente por ser uma sucessão monótona decrescente e minorada.

75.4. Como (u_n) é convergente temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Portanto, se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ vem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n} = 1$

Por outro lado: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5}$

75.5. Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe porque (u_n) é convergente.

Se admitirmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ somos conduzidos à

contradição $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5}$.

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Pág. 226

Avaliação 2

1. $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - b_n) = 3 \times 3 - 3 = 6$$

Resposta: (A)

2. $u_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{a_n}{b_n}}{1 + \frac{a_n}{b_n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Resposta: (B)

3. $\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$u_1 = a, u_2 = \frac{1}{a}, u_3 = a, u_4 = \frac{1}{a}, \dots$$

(u_n) é limitada porque o conjunto dos termos de (u_n) é igual a

$$\left\{ a, \frac{1}{a} \right\}, \text{ logo é limitado.}$$

Resposta: (B)

4. $u_n = \frac{3^{2n}}{2 \times a^n} = \frac{(3^2)^n}{2 \times a^n} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{a}\right)^n$

Se $u_n \rightarrow 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$0 < \frac{9}{a} < 1 \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow a > 9 \Leftrightarrow a \in]9, +\infty[$$

Resposta: (A)

5. I é falsa.

Por exemplo, se $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ e $u_n \rightarrow 0$. No entanto, (u_n) não é decrescente.

II é verdadeira.

Resposta: (A)

6. Os comprimentos dos arcos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. O comprimento do primeiro arco é igual a

$$\frac{2\pi \times 1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

O comprimento da linha quando $n \rightarrow +\infty$ é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

Resposta: (D)

$$7. \quad u_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim u_n = 0 \quad \text{dado que} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad -1 \leq \sin \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = \sqrt{n} + 1$$

$$\lim v_n = \lim (\sqrt{n} + 1) = +\infty$$

$$\lim (u_n \times v_n) = \lim \left[\frac{1}{n} \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) \times (\sqrt{n} + 1) \right] =$$

$$= \lim \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{n} \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 0 \quad \text{dado que}$$

$$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$$

$$\bullet \quad \lim \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{n} \right) = \lim \left(\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \right) = \lim \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \right) = 0$$

e o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para zero tem limite nulo.

Resposta: (C)

Pág. 227

$$8. \quad u_n = \frac{1-n}{100+8n} \quad \text{e} \quad v_n = \sqrt{4n^2 + 4n} - 2n + 3$$

8.1. Seja δ um número positivo qualquer.

$$\left| u_n - \left(-\frac{1}{8} \right) \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1-n}{100+8n} + \frac{1}{8} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{8-8n+100+8n}{800+64n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{108}{800+64n} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{108}{800+64n} < \delta \Leftrightarrow 108 < 800\delta + 64n\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64n\delta > 108 - 800\delta \Leftrightarrow n > \frac{108 - 800\delta}{64\delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{27 - 200\delta}{16\delta}$$

Logo, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$

(neste caso, p é qualquer natural maior ou igual a

$$\frac{27 - 200\delta}{16\delta}), \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow \left| u_n - \left(-\frac{1}{8} \right) \right| < \delta$$

$$\text{Portanto, } u_n \rightarrow -\frac{1}{8}.$$

$$8.2. \quad A =]-0,135; -0,115[$$

$$\text{a) } A = V_\delta(a)$$

$$a = \frac{-0,115 - 0,135}{2} = -0,125$$

$$\delta = -0,115 - (-0,125) = 0,01$$

$$\text{b) Para } \delta = 0,01, \quad p \geq \frac{27 - 200 \times 0,01}{16 \times 0,01} \wedge p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \geq 157 \quad \text{e} \quad p \in \mathbb{N}$$

Não pertencem a $V_{0,01}(-0,125)$, 156 termos.

$$8.3. \quad \text{a) } \lim v_n = \lim \left(\sqrt{4n^2 + 4n} - 2n + 3 \right)^{(\infty - \infty)} =$$

$$= \lim \frac{(\sqrt{4n^2 + 4n} - (2n - 3))(\sqrt{4n^2 + 4n} + (2n + 3))}{\sqrt{4n^2 + 4n} + (2n + 3)} =$$

$$= \lim \frac{4n^2 + 4n - (4n^2 - 12n + 9)}{\sqrt{4n^2 + 4n} + (2n + 3)} =$$

$$= \lim \frac{16n - 9}{n\sqrt{4 + \frac{4}{n}} + 2n + 3} =$$

$$= \lim \frac{16 - \frac{9}{n}}{\sqrt{4 + \frac{4}{n}} + 2 + \frac{3}{n}} = \frac{16 - 0}{\sqrt{4 + 0} + 2 + 0} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{b) } \lim \left(\sqrt[3]{u_n} \times v_n + \sqrt[3]{3} \right) = \sqrt[3]{\lim u_n} \times \lim v_n + \lim \sqrt[3]{3} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \times 4 + 1 = -\frac{1}{2} \times 4 + 1 = -1$$

$$9. \quad v_n = 100 - 4n$$

9.1. Seja L um número positivo qualquer.

$$V_n < -L \Leftrightarrow 100 - 4n < -L \Leftrightarrow 4n > 100 + L \Leftrightarrow n > \frac{100 + L}{4}$$

Logo, sendo p um número natural maior ou igual a

$$\frac{100 + L}{4}, \text{ vem } \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow u_n < -L.$$

Portanto, $u_n \rightarrow -\infty$

$$9.2. \quad v_{n+1} - v_n = 100 - 4(n+1) - (100 - 4n) =$$

$$= 100 - 4n - 4 - 100 + 4n =$$

$$= -4, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -4$.

$$9.3. \quad S_n = \sum_{p=1}^n v_p = \frac{v_1 + v_n}{2} \times n = \frac{96 + 100 - 4n}{2} \times n =$$

$$= \frac{196 - 4n}{2} \times n = (98 - 2n) \times n$$

$$S_n = 98n - 2n^2$$

$$9.4. \quad \sum_{p=1}^n v_p = 0 \Leftrightarrow 98n - 2n^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n(49 - n) = 0 \Leftrightarrow n = 49$$

$$9.5. \quad \lim \sum_{p=1}^n v_p = \lim (98n - 2n^2) = \lim (-2n^2) = -\infty$$

$$10. \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{(2n-15)(2n+1)}$$

$$10.1. \quad 2n - 15 < 0 \Leftrightarrow 2n < 15 \Leftrightarrow n \leq 7$$

$$2n - 15 > 0 \Leftrightarrow n \geq 8$$

Logo, (u_n) não é monótona.

$$10.2. \quad \text{Se } n \leq 7, \quad u_{n+1} - u_n > 0.$$

$$\dots u_5 < u_6 < u_7 < u_8 > u_9 > u_{10} \dots$$

$$\text{Se } n \geq 8, \quad u_{n+1} - u_n < 0.$$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_8$ pelo que u_8 é majorante de (u_n) .

$$10.3. \quad u_8 - u_7 = \frac{-3}{(14-15)(14+1)} = \frac{-3}{-1 \times 15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$u_8 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow u_8 = \frac{5}{5} \Leftrightarrow u_8 = 1$$

$$11. \begin{cases} u_1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 11.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_n > 0$
 • $P(1)$ é verdadeira dado que $u_1 = 1 > 0$
 • $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Se $u_n > 0$, então $\sqrt{1+u_n} > 0$ pelo que $\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} > 0$.

Portanto, $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$, ou seja, $P(n)$ é hereditária.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$11.2. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n} \times \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_n}}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, temos que $\sqrt{1+u_n} > 1$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{1+u_n}} < 1$. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, ou seja,

(u_n) é decrescente.

- 11.3. (u_n) é convergente porque toda a sucessão decrescente e minorada é convergente.

- 11.4. Como (u_n) é convergente sabemos que $\lim u_n = \lim u_{n+1}$.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} \Leftrightarrow \lim u_n = \lim \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} \Leftrightarrow \lim u_n = \frac{\lim u_n}{\sqrt{1+\lim u_n}}$$

Fazendo $\lim u_n = L$:

$$L = \frac{L}{\sqrt{1+L}} \Leftrightarrow (\sqrt{1+L} > 0) \\ \Leftrightarrow L\sqrt{1+L} - L = 0 \Leftrightarrow L(\sqrt{1+L} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow L = 0 \vee \sqrt{1+L} = 1 \Leftrightarrow L = 0 \vee 1+L = 1 \Leftrightarrow L = 0$$

Logo, $\lim u_n = 0$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^4 - 1}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n^3 + x_n^2 + x_n + 1)}{(x_n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = (\lim x_n)^3 + (\lim x_n)^2 + \lim x_n + 1 = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$$

$$13. \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n + 1)^2}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 13.1. Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$
 • $P(1)$ é verdadeira dado que $u_1 = 2$.

$$u_2 = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{9}{2}, \text{ pelo que } u_2 > u_1.$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, para dado $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Pretendemos provar que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+1} + 1 > u_n + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (u_{n+1} + 1)^2 > (u_n + 1)^2 \Rightarrow (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow \frac{(u_{n+1} + 1)^2}{2} > \frac{(u_n + 1)^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, ou seja, (u_n) é monótona crescente.

- 13.2. Admitamos que (u_n) é convergente, sendo $\lim(u_n) = L$
 Então, $\lim u_n = \lim u_{n+1}$ e esta equação admite pelo menos L como solução.

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} \Leftrightarrow \lim u_n = \lim \frac{(u_n + 1)^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim u_n = \frac{(\lim u_n + 1)^2}{2} \Leftrightarrow L = \frac{(L + 1)^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow L^2 + 2L + 1 = 2L \Leftrightarrow L^2 + 1 = 0$$

Esta equação é impossível. Logo, não existe $\lim u_n$, ou seja, (u_n) é divergente.

- 13.3. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.
 Como (u_n) é monótona e não convergente, então não é limitada.

$$14. \begin{cases} v_1 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n - v_n^2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 14.1. $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Para concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n < 0$ temos de provar que

$$v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Temos que } v_1 = \frac{1}{2} > 0.$$

Se $v_{n+1} - v_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $v_n \leq v_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, $v_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $v_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = 0 \Leftrightarrow v_n - v_n^2 = 0 \Leftrightarrow v_n(1 - v_n) = 0 \Leftrightarrow v_n = 0 \vee v_n = 1$$

Como $v_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ temos que $v_n \neq 0 \Rightarrow v_{n+1} \neq 0$.

$$v_1 \neq 0 \wedge v_n \neq 0 \Rightarrow v_{n+1} \neq 0$$

Logo, pelo princípio de indução matemática $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-v_n^2 < 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n < 0$.

(v_n) é monótona decrescente.

- 14.2. Seja $P(n)$ a condição, em $\mathbb{N}$: $v_n > 0$

- $P(1)$ é verdadeira porque $v_1 = \frac{1}{2} > 0$.

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, por hipótese, para dado $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

Pretendemos provar que $v_{n+1} > 0$.

$$v_{n+1} > 0 \Leftrightarrow v_n - v_n^2 > 0 \Leftrightarrow v_n(1 - v_n) > 0$$

$v_n > 0$, por hipótese.

$$\text{Já vimos que } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, $v_n < 1$ pelo que $1 - v_n > 0$

Portanto, $v_n(1 - v_n) > 0$, ou seja, $v_n > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0$.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

- 14.3. (v_n) é decrescente e minorada. Logo, (v_n) é convergente.

- 14.4. Como (v_n) é convergente,

$$\lim v_{n+1} = \lim v_n \Leftrightarrow \lim (v_n - v_n^2) = \lim v_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim v_n - (\lim v_n)^2 = \lim v_n \Leftrightarrow (\lim v_n)^2 = 0 \Leftrightarrow \lim v_n = 0$$

Avaliação global

- 1.
- $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$
- e
- $b_n \rightarrow +\infty$

$$\lim \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = \lim \frac{\frac{a_n b_n}{b_n}}{\frac{a_n + b_n}{b_n}} = \lim \frac{\frac{a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n} + 1} = \frac{a}{+\infty} = \frac{a}{0+1} = a$$

Resposta: (A)

- 2.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 1$

 (u_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

$$u_n = n + b, b \in \mathbb{R}$$

$$\lim u_n = +\infty$$

Resposta: (C)

- 3.
- $\lim u_n = 2$

Qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n \in V_\delta(2)$$

Portanto, em qualquer vizinhança de 2 existe uma infinidade de termos de (u_n) . Assim, (u_n) tem uma infinidade de termos positivos.

Resposta: (D)

- 4.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\bullet u_5 - u_4 = \frac{-1}{6 \times 5} = -\frac{1}{30}$$

$$\bullet u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é decrescente pelo que $u_{10} < u_5$.

$$\bullet u_9 - u_8 = \frac{-1}{10 \times 9} = -\frac{1}{90}. \text{ Logo, } u_9 + \frac{1}{90} = u_8$$

Resposta: (C)

5. Seja
- (a_n)
- a sucessão das áreas dos quadrados
- $a_1 = 1$
- e
- $a_n = a^2$
- .

$$a_{n+1} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a^2) = \frac{1}{4} \times 2a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

 (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ sendo $a_1 = 1$

$$\lim S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Resposta: (A)

6. $v_n = \frac{n-1}{3n-10}$

6.1. $v_n = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{n-1}{3n-10} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 8n-8=9n-30 \Leftrightarrow n=22$

$$v_{22} = \frac{3}{8}$$

- 6.2. Seja
- δ
- um número positivo qualquer

$$\left|v_n - \frac{1}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{n-1}{3n-10} - \frac{1}{3}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3-3n+10}{9n-30}\right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{7}{9n-30}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{7}{9n-30} < \delta \Leftrightarrow 7 < 9n\delta - 30\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9n\delta > 7+30\delta \Leftrightarrow n > \frac{7+30\delta}{9\delta}$$

Qualquer que seja $\delta > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|v_n - \frac{1}{3}\right| < \delta.$$

 p é qualquer número natural igual ou superior a $\frac{7+30\delta}{9\delta}$.

$$\text{Logo, } v_n \rightarrow \frac{1}{3}.$$

6.3. $v_n \in]0, 29 ; 0, 41[\Leftrightarrow \frac{n-1}{3n-10} > 0, 29 \wedge \frac{n-1}{3n-10} < 0, 41 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n-1 > 0, 87n-2, 9 \wedge n-1 < 1, 23n-4, 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-0, 87n > 1-2, 9 \wedge n-1, 23n < 1-4, 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0, 13n > -1, 9 \wedge -0, 23n < -3, 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n > \frac{3, 1}{0, 23} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n > 13$$

O menor valor de p é 14.

6.4. $v_2 = -\frac{1}{4}, v_3 = -2, v_4 = \frac{3}{2}$

$$v_3 < -2 \text{ e } v_4 > v_3$$

 (v_n) é não monótona.Como (v_n) é convergente, logo é limitada.

Portanto, a proposição é falsa.

6.5. $\lim v_n = \frac{1}{3}$

$$\lim v_{n+2k} = \lim v_{n+3k} = \lim v_n = \frac{1}{3}$$

$$\lim (v_{n+2k} + 2v_{n+3k}) = \lim v_{n+2k} + 2\lim v_{n+3k} = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

7. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ 2a_{n+1} + 3 = 2a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

7.1. $a_{n+1} - a_n = -\frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

 (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -\frac{3}{2}$

7.2. $a_n = a_1 + (n-1) \times r = 2 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right) =$

$$= 2 - \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} = \frac{7-3}{2}n$$

$$a_n = \frac{7-3n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

7.3. $\sum_{k=1}^{25} a_k = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \times 25 = \frac{2-34}{2} \times 25 = -400$

- 7.4. Seja
- L
- um número positivo qualquer

$$a_n < -L \Leftrightarrow \frac{7-3n}{2} < -L \Leftrightarrow 7-3n < -2L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n > 7+2L \Leftrightarrow n > \frac{7+2L}{3}$$

Qualquer que seja $L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$$

Tem-se p igual ou superior a $\frac{7+2L}{3}$.Portanto, $a_n \rightarrow -\infty$

- 7.5. Se
- $L = 2000$
- :

$$p \geq \frac{7+2 \times 2000}{3} \wedge p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p \geq 1336 \text{ e } p \in \mathbb{N}$$

$$8. \begin{cases} u_1 = \frac{3}{4} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{8} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$8.1. \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{8} \times u_n$$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{8}$

$$8.2. u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \times \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \\ &= \frac{3}{4} \times 8 \times \left(2^{-3}\right)^n = 3 \times 2 \times 2^{-3n} = 3 \times 2^{1-3n} \\ u_n &= 3 \times 2^{1-3n} \end{aligned}$$

$$8.3. S_k = u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = \frac{3}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k}{1-\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} \times \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^k\right] = \frac{6}{7} \times \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^k\right]$$

$$8.4. \lim S_n = \frac{u_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{7}$$

Pág. 230

$$9. \begin{cases} w_1 = a \\ 5w_{n+1} - 2w_n = 6, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = a \\ w_{n+1} = \frac{2}{5}w_n + \frac{6}{5}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

9.1. Se (w_n) é constante, então $w_{n+1} = w_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$5w_{n+1} - 2w_n = 6, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $w_{n+1} = w_n, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$5w_n - 2w_n = 6, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3w_n = 6, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, $w_1 = 2$.

9.2. a) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $w_{n+1} < w_n$

• $P(1)$ é verdadeira, pois $w_2 = \frac{2}{5} \times 5 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$ pelo que

$$w_2 < w_1.$$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Admitamos que, para dado $n \in \mathbb{N}$, se tem $w_{n+1} < w_n$.

Pretendemos provar que $w_{n+2} < w_{n+1}$.

$$w_{n+1} < w_n \Rightarrow \frac{2}{5}w_{n+1} < \frac{2}{5}w_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}w_{n+1} + \frac{6}{5} < \frac{2}{5}w_n + \frac{6}{5} \Rightarrow w_{n+2} < w_{n+1}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária.

Pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} < w_n$, ou seja, (w_n) é monótona

decrecente.

b) Seja $P(n)$ a condição em $\mathbb{N}$: $w_n > 2$

• $P(1)$ é verdadeira porque $w_1 = 5 > 2$

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$w_n > 2 \Rightarrow \frac{2}{5}w_n > \frac{2}{5} \times 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \times w_n + \frac{6}{5} > 2 + \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_{n+1} > 2 \text{ dado que } 2 + \frac{6}{5} > 2$$

Portanto, $P(n)$ é hereditária.

Por indução matemática temos que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > 2$.

9.3. Como (w_n) é decrescente e minorada, então é convergente.

Logo, $\lim w_{n+1} = \lim w_n$

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n \Leftrightarrow \lim \left(\frac{2}{5}w_n + \frac{6}{5}\right) = \lim w_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \lim w_n + \frac{6}{5} = \lim w_n \Leftrightarrow \frac{3}{5} \lim w_n = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim w_n = 2$$

9.4. $v_n = w_n - k$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{w_{n+1} - k}{w_n - k} = \frac{\frac{2}{5}w_n + \frac{6}{5} - k}{w_n - k} = \frac{\frac{2}{5}(w_n + 3 - \frac{5}{2}k)}{w_n - k}$$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{5}$ se

$$3 - \frac{5}{2}k = -k$$

$$3 - \frac{5}{2}k = -k \Leftrightarrow 6 - 5k = -2k \Leftrightarrow 3k = 6 \Leftrightarrow k = 2$$

9.5. $v_1 = w_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

$$v_n = v_1 \times r^{n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \text{ e } w_n = v_n + 2 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 2$$

10.1. $\lim a_n = \lim \left(\sqrt{n^2 - 6n} - n\right) \stackrel{(\infty-\infty)}{=} =$

$$= \lim \frac{(\sqrt{n^2 - 6n} - n)(\sqrt{n^2 - 6n} + n)}{\sqrt{n^2 - 6n} + n} =$$

$$= \lim \frac{n^2 - 6n - n^2}{\sqrt{n^2 - 6n} + n} =$$

$$= \lim \frac{-6n}{n\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + n} = \lim \frac{-6n}{n\left(\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + 1\right)} =$$

$$= \lim \frac{-6}{\sqrt{1 - \frac{6}{n}} + 1} = \frac{-6}{\sqrt{1-0} + 1} = -\frac{6}{2} = -3$$

10.2. $\lim b_n = \lim \frac{\sqrt{9n^2 - 1} \stackrel{(\infty)}{}}{n\sqrt{n^2 + 1}} =$

$$= \lim \frac{\sqrt{n^2 \left(9 - \frac{1}{n^2}\right)}}{n\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} = \lim \frac{n\sqrt{9 - \frac{1}{n^2}}}{n^2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n^2}}}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{9-0}}{+\infty(1+0)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\begin{aligned}
10.3. \lim c_n &= \lim (2 \times \pi^{n+1} - 3^{n-1}) = \\
&= \lim (2 \times \pi^n \times \pi - 3^n \times 3^{-1}) = \\
&= \lim \left[\pi^n \left(2\pi - \left(\frac{3}{\pi} \right)^n \times 3^{-1} \right) \right] = \\
&= +\infty \times (2\pi - 0 \times 3^{-1}) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.4. \lim d_n &= \lim \frac{n + (-1)^n}{2n + \sin n} = \lim \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{\sin n}{n}} = \\
&= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

Portanto $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ e $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ porque o produto de uma

sucessão limitada por uma sucessão que tende para zero é uma sucessão de limite nulo.

$$11. \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 9$$

$$11.1. \overline{DB} = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ e } \overline{BE} = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

$$\widehat{DBE} = 60^\circ$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \times \overline{DB} \times \overline{BE} \times \cos \widehat{DBE}$$

$$\overline{DE}^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos 60^\circ$$

$$\overline{DE}^2 = 36 + 9 - 2 \times 18 \times \frac{1}{2}$$

$$\overline{DE}^2 = 27$$

$$\overline{DE} = \sqrt{27}$$

$$\overline{FE} = \overline{DF} = \overline{DE} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{GH}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{EH}^2 - 2 \times \overline{GE} \times \overline{EH} \times \cos 60^\circ$$

$$\overline{GH}^2 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{27} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \sqrt{27} \right)^2 - \frac{2}{3} \sqrt{27} \times \frac{1}{3} \sqrt{27}$$

$$\overline{GH}^2 = \frac{4}{9} \times 27 + \frac{1}{9} \times 27 - \frac{2}{9} \times 27$$

$$\overline{GH}^2 = \frac{3}{9} \times 27$$

$$\overline{GH}^2 = 9$$

$$\overline{GH} = 3 = \overline{IH} = \overline{GI}$$

11.2. a) Seguindo o mesmo processo, se u_n é a medida do lado de um dos triângulos, então

$$u_{n+1}^2 = \left(\frac{2}{3} u_n \right)^2 + \left(\frac{1}{3} u_n \right)^2 - 2 \times \frac{2}{3} u_n \times \frac{1}{3} u_n \times \cos 60^\circ$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{4}{9} u_n^2 + \frac{1}{9} u_n^2 - \frac{2}{9} u_n^2$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{3}{9} u_n^2, \text{ como } u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ vem}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{9}} u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, (u_n) é uma progressão geométrica de razão

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$b) u_n = u_1 \times r^{n-1} = 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{n-1} = 3^2 \times \left(3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-1} \right)^{n-1} =$$

$$= 3^2 \times \left(3^{-\frac{1}{2}} \right)^{n-1} = 3^2 \times 3^{\frac{1-n}{2}} = 3^{2+\frac{1-n}{2}} = 3^{\frac{4+1-n}{2}}$$

$$u_n = 3^{\frac{5-n}{2}}$$

11.3. a) Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ então } (b_n) \text{ é uma progressão geométrica de}$$

$$\text{razão } r^2 = \frac{1}{3} = r'$$

Cálculo de b_1 :

$$h^2 + \left(\frac{9}{2} \right)^2 = 9^2 \Leftrightarrow h^2 = 81 - \frac{81}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3 \times 81}{47} \Rightarrow h = \frac{9}{2} \sqrt{3}$$

$$b_1 = \frac{9 \times \frac{9}{2} \sqrt{3}}{2} = \frac{81}{4} \sqrt{3}$$

$$b_n = b_1 \times (r')^{n-1} = \frac{81}{4} \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{4} \times 3^4 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{1-n}$$

Como a soma dos expoentes é:

$$4 + \frac{1}{2} + 1 - n = \frac{10 + 1 - 2n}{2} = \frac{11 - 2n}{2}$$

$$\text{pelo que } b_n = \frac{1}{4} \times 3^{\frac{11-n}{2}}.$$

$$b) \lim_{k=1}^n b_k = \frac{b_1}{1-r'} = \frac{\frac{81}{4} \sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{81}{4} \sqrt{3} = \frac{243 \sqrt{3}}{8}$$