

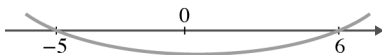
Atividade de diagnóstico

Pág. 8

1.1. a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x - 30 \leq 0\}$

$$x^2 - x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 11}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 6$$



$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-1} = x-3\}$

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Rightarrow x-1 = (x-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 5$$

Verificação:

$$x = 2: \sqrt{2-1} = 2-3 \Leftrightarrow \sqrt{1} = -1 \text{ (F)}$$

$$x = 5: \sqrt{5-1} = 5-3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \text{ (V)}$$

$$B = \{5\}$$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é divisor de } 12\}$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

d) $A \cap B = \{5\} = B$

$$A \cup B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A$$

e) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$A \cup C = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$$

f) $B \cap C = \{5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \emptyset$

$$B \cup C = \{5\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$$

1.2. Por exemplo:

a) $P = \{0, 1, 2\}$ e $Q = \{3, 4\}$

b) $P = \{0, 1, 2\}$ e $Q = \{2, 3, 4\}$

c) $P = \{0, 1, 2\}$ e $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $P = \{0, 1, 2\}$ e $Q = \{0, 1\}$

e) $P = \{-5, -4, -3, -1, 2, 0, 1\}$ e

$$Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1.3. a) Afirmação verdadeira

b) Afirmação falsa porque $5 \notin C$

c) Afirmação verdadeira

d) Afirmação falsa. 5 é o único elemento de B e $\{5\} \neq 5$.e) Afirmação falsa porque o conjunto $\{2, 3\}$ não é elemento de C

f) Afirmação verdadeira

g) Afirmação verdadeira

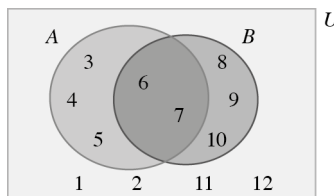
h) Afirmação verdadeira

Pág. 9

2. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$



2.1. $A \cap B = \{6, 7\}$

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

2.2. $A \setminus B = \{3, 4, 5\}$

$$B \setminus A = \{8, 9, 10\}$$

2.3. $\bar{A} = \{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$\bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12\}$$

2.4. $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12\} = \overline{A \cap B}$

2.5. $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 2, 11, 12\} = \overline{A \cup B}$

3. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \geq \frac{x}{x+2}\right\}$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - (x+2)}{x(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x(x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2, -1] \cup]0, 2]$$

Cálculos auxiliares:

$$\bullet x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$$

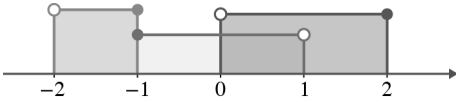
$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

$$\bullet x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1		0		2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x(x+2)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
Q	+	n.d	-	0	+	n.d	-	0	+

$$A =]-2, -1] \cup]0, 2]$$

$$B = [-1, 1[$$



$$3.1. A =]-2, -1] \cup]0, 2]$$

$$3.2. A \cap B = \{-1\} \cup]0, 1[$$

$$3.3. A \cup B =]-2, 2]$$

$$3.4. \bar{A} =]-\infty, -2] \cup]-1, 0] \cup]2, +\infty[$$

$$3.5. \bar{B} =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

$$3.6. A \setminus B =]-2, -1[\cup [1, 2] = A \cap \bar{B}$$

$$3.7. B \setminus A =]-1, 0] = B \cap \bar{A}$$

$$4. A = \{1, 2, 3\} \text{ e } B = \{a, b\}$$

$$4.1. \text{ a) } A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$\text{ b) } B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$\text{ c) } A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

4.2. Por exemplo:

$$\bullet (1, a, 2) \in A \times B \times A$$

$$\bullet (a, b, b) \in B^3$$

1.1. Introdução ao cálculo combinatório

Pág. 10

Atividade inicial 1

$$1. U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{3, 4, 7, 8, 10\}$$

$$C = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$1.1. A \cap B = \{3, 4\}$$

$$A \cap C = \{3, 5, 6\}$$

$$B \cap C = \{3, 7, 8\}$$

$$1.2. A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$2.1. (A \cap B) \cap C = \{3\} = A \cap (B \cap C)$$

$$2.2. A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{3, 7, 8\} = \\ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \\ = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$2.3. (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \\ = A \cup (B \cup C)$$

$$2.4. A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \\ = \{3, 4, 5, 6\} = \\ = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Pág. 12

$$1.1. A \cup B = B \cup A$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in B \cup A$$

$$1.2. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

$$1.3. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$2.1. (\bar{A} \cup B) \cup A = \bar{A} \cup B \cup A =$$

$$= (\bar{A} \cup A) \cup B =$$

$$= U \cup B = U$$

$$2.2. (\bar{A} \cup B) \cap A = (\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A) =$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B) =$$

$$= A \cap B$$

$$2.3. (\bar{A} \cap B) \cap A = \bar{A} \cap B \cap A =$$

$$= (\bar{A} \cap A) \cap B =$$

$$= \emptyset \cap B = \emptyset$$

3. $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) =$ Leis de De Morgan

$$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) =$$

Distributividade

$$= A \cup (B \cap \overline{B}) =$$
$$= A \cup \emptyset = A$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5.2.} \quad & (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C}) = \\ & = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = \\ & = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{C}) = \\ & = A \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = \qquad B \subset C \Leftrightarrow \overline{C} \subset \overline{B} \Leftrightarrow \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{C} \\ & = A \cup \overline{C} \end{aligned}$$

4.1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$

4.2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = B \setminus A$

$$\begin{aligned} \mathbf{4.3.} \quad A \cap (\overline{A \cup B}) &= A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \\ &= (A \cap \overline{A}) \cap B = \\ &= \emptyset \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

4.4. $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) =$
 $= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$
 $= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) =$
 $= (A \cap \bar{A}) \cup B =$
 $= \emptyset \cup B = B$

4.5. $\left(\overline{A \cap B}\right) \setminus A = \left(\overline{A \cup B}\right) \setminus A =$
 $= (A \cup \overline{B}) \cap \overline{A} =$
 $= (A \cap \overline{A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A}) =$
 $= \emptyset \cup (\overline{B \cap A}) = \overline{A \cap B}$

$$\begin{aligned}
4.6. \quad \bar{B} \cup \left[\left(\overline{A \cap B} \right) \cap B \right] &= \\
&= \bar{B} \cup \left[\left(\bar{A} \cup \bar{B} \right) \cap B \right] = \\
&= \bar{B} \cup \left[\left(\bar{A} \cup B \right) \cap B \right] = \\
&= \left[\bar{B} \cup \left(\bar{A} \cup B \right) \right] \cap \left(\bar{B} \cup B \right) = \\
&= \left[\left(\bar{B} \cup B \right) \cup \bar{A} \right] \cap U = \\
&= \left(U \cup \bar{A} \right) \cap U = U \cup \bar{A} = U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5.1.} \quad (A \setminus B) \cap \bar{C} &= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = \quad \bar{C} \subset \bar{B} \Leftrightarrow \bar{B} \cap \bar{C} = \bar{C} \\ &= A \cap \bar{C} = \\ &= A \setminus C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & (B \times A) \cup (C \times A) = \\ & = (B \cup C) \times A = \\ & = \{a, b, c\} \times \{a, d\} = \\ & = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d)\} \end{aligned}$$

7. $3 + 2 = 5$

A Sara tem cinco possibilidades de escolha.

8.	<u>Concertos</u>	<u>Filmes</u>
	2	4

8.1. $2 + 4 = 6$

O João pode escolher um dos eventos de seis maneiras diferentes.

8.2. $2 \times 4 = 8$
O João pode fazer a escolha de oito maneiras diferentes.

9.1.	<u>Entrada</u>	<u>Prato</u>	<u>Sobremesa</u>
	2	4	3
	$2 \times 4 \times 3 = 24$		

É possível fazer 24 refeições diferentes.

9.2. Entrada Prato Sobremesa

1	2	3
1	4	3

$$1 \times 2 \times 3 + 1 \times 4 \times 3 = 6 + 12 = 18$$

Sopa de peixe
Salada

ou

$$24 - 1 \times 2 \times 3 = 24 - 6 = 18$$

- Refeições com sopa de peixe e prato de peixe

É possível fazer 18 refeições diferentes.

10. $\frac{\text{Ida}}{4 \times 3} \times \frac{\text{Volta}}{2 \times 3} = 72$

O Alexandre pode escolher 72 caminhos diferentes.

11. Há três maneiras para escolher o rapaz que fica no lugar do meio da fila da frente. Relativamente aos restantes

cinco lugares há cinco maneiras de escolher o ocupante do 1.º, quatro maneiras de escolher o ocupante do 2.º, e assim sucessivamente:

Lugar do meio (fila da frente)	Restantes lugares 1.º 2.º 3.º 4.º 5.º
3	5 4 3 2 1

$$3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$$

Há 360 maneiras de ocuparem os seis lugares.

12. • Há quatro maneiras de escolher os lugares das raparigas (1 e 2, 2 e 3, 3 e 4 ou 4 e 5). Escolhidos os dois lugares há duas maneiras de sentar as raparigas (pode ser AB ou BA). Há, portanto, $4 \times 2 = 8$ maneiras de as raparigas ocuparem os lugares.
- No que respeita aos três rapazes do grupo, para o 1.º há três hipóteses de escolha de lugar, para o 2.º há duas hipóteses e para o 3.º só há um lugar disponível:

1.º	2.º	3.º	Rapazes
3	2	1	Hipóteses de escolha

Logo, os restantes quatro podem ocupar os lugares de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.

Os cinco jovens podem ocupar os lugares de $8 \times 6 = 48$ maneiras diferentes.

Pág. 21

- 13.1. $\frac{1.^\circ A}{6} \frac{2.^\circ A}{6} \frac{3.^\circ A}{5}$
 $6 \times 6 \times 5 = 180$
 É possível escrever 180 números.

- 13.2. a) $\frac{1.^\circ A}{6} \frac{2.^\circ A}{5} \frac{3.^\circ A}{1}$ O algarismo das unidades é 0.
 $\frac{1.^\circ A}{5} \frac{2.^\circ A}{5} \frac{3.^\circ A}{3}$ O algarismo das unidades é 2, 4 ou 6

$$6 \times 5 \times 1 + 5 \times 5 \times 3 = 30 + 75 = 105$$

Ou

$$180 - 5 \times 5 \times 3 = 105$$

→ números ímpares
 É possível escrever 105 números pares.

- b) $\frac{1.^\circ A}{6} \frac{2.^\circ A}{5} \frac{3.^\circ A}{1}$ O algarismo das unidades é 0.
 $\frac{1.^\circ A}{5} \frac{2.^\circ A}{5} \frac{3.^\circ A}{1}$ O algarismo das unidades é 5.
 $6 \times 5 \times 1 + 5 \times 5 \times 1 = 55$
 É possível escrever 55 múltiplos de 5.

- c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

1.º A	3.º A	4.º A
4	6	5

O 1.º algarismo é 3, 4, 5 ou 6.

$$4 \times 6 \times 5 = 120$$

É possível escrever 120 números superiores a 300

d)

1.º A	2.º A	3.º A	
$\frac{1, 2}{2}$	6	5	$x < 300$
$\frac{3}{1}$	$\frac{0, 1, 2}{3}$	5	$300 < x < 340$
$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{0, 1}{2}$	$340 \leq x < 342$

$$2 \times 6 \times 5 + 1 \times 3 \times 5 + 1 \times 1 \times 2 = 60 + 15 + 2 = 77$$

É possível escrever 77 números inferiores a 342.

14. $10 \times 10 \times 23 \times 23 \times 10 \times 10 = 5\,290\,000$
 É possível formar 5 290 000 matrículas.

- 15.1. $\frac{1.^\circ A}{9} \frac{2.^\circ A}{10} \frac{3.^\circ A}{1} \frac{4.^\circ A}{1}$
 Diferente de 0
 $9 \times 10 \times 1 \times 1 = 90$
 Existem 90 capicuas.

- 15.2. $\frac{1.^\circ A}{4} \frac{2.^\circ A}{9} \frac{3.^\circ A}{1} \frac{4.^\circ A}{1}$
 Diferente do anterior
 2, 4, 6 ou 8
 $4 \times 9 \times 1 \times 1 = 36$
 Existem 36 números pares que são capicuas.

Pág. 22

- 16.1. $5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1280$
 Podem ser feitas 1280 bandeiras.

- 16.2. $4 \times 5 \times 4 \times 1 \times 4 = 320$
 Qualquer cor exceto a da 4.ª lista
 Cor igual à da 2.ª lista
 Qualquer cor exceto a da 2.ª lista
 Qualquer uma das cinco cores
 Qualquer cor exceto a da 2.ª lista
 Podem ser feitas 320 bandeiras.

- 16.3. 1.º caso: A tira central também é vermelha.
 $1 \times 4 \times 1 \times 4 \times 1 = 16$
 Diferente de vermelho
 2.º caso: A tira central não é vermelha
 $1 \times 3 \times 4 \times 3 \times 1 = 36$
 Diferente de vermelho e da tira central
 Podem ser feitas $16 + 36 = 52$ bandeiras.

17. $1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

- 17.1. Qualquer número da forma $2^a \times 3^b \times 5^c$,
 com $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$

$$\text{e } c \in \{0, 1, 2\}.$$

a	b	c
4	3	3

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

O número 1800 tem 36 divisores.

1800	2
900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

17.2. É um número da forma $2^a \times 3^b \times 5^c$ em que, para não ser múltiplo de 2, o valor de a só pode ser 0 (uma hipótese).

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & 3 & 3 \end{array}$$

$$3 \times 3 = 9$$

O número 1800 tem nove divisores ímpares.

Pág. 23

18.1. $\# \mathcal{P}(A) = 2^{\#A} = 2^{12} = 4096$

O conjunto A tem 4096 subconjuntos.

18.2. $\#B = n$

B tem $n+1$ subconjuntos de cardinal inferior a 2 (conjunto vazio e n conjuntos singulares).

$$n+1 = 8 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\# \mathcal{P}(B) = 2^7 = 128$$

18.3. $\# \mathcal{P}(C) = 512$

$$2^{\#C=2}, \text{ logo } \#C = 9.$$

O conjunto C tem nove elementos.

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	2

Pág. 24

19.1. a) $\frac{15!}{14!} = \frac{15 \times 14!}{14!} = 15$

b) $\frac{11! - 9!}{8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8! - 9 \times 8!}{8!} = \frac{(11 \times 10 \times 9 \times 9) 8!}{8!} = 981$

c) $\frac{700 \times 48!}{50!} = \frac{700 \times 48!}{50 \times 49 \times 48!} = \frac{7 \times 100}{50 \times 7 \times 7} = \frac{2}{7}$

d) $\frac{99! \times 98!}{100! \times 97!} = \frac{99! \times 98 \times 97!}{100 \times 99! \times 97!} = \frac{98}{100} = \frac{49}{50}$

19.2. $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n^2 + n)(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)! - (n+1)!}{n(n+1)(n-1)!} = \frac{(n+1)!(n+2-1)}{(n+1)!} = \frac{(n+1) \times n! \times (n+1)}{(n+1)n!} = n+1$

Pág. 25

20.1. $8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = \frac{8!}{4!}$

20.2. $100 \times 99 \times 98 = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{97!} = \frac{100!}{97!}$

20.3. $n(n-1)(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = \frac{n!}{(n-3)!}$

21.1. $\frac{6}{5!} - \frac{5}{6!} = \frac{6}{5!} - \frac{5}{6 \times 5!} = \frac{6 \times 6 - 5}{6 \times 5!} = \frac{31}{6 \times 5!} = \frac{31}{6!} = \frac{31}{720}$

21.2. $\frac{3}{5! \times 8!} + \frac{4}{6! \times 7!} = \frac{3}{5! \times 8 \times 7!} + \frac{4}{6 \times 5! \times 7!} = \frac{9+16}{5! \times 24 \times 7!} = \frac{25}{5 \times 4! \times 3 \times 8 \times 7!} = \frac{5}{24 \times 3 \times 8!} = \frac{5}{72 \times 8!}$

22.1. $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 12 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 12 \wedge n-1 \geq 0 \wedge n-3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) - 12 = 0 \wedge n \geq 1 \wedge n \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 2n + 2 - 12 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n = -2 \vee n = 5) \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \Leftrightarrow n = 5$$

22.2. $n! = 72(n-2)! \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)! - 72(n-2)! = 0 \wedge n \geq 0 \wedge n-2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n^2 - n - 72)(n-2)! = 0 \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [n^2 - n - 72 = 0 \vee (n-2)! = 0] \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 17}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -8 \vee n = 9 \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Leftrightarrow n = 9$$

22.3. $12n! = (n+2)! - 5(n+1)! \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12n! - (n+2)(n+1)n! + 5(n+1)n! = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n! [12 - (n+2)(n+1) + 5(n+1)] = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n! = 0 \vee 12 - n^2 - n - 2n - 2 + 5n + 5 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 2n + 15 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4+64}}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 5$$

Atividades complementares

Pág. 28

23. $(A \setminus B) \cap (A \cap B) =$

$$= (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) =$$

$$= (A \cap A) \cap (\bar{B} \cap B) =$$

$$= A \cap \emptyset =$$

$$= \emptyset$$

$$\begin{aligned}
 24.1. (A \cup B) \setminus A &= \\
 &= (A \cup B) \cap \bar{A} = \\
 &= (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = \\
 &= \emptyset \cup (B \cap \bar{A}) = \\
 &= B \setminus A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24.2. (A \cup B) \setminus B &= \\
 &= (A \cup B) \cap \bar{B} = \\
 &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) = \\
 &= (A \setminus B) \cup \emptyset \\
 &= A \setminus B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25. [A \cap (\overline{B \cap \bar{A}})] \cap \bar{A} &= \\
 &= (A \cap \bar{A}) \cap (\overline{B \cap \bar{A}}) = \\
 &= \emptyset \cap (\overline{B \cap \bar{A}}) = \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26. [(\overline{B \cup A}) \cup (B \cap \bar{A})] \setminus A &= \\
 &= [(\bar{B} \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})] \cap \bar{A} = \\
 &= [(\bar{B} \cup B) \cap \bar{A}] \cap \bar{A} = \\
 &= U \cap \bar{A} \cap \bar{A} = \\
 &= \bar{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27. [\overline{A \cup (B \cap \bar{A})}] \setminus (A \cup B) &= \\
 &= [\bar{A} \cap (\overline{B \cap \bar{A}})] \cap (\overline{A \cup B}) = \\
 &= [\bar{A} \cap (\bar{B} \cup A)] \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \\
 &= [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A)] \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \emptyset] \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \\
 &= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \\
 &= \bar{A} \cap \bar{B}
 \end{aligned}$$

$$28. A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 3\}; C = \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned}
 28.1. (C \times A) \cup (C \times B) &= \\
 &= C \times (A \cup B) = \\
 &= \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \\
 &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28.2. C \times (A \setminus B) &= \\
 &= \{1, 2\} \times \{1\} = \\
 &= \{(1, 1), (2, 1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28.3. (C \times A) \setminus (C \times B) &= \\
 &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\} \setminus \\
 &\quad \setminus \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\} = \\
 &= \{(1, 1), (2, 1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29.1. \text{Ida} \quad \text{Volta} \\
 3 \quad 3 \quad \text{Número de opções} \\
 3 \times 3 = 9 \\
 \text{Pode ser escolhido de nove modos diferentes.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29.2. \text{Ida} \quad \text{Volta} \\
 3 \quad 2 \quad \text{Número de opções} \\
 3 \times 2 = 6 \\
 \text{Pode ser escolhido de seis modos diferentes.}
 \end{aligned}$$

30.1. O algarismo das unidades pode ser 1, 3 ou 5. Para cada um dos restantes três algarismos temos seis possibilidades:

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{1.^\circ A} & \underline{2.^\circ A} & \underline{3.^\circ A} & \underline{4.^\circ A} \\
 6 & 6 & 6 & 3 \\
 6 \times 6 \times 6 \times 3 = 648
 \end{array}$$

Podem-se escrever 648 números.

30.2. O algarismo das unidades pode ser 2, 4 ou 6 (cinco hipóteses). O primeiro algarismo tem de ser diferente do

último (cinco hipóteses), o segundo tem de ser diferente do último e diferente do primeiro (quatro hipóteses), etc.

$$\begin{array}{cccc} \underline{1.^\circ A} & \underline{2.^\circ A} & \underline{3.^\circ A} & \underline{4.^\circ A} \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180 \end{array}$$

Podem-se escrever 180 números.

- 30.3.** Para o algarismo das unidades temos uma hipótese (só pode ser 5); para o primeiro algarismo temos três hipóteses (pode ser 1, 2 ou 3); para o segundo e terceiro algarismos temos seis hipóteses:

$$\begin{array}{cccc} \underline{1.^\circ A} & \underline{2.^\circ A} & \underline{3.^\circ A} & \underline{4.^\circ A} \\ 3 & 6 & 6 & 5 \\ 3 \times 6 \times 6 \times 1 = 108 \end{array}$$

Podem-se escrever 108 números.

- 31.** A primeira pessoa (vamos admitir que é uma rapariga) tem oito hipóteses para escolher lugar. A segunda rapariga tem seis hipóteses (ficaram eliminados os dois lugares do banco já ocupado), a terceira rapariga tem quatro hipóteses de escolha e para a última rapariga restam dois lugares do último banco. Os quatro lugares que sobram nos quatro bancos são ocupados pelos quatro homens: o primeiro tem quatro hipóteses de escolha, o segundo tem três, o terceiro tem dois e o quarto ocupa o único lugar ainda vago.

$$\underbrace{8 \times 6 \times 4 \times 2}_{\text{Mulheres}} \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{Homens}} = 9216$$

O resultado é o mesmo se o primeiro a escolher lugar for um rapaz. Os lugares podem ser ocupados de 9216 maneiras diferentes.

- 32.** Como a Sara faz parte da equipa é necessário convocar mais uma rapariga (entre 11) e um rapaz (entre 18) pelo que o número de hipóteses é 11×18 . É de excluir a solução correspondente à escolha da Ana e do Xavier. Logo, temos $11 \times 18 - 1 = 197$ possibilidades de escolha.

- 33.** $\#A = 8$

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^8 = 256$$

Excluído o conjunto vazio, temos 255 subconjuntos.

35.1 $\underline{1.^\circ A} \quad \underline{2.^\circ A} \quad \underline{3.^\circ A} \quad \underline{4.^\circ A}$

$$\begin{array}{cccc} 9 & 10 & 10 & 5 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ & & & 0, 2, 4, 6 \text{ ou } 8 \\ & & & \text{Não pode ser } 0 \end{array}$$

$$9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4500$$

Podem ser escritos 4500 números.

35.2 $\underline{1.^\circ A} \quad \underline{2.^\circ A} \quad \underline{3.^\circ A} \quad \underline{4.^\circ A}$

$$\begin{array}{cccc} 9 & 8 & 7 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ & & & 0 \end{array}$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$$

Podem ser escritos 504 números.

35.3 $\underline{1.^\circ A} \quad \underline{2.^\circ A} \quad \underline{3.^\circ A} \quad \underline{4.^\circ A}$

$$\begin{array}{cccc} 9 & 10 & 10 & 10 \\ 9 & 9 & 8 & 7 \end{array}$$

Todos os números.
Com os algarismos todos diferentes.

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 - 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4464$$

Podem ser escritos 4464 números.

- 35.4 a)**

$$\begin{array}{cccc} \underline{1.^\circ A} & \underline{2.^\circ A} & \underline{3.^\circ A} & \underline{4.^\circ A} \\ 9 & 8 & 7 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ & & & \text{O algarismo das unidades é } 0. \\ & & & \text{Diferente de } 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \underline{1.^\circ A} & \underline{2.^\circ A} & \underline{3.^\circ A} & \underline{4.^\circ A} \\ 8 & 8 & 7 & 4 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ & & & \text{O algarismo das unidades é } 2, 4, \\ & & & 6 \text{ ou } 8 \\ & & & \text{Diferente de } 0 \text{ e do algarismo} \\ & & & \text{das unidades} \end{array}$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 2296$$

Podem ser escritos 2296 números

b) $\frac{6789}{4 \quad 9 \quad 8 \quad 7}$

$$4 \times 9 \times 8 \times 7 = 2016$$

Podem ser escritos 2016 números.

c) $\frac{123456}{6 \quad 9 \quad 8 \quad 7} \quad x < 7000$

$$\frac{7 \quad 012}{1 \quad 3 \quad 8 \quad 7} \quad 7000 < x < 7300$$

$$\frac{7 \quad 3 \quad 0124}{1 \quad 1 \quad 4 \quad 7} \quad 7300 < x < 7350$$

$$3 \times 9 \times 8 \times 7 + 1 \times 3 \times 8 \times 7 + 1 \times 1 \times 4 \times 7 = 3220$$

Podem ser escritos 3220 números.

- 36.1.** Delegado Subdelegado

$$25 \quad 24$$

$$25 \times 24 = 600$$

Podem ser escolhidos de 600 maneiras.

- 36.2.** Delegado Subdelegado

$$15 \quad 14 \quad \text{Duas raparigas}$$

$$10 \quad 9 \quad \text{Dois rapazes}$$

$$15 \times 14 + 10 \times 9 = 300$$

34. $\frac{1}{\frac{n!}{(2(n+1))}} - \frac{n}{2(n+1)!} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)n!} - \frac{n}{2(n+1)!} =$

$$= \frac{2n+2-n}{2(n+1)!} = \frac{n+2}{2(n+1)!}$$

Podem ser escolhidos de 300 maneiras.

36.3. Delegado Subdelegado

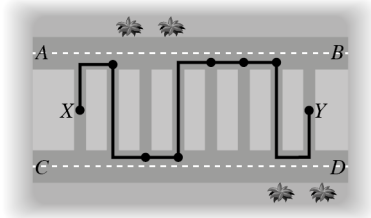
15 10 Rapaz-rapariga

10 15 Rapariga-razap

$$15 \times 10 + 10 \times 15 = 300$$

Podem ser escolhidos de 300 maneiras.

37. No ponto X tem duas hipóteses: partir para A ou para C .



Depois, sempre que encontra uma rua transversal tem também duas hipóteses: seguir em frente ou virar para essa rua o que acontece em seis ocasiões.

Assim, existem $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ trajetos diferentes.

38.1. 1.º A 2.º A 3.º A 4.º A

7 9 8 7 Números que começam por 3, 4, 5, 6,
7, 8 ou 9

1 3 8 7 Números que começam por 2 e cujo
segundo algarismo é 7, 8 ou 9

$$7 \times 9 \times 8 \times 7 + 1 \times 3 \times 8 \times 7 = 3696$$

O conjunto A tem 3696 elementos

38.2. Começemos por calcular em quantos elementos de A não figura o 0 nem o 8 (apenas se podem usar oito algarismos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9)

1.º A 2.º A 3.º A 4.º A

6 7 6 5 Números que começam por
3, 4, 5, 6, 7 ou 9

1	2	6	5	Números que começam por 2 e cujo segundo algarismo é 7 ou 9
---	---	---	---	---

$$6 \times 7 \times 6 \times 5 + 1 \times 2 \times 6 \times 5 = 1320$$

Em $3696 - 1320 = 2376$ elementos de A .

39.1. O baralho tem 26 cartas vermelhas (V) e 26 cartas pretas (P).

<u>V</u>	<u>P</u>
26	26

$$26 \times 26 = 676$$

A extração pode ser feita de 676 modos diferentes.

39.2. V P ou P V

26 26 26 26

$$26 \times 26 + 26 \times 26 = 1352$$

A extração pode ser feita de 1352 modos diferentes.

39.3. V V ou P P

$$\begin{array}{cc} 26 & 25 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 26 & 25 \\ & \end{array}$$

$$26 \times 25 + 26 \times 25 = 1300$$

A extração pode ser feita de 1300 modos diferentes.

39.4 Consideremos dois casos: a primeira carta é o ás de espadas ou a primeira carta é de espadas mas não é o ás:

1.ª carta 2.ª carta

1 48 Há $51 - 3 = 48$ cartas que não
são ases.

12 47 Há $51 - 4 = 47$ cartas que não
são ases.

$$1 \times 48 + 12 \times 47 = 612$$

$$40. \quad \underbrace{\overbrace{4}^{\text{Preto}} \times \overbrace{(64-4)}^{\text{Branco}}}_{\text{Cantos}} + \underbrace{\overbrace{4 \times 6}^{\text{Preto}} \times \overbrace{(64-6)}^{\text{Branco}}}_{\text{Lados}} + \underbrace{\overbrace{6 \times 6}^{\text{Preto}} \times \overbrace{(64-9)}^{\text{Branco}}}_{\text{Centrais}} = 3612$$

Os dois reis podem ocupar as casas de 3612 maneiras diferentes.

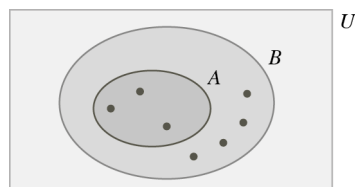
$$\begin{aligned}
 41. \quad & \frac{3}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{(n-1)!} = \\
 & = \frac{3}{n(n-1)!} - \frac{n}{(n+1)n(n-1)!} - \frac{2}{(n-1)!} = \\
 & \quad \quad \quad \frac{3}{(n+1)} - \frac{n}{(n+1)n(n-1)!} - \frac{2(n+1)n}{(n+1)n(n-1)!} = \\
 & = \frac{3n+3}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+1)!} - \frac{2n^2+2n}{(n+1)!} = \\
 & = \frac{3n+3-n-2n^2-2n}{(n+1)!} = \\
 & = \frac{3-2n^2}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

Avaliação 1

1. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) =$
 $= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) =$
 $= A \cap (\bar{B} \cup B) =$
 $= A \cap U =$
 $= A$

Resposta: (B)

2.



$$A \subset B, \#A = 3 \text{ e } \#B = 7$$

Sabe-se que $A \cap B = A \wedge A \cup B = B$.

$$\#A \cap B = \#A = 3$$

$$\#A \cup B = \#B = 7$$

Resposta: (C)

$$3. \quad \begin{array}{c} \text{Matemática A} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Física} \\ 3 \end{array}$$

A escolha pode ser feita de 5×3 maneiras.

Resposta: (B)

4. Números naturais de quatro algarismos:

$$\begin{array}{c} \text{1.º A} \quad \text{2.º A} \quad \text{3.º A} \quad \text{4.º A} \\ 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^3 \end{array}$$

Números naturais de quatro algarismos, excluindo o zero:

$$\begin{array}{c} \text{1.º A} \quad \text{2.º A} \quad \text{3.º A} \quad \text{4.º A} \\ 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 \end{array}$$

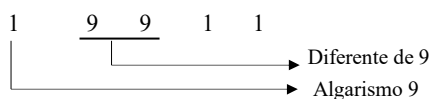
$$9 \times 10^3 - 9^4$$

Resposta: (C)

5. O algarismo 9 só pode ser o primeiro (das dezenas de milhar) ou o segundo (dos milhares)

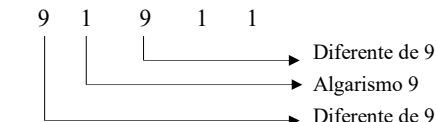
1.º caso

$$\begin{array}{c} \text{1.º A} \quad \text{2.º A} \quad \text{3.º A} \quad \text{4.º A} \quad \text{5.º A} \\ 1 \quad 9 \quad 9 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$



2.º caso

$$\begin{array}{c} \text{1.º A} \quad \text{2.º A} \quad \text{3.º A} \quad \text{4.º A} \quad \text{5.º A} \\ 9 \quad 1 \quad 9 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$



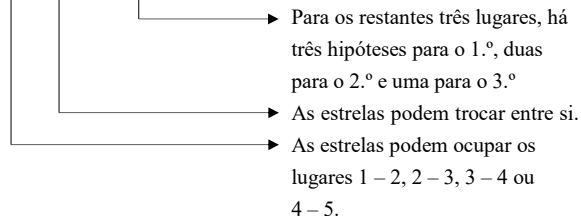
$$9 \times 9 + 9 \times 9 = 162$$

Resposta: (A)

6. São preenchidos cinco lugares: 1, 2, 3, 4, 5

Número de soluções:

$$4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$



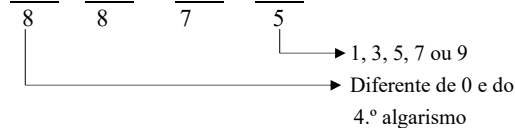
Resposta: (D)

7.2. Ida Volta

$$5 \times 3 \times 2 \times 4 = 120$$

Pode escolher 120 trajetos.

8.1. $\begin{array}{c} \text{1.º A} \quad \text{2.º A} \quad \text{3.º A} \quad \text{4.º A} \\ 8 \quad 8 \quad 7 \quad 5 \end{array}$



Pode formar 2240 números ímpares.

8.2. $\begin{array}{c} \text{1, 2, 3, 4, 5, 6} \\ 6 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \end{array}$

$$x < 7000$$

$$\begin{array}{c} \text{7} \quad \text{0, 1, 2, 3, 4, 5} \\ 1 \quad 6 \quad 8 \quad 7 \end{array} \quad 7000 < x < 7600$$

$$\begin{array}{c} \text{7} \quad \text{6} \quad \text{0, 1, 2, 3} \\ 1 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \end{array} \quad 7600 < x < 7640$$

$$6 \times 9 \times 8 \times 7 + 1 \times 6 \times 8 \times 7 + 1 \times 1 \times 4 \times 7 = 3388$$

Pode formar 3388 números.

9.1. Presidente Tesoureiro Relações públicas

$$13 \quad 12 \quad 11$$

$$13 \times 12 \times 11 = 1716$$

É possível formar 1716 comissões.

9.2. Presidente Tesoureiro Relações públicas

$$6 \quad 12 \quad 11$$

$$6 \times 12 \times 11 = 792$$

É possível formar 792 possíveis comissões.

9.3. Presidente Tesoureiro Relações públicas

$$1 \quad 12 \quad 11 \quad \text{O delegado é presidente.}$$

$$12 \quad 1 \quad 11 \quad \text{O delegado é tesoureiro.}$$

$$12 \quad 11 \quad 1 \quad \text{O delegado é relações públicas.}$$

$$3 \times 12 \times 11 = 396$$

É possível formar 396 comissões.

9.4. Presidente Tesoureiro R.Públicas

$$6 \quad 5 \quad 4$$

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

É possível formar 120 comissões só de raparigas.

9.5. Comissões só com raparigas: 120

$$\text{Comissões só com rapazes: } 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$\text{É possível formar } 1716 - 120 - 210 = 1386 \text{ comissões mistas.}$$

$$10. (n+1)! - n! =$$

$$= (n+1) \times n! - n! =$$

$$= (n+1-1) \times n! =$$

$$= n \times n!$$

$$7.1. \quad \begin{array}{c} \text{Rua de Cima - Rua do Meio} \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Rua do Meio - Rua de Baixo} \\ 3 \end{array}$$

$$5 \times 3 = 15$$

Pode escolher 15 trajetos.

11. $x! = 110(x-2)! \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)! - 110(x-2)! = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0 \vee (x-2)! = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+440}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 21}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -10 \vee x = 11$$

Como $x \geq 2$, então $x = 11$.

12.1. Um conjunto com n elementos tem, entre os seus subconjuntos, o conjunto vazio e n conjuntos singulares (cada um formado com um elemento do conjunto dado). Logo, um conjunto com n elementos tem pelo menos $n+1$ subconjuntos.

12.2. Para $n = 0$, temos $2^0 = 1 > 0$.

Se $n \in \mathbb{N}$, 2^n é o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

Portanto, atendendo a **12.1.**, $2^n \geq n+1$ pelo que, como

$\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > n$, pode-se concluir que:

$$2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$$

1.2. Cálculo combinatório. Triângulo de Pascal e Binómio de Newton

Pág. 32

2. $A = \{a, b, c, d\}$
 $B = \{p, q, r, s, t\}$
- Duas retas em A :
 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$
- Seis opções
- Duas retas em B :
 $\{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{p, t\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{q, t\},$
 $\{r, s\}, \{r, t\}, \{s, t\}$
- Dez opções
 $6 \times 10 = 60$
- Portanto, seriam formados 60 paralelogramos.

Pág. 33

- 1.1. ${}^6A'_4 = 6^4 = 1296$
 Podem-se obter 1296 números.
- 1.2. $\frac{1.^\circ A}{5} \frac{2.^\circ A}{6} \frac{3.^\circ A}{6} \frac{4.^\circ A}{6}$

 $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$
 540 números

Pág. 34

2. ${}^2A'_8 = 2^8 = 256$
 O resultado de um teste pode ser registado de 256 maneiras.
- 3.1. Letras Algarismos
 ${}^{26}A'_4 \times {}^{10}A'_3 = 26^4 \times 10^3 = 456\,976\,000$
 É possível formar 456 976 000 códigos.
- 3.2. ${}^5A'_4 \times {}^{10}A'_2 \times 5$
 $\frac{L}{5} \frac{L}{5} \frac{L}{5} \frac{L}{5} \frac{A}{5} \frac{A}{5} \frac{A}{5}$
 $5^4 \times 10^2 \times 5 = 312\,500$
 É possível formar 312 500 códigos.
4. Para cada chávena tem duas opções: prateleira A ou prateleira B
 Por exemplo, a escolha $AABBBB$ significa que as duas primeiras chávenas ficam na prateleira A e as restantes na B .
 Temos, portanto, ${}^2A'_6 - 2 = 62$ maneiras de dividir as duas chávenas pelas duas prateleiras (são excluídas as opções $AAAAAA$ e $BBBBBB$ que correspondem a arrumar todas as chávenas numa prateleira).
5. Para cada bola há duas opções: caixa A ou caixa B

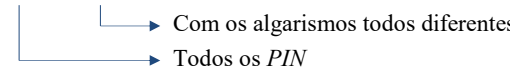
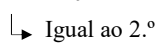
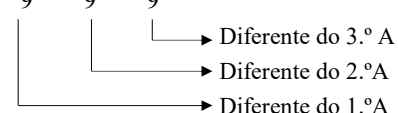
Assim:

$${}^2A'_{10} - 2 = 2^{10} - 2 = 1022$$

Exclui todas as bolas em A ou todas em B

Existem 1022 maneiras diferentes.

Pág. 35

- 6.1. $\frac{1.^\circ A}{10} \frac{2.^\circ A}{10} \frac{3.^\circ A}{10} \frac{4.^\circ A}{10}$
 ou ${}^{10}A'_4 = 10^4 = 10\,000$
 É possível formar 10 000 PIN.
- 6.2. $\frac{1.^\circ A}{10} \frac{2.^\circ A}{10} \frac{3.^\circ A}{1} \frac{4.^\circ A}{1}$
 $10 \times 10 = 100$
 É possível formar 100 PIN.
- 6.3. PIN com os algarismos todos diferentes.
 $\frac{1.^\circ A}{10} \frac{2.^\circ A}{9} \frac{3.^\circ A}{8} \frac{4.^\circ A}{7}$
 $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$
 PIN com pelo menos dois algarismos iguais.
 $10\,000 - 5040 = 4960$

 Com os algarismos todos diferentes
 Todos os PIN
 É possível formar 4960 PIN.
- 6.4. $\frac{1.^\circ A}{10} \frac{2.^\circ A}{10} \frac{3.^\circ A}{1} \frac{4.^\circ A}{10}$

 Igual ao 2.º
 $10^3 = 1000$
 É possível formar 1000 PIN.
- 6.5. $\frac{1.^\circ A}{10} \frac{2.^\circ A}{9} \frac{3.^\circ A}{9} \frac{4.^\circ A}{9}$

 Diferente do 3.º A
 Diferente do 2.º A
 Diferente do 1.º A
 $10 \times 9 \times 9 \times 9 = 7290$
 É possível formar 7290 PIN.
7. $\frac{1.^\circ}{3} \frac{2.^\circ}{3} \frac{3.^\circ}{3} \frac{4.^\circ}{3} \frac{5.^\circ}{3} \leftarrow$ Júri
 $\leftarrow$ Possibilidades de escolha
 ${}^3A'_5 = 3^5 = 243$
 É possível formar 243 PIN.
8. ${}^2A'_{10} = 2^{10} = 1024$
 É possível formar 1024 PIN.

Pág. 37

9. Raparigas (M): 14 ; rapazes (H): $\frac{12}{26}$
- 9.1. ${}^{26}A_3 = 15\,600$
 Ou

Presidente	Tesoureiro	Relações públicas
26	25	24

$$26 \times 25 \times 24 = 15\ 600$$

É possível formar 15 600 comissões.

9.2. $14 \times {}^{25}A_2 = 14 \times 25 \times 24 = 8400$

Ou

Presidente	Tesoureiro	Relações públicas
14	25	24

$$14 \times 25 \times 24 = 8400$$

É possível formar 8400 comissões.

9.3. ${}^{14}A_3 = 14 \times 13 \times 12 = 2184$

É possível formar 2184 comissões.

9.4. ${}^{12}A_3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

É possível formar 1320 comissões.

9.5. ${}^{26}A_3 - ({}^{14}A_3 + {}^{12}A_3) = 15\ 600 - (2184 + 1320) = 12\ 096$

É possível formar 12 096 comissões.

10. ${}^7A_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

ou

1.º	2.º	3.º	4.º	←	Pessoas
7	6	5	4	←	Lugares

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Podem-se sentar de 840 maneiras.

11.1. ${}^{52}A_4 = 52 \times 51 \times 50 \times 49 = 6\ 497\ 400$

Podem-se formar 6 497 400 sequências.

11.2. $\frac{As}{4} \frac{\quad}{51} \frac{\quad}{50} \frac{\quad}{49}$

$$4 \times {}^{51}A_3 = 4 \times 51 \times 50 \times 49 = 499\ 800$$

11.3. $\frac{As}{4} \frac{\quad}{48} \frac{\quad}{47} \frac{\quad}{46}$

→ São retirados os ases

$$4 \times {}^{48}A_3 = 4 \times 48 \times 47 \times 46 = 415\ 104$$

Podem-se formar 415 104 sequências.

Pág. 38

12. $\#A = 4$ e $\#B = 6$

12.1. $\frac{a_1}{6} \frac{a_2}{5} \frac{a_3}{4} \frac{a_4}{3}$

$${}^6A_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

É possível definir 360 funções injetivas.

12.2. $\frac{a_1}{6} \frac{a_2}{6} \frac{a_3}{6} \frac{a_4}{6}$

$${}^6A'_4 = 6^4 = 1296$$

Número de funções não injetivas:

$$1296 - 360 = 936$$

É possível definir 936 funções não injetivas.

13. $\frac{{}^{n+1}A_3}{n} - {}^nA_2 =$

$$= \frac{(n+1) \times n \times (n-1)}{n} - n(n-1) =$$

$$= (n+1)(n-1) - n(n-1) = n-1$$

14.1. ${}^nA_2 = 380 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n \times (n-1) = 380 \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0 \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+1520}}{2} \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 39}{2} \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n = -19 \vee n = 20) \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

14.2. ${}^{n+1}A_2 = 10n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n+1)n = 10n \wedge n+1 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 10n = 0 \wedge n \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-9) = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n = 0 \vee n = 9) \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 9$$

14.3. $42 {}^nA_3 = {}^nA_5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 42n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42n(n-1)(n-2) - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 0 \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)[42 - (n-3)(n-4)] = 0 \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [n = 0 \vee n = 1 \vee n = 2 \vee 42 - (n^2 - 4n - 3n + 12) = 0] \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 7n - 12 + 42 = 0 \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 7n - 30 = 0 \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{2} \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{7 \pm 13}{2} \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n = 10 \vee n = -3) \wedge n \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

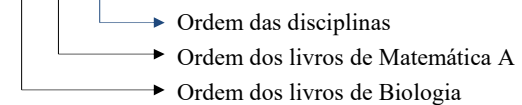
Pág. 39

15. $\frac{\text{Biologia}}{4} \frac{\text{Matemática A}}{6}$

15.1. $P_{10} = 10! = 3\ 628\ 800$

Podem-se arrumar os livros de 3 628 800 maneiras.

15.2. $P_4 \times P_6 \times P_2 = 4! \times 6! \times 2! = 34\ 560$



Podem-se arrumar os livros de 34 560 maneiras.

Pág. 40

16. NUMERADO

Não há letras repetidas.

A palavra tem oito letras.

16.1. $P_8 = 8! = 40\ 320$

Existem 40 320 anagramas.

16.2. Vogais: 4

Consoantes: 4

$$\frac{V}{4} \underbrace{\quad \quad \quad \quad \quad}_{P_6} \frac{V}{3}$$

$$4 \times 3 \times P_6 = 12 \times 6! = 8640$$

Existem 8640 anagramas.

16.3. $\frac{\text{NUM}}{1}$ —|—|—|—|—

$$1 \times 5! \times 6 = 720$$

- Número de posições que o grupo NUM pode ocupar
- Número de maneiras de ordenar as restantes 5 letras

Ou

NUM	E	R	A	D	O
-----	---	---	---	---	---

Há seis objetos para ordenar (o grupo NUM e mais cinco letras) o que pode ser feito de $6! = 720$ maneiras diferentes.

Existem 720 anagramas.

16.4. $P_3 \times P_6 = 3! \times 6! = 4320$

- Número de maneiras de ordenar seis objetos (o grupo NUM mais cinco letras)
- Número de maneiras de ordenar as três letras de NUM

Existem 4320 anagramas.

16.5. $P_6 = 6! = 720$

↳ Número de maneiras de ordenar as restantes seis letras

Existem 720 anagramas.

16.6. $P_4 \times P_4 \times P_2 = 4! \times 4! \times 2! = 1152$

- pode ser CVCVCVCV ou VCVCVCVC
- número de maneiras de ordenar as quatro vogais
- número de maneiras de ordenar as quatro consoantes

Existem 1152 anagramas.

17. Rapazes (H): 3; raparigas (M): 4

17.1. $3! \times 4! \times 2! = 288$

- pode ser rapazes–raparigas ou raparigas–rapazes
- número de maneiras de ordenar as quatro raparigas
- número de maneiras de ordenar os três rapazes

Podem-se dispor de 288 maneiras.

17.2. $4! \times 3! \times 4 = 576$

- as raparigas podem ficar no início da fila, no fim ou entre os rapazes (4 hipóteses)

ou

$$4! \times 4! = 576$$

- ↳ número de maneiras de ordenar os três rapazes
mais o bloco das quatro raparigas
- ↳ número de maneiras de ordenar as raparigas

Podem-se dispor de 576 maneiras.

17.3. $6! = 720$ (é o número de maneiras de ordenar os restantes seis)

Podem-se dispor de 720 maneiras.

17.4. Como há três rapazes (H) e quatro raparigas (M) terá de ser $MHMHMHM$. Logo, o número de opções é $4! \times 3! = 144$.

Podem-se dispor de 144 maneiras.

17.5. $2! \times 6! = 1440$

- ↳ Número de maneiras de ordenar os restantes cinco + o par de namorados
- ↳ Pode ser João-Joana ou Joana-João

ou

$$2! \times 5! \times 6 = 1440$$

- Número de lugares que pode ser ocupado pelo par João-Joana
- Ordenação dos restantes cinco
- Pode ser João-Joana ou Joana-João

Podem-se dispor de 1440 maneiras.

$$\begin{aligned} \mathbf{18.1. a)} \quad {}^8C_4 &= \frac{8!}{4! \times 4!} = \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4 \times 3 \times 2 \times 4!} = 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } {}^{1000}C_{998} &= \frac{1000!}{998! \times 2!} = \\ &= \frac{1000 \times 999 \times 998!}{998! \times 2} = \\ &= 500 \times 999 = \\ &= 499\,500\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{{}^{90}C_{10} \times {}^{100}A_{10} \times 12!}{20! {}^{100}C_{80}} = \\ & \frac{90!}{80! \times 10!} \times \frac{100!}{90!} \times 12! \\ & = \frac{20! \times \frac{100!}{20! \times 80!}}{20! \times 80!} = \\ & = \frac{100! \times 12! \times 80!}{80! \times 10! \times 100!} = \\ & = \frac{12! \times 11 \times \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = \\ & = 132 \end{aligned}$$

$$\text{18.2. } \frac{n!}{p!(n-p)!} = {}^nC_p \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{{}^nC_p}_{\in \mathbb{N}} \times p!$$

Logo, $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ é múltiplo de $p!$.

19. ${}^8C_5 = \frac{{}^8A_5}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 56$

20. Um dodecágono tem 12 lados e 12 vértices e tem ${}^{12}C_2 - 12 = 66 - 12 = 54$ diagonais.

$$\begin{aligned}
 21. \quad {}^nC_2 - n &= \frac{{}^nA_2}{2!} - n = \\
 &= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \\
 &= \frac{n^2 - 3n}{2}
 \end{aligned}$$

Pág. 43

22.

Raparigas	Rapazes	Total
14	7	21
6	0	6
5	1	
4	2	
3	3	
2	4	
1	5	
0	6	

Possibilidades de composição da comissão quanto ao género

22.1. ${}^{14}C_3 \times {}^7C_3 = 12\,740$

Escolha de três rapazes
Escolha de três raparigas

Podem-se formar 12 740 comissões.

22.2.

Delegado	Subdelegado	Outros
1	1	19
1	1	4

${}^1C_1 \times {}^1C_1 \times {}^{19}C_4 = 3876$

escolha dos restantes quatro elementos entre os restantes 19

Podem-se formar 3876 comissões.

22.3. ${}^{21}C_6 - {}^{14}C_6 \times {}^7C_0 - {}^{14}C_0 \times {}^7C_6 = 54\,264 - 3003 - 7 = 51\,254$

n.º de comissões só com rapazes
n.º de comissões só com raparigas
todas as comissões

ou

$$\underbrace{{}^{14}C_5}{}_A \times {}^7C_1 + \underbrace{{}^{14}C_4}{}_B \times {}^7C_2 + \underbrace{{}^{14}C_3}{}_C \times {}^7C_3 + \underbrace{{}^{14}C_2}{}_D \times {}^7C_4 + \underbrace{{}^{14}C_1}{}_E \times {}^7C_5 =$$

A: 1 rapariga e 5 rapazes
B: 2 raparigas e 4 rapazes
C: 3 raparigas e 3 rapazes
D: 4 raparigas e 2 rapazes
E: 5 raparigas e 1 rapaz

$$\begin{aligned}
 &= 14\,014 + 21\,021 + 12\,740 + 3185 + 294 = \\
 &= 51\,254
 \end{aligned}$$

Podem-se formar 51 254 comissões.

22.4. ${}^{14}C_5 \times {}^7C_1 + {}^{14}C_4 \times {}^7C_2 = 35\,035$

Podem-se formar 35 035 comissões.

23.1. Basta calcular o número de maneiras de escolher 12 casas em 25 (a ordem não interessa porque as fichas são iguais)

$${}^{25}C_{12} = 5\,200\,300$$

É possível dispor de 5 200 300 maneiras.

23.2. ${}^9C_8 \times {}^{16}C_4 = 9 \times 1820 = 16\,380$

→ Número de maneiras de escolher quatro casas para as restantes quatro fichas entre as 16 casas que não pertencem às diagonais.

→ Número de maneiras de escolher oito casas entre as nove diagonais

É possível dispor de 16 380 maneiras.

23.3. ${}^9C_8 \times {}^{16}C_4 + {}^9C_9 \times {}^{16}C_3 = 16\,380 + 560 = 16\,940$

→ Nove fichas nas diagonais

→ Oito fichas nas diagonais

É possível dispor de 16 940 maneiras.

23.4. Há 5C_2 maneiras de escolher as filas que ficam vazias.

Para cada uma das escolhas há ${}^{15}C_{12}$ maneiras de arrumar as 12 fichas nas restantes 15 casas:

$${}^5C_2 \times {}^{15}C_{12} = 4550$$

Pág. 44

24. $\frac{\text{Reta } r}{5} \quad \frac{\text{Reta } s}{8}$

24.1. ${}^5C_1 \times {}^8C_1 + 2 = 5 \times 8 + 2 = 42$

→ A reta r e a reta s

→ Um ponto na reta r e um ponto na reta s

ou

$${}^{13}C_2 - {}^5C_2 - {}^8C_2 + 2 = 42$$

42 retas distintas

24.2. $\frac{r}{5} \quad \frac{s}{8}$

$$\frac{2}{1}$$

$${}^5C_1 \times {}^8C_2 + {}^5C_2 \times {}^8C_1 = 5 \times 28 + 10 \times 8 = 220$$

ou

$${}^{13}C_3 - {}^5C_3 - {}^8C_3 = 286 - 10 - 56 = 220$$

220 triângulos

24.3. $\frac{r}{5} \quad \frac{s}{8}$

$$\frac{2}{2} \quad \frac{2}{2}$$

$${}^5C_2 \times {}^8C_2 = 10 \times 28 = 280$$

→ Dois vértices na reta s

→ Dois vértices na reta r

280 quadriláteros

25. Jogos realizados em cada grupo: ${}^4C_2 = 6$

Como há seis grupos, temos $6 \times 6 = 36$ jogos realizados.

Realizaram-se 36 jogos.

26. $\frac{\text{GR}}{3} \quad \frac{\text{Defesas}}{8} \quad \frac{\text{Médios}}{7} \quad \frac{\text{Avançados}}{5}$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{2}{2}$$

$${}^3C_1 \times {}^8C_4 \times {}^7C_4 \times {}^5C_2 = 3 \times 70 \times 35 \times 10 = 73\,500$$

O seleccionador pode escalar a equipa de 73 500 maneiras.

27. Física Geometria Descritiva Matemática A
3 4 5

27.1. $\frac{12!}{3!4!5!} = 27\,720$

ou

$${}^{12}C_3 \times {}^9C_4 \times {}^5C_5 = 220 \times 126 \times 1 = 27\,720$$

Podemos fazer de 27 720 maneiras.

27.2. Como os livros de cada disciplina são iguais a sua disposição apenas se distingue pela ordem das disciplinas:
 $P_3 = 3! = 6$

Podemos fazer de seis maneiras.

27.3. Apenas se vão ordenar os livros de Geometria Descritiva e Matemática A:

$$\frac{9!}{4!5!} = 126$$

ou

$${}^9C_4 \times {}^5C_5 = 126$$

Podemos fazer de 126 maneiras.

27.4. $\frac{9!}{4! \times 5!} \times 10 = 1260$

→ Número de lugares que o bloco dos livros de Física pode ocupar na fila dos nove livros de Geometria Descritiva e Matemática A

ou

Pretendemos ordenar dez objetos: quatro livros iguais de Geometria Descritiva, cinco livros iguais de Matemática A e um bloco de livros de Física:

$$\frac{10!}{4!5!} = 1260$$

ou ainda

$${}^{10}C_4 \times {}^6C_5 \times {}^1C_1 = 1260$$

Podemos fazer de 1260 maneiras.

28. • Há ${}^{16}C_5$ maneiras de nos 16 lugares do expositor escolher cinco para os ovos cor rosa.
Por cada uma destas escolhas há ${}^{11}C_7$ maneiras de, entre os restantes 11 lugares escolher sete para os ovos azuis.
Portanto, como ovos da mesma cor não se distinguem, há ${}^{16}C_5 \times {}^{11}C_7$ maneiras de arrumar os ovos no expositor.
- Por outro lado, como há 12 ovos para arrumar podemos começar por escolher 12 lugares no expositor, o que pode ser feito de ${}^{16}C_{12}$ maneiras diferentes.
- Os espaços para os ovos rosa podem ser escolhidos entres esses 12 de ${}^{12}C_5$ maneiras diferentes ficando univocamente determinados os setes lugares restantes para os ovos azuis.
- Assim, há ${}^{16}C_{12} \times {}^{12}C_5$ maneiras de arrumar os ovos no expositor.

29. H I P O P O T A M O

29.1. $\frac{10!}{2!3!} = 302\,400$

Existem 302 400 anagramas.

29.2. Vogais O O O I A

• Palavras que começam por A (A | H I T M O O O P P):

$$\frac{9!}{3!2!} = 30\,240$$

• Palavras que começam por I (I | H A T M O O O P A):

Há também 30 240 nestas condições.

• Palavras que começam por O (O | H A T M O O P P):

$$\frac{9!}{2!2!} = 90\,720$$

Logo, existem $2 \times 30\,240 + 90\,720 = 151\,200$ anagramas que começam por uma vogal.

30. 1 1 6 6 6 3 7

30.1. $\frac{7!}{2!3!} = 420$

420 números

30.2. Números cujo 1.º algarismo é 6 (6 | 1 1 6 6 3 7):

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

Números cujo 1.º algarismo é 7 (7 | 1 1 6 6 3 7):

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

$$180 + 60 = 240$$

31. IM L P O P O

Consideramos o par IM como uma letra:

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

240 números

32.1. ${}^{12}C_4 \times {}^8A_5 = 3\,326\,400$

→ Escolha de lugares para os cinco sabores a fruta nos restantes oito recipientes
→ Escolha de lugares para o gelado de chocolate

Podem-se distribuir os gelados de 3 326 400 maneiras.

32.2. ${}^8A_5 = 6720$

Podem-se distribuir os gelados de 6720 maneiras.

32.3. ${}^3C_2 \times ({}^8C_4 - 2) \times {}^8A_5 = 1\,370\,800$

→ Escolha de lugares para os sabores a fruta
→ Escolha de lugares para o gelado de chocolate nas duas filas, exceto os casos em que ficam todos na mesma fila.
→ Escolha de duas filas para o gelado de chocolate

Podem-se distribuir os gelados de 1 370 800 maneiras.

Pág. 48

33. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

33.1. ${}^3C_2 \times 8 = 24$

→ Algarismos diferentes de 5
→ possíveis posições do algarismo 5

É possível formar 24 números.

33.2. $\frac{1.^\circ A}{8} \frac{2.^\circ A}{7} \frac{3.^\circ A}{4}$

2, 4, 6 ou 8

$8 \times 7 \times 4 = 224$

É possível formar 224 números.

33.3. $9 \times 8 \times 7 - 5 \times 4 \times 3 = 504 - 60 = 444$

→ números com três algarismos ímpares
→ todos os números

É possível formar 444 números.

34. Como as bolas são iguais, as caixas são diferentes e não podem ficar caixas vazias, o número de maneiras de distribuir as sete bolas pelas quatro caixas é o número de maneiras de distribuir as três bolas que sobram depois de colocar uma em cada uma das caixas:

Há três casos a considerar:

$3 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow {}^4C_1 = 4$ As três bolas numa caixa (escolhe-se uma caixa).

$2 \ 1 \ 0 \ 0 \rightarrow {}^4A_2 = 12$ Duas bolas numa caixa e uma noutra (escolhem-se ordenadamente – 2 1 ou 1 2 – duas caixas).

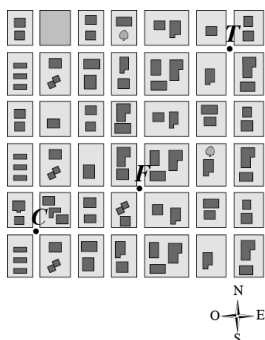
$1 \ 1 \ 1 \ 0 \rightarrow {}^4C_3 = 4$ Uma bola em cada caixa (escolhem-se três caixas).

$4 + 12 + 4 = 20$

As bolas podem ser colocadas de 20 maneiras diferentes

Pág. 49

35.

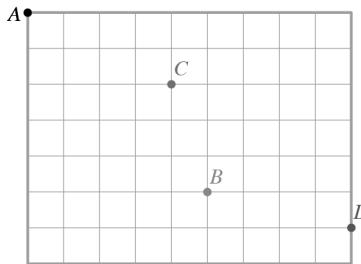


$\frac{T-F}{{}^5C_3} \times \frac{F-C}{{}^4C_1}$

${}^5C_3 \times {}^4C_1 = 10 \times 4 = 40$

Pode-se escolher o caminho para casa de 40 maneiras.

36.



36.1. ${}^{15}C_6 = 5005$

É possível escolher 5005 caminhos.

36.2. $\frac{A-B}{{}^{10}C_5} \times \frac{B-D}{{}^5C_1} = 252 \times 5 = 1260$

É possível escolher 1260 caminhos.

36.3. $\frac{A-C}{{}^6C_2} \times \frac{C-B}{{}^4C_3} \times \frac{B-D}{{}^5C_1}$

${}^6C_2 \times {}^4C_3 \times {}^5C_1 = 15 \times 4 \times 5 = 300$

É possível escolher 300 caminhos.

36.4. $\underbrace{{}^6C_2 \times {}^9C_4}_1 + \underbrace{{}^{10}C_5 \times {}^5C_1}_2 - \underbrace{300}_3 = 1890 + 1260 - 300 = 2850$

*1 passam por C

*2 passam por B

*3 passam por C (foram contados duas vezes)

É possível escolher 2850 caminhos.

Pág. 50

37. Homens: 6 ; mulheres: 7

37.1. $7 \times {}^{12}A_4 = 83 \ 160$

→ número de maneiras de escolher os restantes quatro membros
→ número de maneiras de escolher o presidente

A lista pode ser formada de 160 maneiras.

37.2. $\frac{H}{6} \frac{M}{7}$

$({}^6C_3 {}^7C_2 + {}^6C_4 {}^7C_1 + {}^6C_5 {}^7C_0) \times 5! = 531 \times 120 = 63 \ 720$

→ Distribuição dos cargos
→ 5 homens
→ 4 homens e 1 mulher
→ 3 homens e 2 mulheres

A lista pode ser formada de 63 720 maneiras.

37.3. $({}^{13}C_5 - {}^6C_5 - {}^7C_5) \times 5! = 151 \ 200$

Ou ${}^{13}A_5 - {}^6A_5 - {}^7A_5 = 151 \ 200$

A lista pode ser formada de 151 200 maneiras.

38. Raparigas (M): 6 ; rapazes (H): $\frac{4}{10}$

38.1. $6! \times 4! \times 2 = 34 \ 560$

Podem fazer de 34 560 maneiras.

38.2. $4! \times 7! = 120 \ 960$

→ Número de maneiras de ordenar as seis raparigas mais o bloco formado pelos rapazes
→ Número de maneiras de ordenar os rapazes

ou

$4! \times 6! \times 7 = 120 \ 960$

→ Número de lugares que o grupo dos rapazes pode ocupar (antes, entre ou depois das raparigas)

Podem fazer de 120 960 maneiras.

38.3. $6! \times {}^7A_4 = 604 \ 800$

→ Número de maneiras de escolher quatro lugares para os rapazes entre os sete possíveis
(• M • M • M • M • M • M)

→ Número de maneiras de ordenar as raparigas
Podem fazer de 604 800 maneiras.

Pág. 53

$$39.1. {}^{15}C_{n+2} = {}^{15}C_{11} \Leftrightarrow n+2=11 \vee n+2=15-11$$

$$\Leftrightarrow n=9 \vee n=2$$

$$39.2. {}^{30}C_{2n+1} = {}^{30}C_{19} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n+1=19 \vee 2n+1=30-19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n=18 \vee 2n=10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=9 \vee n=5$$

$$39.3. {}^{20}C_{17-n} = {}^{20}C_8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 17-n=8 \vee 17-n=20-8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=17-8 \vee n=17-12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=9 \vee n=5$$

$$39.4. {}^{15}C_7 - {}^{14}C_{n+2} = {}^{14}C_{n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{14}C_{n+2} + {}^{14}C_{n+3} = {}^{15}C_7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{15}C_{n+3} = {}^{15}C_7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+3=7 \vee n+3=15-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=4 \vee n=5$$

$$40. {}^{20}C_{p+5} = 1140$$

$${}^{18}C_{p+3} + {}^{18}C_{p+4} + {}^{19}C_{p+5} =$$

$$= {}^{19}C_{p+4} + {}^{19}C_{p+5} = {}^{20}C_{p+5} = 1140$$

$$41. \sum_{k=0}^n ({}^{n-1}C_{k-1} + {}^{n-1}C_k) = 4096 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n {}^nC_k = 2^{12} \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=12$$

$$41.1. {}^{n+1}C_5 = {}^{13}C_5 = 1287 \quad n+1=13$$

$$41.2. \sum_{k=0}^{n-3} {}^{n-3}C_k = \sum_{k=0}^9 {}^9C_k = \quad n-3=9$$

$$= 2^9 = 512$$

$$42. {}^nC_2 = 595 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 595 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 1190 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4760}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 69}{2} \Leftrightarrow n = -34 \vee n = 35$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 35$.

No torneio participaram 35 jogadores.

Pág. 55

$$43. n = 20$$

$$43.1. {}^{20}C_1 = 20$$

O 2.º elemento dessa linha é o 20.

$$43.2. 20:2=10$$

$${}^{20}C_{10} = 184\,756$$

O maior elemento dessa linha é o 184 756.

$$43.3. {}^{20}C_9 = {}^{20}C_{11} = 167\,960$$

$${}^{20}C_8 = {}^{20}C_{12} = 125\,970$$

$${}^{20}C_8 = {}^{20}C_{13} = 77\,520$$

Há cinco elementos superiores a 100 000.

$$43.4. {}^{21}C_4 = 5985$$

O quinto elemento da linha seguinte é o 5985.

$$44. n = 12$$

$$44.1. \text{ Há } 13-4=9 \text{ elementos superiores a } 12.$$

$$44.2. 2^{11} = 2048$$

A soma de todos os elementos é 2048.

Pág. 56

45. Os três primeiros elementos são iguais aos três últimos e, estes seis elementos, são os menores de uma linha do Triângulo de Pascal.

$$2({}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2) = 1808 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2} = 904 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+2n+n^2-n = 1808 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-1806 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+7224}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 85}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -43 \vee n = 42$$

Logo, $n = 42$.

O terceiro elemento da linha seguinte é ${}^{43}C_2 = 903$.

$$46. {}^nC_6 = {}^nC_9 \Leftrightarrow n-9=6 \Leftrightarrow n=15$$

A linha anterior é a de ordem $n=14$ e tem 15 elementos.

O maior é ${}^{14}C_7 = 3432$.

$$47. 1, n, \dots, n, 1$$

$$1 \times n \times n \times 1 = 961 \Leftrightarrow n^2 = 961 \Leftrightarrow n = 31$$

$${}^{32}C_2 = 496$$

O terceiro elemento da linha seguinte é o 496.

$$48.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & {}^nC_p & & {}^nC_{p+1} & & {}^nC_{p+2} & \dots \\ & \dots & & {}^{n+1}C_{p+1} & & {}^{n+1}C_{p+2} & \dots \\ & & & \dots & & {}^{n+2}C_{p+2} & \dots \end{array}$$

Substituindo os valores dados:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & {}^nC_p & & 816 & & {}^nC_{p+2} & \dots \\ & \dots & & {}^{n+1}C_{p+1} & & 3876 & \dots \\ & & & \dots & & 4845 & \dots \end{array}$$

Temos:

$$816 + {}^nC_{p+2} = 3876 \Leftrightarrow {}^nC_{p+2} = 3876 - 816 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_{p+2} = 3060$$

$${}^{n+1}C_{p+1} + 3876 = 4845 \Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+1} = 4845 - 3876 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_{p+1} = 969$$

$${}^nC_p + 816 = 969 \Leftrightarrow {}^nC_p = 969 - 816 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_p = 153$$

$${}^{n+2}C_{n-p} = {}^{n+2}C_{n+2-(n-p)} = {}^{n+2}C_{p+2} = 4845$$

Assim:

$${}^nC_{p+2} = 3060, {}^{n+1}C_{p+1} = 969, {}^nC_p = 153 \text{ e } {}^{n+2}C_{n-p} = 4845$$

Pág. 58

$$\begin{aligned} 49.1. (2-x)^4 &= \sum_{p=0}^4 {}^4C_p 2^{4-p} (-x)^p = \\ &= 2^4 (-x)^0 + 4 \times 2^3 \times (-x)^1 + 6 \times 2^2 \times (-x)^2 + \\ &\quad + 4 \times 2 \times (-x)^3 + 2^0 \times (-x)^4 = \\ &= 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4 = \\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49.2. (x + \sqrt{x})^3 &= \sum_{p=0}^3 {}^3C_p x^{3-p} (\sqrt{x})^p = \\ &= x^3 \times (\sqrt{x})^0 + 3x^2 \sqrt{x} + 3x (\sqrt{x})^2 + x^0 (\sqrt{x})^3 = \\ &= x^3 + 3x^2 \sqrt{x} + 3x^2 + x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49.3. (2x^2 - 1)^5 &= \sum_{p=0}^5 {}^5C_p (2x^2)^{5-p} (-1)^p = \\ &= (2x^2)^5 (-1)^0 + 5(2x^2)^4 (-1)^1 + 10(2x^2)^3 (-1)^2 + \\ &\quad + 10(2x^2)^2 (-1)^3 + 5(2x^2)^1 (-1)^4 + (-1)^5 = \\ &= 32x^{10} - 80x^8 + 80x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49.4. \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 &= \sum_{p=0}^5 {}^5C_p x^{5-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = \\ &= x^5 \left(\frac{1}{x}\right)^0 + 5x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^1 + 10x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 10x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \\ &\quad + 5x^1 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \\ &= x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49.5. \left(\frac{2}{x} - x^2\right)^6 &= \sum_{p=0}^6 {}^6C_p \left(\frac{2}{x}\right)^{6-p} (-x^2)^p = \\ &= \left(\frac{2}{x}\right)^6 (-x^2)^0 + 6\left(\frac{2}{x}\right)^5 (-x^2)^1 + 15\left(\frac{2}{x}\right)^4 (-x^2)^2 + \\ &\quad + 20\left(\frac{2}{x}\right)^3 (-x^2)^3 + 15\left(\frac{2}{x}\right)^2 (-x^2)^4 + \\ &\quad + 6\left(\frac{2}{x}\right)^1 (-x^2)^5 + (-x^2)^6 = \\ &= \frac{64}{x^6} - \frac{192}{x^3} + 240 - 160x^3 + 60x^6 - 12x^9 + x^{12} = \\ &= x^{12} - 12x^9 + 60x^6 - 160x^3 + 240 - \frac{192}{x^3} + \frac{64}{x^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49.6. (x + 2y)^5 &= \sum_{p=0}^5 {}^5C_p x^{5-p} (2y)^p = \\ &= x^5 (2y)^0 + 5x^4 (2y)^1 + 10x^3 (2y)^2 + \\ &\quad + 10x^2 (2y)^3 + 5x^1 (2y)^4 + (2y)^5 = \\ &= x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80xy^4 + 32y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50.1. (1+x)^4 - 3 &= x^4 + 4x^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 - 3 = x^4 + 4x^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x^2 + 4x + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$S = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned} 50.2. (2+x)^3 &= (x+1)^3 + 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^3 + 3 \times 2^2 \times x + 3 \times 2 \times x^2 + x^3 = \\ &\quad = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 + 12x + 6x^2 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \\ &S = \{-3, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51.1. (\sqrt{3}-1)^4 &= (\sqrt{3})^4(-1)^0 + 4(\sqrt{3})^3(-1)^1 + 6(\sqrt{3})^2(-1)^2 + \\ &\quad + 4(\sqrt{3})^1(-1)^3 + (-1)^4 = \\ &= 9 - 4 \times 3\sqrt{3} + 18 - 4\sqrt{3} + 1 = 28 - 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51.2. (\sqrt{2}-1)^5 &= (\sqrt{2})^5(-1)^0 + 5(\sqrt{2})^4(-1)^1 + 10(\sqrt{2})^3(-1)^2 + \\ &\quad + 10(\sqrt{2})^2(-1)^3 + 5(\sqrt{2})^1(-1)^4 + (-1)^5 = \\ &= 4\sqrt{2} - 20 + 20\sqrt{2} - 20 + 5\sqrt{2} - 1 = \\ &= 29\sqrt{2} - 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51.3. (1-\sqrt{5})^5 &= (-\sqrt{5})^0 + 5(-\sqrt{5})^1 + 10(-\sqrt{5})^2 + \\ &\quad + 10(-\sqrt{5})^3 + 5(-\sqrt{5})^4 + (-\sqrt{5})^5 = \\ &= 1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5} = 176 - 80\sqrt{5} \end{aligned}$$

Pág. 59

$$\begin{aligned} 52. \left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8 &= \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^8 = \sum_{p=0}^8 {}^8C_p (2x)^{8-p} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p \\ T_{p+1} &= {}^8C_p 2^{8-p} x^{8-p} \times (-1)^p \times (x^{-2})^p = \\ &= {}^8C_p 2^{8-p} (-1)^p x^{8-p-2p} = {}^8C_p 2^{8-p} (-1)^p x^{8-3p} \end{aligned}$$

52.1. Como $8-3p$ decresce com p , o 3.º termo obtém-se para $p=2$.

$$\begin{aligned} T_3 &= {}^8C_2 \times 2^{8-2} \times (-1)^2 \times x^{8-6} = 28 \times 64x^2 \\ T_3 &= 1792x^2 \end{aligned}$$

$$52.2. 8-3p=5 \Leftrightarrow 3p=3 \Leftrightarrow p=1$$

$$T_2 = {}^8C_1 \times 2^{8-1} \times (-1)^1 \times x^{8-3} = -8 \times 128 \times x^5 = -1024x^5$$

O coeficiente de x^5 é -1024 .

$$52.3. 8-3p=0 \Leftrightarrow 3p=8 \Leftrightarrow p=\frac{8}{3}$$

Como $p \notin \mathbb{Z}$, não existe termo independente de x .

Se $p \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq p \leq 8$, então $8-3p \neq 0$.

$$\begin{aligned} 53. \left(\frac{1}{x} + x\sqrt{x}\right)^{10} &= \sum_{p=0}^{10} {}^{10}C_p \left(\frac{1}{x}\right)^{10-p} (x\sqrt{x})^p \\ T_{p+1} &= {}^{10}C_p (x^{-1})^{10-p} x^p \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p = \\ &= {}^{10}C_p x^{-10+p} x^p \times x^{\frac{p}{2}} = \\ &= {}^{10}C_p x^{-10+p+p+\frac{p}{2}} \quad 2p + \frac{p}{2} = \frac{5p}{2} \\ &= {}^{10}C_p x^{\frac{5p}{2}-10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 53.1. \frac{5p}{2} - 10 &= 0 \Leftrightarrow 5p = 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p = 4 \end{aligned}$$

$$T_5 = {}^{10}C_4 x^0 = 210$$

$$\begin{aligned} 53.2. \frac{5p}{2} - 10 &= 10 \Leftrightarrow 5p = 40 \Leftrightarrow p = 8 \\ T_9 &= {}^{10}C_8 x^{10} = 45x^{10} \end{aligned}$$

Pág. 60

$$54.1. (4x^3 - 2x)^{10}$$

$$\text{Para } x=1: (4-2)^{10} = 2^{10} = 1024$$

$$54.2. (5x^2 - 6x)^{91}$$

$$\text{Para } x=1: (5-6)^{91} = (-1)^{-1} = -1$$

$$54.3. (x^5 - 3x^2)^5$$

$$\text{Para } x=1: (1-3)^5 = (-2)^5 = -32$$

$$55.1. \sum_{k=0}^4 {}^4C_k \times 4^{4-k} \times (-7)^{-k} = (4-7)^4 = (-3)^4 = 81$$

$$\begin{aligned} 55.2. \sum_{k=0}^{100} {}^{100}C_k \times (-101)^{100-k} \times 10^{2k} &= \\ &= \sum_{k=0}^{100} {}^{100}C_k (-101)^{100-k} \times (10^2)^k = \\ &= (-101+100)^{100} = (-1)^{100} = 1 \end{aligned}$$

$$56.1. \left(x + \frac{2}{x^4}\right)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p x^{n-p} \left(\frac{2}{x^4}\right)^p$$

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= {}^nC_p x^{n-p} \times 2^p \times (x^{-4})^p = \\ &= {}^nC_p x^{n-p} \times 2^p \times x^{-4p} = \\ &= {}^nC_p 2^p x^{n-5p} \end{aligned}$$

$$n-5p=0 \Leftrightarrow p=\frac{n}{5}$$

Como $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq p \leq n$, o menor valor de n é 5.

$$56.2. \left(\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p \left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} (\sqrt[3]{x})^p$$

$$T_{p+1} = {}^nC_p (x^{-1})^{n-p} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^p = {}^nC_p x^{-n+p+\frac{p}{3}}$$

$$-n+p+\frac{p}{3}=0 \Leftrightarrow -3n+3p+p=0 \Leftrightarrow 4p=3n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{3n}{4}$$

Como $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq p \leq n$, o menor valor de n é 4.

Pág. 64

57.1. $9 \times {}^{10}A'_4 - {}^9A'_5 = 9 \times 10^4 - 9^5 = 30\,951$
 $\begin{array}{l} \text{└─┐} \text{ Números sem o algarismo 0} \\ \text{└─┐} \text{ Todos os números de cinco algarismos} \end{array}$
 ou

$$\overline{9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} - \overline{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9} = 30\,951$$

Existem 30 951 números.

57.2. $9 \times {}^{10}A'_4 - 8 \times {}^9A'_4 = 9 \times 10^4 - 8 \times 9^4 = 37\,512$
 └─┐ Números sem o algarismo 2
 Existem 37 512 números.

58. $3 \times {}^{10}A'_7 = 3 \times 10^7 = 30\,000\,000$
 $\begin{array}{l} \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de escolher os restantes} \\ \text{└─┐} \text{ sete algarismos} \\ \text{└─┐} \text{ Número de operadoras} \end{array}$
 O número máximo é 30 000 000.

59.1. $\underline{A} \underline{A} \underline{L} \underline{L} \underline{L}$
 ${}^{10}A'_2 \times {}^{26}A'_3 = 10^2 \times 26^3 = 1\,757\,600$
 É possível formar 1 757 600 códigos.

59.2. $\underline{A}_1 \underline{A}_2 \underline{V} \underline{V} \underline{V}$
 ${}^{10}A_2 \times {}^5A'_3 = 10 \times 9 \times 5^3 = 11\,250$
 É possível formar 11 250 códigos.

59.3. $\underline{A}_1 \underline{A}_2 \underline{L}_1 \underline{L}_2 \underline{L}_3$
 $\underline{10} \underline{1} \underline{26} \underline{25} \underline{24}$
 $10 \times 1 \times 26 \times 25 \times 24 = 156\,000$
 É possível formar 156 000 códigos.

59.4. $\underline{A}_1 \underline{A}_2 \underline{L}_1 \underline{L}_2 \underline{L}_3$
 $\underline{10} \underline{5} \underline{26} \underline{26} \underline{1}$
 $10 \times 5 \times 26 \times 26 \times 1 = 33\,800$
 É possível formar 33 800 códigos.

60. Raparigas (F): 13; rapazes (M): 10

60.1. $\frac{\text{Delegado}}{10} \times \frac{\text{Subdelegado}}{13} = 130$
 Podem ser escolhidos de 130 maneiras.

60.2. $\frac{\text{Delegado}}{10} \frac{\text{Subdelegado}}{13} \frac{\text{rapaz-rapariga}}{13}$
 $\frac{13}{10} \frac{10}{13} \frac{\text{rapariga-rapaz}}{13}$
 $10 \times 13 + 13 \times 10 = 260$

Podem ser eleitos de 260 maneiras.

60.3. $2 \times 22 = 44$
 $\begin{array}{l} \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de eleger o segundo elemento.} \\ \text{└─┐} \text{ A Joana pode ser delegada ou subdelegada.} \end{array}$
 Podem ser eleitos de 44 maneiras.

61. ${}^{25}A_5 = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6\,375\,600$
 O inspetor pode planificar a visita de 6 375 600 maneiras.

62. ${}^8A_6 = 20\,160$ ou
 $\begin{array}{cc} \text{Pintas} & \text{Fases} \\ 1 & \times & 8 & \times & 7 & \times & 6 & \times & 5 & \times & 4 & \times & 3 & = & 20\,160 \end{array}$
 O dado pode ser pintado de 20 160 maneiras.

Pág. 65

63.1. $\frac{1.^\circ A}{3} \frac{2.^\circ A}{8} \frac{3.^\circ A}{7} \frac{4.^\circ A}{6}$ (o 1.º algarismo pode ser 1, 2 ou 3)
 $3 \times 8 \times 7 \times 6 = 1008$

Ou $3 \times {}^8A_3 = 1008$
 Podem ser formados 1008 números.

63.2. $\frac{1.^\circ A}{8} \frac{2.^\circ A}{7} \frac{3.^\circ A}{6} \frac{4.^\circ A}{5}$ (o 4.º algarismo pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9)
 $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ ou
 ${}^8A_3 \times 5 = 1680$
 Podem ser formados 1680 números ímpares.

63.3. Seja x tal que $x > 3680$
 Vamos dividir o problema em três partes:
 $x > 4000$; $3700 < x < 4000$ e $3680 \leq x < 3700$

4 a 9
 $\frac{4}{6} \frac{a}{8} \frac{9}{7} \frac{6}{6} \quad x > 4000$

$\frac{3}{1} \frac{7, 8, 9}{3} \frac{6}{7} \frac{6}{6} \quad 3700 < x < 4000$

$\frac{3}{1} \frac{6}{1} \frac{8, 9}{2} \frac{6}{6} \quad 3680 \leq x < 3700$

$6 \times 8 \times 7 \times 6 + 1 \times 3 \times 7 \times 6 + 1 \times 1 \times 2 \times 6 = 2154$
 Podem ser formados 2154 números.

64.1. ${}^6A_5 \times P_7 = 3\,628\,800$
 $\begin{array}{l} \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de os homens ocuparem os} \\ \text{└─┐} \text{ restantes sete lugares} \\ \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de escolher ordenadamente} \\ \text{└─┐} \text{ cinco lugares entre os seis da fila da frente} \end{array}$
 Podem ocupar os lugares de 3 628 800 maneiras.

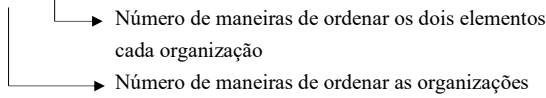
64.2. ${}^5A_4 \times P_8 = 4\,838\,400$
 $\begin{array}{l} \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de as restantes oito pessoas} \\ \text{└─┐} \text{ ocuparem os restantes oito lugares} \\ \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de escolher ordenadamente} \\ \text{└─┐} \text{ quatro mulheres para os extremos das filas} \end{array}$
 Podem ocupar os lugares de 4 838 400 maneiras.

64.3. $2 \times {}^7A_6 \times 6! = 7\,257\,600$
 $\begin{array}{l} \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de as restantes seis pessoas} \\ \text{└─┐} \text{ ocuparem os restantes seis lugares} \\ \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de escolher ordenadamente} \\ \text{└─┐} \text{ seis homens para a fila escolhida} \\ \text{└─┐} \text{ Número de maneiras de escolher a fila a ocupar} \\ \text{└─┐} \text{ pelos homens} \end{array}$
 Podem ocupar os lugares de 7 257 600 maneiras.

65.1. $8! = 40\,320$ Permutações dos oito elementos nos oito lugares

Podem-se dispor de 40 320 maneiras.

65.2. $4! \times 2 = 48$



Podem-se dispor de 48 maneiras.

66. $\frac{1.^a L}{8} \frac{2.^a L}{7} \frac{3.^a L}{6} \frac{4.^a L}{5} \frac{5.^a L}{4} \frac{6.^a L}{3} \frac{7.^a L}{2} \frac{8.^a L}{1}$

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320$$

É possível arrumar de 40 320 maneiras.

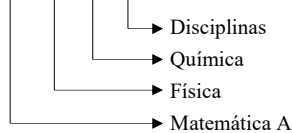
67. Matemática A: 5 ; Física: 4 ; Química: 3

Total: 12

67.1. a) $12! = 479\,001\,600$

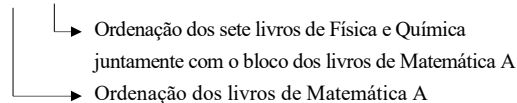
Podem-se arrumar de 479 001 600 maneiras.

b) $5! \times 4! \times 3! \times 3! = 103\,680$



Podem-se arrumar de 103 680 maneiras.

c) $5! \times 8! = 4\,838\,400$

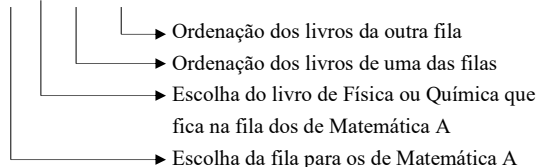


ou

$$5! \times 7! \times 8 = 4\,838\,400$$

Podem-se arrumar de 4 838 400 maneiras.

67.2. $2 \times 7 \times 6! \times 6! = 7\,257\,600$



Podem-se arrumar de 7 257 600 maneiras.

68. TRIÂNGULO

68.1. Não há letras repetidas.

É possível formar $9! = 362\,880$ palavras.

68.2. $\frac{V}{4} \frac{\quad}{7!} \frac{V}{3}$

$$4 \times 7! \times 3 = 60\,480 \text{ palavras}$$

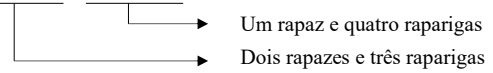
69.1. ${}^{22}C_5 = 26\,334$

Podem-se escolher de 26 334 maneiras.

69.2. ${}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2 = 120 \times 66 = 7920$

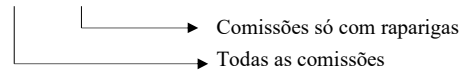
Podem-se escolher de 7920 maneiras.

69.3. ${}^{10}C_2 \times {}^{12}C_3 + {}^{10}C_1 \times {}^{12}C_4 = 45 \times 220 + 10 \times 495 = 14\,850$



Podem-se escolher de 14 850 maneiras.

69.4. ${}^{22}C_5 - {}^{12}C_5 = 26\,334 - 792 = 25\,542$

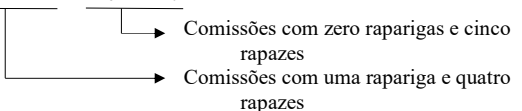


Alternativamente

$$\begin{aligned} & {}^{10}C_1 \times {}^{12}C_4 + {}^{10}C_2 \times {}^{12}C_3 + {}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2 + \\ & \quad + {}^4C_4 \times {}^{12}C_1 + {}^{10}C_5 \times {}^{12}C_0 = \\ & = 4950 + 9900 + 7920 + 2520 + 252 = 25\,542 \end{aligned}$$

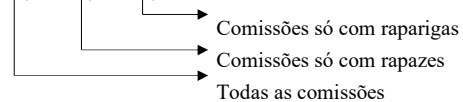
Podem-se escolher de 25 542 maneiras.

69.5. ${}^4C_4 \times {}^{12}C_1 + {}^{10}C_5 \times {}^{12}C_0 = 2520 + 252 = 2772$



Podem-se escolher de 2772 maneiras.

69.6. ${}^{22}C_5 - {}^{10}C_5 - {}^{12}C_5 = 26\,334 - 252 - 792 = 25\,290$



Alternativamente

$$\begin{aligned} & {}^{10}C_1 \times {}^{12}C_4 + {}^{10}C_2 \times {}^{12}C_3 + {}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2 + {}^4C_4 \times {}^{12}C_1 = \\ & = 4950 + 9900 + 7920 + 2520 = 25\,290 \end{aligned}$$

Podem-se escolher de 25 290 maneiras.

70.1. Ases Outras

$\frac{4}{4} \frac{48}{9}$

$${}^4C_4 \times {}^{48}C_9 = 1\,677\,106\,640$$

1 677 106 640 “mãos”

70.2. Paus Outras

$\frac{13}{10} \frac{39}{3}$

$${}^{13}C_{10} \times {}^{39}C_3 = 2\,613\,754$$

2 613 754 “mãos”

70.3. Paus Outras

$\frac{13}{0} \frac{39}{13}$

$${}^{13}C_0 \times {}^{39}C_{13} = 8\,122\,425\,444$$

8 122 425 444 “mãos”

69.

Rapazes	Raparigas
10	12
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

70.4. Reis Outras

$$\begin{array}{r} 4 \quad 48 \\ 3 \quad 10 \\ 4 \quad 9 \end{array} \quad {}^4C_3 \times {}^{48}C_{10} + {}^4C_4 \times {}^{48}C_9 =$$

$$= 27\,839\,970\,224$$

27 839 970 224 “mãos”

70.5. Reis Outras

$$\begin{array}{r} 4 \quad 48 \\ 0 \quad 13 \\ 1 \quad 12 \\ 2 \quad 11 \\ 3 \quad 10 \\ 4 \quad 9 \end{array}$$

$${}^4C_0 \times {}^{48}C_{13} + {}^4C_1 \times {}^{48}C_{12} + {}^4C_2 \times {}^{48}C_{11} + {}^4C_3 \times {}^{48}C_{10} =$$

$$= 633\,336\,452\,960$$

ou

$${}^{52}C_{13} - {}^4C_4 \times {}^{48}C_9 = 633\,336\,452\,960$$

633 336 452 960 “mãos”

70.6. Paus Copas + espadas

$$\begin{array}{r} 13 \quad 26 \\ 5 \quad 8 \end{array} \quad {}^{13}C_5 \times {}^{26}C_8 = 2\,010\,647\,925$$

2 010 647 925 “mãos”

70.7. Ases Paus Outras

$$\begin{array}{r} 4 \quad 12 \quad 36 \\ 0 \quad 5 \quad 8 \end{array} \quad {}^{12}C_5 \times {}^{36}C_8 = 23\,966\,189\,280$$

23 966 189 280 “mãos”

71.1. $2! \times 2! \times 2! \times 3! = 48$

Podem fazer de 48 maneiras.

71.2. $3! \times 3! \times 2 = 72$ HHMHMH ou MHMHMH

Podem fazer de 72 maneiras.

71.3. $3! \times 3! \times 4 = 144$ MMM|H|H|H|

ou $3! \times 4! = 144$

Podem fazer de 144 maneiras.

71.4. $3! \times 3! \times 2 = 72$ H [MMM] HH ou HH [MMM] H

Podem fazer de 72 maneiras.

72. Admitimos que a ordem de colocação dos gelados no copo não altera a escolha.

Fruta	Chocolate	Café	Nata	Caramelo
6	1	1	1	1

72.1. ${}^{10}C_4 = 210$

É possível escolher 210 sabores diferentes.

72.2. Fruta Outros

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \\ 2 \quad 2 \end{array} \quad {}^6C_2 \times {}^4C_2 = 90$$

É possível escolher 90 sabores diferentes.

72.3. Zero, um, dois ou três sabores de fruta:

$${}^{10}C_4 - {}^6C_4 = 195 \quad \text{Todas as escolhas menos as que incluem quatro sabores de fruta}$$

ou

$$\underbrace{{}^6C_0 \times {}^4C_4}_{0 \text{ de fruta}} + \underbrace{{}^6C_1 \times {}^4C_3}_{1 \text{ de fruta}} + \underbrace{{}^6C_2 \times {}^4C_2}_{2 \text{ de fruta}} + \underbrace{{}^6C_3 \times {}^4C_1}_{3 \text{ de fruta}} =$$

$$= 1 + 24 + 90 + 80 = 195$$

É possível escolher 195 sabores diferentes.

72.4. Chocolate Caramelo Outros

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 8 \\ {}^8C_4 + {}^1C_1 \times {}^8C_3 + {}^1C_1 \times {}^8C_3 = 182 \end{array}$$

1 de caramelo + 3 dos outros
1 de chocolate + 3 dos outros
4 dos outros

ou

$${}^{10}C_4 - {}^1C_1 \times {}^1C_1 \times {}^8C_2 = 182$$

1 de caramelo + 1 de chocolate + 2 dos outros
Todas as possibilidades

É possível escolher 182 sabores diferentes.

72.5. Chocolate Nata Outros

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 8 \\ {}^1C_1 \times {}^1C_1 \times {}^8C_2 + {}^1C_0 \times {}^1C_0 \times {}^8C_4 = 28 + 70 = 98 \end{array}$$

0 de caramelo + 0 de chocolate + 4 dos outros
1 de caramelo + 1 de chocolate + 2 dos outros

É possível escolher 98 sabores diferentes.

Pág. 67

73. $2048 = 2^{11}$

O conjunto tem 11 elementos.

$${}^{11}C_0 + {}^{11}C_1 + {}^{11}C_2 + {}^{11}C_3 = 232$$

O conjunto tem 232 subconjuntos com menos de quatro elementos.

74.1. $\frac{7!}{3!} = 840$ ou ${}^7C_3 \times 4! = 840$

É possível formar 840 números.

74.2. O algarismo das unidades tem de ser 5 ou 7. Os restantes formam uma sequência de seis elementos com três repetidos:

$$\frac{6!}{3!} \times 2 = 240$$

240 números são ímpares.

$$T_3 = {}^6C_2 \times 2^{6-2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times x^0 =$$

$$= 15 \times 16 \times \frac{1}{4} = 60$$

$$80. \sum_{p=0}^{99} {}^{99}C_p \left(\frac{3}{5}\right)^{99-p} \left(-\frac{8}{5}\right)^p = \left(\frac{3}{5} - \frac{8}{5}\right)^{99} = (-1)^{99} = -1$$

$$81. (x-1)^3 + (x+1)^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 \times (-1) + 3x \times (-1)^2 + (-1)^3 +$$

$$+ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$S = \{-1, 0, 1\}$$

$$82. f(a-3) = a^4$$

Seja $x = a-3 \Leftrightarrow a = x+3$

$$f(x) = (x+3)^4 =$$

$$= x^4 + 4x^3 \times 3 + 6 \times x^2 \times 3^2 + 4 \times x \times 3^3 + 3^4$$

$$f(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & \end{array}$$

Pág. 68

$$83.1. 4 \times {}^{13}A_4 = 68\ 640$$

Há quatro naipes

Podem-se formar 68 640 naipes.

$$83.2. \text{Consideremos dois casos:}$$

1.º caso: a primeira carta é o rei de ouros

2.º caso: primeira carta é de ouros mas não é o rei.

Assim:

$$\underline{1.^\text{a}} \quad \underline{2.^\text{a}} \quad \underline{3.^\text{a}} \quad \underline{4.^\text{a}}$$

1.º caso: 1 50 49 48 Há $51-3 = 48$ cartas que não são reis)

2.º caso: 12 50 49 47 Há $51-4 = 47$ cartas que não são reis)

$$1 \times {}^{50}A_2 \times 48 + 12 \times {}^{50}A_2 \times 47 = 1\ 499\ 400$$

Podem-se formar 1 499 400 sequências.

$$84.1. \frac{15!}{3! \times 5! \times 7!} = 360\ 360 \text{ ou } {}^{15}C_3 \times {}^{12}C_5 \times {}^7C_7 = 360\ 360$$

É possível formar 360 360 sequências.

$$84.2. \frac{13!}{5! \times 7!} = 10\ 296 \text{ ou } {}^{13}C_5 \times {}^8C_7 \times {}^1C_1 = 10\ 296$$

É possível formar 10 296 sequências.

$$84.3. {}^{10}C_7 \times {}^3C_3 \times {}^{11}C_5 = 55\ 440$$

Número de maneiras de intercalar as cinco bolas vermelhas na fila das azuis e brancas

Número de maneiras de organizar a fila das bolas azuis e brancas

$$84.4. 360\ 360 - 55\ 440 = 304\ 920$$

Sem bolas vermelhas seguidas

Todos os casos

85. A fila tem $n+2$ bolas sendo duas brancas (iguais) e n pretas (iguais). O número de maneiras de ordenar as bolas é o número de nos $n+2$ lugares escolher a posição das duas bolas brancas (ou das n pretas) o que pode ser feito de ${}^{n+2}C_2$ maneiras diferentes.

$${}^{n+2}C_2 = 66 \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)}{2} = 66 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 2n + 2 - 132 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 130 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9+520}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 23}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -13 \vee n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 10$.

$$86.1. {}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^5C_5 = 11\ 732\ 745\ 024$$

Equipa A

Equipa B

Equipa C

Equipa D

Ou

$$\frac{20!}{(5!)^4} = 11\ 732\ 745\ 024$$

Os 20 alunos são colocados por ordem (20!). Os primeiros cinco são da equipa A, os cinco seguintes da equipa B e assim sucessivamente. Dentro de cada equipa a ordem dos elementos não interessa pelo que se divide por 5!. Logo, o número de possibilidades pode ser dado por:

86.2. Neste caso, as equipas não são nomeadas. Assim, por exemplo, as distribuições:

$\underbrace{1,2,3,4,5}_{\text{Equipa A}}, \underbrace{6,7,8,9,10}_{\text{Equipa B}}, \underbrace{11,12,13,14,15}_{\text{Equipa C}}, \underbrace{16,17,18,19,20}_{\text{Equipa D}}$ e

$\underbrace{1,2,3,4,5}_{\text{Equipa D}}, \underbrace{6,7,8,9,10}_{\text{Equipa C}}, \underbrace{11,12,13,14,15}_{\text{Equipa B}}, \underbrace{16,17,18,19,20}_{\text{Equipa A}}$ são

diferentes no caso de **86.1.**, mas iguais no caso presente.

Logo, há $4!$ vezes menos equipas (permutações de A, B, C e D).

Temos, assim:

$$\frac{{}^{20}C_5 \times {}^{15}C_5 \times {}^{10}C_5 \times {}^5C_5}{4!} = 488\ 864\ 376$$

Ou

$$\frac{20!}{(5!)^4 \times 4!} = 488\ 864\ 376$$

87. A : 6 azuis; B : 9 vermelhas

Total: 15

87.1. ${}^6C_3 \times {}^9C_2 = 720$

Podem ser formados 720 conjuntos.

87.2. a) ${}^{15}C_4 - {}^6C_4 - {}^9C_4 = 1224$

Subconjuntos com quatro bolas vermelhas
Subconjuntos com quatro bolas azuis
Todos os subconjuntos de quatro elementos

Em 1224 subconjuntos.

b)

Pares	Ímpares	
3	3	Azuis (1 a 6)
4	5	Vermelhas (1 a 9)
7	8	

Na caixa há sete números pares e oito números ímpares.

Ao seleccionar quatro bolas há as seguintes possibilidades:

Pares	Ímpares	
7	8	
0	4	→ Produto ímpar
1	3	→ Produto par
2	2	
3	1	
4	0	

$${}^{15}C_4 - {}^8C_4 = 1295$$

Produto ímpar
Todos os casos

Em 1295 subconjuntos.

88.2. $4! \times 5 = 120$

Número de possibilidades de colocar os três vermelhos
Número de maneiras de ordenar os chapéus diferentes

Os chapéus podem ser colocados de 120 maneiras.

88.3. Número de maneiras de os chapéus vermelhos ficarem separados:

$$4! \times {}^5C_3 = 240$$

Escolha dos lugares para os chapéus vermelhos entre os restantes ($|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|$)
Número de maneiras de ordenar os quatro chapéus diferentes dos vermelhos.

Logo, há $840 - 240 = 600$ sequências em que ficam pelo menos dois chapéus vermelhos seguidos.

89. Vermelhos: 3; amarelos: 2; azul: 1;
verde: 1; preto: 1

$$\mathbf{89.1.} \quad \frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$$

ou

$${}^8C_3 \times {}^5C_2 \times 3! = 3360$$

Podem expor-se de 3360 maneiras.

89.2. $P_5 = 5! = 120$

Há cinco objetos a ser ordenados: o bloco de cinco carros vermelhos, o bloco de cinco carros amarelos e os restantes carros.

Ou

$${}^5A_3 \times 2! = 120$$

Podem expor-se de 120 maneiras.

89.3. $6 \times 2 \times {}^5C_2 = 120$

Número de maneiras de escolher dois lugares para os restantes carros amarelos
Pode ser verde-azul ou azul-verde

Podem expor-se de 120 maneiras.

89.4. Número de maneiras de o azul ficar ao lado do verde:

$$2! \times \frac{6!}{3! \times 2!} \times 7 = 840$$

Número de posições que o par azul/verde pode ocupar na fila
Número de maneiras de ordenar os restantes automóveis
Pode ser azul-verde ou verde-azul

Ou

$$2! \times \frac{7!}{3! \times 2!} = 840 \quad (\text{o par azul-verde conta como um só})$$

Logo, há $3360 - 840 = 2520$ sequências em que o automóvel não fica ao lado do verde.

89.5. Número de maneiras de os três automóveis vermelhos ficarem separados:

$$\mathbf{88.1.} \quad \frac{7!}{3!} = 840 \quad \text{ou} \quad {}^7C_3 \times 4! = 840$$

Os chapéus podem ser colocados de 840 maneiras.

$$\frac{5!}{2!} \times {}^6C_3 = 1200$$

→ Número de maneiras de escolher lugares para os automóveis vermelhos entre os restantes, no início ou no fim da fila.

→ Número de maneiras de ordenar os automóveis não vermelhos.

Logo, há $3360 - 1200 = 2160$ casos em que pelo menos dois carros vermelhos ficam seguidos.

90.1. ${}^{12}C_6 \times {}^8A_6 \times {}^8A_6 = 375\ 537\ 254\ 400$

→ escolha de lugares para os restantes na outra fila

→ escolha de lugares para os seis elementos escolhidos para uma das filas

→ escolha de seis elementos para uma das filas

Ou

$$12! \times {}^8C_6 \times {}^8C_6$$

90.2. $2 \times {}^{12}A_8 \times {}^8A_4 = 67\ 060\ 224\ 000$

→ Escolha de lugares para os quatro restantes na outra fila

→ Escolha ordenada de oito elementos para uma das filas

→ Escolha da fila que fica com oito elementos

Ou

$$12! \times {}^8C_4 \times 2$$

90.3. ${}^8A_5 \times {}^{11}A_7 = 11\ 176\ 704\ 000$

Podem-se sentar de 11 176 704 000 maneiras.

91.1. 3 3 3 2 2

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

10 elementos

91.2. Elementos de A em que não figura o 1 nem o 2:

$$\frac{1.^\circ A}{7} \quad \frac{2.^\circ A}{8} \quad \frac{3.^\circ A}{8} \quad \frac{4.^\circ A}{8} \quad \frac{5.^\circ A}{8}$$

$$7 \times 8^4 = 28\ 672$$

28 672 elementos

91.3. O algarismo das unidades é 0, 2, 4, 5, 6 ou 8.

1.º caso: o algarismo das unidades é 0

$$\frac{1.^\circ A}{9} \quad \frac{2.^\circ A}{8} \quad \frac{3.^\circ A}{7} \quad \frac{4.^\circ A}{6} \quad \frac{5.^\circ A}{1}$$

2.º caso: o algarismo das unidades é 2, 4, 5, 6 ou 8

$$\frac{1.^\circ A}{8} \quad \frac{2.^\circ A}{8} \quad \frac{3.^\circ A}{7} \quad \frac{4.^\circ A}{6} \quad \frac{5.^\circ A}{5}$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 16\ 464$$

16 464 elementos

91.4.

$$3\ 3\ 3\ \underline{X\ X} \quad 0\ 3\ 3\ 3\ X$$

$${}^5C_3 \times 9 \times 9 - {}^4C_3 \times 9 = 810 - 36 = 774$$

→ Outros dois

→ Algarismos 3

774 elementos

91.5. Só há um caso em que a soma de cinco algarismos diferentes é 10: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$\frac{1.^\circ A}{4} \quad \frac{2.^\circ A}{4} \quad \frac{3.^\circ A}{3} \quad \frac{4.^\circ A}{2} \quad \frac{5.^\circ A}{1}$$

Há $4 \times 4! = 96$ elementos de A com os algarismos diferentes e com soma igual a 10 (0, 1, 2, 3 e 4).

91.6. $\frac{1.^\circ A}{1} \quad \frac{2.^\circ A}{2} \quad \frac{3.^\circ A}{3} \quad \frac{4.^\circ A}{7} \quad \frac{5.^\circ A}{6}$

$$\frac{6}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{6}{3}$$

$$7 \times 6 + 6 \times 6 + 6 \times 6 = 114$$

114 elementos

Pág. 70

Avaliação 2

1. $\frac{F1}{2} \quad \frac{F2}{2} \quad \frac{F3}{2} \quad \frac{F4}{2} \quad \frac{F5}{2} \quad \frac{F6}{2}$

$$2^6 - 2 = 62$$

→ As seis faces a amarelo ou as seis faces a vermelho

Resposta: (A)

2.

$$\overline{9} \quad \overline{8} \quad \overline{7} \quad \overline{1} \quad \text{O algarismo das unidades é 0.}$$

$$8 \quad 8 \quad 7 \quad 4 \quad \text{O algarismo das unidades é 2, 4, 6 ou 8.}$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 2296$$

Resposta: (A)

3. $1 \ n \ \dots \ n \ 1$

$$1 \times n \times n \times 1 = 1024 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 1024 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 32$$

A linha anterior é a de ordem 31.

O terceiro elemento é ${}^{31}C_2 = 465$.

Resposta: (B)

4.

$$\frac{\text{Rapazes}}{8} \quad \frac{\text{Raparigas}}{12}$$

$$\frac{2}{8} \quad \frac{3}{12}$$

$$({}^8C_2 \times {}^{12}C_3) \times 5!$$

Resposta: (D)

5. $(2-x)^8 = \sum_{p=0}^8 {}^8C_p 2^{8-p} (-x)^p$

$T_{p+1} = {}^8C_p 2^{8-p} (-x)^p$

$p = 5$

$T_6 = {}^8C_5 \times 2^{8-5} (-x)^5 = -56 \times 8 \times x^5 = -448x^5$

Resposta: (C)

6. ${}^{17}C_2 \times {}^{15}C_3 \times {}^{12}C_{12} = {}^{17}C_2 \times {}^{15}C_3$

$\rightarrow$ Posição das letras V
 $\rightarrow$ Posição das letras E
 $\rightarrow$ Posição das letras D

Resposta: (B)

Pág. 71

7.1. ${}^5C_1 \times {}^7C_1 + 2 = 37$

Ou

${}^{12}C_2 - {}^7C_2 - {}^5C_2 + 2 = 37$

37 retas

7.2. ${}^5C_2 \times {}^7C_1 + {}^5C_1 \times {}^7C_2 = 175$

175 triângulos

7.3. ${}^{5+n}C_2 \times {}^7C_1 + {}^{5+n}C_1 \times {}^7C_2 = 525 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(n+5)(n+4)}{2} \times 7 + (n+5) \times \frac{7 \times 6}{2} = 525 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{n^2 + 4n + 5n + 20}{2} \times 7 + (n+5) \times 21 - 525 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{n^2 + 4n + 5n + 20}{2} \times 7 + (n+5) \times 21 - 525 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7n^2 + 63n + 140 + 42n + 210 - 1050 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7n^2 + 105n - 700 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + 15n - 100 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 400}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-15 \pm 25}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = -20 \vee n = 5$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 5$.

8.1. ${}^{10}A'_5 \times {}^5A'_3 \times 2 = 25\,000\,000$

AAAAAVVV ou VVVAAAAA

8.2. ${}^{10}A'_5 \times {}^5A'_3 \times 4 = 50\,000\,000$ AAAAA[V][V][V]

8.3. $5 \times {}^8C_3 \times {}^{10}A_5 = 8\,467\,200$

$\rightarrow$ Escolha ordenada de cinco algarismos
 diferentes para os restantes cinco lugares
 $\rightarrow$ Escolha de lugares para a vogal
 $\rightarrow$ Escolha da vogal

8.4. ${}^{10}A'_5 \times {}^6C_3 \times {}^5A'_3 = 250\,000\,000$

$\rightarrow$ Escolha ordenada das vogais
 $\rightarrow$ Escolha de lugares para as vogais (no início,
 no fim ou entre os algarismos)
 $\rightarrow$ Escolha ordenada dos algarismos

8.5. ${}^8C_2 \times {}^6C_3 \times {}^9A'_3 \times {}^5A'_3 = 51\,030\,000$

$\rightarrow$ Escolha ordenada das vogais
 $\rightarrow$ Escolha ordenada dos restantes três
 algarismos
 $\rightarrow$ Escolha de lugares para os restantes
 três algarismos
 $\rightarrow$ Escolha de lugares para os zeros

8.6. ${}^8C_5 \times {}^{10}A'_5 \times {}^5A'_3 = 700\,000\,000$

$\rightarrow$ Escolha ordenada das vogais
 $\rightarrow$ Escolha ordenada dos algarismos
 $\rightarrow$ Escolha de lugares para os algarismos

9.1. ${}^{10}A_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

O conjunto A tem 5040 elementos.

9.2. ${}^{10}A_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ Número de sequências cujo primeiro
 elemento é 0

504 elementos

9.3. $\frac{9 \times 8 \times 7 \times 5}{1} = 2520$
 2520 elementos

9.4. **1.º caso:** Números de três algarismos
 (a primeira bola selecionada tem o número 0)

$\frac{P}{4} \frac{P}{3} \frac{I}{5}$

$(4 \times 3 \times 5) \times 3 = 180$

$\rightarrow$ Número de posições do algarismo ímpar
 $\rightarrow$ Escolha do algarismo ímpar
 $\rightarrow$ Escolha dos algarismos pares (2, 4, 6 ou 8)

2.º caso: números de quatro algarismos

- o 1.º algarismo é par (diferente de 0)

$\frac{P}{4} \frac{P}{4} \frac{I}{5} \frac{I}{4}$

$(4 \times 4 \times 5 \times 4) \times {}^3C_2 = 960$

$\rightarrow$ Posições dos algarismos pares
 $\rightarrow$ Algarismos ímpares
 $\rightarrow$ Algarismo par (já pode ser 0)
 $\rightarrow$ Algarismo par (2, 4, 6 ou 8)

- o 1.º algarismo é ímpar

$\frac{I}{5} \frac{I}{4} \frac{P}{5} \frac{P}{4}$

1.2. Cálculo combinatório. Triângulo de Pascal. Binómio de Newton

$$(5 \times 4 \times 5 \times 4) \times {}^3C_2 = 1200$$

- Posições dos algarismos pares
- Algarismos pares
- Algarismo ímpar (diferente do 1.º)
- Algarismo ímpar (1,3,5,7 ou 9)

$$180 + 960 + 1200 = 2340$$

2340 elementos

10.1. ${}^{16}C_7 \times {}^9C_5 = 1\,441\,440$

10.2. ${}^4A_2 \times {}^8C_3 \times {}^5C_1 = 3360$

- Maneiras de arrumar a restante peça azul numa das cinco casas disponíveis
- Maneiras de arrumar as restantes três peças vermelhas nas oito casas disponíveis
- Maneiras de escolher ordenadamente (AV ou VA) as duas linhas a ocupar

Podem-se colocar no tabuleiro de 3360 maneiras.

10.3. $2 \times 12 \times {}^{11}C_7 = 7920$

- Maneiras de arrumar as 7 peças vermelhas nas 11 casas disponíveis
- Maneiras de arrumar a peça azul fora da diagonal
- Maneiras de escolher a diagonal

Podem-se colocar no tabuleiro de 7920 maneiras.

10.4. $4 \times {}^{12}C_7 \times {}^5C_5 = 3168$

- Maneiras de arrumar as cinco peças vermelhas nas cinco casas disponíveis
- Maneiras de arrumar as sete peças vermelhas nas 12 casas disponíveis
- Maneiras de escolher a linha em branco

Podem-se colocar no tabuleiro de 3168 maneiras.

1.3 Probabilidades

Pág. 72

Atividade inicial 3

1. $E = \{1, 2, 3\}$
2. $P(A) = \frac{2}{3}$
3. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
4. $P(\emptyset) = 0, P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{3};$
 $P(\{1, 2\}) = P(\{1, 3\}) = P(\{2, 3\}) = \frac{2}{3};$
 $P(\{1, 2, 3\}) = 1$

Pág. 74

- 1.1. $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ e $\{5\}$
- 1.2. Por exemplo, $\{1, 2\}$
- 1.3. Por exemplo, $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$
- 1.4. Por exemplo, $\{1, 2\}$ e $\{3, 4, 5\}$

Pág. 76

2.

Azuis	Verdes	Total
6	4	10

Número de casos possíveis: ${}^{10}C_4 = 210$
- 2.1. Número de casos favoráveis:
 ${}^6C_4 + {}^4C_4 = 15 + 1 = 16$
 $P = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$
- 2.2. Número de casos favoráveis:
 ${}^6C_2 \times {}^4C_2 = 15 \times 6 = 90$
 $P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$
- 2.3. Número de casos favoráveis:
 ${}^6C_3 \times {}^4C_1 + {}^6C_4 \times {}^4C_0 = 20 \times 4 + 15 \times 1 = 95$
 $P = \frac{95}{210} = \frac{19}{42}$

Pág. 77

- 3.1.

H	M
5	4
2	2

 $\left| \begin{array}{l} 9 \\ 4 \end{array} \right.$
Número de casos possíveis: ${}^9C_4 = 126$
Número de casos favoráveis: ${}^5C_2 \times {}^4C_2 = 10 \times 6 = 60$
 $P = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$
- 3.2.

H	M
5	4
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

Número de casos favoráveis:

$${}^5C_4 \times {}^4C_0 + {}^5C_3 \times {}^4C_1 = 5 + 10 \times 4 = 45$$

$$P = \frac{45}{126} = \frac{5}{14}$$

3.3.

Irmãos	Outros
$\frac{2}{2}$	$\frac{7}{2}$

Número de casos favoráveis

$${}^2C_2 \times {}^7C_2 = 21$$

$$P = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}$$

3.4.

Irmãos	Outros homens	Mulheres
$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2}$
0	2	2

Número de casos favoráveis

$${}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 + {}^3C_2 \times {}^4C_2 = 2 \times 3 \times 6 + 3 \times 6 = 36 + 18 = 54$$

$$P = \frac{54}{126} = \frac{3}{7}$$

Pág. 78

4.

Matemática A	Física	Química
4	3	2
- 4.1. Número de casos possíveis: $9!$
Número de casos favoráveis: ${}^4A_2 \times 7!$
 $P = \frac{{}^4A_2 \times 7!}{9!} = \frac{1}{6}$
ou $P = \frac{{}^7C_2}{{}^9C_4} = \frac{1}{6}$
- 4.2. Número de casos favoráveis: $4! \times 3! \times 2! \times 3!$
 $P = \frac{4! \times 3! \times 2! \times 3!}{9!} = \frac{1}{210}$
- 4.3. Número de casos favoráveis: $4! \times 3! \times 2! \times 3!$
 $P = \frac{4! \times 5! \times 2}{9!} = \frac{1}{63}$
- 4.4. Número de casos favoráveis:
 $4! \times 5! \times 6$
 $\rightarrow$ há 6 lugares para arrumar o bloco dos livros de Matemática A
Ou
 $4! \times 6!$
 $\rightarrow$ O bloco de Matemática A conta como mais um livro
 $P = \frac{4! \times 6!}{9!} = \frac{1}{21}$
- 4.5. Número de casos favoráveis:
 $6! \times {}^7A_3$
 $\rightarrow$ Número de maneiras de escolher ordenadamente lugares para os três livros de Física entre ou ao lado dos seis restantes
 $P = \frac{6! \times {}^7A_3}{9!} = \frac{5}{12}$

Pág. 79

5.1. Número de casos possíveis: ${}^8C_2 = 28$

a) Número de casos favoráveis: 8

$$P = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

b) Há dois quadrados: $[ACEG]$ e $[BDFH]$

Logo, há oito casos favoráveis.

$$P = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

c) Número de casos favoráveis: 4

$$P = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

5.2. Número de casos possíveis: ${}^8C_3 = 56$

a) Número de casos favoráveis:

${}^7C_2 = 21$ (escolha de dois vértices entre B, C, D, E, F, G, H)

$$P = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

b) Um dos lados tem de ser um diâmetro.

Por cada diâmetro há seis possibilidades para escolher o vértice oposto. Logo, o número de casos possíveis é $4 \times 6 = 24$

└─► há quatro diâmetros

$$P = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

c) Por cada diâmetro há dois casos favoráveis (por exemplo $[AEC]$ e $[AEG]$)

$$4 \times 2 = 8$$

$$P = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

Pág. 80

6. Os triângulos $[ABC]$ e $[MNC]$ são semelhantes pois têm os lados paralelos. A razão de semelhança é igual a $\frac{1}{2}$

$$\text{pois } \frac{MC}{AC} = \frac{NC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\frac{\text{Área do triângulo } [MNC]}{\text{Área do triângulo } [ABC]} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{4}$.

Pág. 83

7. $P(A \cap B) = 0,3$; $P(\bar{A}) = 0,6$; $P(B) = 0,8$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,4 + 0,8 - 0,3 = \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - 0,9 = \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

8. $P(A \cup B) = 2P(A)$

$$P(B) = 4P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = 2P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times 0,6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0,3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,6 = 0,3 + 4P(A \cap B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,3 = 3P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$$

9.1. $P(A \cup B) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(\overline{A \cap B}) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - [1 - P(A \cap B)] =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - 1 + P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - [1 - P(B)] =$$

$$= P(A) - P(\bar{B})$$

9.2. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{B}) =$

$$= P(\overline{A \cap B}) - [1 - P(B)] =$$

$$= 1 - P(A \cap B) - 1 + P(B) =$$

$$= P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(\bar{A} \cap B)$$

Pág. 84

10. $P(E) = \frac{1}{4}$; $P(R) = \frac{1}{8}$; $P(E \cup R) = \frac{1}{3}$

10.1. $P(E \cup R) = P(E) + P(R) - P(E \cap R)$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - P(E \cap R) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E \cap R) = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E \cap R) = \frac{1}{24}$$

Como $P(E \cap R) > 0$, o acontecimento “sair rei de espadas” é possível. Logo, o rei de espadas está no baralho.

10.2. Num baralho há apenas um rei de espadas.

Logo, como o rei de espadas está entre as n cartas, a probabilidade de sair é $\frac{1}{n}$.

Portanto, $\frac{1}{n} = \frac{1}{24}$, pelo que $n = 24$.

Como $P(E) = \frac{1}{4}$, a quarta parte das cartas são de espadas.

Assim, há $\frac{1}{4} \times 24 = 6$ cartas de espadas.

Pág. 87

11.

	Par (B)	Ímpar ($\bar{B}$)	
Vermelhas (A)	3	3	6
Amarelas ($\bar{A}$)	2	3	5
	5	6	11

A : “A bola é vermelha”

B : “O número da bola é par”

$$11.1. P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{3}{5}$$

$$11.2. P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$11.3. P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$11.4. P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$12. P(A \cap B) = 10\% = 0,1$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\% = 0,5$$

$$P(A) = 2P(B)$$

$$12.1. P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,5 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5 = 2P(B) + P(B) - 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3P(B) = 0,6 \Leftrightarrow P(B) = 0,2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$$

$$12.2. P(A) = 2P(B) = 2 \times 0,2 = 0,4$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

Pág. 88

13.

	Rapazes ($\bar{A}$)	Raparigas (A)	
17 anos ($\bar{B}$)	3	7	10
18 anos (B)	6	8	14
	9	15	24

$$13.1. P(A) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$13.2. P(B) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$13.3. P(A \cap B) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$13.4. P(\bar{A} \cap B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$13.5. P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{24}}{\frac{14}{24}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

$$13.6. P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{24}}{\frac{15}{24}} = \frac{8}{15}$$

$$13.7. P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{10}{24}} = \frac{3}{10}$$

$$13.8. P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{9}{24}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Pág. 89

$$14. P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P(A \cup B) = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,9 = 0,6 + P(B) - 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0,9 - 0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0,5$$

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5 - 0,2}{0,5} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5}$$

Pág. 90

15. Sejam os acontecimentos:

F : “O aluno escolhido é rapariga”

M : “O aluno escolhido é rapaz”

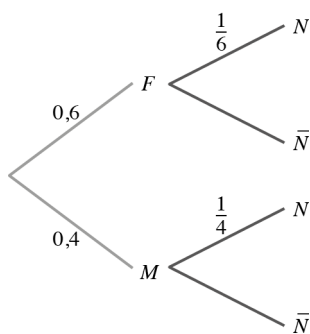
N : “O aluno escolhido tem negativa no teste”

$$P(F) = 0,6$$

$$P(M) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(N|M) = \frac{1}{4}$$

$$P(N|F) = \frac{1}{6}$$



$$\begin{aligned}
 15.1. \quad P(N) &= P(F \cap N) + P(M \cap N) = \\
 &= P(F) \times P(N|F) + P(M) \times P(N|M) = \\
 &= 0,6 \times \frac{1}{6} + 0,4 \times \frac{1}{4} = \\
 &= 0,1 + 0,1 = 0,2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.2. \quad P(F|N) &= \frac{P(F \cap N)}{P(N)} = \frac{P(F) \times P(N|F)}{0,2} = \frac{0,6 \times \frac{1}{6}}{0,2} = \\
 &= \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Pág. 91

16. Sejam os acontecimentos:

 M : “o professor escolhido é de Matemática” I : “o professor escolhido é de Informática” F : “o professor é uma mulher”

$$P(M) = 0,7$$

$$P(F|M) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$P(F|I) = P(\bar{F}|I) = 0,5$$

	F	$\bar{F}$	
M	0,525	0,175	0,7
I	0,15	0,15	0,3
	0,675		1

$$P(I) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$\begin{aligned}
 P(M \cap F) &= P(M) \times P(F|M) = \\
 &= 0,7 \times 0,75 = 0,525
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(I \cap F) &= P(I) \times P(F|I) = \\
 &= 0,3 \times 0,5 = 0,15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16.1. \quad P(F) &= P(M \cap F) + P(I \cap F) = \\
 &= 0,525 + 0,15 = 0,675 = \frac{27}{40}
 \end{aligned}$$

$$16.2. \quad P(M|\bar{F}) = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})}$$

$$P(M \cap \bar{F}) = P(M) - P(M \cap F) = 0,7 - 0,525 = 0,175$$

$$P(I \cap \bar{F}) = P(I) - P(I \cap F) = 0,3 - 0,15 = 0,15$$

$$P(\bar{F}) = P(M \cap \bar{F}) + P(I \cap \bar{F}) = 0,175 + 0,15 = 0,325$$

$$P(M|\bar{F}) = \frac{0,175}{0,325} = \frac{7}{13}$$

$$16.3. \quad P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{0,15}{0,675} = \frac{2}{9}$$

Pág. 92

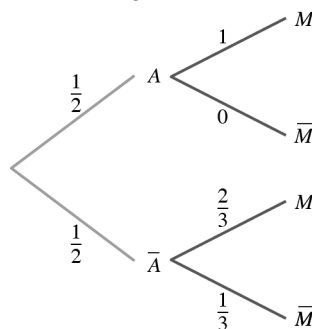
17. Sejam os acontecimentos:

 A : “O saco escolhido tem três rebuçados de morango” M : “O rebuçado escolhido sabe a morango”

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(M|A) = 1$$

$$P(M|\bar{A}) = \frac{2}{3}$$



Pretendemos determinar $P(A|M)$ pois se os rebuçados que ficaram no saco têm o mesmo sabor este tem de ser a morango.

$$\begin{aligned}
 P(A|M) &= \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A) \times P(M|A)}{P(A \cap M) + P(\bar{A} \cap M)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad P[(\bar{A} \cup B)|A] &= \frac{P[(\bar{A} \cup B) \cap A]}{P(A)} = \\
 &= \frac{P[(\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A)]}{P(A)} = \\
 &= \frac{P[\emptyset \cup (B \cap A)]}{P(A)} = \\
 &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \\
 &= P(B|A)
 \end{aligned}$$

Pág. 94

$$19. \quad A = \{1, 5\} \text{ e } B = \{2, 5\}$$

Os acontecimentos elementares, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$ são equiprováveis.

$$19.1. \quad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ; \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$19.2. \quad P(A \cap B) = P(\{5\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Como $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, os acontecimentos A e B são independentes.

Pág. 95

$$20. \quad P(A) = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

A e B são independentes ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$)

$$P(A|B) = P(A) \text{ e } P(B|A) = P(B)$$

$$20.1. \quad P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$20.2. \quad P(B|A) = P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 20.3. \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P(A) \times P(B) = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20.4. \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = \\ &= 1 - P(A \cap B) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \\ &= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20.5. \quad P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

21. Hipótese: A e B são independentes

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = \\ &= 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = \quad \text{Por hipótese} \\ &= P(\bar{A}) - P(B)[1 - P(A)] = \\ &= P(\bar{A}) - P(B) \times P(\bar{A}) \\ &= P(\bar{A})[1 - P(B)] = \\ &= P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

Portanto, se A e B são acontecimentos independentes,

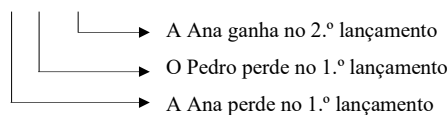
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$, ou seja, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são acontecimentos independentes.

Pág. 96

22. Probabilidade de a Ana ganhar no 1.º lançamento: $\frac{1}{2}$

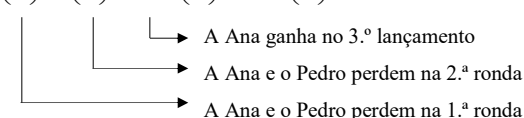
Probabilidade de a Ana ganhar no 2.º lançamento:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$



Probabilidade de a Ana ganhar no 3.º lançamento

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

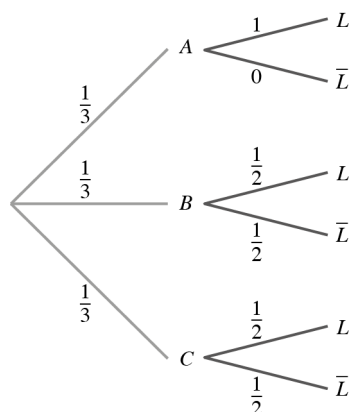


...

$$\begin{aligned} P(\text{Ana ganhar}) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pág. 98

23.



$$\begin{aligned} P(L) &= P(A) \times P(L|A) + P(B) \times P(L|B) + P(C) \times P(L|C) = \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pág. 99

24. $P(N) = 0,2$; $P(F|\bar{N}) = 0,25$; $P(F \cap N) = 0,1$

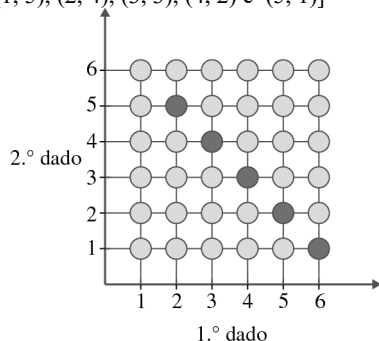
$$\begin{aligned} 24.1. \quad P(F) &= P(N \cap F) + P(\bar{N} \cap F) = \\ &= 0,1 + P(\bar{N}) \times P(F|\bar{N}) = \\ &= 0,1 + (1 - 0,2) \times 0,25 = \\ &= 0,1 + 0,8 \times 0,25 = 0,1 + 0,2 = 0,3 \end{aligned}$$

$$24.2. \quad P(N|F) = \frac{P(N \cap F)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

Atividades complementares

Pág. 102

25. Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$
 Número de casos favoráveis: 5
 $[(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) \text{ e } (5, 1)]$



$$P = \frac{5}{36}$$

26.1.

H	M	T
4	6	10
0	5	5

Número de casos possíveis: ${}^{10}C_5 = 252$ Número de casos favoráveis: ${}^6C_5 = 6$

$$P = \frac{6}{252} = \frac{1}{42}$$

26.2.

H	M
4	6
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1

Número de casos favoráveis:

$${}^4C_3 {}^6C_2 + {}^4C_4 {}^6C_1 = 60 + 6 = 66$$

$$P = \frac{66}{252} = \frac{11}{42}$$

26.3.

H	M
4	6
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1

Número de casos favoráveis:

$${}^{10}C_5 - {}^4C_4 {}^6C_1 = 252 - 6 = 246$$

$$P = \frac{246}{252} = \frac{41}{42}$$

26.4.

Irmãos	Outros
2	8
0	5
1	4

Número de casos favoráveis: ${}^2C_0 {}^8C_5 + {}^2C_1 {}^8C_4 = 196$

$$P = \frac{196}{252} = \frac{7}{9}$$

$$27. \quad P = \frac{{}^{19}C_4}{{}^{20}C_5} = \frac{1}{4}$$

28.1. Número de casos possíveis: ${}^{52}C_5$

Ouros	Outras
13	39
0	5

Número de casos favoráveis: ${}^{39}C_5$

$$P = \frac{{}^{39}C_5}{{}^{52}C_5} \approx 0,222$$

28.2. Número de casos possíveis: ${}^{52}C_5$ Número de casos favoráveis: ${}^{52}C_5 - {}^{39}C_5$

$$P = \frac{{}^{52}C_5 - {}^{39}C_5}{{}^{52}C_5} = 0,778$$

28.3.

Figuras	Ases	Outras
12	4	36
2	1	2

Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_2 {}^4C_1 {}^{36}C_2$

$$P = \frac{{}^{12}C_2 {}^4C_1 {}^{36}C_2}{{}^{52}C_5} \approx 0,064$$

28.4.

Figuras espadas	Outras figuras	Outras espadas	Outras cartas
3	9	10	30
2	0	1	2
1	1	2	1
0	2	3	0

Número de casos favoráveis:

$${}^3C_2 \times {}^{10}C_1 \times {}^{30}C_2 + {}^3C_1 {}^9C_1 {}^{10}C_2 {}^{30}C_1 + {}^9C_2 {}^{10}C_3 =$$

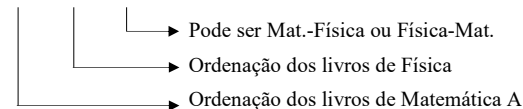
$$= 13\,050 + 36\,450 + 4320 = 53\,820$$

$$P = \frac{53\,820}{{}^{52}C_5} \approx 0,021$$

29.1. Número de casos possíveis: $9!$

Número de casos favoráveis:

$$5! \times 4! \times 2$$



$$P = \frac{5! \times 4! \times 2}{9!} = \frac{1}{63}$$

Outro processo:

Número de casos favoráveis: 2 (número de maneiras de escolher a ordem das disciplinas)

Número de casos possíveis:

$${}^9C_4 = {}^9C_5 = 126$$

→ número de maneiras de escolher lugar na fila para os livros de Física

$$P = \frac{2}{126} = \frac{1}{63}$$

Repare-se que, como não é feita qualquer exigência quanto à ordem dos livros em cada disciplina, considera-se um universo de resultados que apenas atende à disciplina a que se refere o livro (é como se considere que os livros de Matemática A eram também iguais entre si bem como os de Física)

29.2. Número de casos possíveis: $9!$

Número de casos favoráveis:

$$4! \times 5! \times 6$$

→ Número de lugares que pode ocupar o bloco dos livros de Física entre os cinco de Matemática A, no início ou no fim.

Ou

$$4! \times 6!$$

→ Número de maneiras de ordenar os seis objetos constituídos pelos 5 livros de Matemática mais o bloco dos livros de Física.

→ Número de maneiras de ordenar os livros de Física.

$$P = \frac{4! \cdot 5! \times 6}{9!} = \frac{1}{21}$$

Ou

$$P = \frac{6}{{}^9C_4} = \frac{1}{21}$$

30. JO AA1122

Número de casos possíveis:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \times 2 \times 7 = 1260$$

→ Possíveis posições de JO ou OJ

→ Pode ser JO ou OJ

→ Sequências possíveis de AA 11 22

$$P = \frac{1}{1260}$$

ouHá duas maneiras de formar o grupo JO ou OJFicam sete objetos para ordenar: JO AA 11 22 o que

pode ser feito de:

$$2 \times {}^7C_2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 1260$$

$$\text{ou } 2 \times \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 1260$$

$$P = \frac{1}{1260}$$

31.1. Número de casos possíveis: $14!$ Número de casos favoráveis: $7! \times 4! \times 3! \times 3!$

$$P = \frac{7! \times 4! \times 3! \times 3!}{14!} = \frac{1}{20\,020}$$

$$\text{ou } \frac{3!}{{}^{14}C_7 {}^7C_4 {}^3C_3} = \frac{1}{20\,020}$$

31.2. Número de casos possíveis: $14!$

Número de casos favoráveis:

$$10! \times 4! \times 11$$

→ Número de posições que o bloco de 4 CD pode ocupar.

→ Maneiras de ordenar os 4 CD de música clássica

→ Maneiras de ordenar o bloco de 7 CD de jazz e 3 de rock

$$P = \frac{10! \times 4! \times 11}{14!} = \frac{1}{91}$$

31.3. Número de casos possíveis: $14!$ Número de casos favoráveis: $11! \times {}^{12}A_3$

$$P = \frac{11! \cdot {}^{12}A_3}{14!} = \frac{55}{91}$$

ou

$$P = \frac{{}^{12}C_3}{{}^{14}C_{11}} = \frac{55}{91}$$

32. Número de casos possíveis:

$${}^{10}C_5 \times {}^5C_5$$

→ N.º de maneiras de escolher a equipa B

→ N.º de maneiras de escolher a equipa A

Número de casos favoráveis:

$$2 \times {}^8C_3 \times {}^5C_5$$

→ N.º de maneiras de escolher a equipa A se o João e o Pedro fizerem parte.

→ O João e o Pedro podem fazer parte da A ou da B

$$P = \frac{2 \times {}^8C_3}{{}^{10}C_5} = \frac{4}{9}$$

33.1. a) Número de casos possíveis: $7!$ Número de casos favoráveis: $6! \times 4$

O último algarismo é 1, 3, 5 ou 7

$$P = \frac{6! \times 4}{7!} = \frac{4}{7}$$

b) Número de casos favoráveis:

$$\frac{2}{1} \frac{5,6,7}{3} \frac{}{5} \frac{}{4} \frac{}{3} \frac{}{2} \frac{}{1} \quad 2\,500\,000 < x < 3\,000\,000$$

$$\frac{3,4,5,6,7}{5} \frac{}{6} \frac{}{5} \frac{}{4} \frac{}{3} \frac{}{2} \frac{}{1} \quad x > 3\,000\,000$$

$$1 \times 3 \times 5! + 5 \times 6! = 3960$$

$$P = \frac{3960}{7!} = \frac{11}{14}$$

c) Número de casos favoráveis:

$$\frac{1,2,3}{3} \frac{}{6} \frac{}{5} \frac{}{4} \frac{}{3} \frac{}{2} \frac{}{1} \quad x < 4\,000\,000$$

$$\frac{4}{1} \frac{1,2}{2} \frac{}{5} \frac{}{4} \frac{}{3} \frac{}{2} \frac{}{1} \quad 4\,000\,000 < x < 4\,300\,000$$

$$\frac{4}{1} \frac{3}{1} \frac{1,2}{2} \frac{}{4} \frac{}{3} \frac{}{2} \frac{}{1} \quad 4\,300\,000 < x < 4\,340\,000$$

$$3 \times 6! + 2 \times 5! + 2 \times 4! = 2448$$

$$P = \frac{2448}{7!} = \frac{17}{35}$$

33.2. Número de casos possíveis: 7^7 Número de casos favoráveis: $7^6 \times 4$

$$P = \frac{7^6 \times 4}{7^7} = \frac{4}{7}$$

34. Número de casos possíveis: ${}^8C_2 = 28$

$$\text{34.1. a) } P = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$$\text{b) } P = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

Número de casos favoráveis:

$$9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 1 = 952$$

$$P = \frac{952}{4536} = \frac{17}{81}$$

36.3.

$$\begin{array}{cccc} \overline{2} & \overline{9} & \overline{8} & \overline{7} \\ 1 & 4 & 8 & 7 \end{array} \begin{array}{l} \text{Superiores a 8000 (1.ºA: 8 ou 9)} \\ \text{Da forma } 7 \overline{5689} XY \end{array}$$

Número de casos favoráveis:

$$2 \times 9 \times 8 \times 7 + 1 \times 4 \times 8 \times 7 = 1232$$

$$P = \frac{1232}{4536} = \frac{22}{81}$$

Pág. 104

37.1. Números de elementos de A :

$$\begin{array}{ccc} \overline{5} & \overline{5} & \overline{4} \end{array}$$

$$5 \times 5 \times 4 = 100$$

$$\#A = 100$$

Múltiplos de 5 :

$$\begin{array}{ccc} \overline{5} & \overline{4} & \overline{1} \\ 4 & 4 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \text{O algarismo das unidades é 0} \\ \text{O algarismo das unidades é 5} \end{array}$$

$$5 \times 4 + 4 \times 4 = 20 + 16 = 36$$

$$P = \frac{{}^{36}C_2}{{}^{100}C_2} = \frac{630}{4950} = \frac{7}{55}$$

37.2. N.º de elementos de A superiores a 210 :

$$\begin{array}{ccc} \overline{3} & \overline{5} & \overline{4} \\ 1 & 4 & 4 \end{array} \begin{array}{l} \text{Começados por 3, 4 ou 5} \\ \text{Começados por 2 } \overline{1345} \end{array}$$

$$3 \times 5 \times 4 + 4 \times 4 - 1 = 75$$

Exclui-se 210

$$P = \frac{{}^{75}C_2}{{}^{100}C_2} = \frac{2775}{4950} = \frac{37}{66}$$

38.1.

$$\begin{array}{ccc|c} \text{Paus} & \text{Ouros} & \text{Outras} & \\ \hline 13 & 13 & 26 & 52 \\ 4 & 4 & 2 & 10 \end{array}$$

$$P = \frac{{}^{13}C_4 \times {}^{13}C_4 \times {}^{26}C_2}{{}^{52}C_{10}} \approx 1\%$$

38.2.

$$\begin{array}{cc} \text{Reis} & \text{Outras} \\ \hline 4 & 48 \\ 0 & 10 \end{array}$$

$$P = 1 - \frac{{}^{48}C_{10}}{{}^{52}C_{10}} \approx 59\%$$

$$38.3. P = \frac{{}^{51}C_9}{{}^{52}C_{10}} \approx 19\%$$

$$38.4. \begin{array}{cc} \text{Ases} & \text{Outras} \\ \hline 4 & 48 \\ 1 & 9 \end{array}$$

$$P = \frac{{}^4C_1 \times {}^{48}C_9}{{}^{52}C_{10}} \approx 42\%$$

38.5.

$$\begin{array}{cc} \text{Ases} & \text{Outras} \\ \hline 4 & 48 \\ 0 & 10 \\ 1 & 9 \end{array}$$

$$P = \frac{{}^4C_0 \times {}^{48}C_{10} + {}^4C_1 \times {}^{48}C_9}{{}^{52}C_{10}} \approx 84\%$$

38.6.

$$\begin{array}{cccc} \text{Damas de} & \text{Outras} & \text{Outras} & \text{Outras} \\ \text{ouros} & \text{damas} & \text{ouros} & \text{cartas} \\ \hline \frac{1}{1} & \frac{3}{1} & \frac{12}{3} & \frac{36}{5} \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}$$

$$P = \frac{{}^1C_1 {}^3C_1 {}^{12}C_3 {}^{36}C_5 + {}^1C_0 {}^3C_2 {}^{12}C_4 {}^{36}C_4}{{}^{52}C_{10}} \approx 2\%$$

39. $P(A \cup B) \leq 1$

Definição de probabilidade

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0,65 + P(B) - 0,15 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) \leq 1 + 0,15 - 0,65 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) \leq 0,5$$

40. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

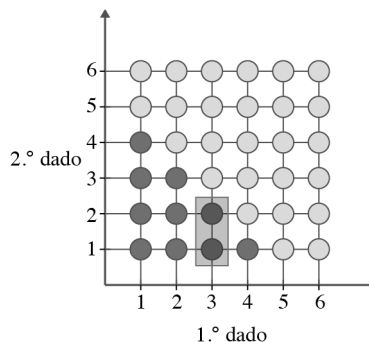
$$\Leftrightarrow 4P(A \cap B) = P(B) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5P(A \cap B) = 2P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5P(A \cap B)}{P(B)} = 2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{2}{5}$$

41.



$$P(\text{Obter 3 no 1.º dado} \mid \text{soma} < 6) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

42. Sejam os acontecimentos:

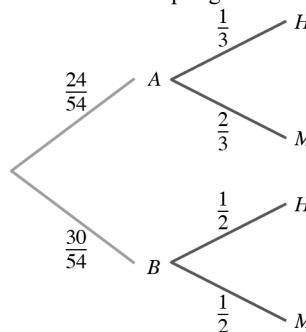
A: "O aluno é da turma A."

B: "O aluno é da turma B."

H: "O aluno é rapaz."

M: "O aluno é rapariga."

	A	B
H	8	15
M	16	15
	24	30



$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A) \times P(M|A)}{P(A \cap M) + P(B \cap M)} =$$

$$= \frac{\frac{24}{54} \times \frac{2}{3}}{\frac{24}{54} \times \frac{2}{3} + \frac{30}{54} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{8}{27} + \frac{5}{18}} = \frac{8}{27} \times \frac{54}{31} = \frac{16}{31}$$

43. $P(A \cup J) = 0,7$

$$P(A|J) = 0,5$$

$$P(A \cap J) = 0,1$$

$$P(A \cap J) = P(J) \times P(A|J)$$

$$0,1 = P(J) \times 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(J) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P(\bar{A} \cap J) = P(J) - P(A \cap J) = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

$$P(A \cup J) = P(A) + P(J) - P(A \cap J)$$

$$0,7 = P(A) + 0,2 - 0,1 \Leftrightarrow P(A) = 0,6$$

43.1. $P(A \cap \bar{J}) = P(A) - P(A \cap J) = 0,6 - 0,1 = 0,5$

43.2. $P(J|\bar{A}) = \frac{P(J \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,1}{0,4} = 25\%$

	J	$\bar{J}$	
A	0,1	0,5	0,6
$\bar{A}$	0,1		0,4
	0,2		1

$$P(A \cap C) = P(C) \times P(A|C)$$

$$\frac{1}{8} = P(C) \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(C) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow P(C) = \frac{3}{16}$$

46.1. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(A) + P(A \cap \bar{B}) =$

$$= P(\overline{A \cap B}) - P(A) + P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) = 1 - 2P(A \cap B)$$

46.2. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(A) + P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = P(A) \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{12}$$

Os números das bolas são 1, 2 ou 3, sendo que 2 e 3 são primos. Logo, pretende-se a probabilidade de sair bola azul e não sair 2 nem 3, ou seja:

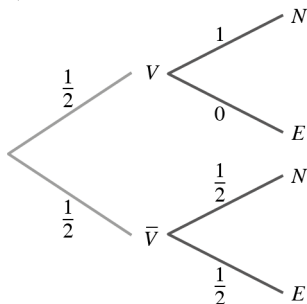
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Pág. 105

44. Seja os acontecimentos:

V: "A moeda escolhida é viciada."

N: "Sair a face nacional."



$$P(V|N) = \frac{P(V \cap N)}{P(N)} = \frac{P(V) \times P(N|V)}{P(V \cap N) + P(\bar{V} \cap N)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

45. Sejam os acontecimentos:

A: "O aluno chega atrasado."

C: "O aluno vem no automóvel dos pais."

$$P(C|A) = \frac{3}{4}; P(A|C) = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = ?$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C|A)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

47. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A|B) \times P(\bar{B}) =$

$$= P(\overline{A \cap B}) - P(A|B)(1 - P(B)) =$$

$$= 1 - P(A \cap B) - P(A|B) + P(A|B)P(B) =$$

$$= 1 - P(A|B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) =$$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})}{P(B)} = P(B)$$

$$= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = P(\bar{A}|B)$$

48. $P(B \cap C|A)$ significa "probabilidade de a segunda carta

retirada ser uma figura de outros sabendo que a primeira carta retirada é de copas".

O número de casos possíveis é 51 (depois de tirar uma carta ficam 51 no baralho).

O número de casos favoráveis é 3 (depois de tirar uma carta de copas continuam no baralho as 3 figuras de ouros).

$$\text{Logo, } P(B \cap C|A) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}.$$

Pág. 106

49. Nos dois lançamentos seguintes deve sair pelo menos uma vez face nacional.

A probabilidade de nesses lançamentos sair duas vezes

$$\text{face } E \text{ é } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{A probabilidade pedida é } 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

50. $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ porque o dado é equilibrado.

Seja o acontecimento:

$A \cap B$: “Sair 1 no primeiro lançamento e sair 1 no segundo lançamento”

Há $6 \times 6 = 36$ resultados possíveis sendo apenas 1 favorável.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(A) \times P(B)$$

Logo, os acontecimentos A e B são independentes.

51. $P(A) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$
 $= P(A) + P(\overline{A \cup B}) =$
 $= P(A) + 1 - P(A \cup B) =$
 $= \cancel{P(A)} + 1 - \cancel{P(A)} - P(B) + P(A \cap B) =$
 $= 1 - P(B) + P(A) \times P(B) =$
 $= 1 - P(B)[1 - P(A)] = 1 - P(B) \times P(\overline{A})$
 A e B são independentes

52. Sejam os acontecimentos

A : “O garfo selecionado foi produzido pela máquina A ”

B : “O garfo selecionado foi produzido pela máquina B ”

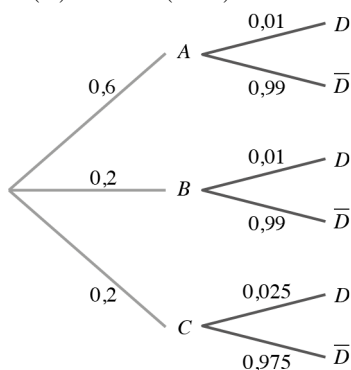
C : “O garfo selecionado foi produzido pela máquina C ”

D : “O garfo selecionado é defeituoso”

$$P(A) = 0,6 ; P(\overline{D} | A) = 0,99$$

$$P(B) = 0,2 ; P(\overline{D} | B) = 0,99$$

$$P(C) = 0,2 ; P(D | C) = 0,025$$



$$P(D | A) = P(D | B) = 1 - 0,99 = 0,01$$

$$P(\overline{D} | C) = 1 - 0,025 = 0,975$$

- 52.1. $P(D) =$
 $= P(A)P(D | A) + P(B)P(D | B) + P(C)P(D | C) =$
 $= 0,6 \times 0,01 + 0,2 \times 0,01 + 0,2 \times 0,025 =$
 $= 0,013 = 1,3\%$

- 52.2. $P(B | D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \times P(D | B)}{0,013} =$
 $= \frac{0,2 \times 0,01}{0,013} = \frac{0,002}{0,013} = \frac{2}{13}$

53. Número de casos possíveis: 9C_6

Corresponde ao número de maneiras de escolher seis pessoas entre as nove que, para além do Pedro, se sentam na fila.

Número de casos favoráveis: 7C_6

Corresponde ao número de maneiras de escolher quatro pessoas entre as sete que se sentam na fila e não se encontram ao lado do Pedro.

$$P = \frac{{}^7C_4}{{}^9C_6} = \frac{5}{12}$$

- 54.1. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_4$

Número de casos favoráveis: 7

(1-2-3-4, 2-3-4-5, ..., 7-8-9-10)

$$P = \frac{7}{{}^{10}C_4} = \frac{1}{30}$$

- 54.2. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_4$

Número de casos favoráveis: 7C_4

Temos seis carros: • C • C • C • C • C •

O número de casos favoráveis é o número de maneiras de escolher os quatro espaços vazios (E) entre os sete possíveis sem que fiquem dois espaços seguidos (por exemplo CCECECECE ou ECECCCECEC)

$$P = \frac{{}^7C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{1}{6}$$

- 55.1. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_2$

Número de casos favoráveis: 7 (1-4, 2-5, ..., 7-10)

$$P = \frac{7}{{}^{10}C_2} = \frac{7}{45}$$

- 55.2. Número de casos possíveis: 10!

Número de casos favoráveis:

$$8 \times 2 \times 7!$$

→ Número de maneiras de escolher o lugar para os restantes 7
 → Pode ser A-S ou S-A
 → Número de maneiras de escolher o lugar do Pedro

$$P = \frac{8 \times 2 \times 7!}{10!} = \frac{8 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{45}$$

56. Designemos os grupos por A , B e C

Número de casos possíveis:

$${}^{24}C_8 \times {}^{16}C_8 \times {}^8C_8$$

→ Grupo C
 → Grupo B
 → Grupo A

Número de casos favoráveis:

Para ficar no grupo A :

$${}^{22}C_6 \times {}^{16}C_8 \times {}^8C_8$$

Retiraram-se o João e o Pedro

Para ficar num dos grupos:

$$3 \times {}^{22}C_6 \times {}^{16}C_8 \times {}^8C_8$$

$$P = \frac{3 \times {}^{22}C_6 \times {}^{16}C_8 \times {}^8C_8}{{}^{24}C_8 \times {}^{16}C_8 \times {}^8C_8} = \frac{7}{23}$$

ou

Admita que o resultado do sorteio coloca as 24 pessoas em fila.

A primeira da fila é a primeira pessoa do 1.º grupo, a segunda da fila é a segunda pessoa do 1.º grupo, ..., o último da fila é a oitava pessoa do 3.º grupo. Admitimos que o João é a 1.ª pessoa da fila. O Pedro tem sete lugares em 23 disponíveis para pertencer ao mesmo grupo do João.

$$P = \frac{7}{23}$$

Pág. 107

57. Com reposição podemos imaginar que as bolas são retiradas simultaneamente.

57.1.

A	V	C	Total
5	3	2	10
2	2	2	6

$$P = \frac{{}^5C_2 \cdot {}^3C_2 \cdot {}^2C_2}{{}^{10}C_6} = \frac{1}{7}$$

- 57.2. Considerando as bolas todas diferentes (por exemplo numeradas de 1 a 10):

Número de casos possíveis:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$$

Número de casos favoráveis:

Número de maneiras de sair a sequência

$$\overset{A}{5} \times \overset{A}{5} \times \overset{V}{4} \times \overset{V}{4} \times \overset{C}{3} \times \overset{C}{3} = 5^2 \times 3^2 \times 2^2 = 25 \times 9 \times 4 = 900$$

$$\text{Há } \frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ ou } {}^6C_2 \times {}^4C_2 = 90 \text{ maneiras de ordenar}$$

a sequência AA VV CC.

Temos 900×90 casos favoráveis.

$$P = \frac{900 \times 90}{10^6} = \frac{81}{1000}$$

58. Número de casos possíveis: ${}^{15}C_5 = 3003$

Número de casos possíveis ao acontecimento contrário (haver, no máximo, dois sabores):

Número de maneiras de escolher cinco bombons com recheio de:

- avelã ou baunilha: ${}^{12}C_5$ (inclui 7C_5 de recheio de avelã e 5C_5 com recheio de baunilha)
- avelã ou caramelo: ${}^{10}C_5$ (inclui 7C_5 com recheio de avelã)
- baunilha ou caramelo: 8C_5 (inclui 5C_5 de baunilha)

Logo, o número de casos possíveis é:

$${}^{12}C_5 + {}^{10}C_5 + {}^8C_5 - {}^7C_5 - {}^5C_5 = 1078$$

└─ entraram duas vezes

$$\text{A probabilidade pedida é } P = 1 - \frac{1078}{3003} = \frac{25}{39}$$

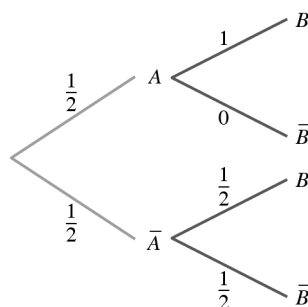
59. Sejam os acontecimentos:

A: "A bola retirada da caixa A é branca."

B: "A bola retirada da caixa B é branca."

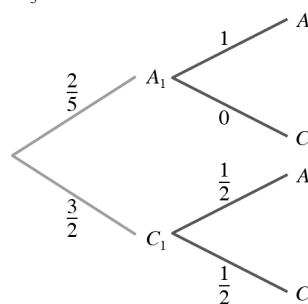
- $P(A) = \frac{1}{2}$ porque a caixa A tem uma bola preta e uma bola branca.

- Se A ocorrer, a caixa B fica com duas brancas. Logo, $P(B|A) = 1$.
- Se $\bar{A}$ ocorrer, a caixa B fica com uma bola preta e uma bola branca: $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$.



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

60. Sejam os acontecimentos:

 C_1 : "A bola extraída da caixa 1 é cinzenta." A_3 : "A bola extraída do saco é azul."

$$P(C_1|A_3) = \frac{P(C_1 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(C_1) \times P(A_3|C_1)}{P(C_1) \times P(A_3|C_1) + P(\bar{C}_1) \times P(A_3|\bar{C}_1)} = \frac{\frac{2}{5} \times 1}{\frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{10}} = \frac{2}{7}$$

$$\begin{aligned} 61. \quad 1 - P[(\bar{A} \cap \bar{B})|A] &= 1 - \frac{P[(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap A]}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) - P[(\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap A)]}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) - P[\emptyset \cup (\bar{B} \cap A)]}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A) - P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = P(A \cap B) / P(A) = P(B|A) \end{aligned}$$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B)$

62.1. Bolas azuis: 5
 Bolas cinzentas: $\frac{10}{15}$

- O número de casos possíveis é igual a $15!$ que é o número de maneiras de dispor ordenadamente as 15 bolas numa fila.
 O número de casos favoráveis é o número de filas que é possível formar em que não ficam duas bolas azuis seguidas, ou seja, é dado por $10! \times {}^{11}A_5$, em que:

- $10!$ é o número de maneiras de ordenar as dez bolas cinzentas;
- há ${}^{11}A_5$ maneiras de intercalar as cinco bolas azuis nos 11 espaços entre as bolas cinzentas, no início ou no fim da fila ($\bullet B \bullet B \bullet B \bullet B \bullet B \bullet B \bullet B \bullet$) sem que fiquem duas bolas azuis seguidas.

Como os acontecimentos elementares são equiprováveis, pela definição de Laplace, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{10! \times {}^{11}A_5}{15!}$$

- Em alternativa, como só é feita exigência quanto à cor das bolas, podemos considerar que tanto as bolas cinzentas como as bolas azuis são iguais entre si. Assim, o número de casos possíveis é igual a ${}^{15}C_{10}$ que é o número de maneiras de, entre os 15 lugares da fila, escolher os dez lugares para as bolas cinzentas, ficando os lugares para as bolas pretas univocamente determinados.
 Há ${}^{11}C_5$ maneiras de escolher cinco lugares para as bolas azuis nos 11 espaços entre as bolas cinzentas, no início ou no fim da fila. Logo, o número de casos favoráveis é dado por ${}^{11}C_5$.

Novamente pela definição de Laplace, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{{}^{11}C_5}{{}^{15}C_{10}}$$

62.2. Seja n o número de bolas cinzentas. No saco existem $n + 7$ bolas.

Se a bola retirada da caixa é cinzenta, ficam no saco $n + 8$ bolas entre as quais $n + 1$ são cinzentas.

Assim, a probabilidade de a bola retirada do saco ser cinzenta se a bola retirada da caixa é cinzenta é dada por

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+8} \\ \frac{n+1}{n+8} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+8} - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4n+4-3n-24}{4(n+8)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n-20=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n=20 \end{aligned}$$

O saco tem 20 bolas cinzentas.

Avaliação 3

Pág. 108

- Número de casos possíveis: $8 \times 8 \times 8 = 8^3$
 Número de casos favoráveis: $6 \times {}^4A_3$ (nos casos possíveis considerou-se $[ABC]$ e $[ACB]$, por exemplo, como casos distintos)

$$P = \frac{6 \times {}^4A_3}{8^3} = \frac{9}{32}$$

Resposta: (B)

- Trata-se da linha de ordem 30 que tem 31 elementos:
 Como ${}^{30}C_2 = 435$ e ${}^{30}C_3 = 4060$ os quatro primeiros elementos e os quatro últimos dessa linha são:
 1 30 435 4060 ... 4060 435 30 1
 Número de casos possíveis: ${}^{31}C_2 = 465$

Número de casos favoráveis: ${}^6C_2 = 15$ (a soma de quaisquer dois elementos escolhidos entre os três primeiros ou entre os três últimos é inferior a 4000)

$$P = \frac{15}{465} = \frac{1}{31}$$

Resposta: (A)

- $(x-1)^7 = \sum_{p=0}^7 {}^7C_p x^{7-p} \times (-1)^p$

Existem oito parcelas, sendo quatro positivas e quatro negativas.

Número de casos possíveis: ${}^8C_2 = 28$

Número de casos favoráveis: ${}^4C_1 {}^4C_1 = 16$

$$P = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

Resposta: (A)

- $P(A|B) = \frac{1}{3}$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{3}{10}$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{5} = P(A) + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{5} - \frac{2}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

Resposta: (B)

- Sejam os acontecimentos:
 T : "O aluno usa transporte público."
 C : "O aluno almoça na cantina."

$$P(C \cup T) = \frac{1}{2}; P(C) = \frac{2}{5};$$

$$P(T) = \frac{1}{3}$$

$$P(C \cup T) = P(C) + P(T) - P(C \cap T)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P(C \cap T) \Leftrightarrow P(C \cap T) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(C \cap T) = \frac{7}{30}$$

$$P(T|C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{2}{5}} = \frac{7 \times 5}{2 \times 30} = \frac{7}{12}$$

Resposta: (D)

6. Pretende-se determinar a probabilidade de a soma dos números das três bolas ser igual a 5 sabendo que o produto desses números é igual a 0.

Se o produto é 0 temos que uma das bolas tem o número 0 e as outras duas têm números diferentes de 0 dado que a extração é sem reposição.

Logo, existem ${}^6C_2 = 15$ casos possíveis que é o número de maneiras de escolher duas bolas entre as numeradas com 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

Existem dois casos favoráveis (1+4 e 2+3).

$$\text{Logo, } P(B|A) = \frac{2}{15}.$$

Resposta: (A)

Pág. 109

7.1. a)

$$\frac{V}{6} \quad \frac{\text{Outras}}{6} \quad | \quad 12$$

$$P = \frac{{}^6C_3 {}^6C_1}{{}^{12}C_4} = \frac{8}{33}$$

b)

Pretas	Outras
$\frac{2}{0}$	$\frac{10}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

$$P = \frac{{}^2C_1 {}^{10}C_3 + {}^2C_2 {}^{10}C_2}{{}^{12}C_4} = \frac{240 + 45}{495} = \frac{19}{33}$$

c)

$$\frac{\text{Vermelhas}}{6} \quad \frac{\text{Branças}}{4} \quad \frac{\text{Pretas}}{2} \quad | \quad 12$$

$$P = \frac{{}^{12}C_4 - {}^6C_4 - {}^4C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{479}{495}$$

7.2. a)

$$\frac{V}{6} \quad \frac{B}{4} \quad \frac{P}{2}$$

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_6 {}^6C_4 {}^2C_2 = 13\,860$

Número de casos favoráveis:

$${}^8C_6 \times {}^2C_2 \times 9 = 252$$

$$P = \frac{252}{13\,860} = \frac{1}{55}$$

ou

Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis: $8! \times 4! \times 9$

$$P = \frac{8! \times 4! \times 9}{12!} = \frac{1}{55}$$

b) Número de casos possíveis: 13 860

Número de casos favoráveis: ${}^8C_6 \times {}^2C_2 \times {}^9C_4 = 3528$

$$P = \frac{3528}{13\,860} = \frac{14}{55}$$

ou

Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis: $8! \times {}^9A_4$

$$P = \frac{8! \times {}^9A_4}{12!} = \frac{14}{55}$$

c) Número de casos possíveis: 13 860

Número de casos favoráveis:

$${}^8C_6 \times {}^2C_2 \times {}^9C_3 \times 3 = 7056$$

- Há três maneiras de agrupar duas bolas brancas.

BB
B BB
B B B
- Escolha de três lugares para as bolas brancas (2+1+1)
- Número de maneiras de ordenar as oito bolas vermelhas ou pretas

$$P = \frac{7056}{13\,860} = \frac{28}{55}$$

ou

Número de casos possíveis: 12!

Número de casos favoráveis:

$$8! \times {}^4A_2 \times 9 \times {}^8A_2$$

- As restantes duas bolas brancas tem oito lugares disponíveis para serem colocadas
- Lugares disponíveis para o grupo de duas bolas
- Escolha do grupo de duas bolas
- Número de maneiras de ordenar as oito bolas vermelhas ou pretas

$$P = \frac{8! \times {}^4A_2 \times 9 \times {}^8A_2}{12!} = \frac{28}{55}$$

8. Fichas vermelhas: 6

Fichas azuis: 4

Número de casas disponíveis: 16

8.1 Número de casos possíveis:

$${}^{16}C_6 \times {}^{10}C_4$$

- Número de maneiras de escolher lugar para as fichas azuis
- Número de maneiras de escolher lugar para as fichas vermelhas

Número de casos favoráveis:

$$4 \times 3 \times {}^8C_2$$

- Número de maneiras de escolher lugar para as duas fichas vermelhas que sobram
- Número de maneiras de escolher as linhas a ocupar

$$P = \frac{4 \times 3 \times {}^8C_2}{{}^{16}C_6 \times {}^{10}C_4} = \frac{1}{5005}$$

8.2. Há oito casas nas diagonais e oito casas fora das diagonais.

Para distribuir as dez fichas de forma que oito fiquem nas diagonais há as seguintes possibilidades:

Diagonais (8)		Fora das diagonais (8)	
Vermelhas	Azuis	Vermelhas	Azuis
6	2	0	2
5	3	1	1
4	4	2	0

Número de maneiras de colocar as fichas:

$$\underbrace{{}^8C_6 \times {}^2C_2}_{\text{Diagonais}} \times \underbrace{{}^8C_2}_{\text{Fora}} + \underbrace{{}^8C_5 \times {}^3C_3}_{\text{Diagonais}} \times \underbrace{{}^8C_1 \times {}^7C_1}_{\text{Fora}} + \underbrace{{}^8C_4 \times {}^4C_4}_{\text{Diagonais}} \times \underbrace{{}^8C_2}_{\text{Fora}} =$$

$$= 784 + 3136 + 1960 = 5880$$

$$\begin{aligned} 9. \quad P(A \cap B) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \\ &= P(A \cap B) + 1 - P(B) - P(\overline{A \cup B}) = \\ &= P(A \cap B) + 1 - P(B) - [1 - P(A \cup B)] = \\ &= P(A \cap B) + 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B) = \\ &= P(A \cap B) - P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) \end{aligned}$$

$$10.1. \quad P = \frac{2 \times 5! \times 5!}{10!} = \frac{1}{126}$$

└─> A fila pode começar por H ou M.

$$\text{ou } P = \frac{2}{{}^{10}C_5} = \frac{1}{126}$$

└─> Número de maneiras de escolher os lugares a ocupar pelos homens

$$10.2. \quad P = \frac{5! \times 6!}{10!} = \frac{1}{42}$$

Há 5! maneiras de ordenar os cinco homens e 6! maneiras de ordenar as cinco mulheres mais o bloco dos homens.

11. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_5 = 792$

Número de casos favoráveis:

$${}^5C_3 \times 1 \times {}^4C_2 = 60$$

└─> De C para D
└─> De B para C
└─> De A para B

$$P = \frac{60}{792} = \frac{5}{66}$$

12. $P(X) = 4\% = 0,04$

$$P(F|X) = 25\% = 0,25$$

$$P(\bar{X} \cap \bar{F}) = 94\% = 0,94$$

$$\begin{aligned} P(F \cap X) &= P(X) \times P(F|X) = \\ &= 0,04 \times 0,25 = 0,01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \cap \bar{F}) &= 0,94 \Leftrightarrow P(\overline{X \cup F}) = 0,94 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - P(X \cup F) = 0,94 \Leftrightarrow P(X \cup F) = 1 - 0,94 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(X \cup F) = 0,06 \end{aligned}$$

$$12.1. \quad P(X \cup F) = P(X) + P(F) - P(X \cap F)$$

$$0,06 = 0,04 + P(F) - 0,01 \Leftrightarrow P(F) = 0,06 - 0,03 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(F) = 0,03$$

$$12.2. \quad P(\bar{X}|F) = \frac{P(\bar{X} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F) - P(X \cap F)}{P(F)} =$$

$$= \frac{0,03 - 0,01}{0,03} = \frac{0,02}{0,03} = \frac{2}{3}$$

Avaliação global

Pág. 110

$$1. \quad A(x) = \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^8 = \sum_{p=0}^8 {}^8C_p (x\sqrt{x})^{8-p} \left(-\frac{1}{x}\right)^p$$

$$T_{p+1} = {}^8C_p (x\sqrt{x})^{8-p} \left(-\frac{1}{x}\right)^p = {}^8C_p \left(x \times x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-p} (-x^{-1})^p =$$

$$= {}^8C_p \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{8-p} (-1)^p x^{-p} = (-1)^p {}^8C_p x^{\frac{24-3p}{2}} x^{-p} =$$

$$= (-1)^p {}^8C_p x^{\frac{24-3p-2p}{2}} = (-1)^p {}^8C_p x^{\frac{24-5p}{2}}$$

$$\frac{24-5p}{2} = 2 \Leftrightarrow 24-5p = 4 \Leftrightarrow 5p = 20 \Leftrightarrow p = 4$$

$$T_{4+1} = (-1)^4 {}^8C_4 x^{\frac{24-5 \times 4}{2}} \Leftrightarrow T_5 = 70x^2$$

Logo, $k = 70$

Resposta: (A)

2.

M	H
<u>5</u>	<u>3</u>
2	2

$${}^5C_2 \times {}^3C_2 \times 4!$$

└─> Distribuição dos cargos
└─> Escolha de duas mulheres em três
└─> Escolha de dois homens em cinco

Resposta: (C)

3. $P(A) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,2$, $P(\overline{B}) = 0,3$

$$P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,7 - 0,2 = 0,8$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Resposta: (B)

4. Terceiro elemento: nC_2

Quinto elemento: nC_4

$${}^nC_2 = {}^nC_4 \Leftrightarrow n - 4 = 2 \Leftrightarrow n = 6$$

Trata-se da linha de ordem $n = 6$, a qual tem sete elementos.

Número de casos possíveis: ${}^7C_2 = 21$

Número de casos favoráveis: 3

$${}^6C_0 = {}^6C_6, {}^6C_1 = {}^6C_5 \text{ e } {}^6C_2 = {}^6C_4$$

$$P = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

Resposta: (B)

5. O algarismo das unidades é 0 ou 5.

- Se o algarismo das unidades é 0 o algarismo 5 pode ser o das centenas ou o das dezenas (duas hipóteses) havendo oito alternativas para o algarismo diferente de 0 e de 5. Logo, há $2 \times 8 \times 1 = 16$ casos.
- Se o algarismo das unidades é 5 há oito hipóteses para o algarismo das centenas (diferente de 5 e de 0) e oito (diferente dos outros dois) alternativas para o algarismo das dezenas. Logo, há $8 \times 8 \times 1 = 64$ casos.

Portanto, há $16 + 64 = 80$ números nas condições indicadas.

Resposta: (D)

- $A \cap B = \{2\}$ pelo que $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq 0$ (a opção (B) não é verdadeira).

- $P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$ (a opção (D) não é verdadeira).

- Se $P(A \cap B) = 0$, como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1 = P(E), \text{ a opção (C) é a verdadeira.}$$

Resposta: (C)

7. $P(B|A)$ é a probabilidade de a soma dos dois números ser um número positivo, sabendo que o produto é positivo. Se o produto é positivo, então os dois números são não nulos e têm o mesmo sinal.

Logo, há dois casos possíveis: $-2, -1$ e $1, 2$

Como apenas num dos casos a soma é positiva, temos que

$$P(B|A) = \frac{1}{2}.$$

Resposta: (D)

$$\begin{aligned} 8. \quad P(A) \times [5P(B|A) + 1] &= P(A \cup B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5P(A)P(B|A) + P(A) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6P(A \cap B) = P(B) \Leftrightarrow 6 \times \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Resposta: (D)

6. Por exemplo, no lançamento de um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6, sejam:

$$A = \{1, 2\} \text{ e } B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\overline{B} = \{1, 6\} \text{ e } P(A) = P(\overline{B}) = \frac{2}{6}$$

Temos que :

- Os acontecimentos A e B não são contrários (a opção (A) não é verdadeira).

9.1. ${}^{12}C_2 - 18 = 66 - 18 = 48$

(total de retas definidas pelos 12 vértices – número de arestas)

- 9.2. A primeira face é pintada de vermelho (há apenas uma possibilidade)

Para a segunda face há cinco possibilidades (qualquer cor exceto vermelho).

Para as faces seguintes (3.ª, 4.ª, 5.ª e 6.ª) há quatro possibilidades (qualquer cor exceto vermelho e a da face anterior).

Portanto, há $1 \times 5 \times 4^4 = 1280$ maneiras diferentes de pintar o prisma.

- 9.3.** Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2 = 66$ (existem 12 vértices num prisma hexagonal, dos quais se escolhem dois).

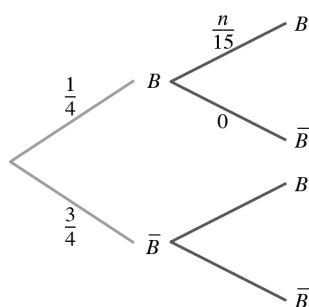
Número de casos favoráveis: 6 (para que os vértices escolhidos definam uma reta paralela ao eixo Oy , têm de pertencer à mesma aresta lateral. Como existem seis arestas laterais, existem seis casos favoráveis).

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{6}{{}^{12}C_2} = \frac{1}{11}$.

- 10.1.** Seja n o número de bolas brancas no saco B .

A probabilidade de sair bola branca no saco A é $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

A probabilidade de sair bola branca no saco B é $\frac{n}{15}$.



“Sair, no máximo, uma bola branca” é o acontecimento contrário de “Saírem duas bolas brancas”

$$\begin{aligned} P(\text{Sair, no máximo, uma bola branca}) &= \\ &= 1 - P(\text{saírem duas bolas brancas}) = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{n}{15} = 1 - \frac{n}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n}{60} &= 95\% \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{60} = 0,95 \Leftrightarrow \frac{n}{60} = 1 - \frac{95}{100} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = 60 \times \frac{5}{100} \Leftrightarrow n = 3 \end{aligned}$$

No saco B estão três bolas brancas

- 10.2.** $\frac{12}{3! \times 3! \times 3! \times 3!} = 369\,600$ ou

$${}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3 = 369\,600$$

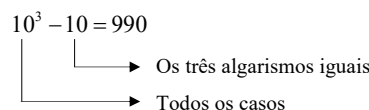
As bolas podem ficar colocadas nas caixas de 369 600 maneiras diferentes

- 11.1.** L L L N N N

Número de casos possíveis: $26^3 \times 10^3$

Número de casos favoráveis:

- Há ${}^{26}A_3$ maneiras de escolher as letras.
- Pelo menos dois algarismos diferentes:

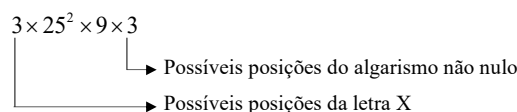


$${}^{26}A_3 \times 990 = 26 \times 25 \times 24 \times 990$$

$$P = \frac{{}^{26}A_3 \times 990}{26^3 \times 10^3} = \frac{297}{338} \approx 0,879$$

- 11.2.** X L L O O A

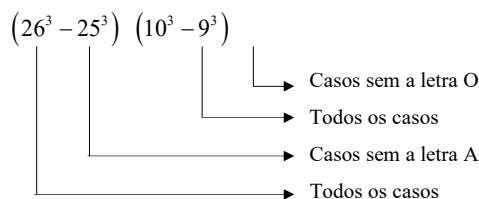
Número de casos favoráveis



$$P = \frac{3 \times 25^2 \times 9 \times 3}{26^3 \times 10^3} = \frac{405}{140\,608} \approx 0,003$$

- 11.3.** Número de casos favoráveis:

Letras Algarismos



$$P = \frac{(26^3 - 25^3)(10^3 - 9^3)}{26^3 \times 10^3} \approx 0,030$$

- 12.** $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,36$ e $P(B|A) = 0,5$

- 12.1** Pretende-se determinar $P(A \cup B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,4 + 0,36 - 0,2 = 0,56 \end{aligned}$$

- 12.2.** $P(A) = 0,4 \rightarrow 10$ rapazes e 15 raparigas na turma

$$P(B) = 0,36 \rightarrow 9 \text{ alunos no teatro}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} = \frac{5}{9} \rightarrow 5 \text{ rapazes e}$$

4 raparigas no teatro

$$P = \frac{{}^4C_4 \times {}^5C_1 + {}^4C_3 \times {}^5C_2}{{}^9C_5} \approx 35,7\%$$

13.1. Número de casos possíveis: $7!$

Número de casos favoráveis: $2! \times 5!$

$$P = \frac{2! \times 5!}{7!} = \frac{2}{7 \times 6} = \frac{1}{21}$$

ou

$$P = \frac{1}{{}^7C_2} = \frac{1}{21}$$

13.2. $\frac{2! \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$

ou

$$P = \frac{6}{{}^7C_2} = \frac{2}{7}$$

13.3. $\frac{4! \cdot {}^5A_3}{7!} = \frac{2}{7}$

ou

$$P = \frac{{}^5C_3}{{}^7C_4} = \frac{2}{7}$$

14. O saco A tem n bolas sendo 1 cor de laranja e $n - 1$ verdes.

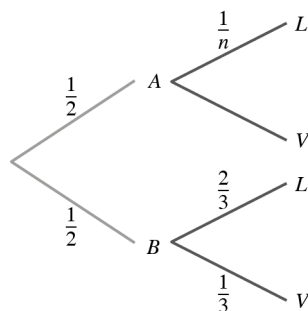
Sejam os acontecimentos:

A : “O saco escolhido é o A .”

B : “O saco escolhido é o B .”

L : “A bola escolhida é laranja.”

V : “A bola escolhida é verde.”



$$P(A|L) = \frac{1}{9}$$

$$\frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{P(A) \times P(L|A)}{P(A \cap L) + P(B \cap L)} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{n}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 27 = 3 + 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n = 24 \Leftrightarrow n = 12$$

O saco A tem 11 bolas verdes.