REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

INTRODUÇÃO

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico (EB) e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O pensamento matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens

Essenciais de MACS exploram modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de MACS promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando o recurso à tecnologia.

- Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser preteridos em favor de uma perspetiva de identificação do poder da Matemática na interpretação da realidade. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

3. Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

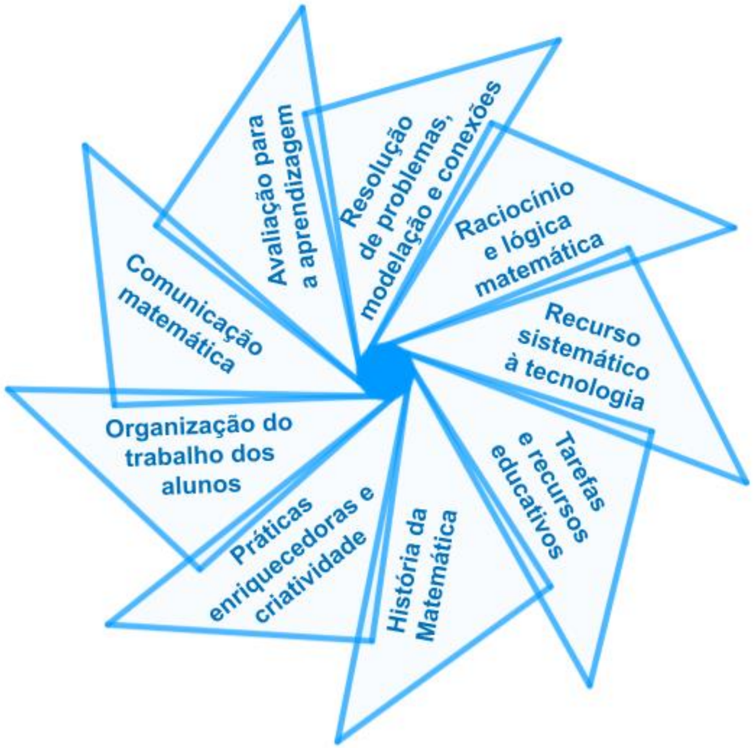

Figura 1 – Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a formular e validar conjeturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Modelos de Grafos ou Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. O pensamento computacional deve ser integrado com uma complexidade progressiva, desenvolvendo processos algorítmicos, um pensamento estruturado e o raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

5) História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, o estudo matemático das epidemias ou o papel dos modelos matemáticos na exploração espacial.

6) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade. A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

7) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

8) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

9) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de MACS assume um papel estruturante no Curso de Línguas e Humanidades. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas de Eleições e Partilha, Literacia Financeira e Estatística. Os alunos a quem a esta disciplina se destina, estudam estes temas de uma forma mais aprofundada e integrada pela natureza do seu percurso académico e do papel esperado para a Matemática na sua formação enquanto cidadãos.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais de MACS preconizam o aprofundamento do estudo de modelos matemáticos que permitem descrever e analisar a realidade, nomeadamente modelos de grafos e modelos populacionais. É ainda proposto uma ampliação do pensamento estatístico pela abordagem de modelos de probabilidade em casos discretos e contínuos e de uma introdução à inferência estatística.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos propostos, mas poderá ser também uma proposta de trabalho em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas a MACS do Curso de Línguas e Humanidades concretizam-se em dois documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.
- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados, nestas Aprendizagens Essenciais, constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com seis tempos letivos de cinquenta minutos.

Semelhanças com MA 12º ano

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Modelos de grafos e populacionais	Introdução aos grafos	6	12
	Grafos de Euler	12	
	Grafos de Hamilton	12	
	Modelos populacionais	12	
	Crescimento linear, exponencial, logarítmico e logístico	18	
	[Trabalho de projeto]	12	
Probabilidade	Fenómeno aleatório	2	9
	Probabilidade	16 (8)	
	Probabilidade condicionada	12	
	Modelos de probabilidade em espaços finitos	12 (10)	
	Modelo normal	12 (4)	
Introdução à Inferência Estatística	Introdução à inferência estatística	12	Total:18) 7
	Distribuição de uma amostragem estatística	16	
	Intervalos de confiança	14	
		Total	28

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO **PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)**

- **A** Linguagens e textos
- **B** Informação e comunicação
- **C** Raciocínio e resolução de problemas
- **D** Pensamento crítico e pensamento criativo
- **E** Relacionamento interpessoal
- **F** Desenvolvimento pessoal e autonomia
- **G** Bem-estar, saúde e ambiente
- **H** Sensibilidade estética e artística
- **I** Saber científico, técnico e tecnológico
- **J** Consciência e domínio do corpo

OPERACIONALIZAÇÃO DAS **APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)**

<table>
<tr><th>TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos</th><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar</th><th>AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR</th><th>Áreas de Competência do Perfil dos Alunos</th></tr>
<tr><td>MODELOS DE GRAFOS E POPULACIONAIS

Introdução aos grafos</td><td>Desenvolver competências para identificar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados para modelar problemas de logística.

Familiarizar os estudantes com as noções de vértice, de aresta, laço, vértice isolado e vértices adjacentes de um grafo.

Indicar a ordem de um grafo e o grau de um vértice.

Identificar caminho e circuito.</td><td>Proporcionar aos estudantes a interpretação de situações reais que possam ser representadas por um sistema de pontos e linhas, unindo alguns desses pontos.

Introduzir as definições e as notações à medida que forem sendo necessárias e úteis para economia e clareza da linguagem e estas devem ser inteligíveis no âmbito das situações em estudo.

Utilizar os problemas históricos, nomeadamente como motivação para atividades de consulta e de metodologia de projeto.

Incentivar a análise e a modelação de situações concretas nas comunidades envolventes/locais para terem oportunidade de apresentarem propostas de melhoria aos responsáveis.</td><td rowspan="2">Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)

Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)

Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</td></tr>
<tr><td>Grafos de Euler</td><td>Conhecer as condições para um grafo admitir um circuito de Euler

Conhecer e aplicar o Teorema de Euler</td><td>Explorar o problema das pontes de Königsberg pelo papel relevante na história da teoria dos grafos, e em particular no conceito de grafo de Euler.

Apresentar situações que sejam modeladas por grafos (sistemas de distribuição, carteiros, patrulhamento e controle de equipamentos sociais, parcómetros, sistemas de recolha de lixo e de limpeza de ruas, …) e analisar a relevância do Teorema de Euler neste contexto.</td></tr>
</table>

	Identificar as condições para um grafo admitir um caminho euleriano. Reconhecer as condições para eulerizar um grafo.	Propor problemas com níveis de exigência mais elevada que justificam a necessidade e vantagem de introduzir noções e técnicas. Por exemplo, um problema de patrulhamento e controle de equipamentos sociais pode ir desde procurarem quaisquer caminhos possíveis, passando por encontrar caminhos sem repetir ruas, até à necessidade de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto.	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa. (G) Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
Grafos de Hamilton	Definir e caracterizar um circuito de Hamilton. Identificar as condições para um grafo admitir um circuito hamiltoniano. Para cada modelo, procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis. Encontrar algoritmos - decisões passo a passo para encontrar soluções. Discutir sobre a utilidade e viabilidade económica (e não só) da procura de soluções ótimas.	Apresentar situações que sejam modeladas por grafos, em que o que interessa é visitar todos os vértices de preferência sem repetições e com partida e chegada do mesmo ponto (problema do caixeiro viajante). Proporcionar situações de trabalho com "árvores" que visa facilitar as somas de pesos atribuídos às arestas de modo a ser possível comparar os pesos totais das várias soluções. Incentivar a procura de algoritmos próprios para obter soluções aceitáveis. Promover discussões que envolvam a otimização de recursos ou produtos, por exemplo, menor número de quilómetros, menor consumo de combustível, menos poluição, mais lucro ou preços mais baixos. As discussões devem enquadrar as variáveis relevantes como por exemplo a localização dos armazéns e dos clientes numa cadeia de distribuição comercial ou ainda a localização de unidades de tratamento de resíduos, aterros sanitários ou pontos de recolha.	
Modelos populacionais	Familiarizar os estudantes com a diversidade de modelos de crescimento populacional, entre os quais o linear, exponencial, logarítmico e logístico.	Promover discussões sobre a modelação de fenómenos relevantes em contextos variados em que a modelação permite formular previsões ou contribuir para a tomada de decisões como por exemplo a evolução da população mundial, a cobertura nacional e mundial de acesso à Internet ou a evolução do número de carros elétricos.	

Crescimentos linear, exponencial, logarítmico e logístico	Comparar os crescimentos linear, exponencial, logarítmico e logístico. Selecionar o modelo adequado a um fenómeno considerando os dados disponíveis e a previsível variação em função do tempo. Compreender as limitações da adequação de modelos teóricos a situações reais.	Conduzir os alunos na identificação situações que possam ser modeladas por modelos linear, exponencial, logarítmico e logístico, clarificando as características de cada modelo que favorecem a sua adequação à situação selecionada, e as limitações do modelo. Recorrer a séries temporais de dados estatísticos disponíveis em bases de dados de acesso livre (por exemplo Pordata) para ajustar modelos, por regressão estatística, a diferentes conjuntos de dados, acompanhada da discussão da adequação do modelo ao objetivo definido em cada situação. Promover a comparação da modelação da mesma situação através de modelos diferentes, explicitando as vantagens de cada opção. Alargar o leque de exemplos a estudar recorrendo a exemplos históricos significativos (teoria malthusiana) ou a contextos de variação de preços de um produto, a evolução da taxa de inflação ou outras situações com relevância local. Incentivar a exploração de situações em que os modelos discretos permitam uma melhor interpretação da situação em estudo. Incentivar a utilização da representação gráfica do modelo para identificar valores concretos (objetos e imagens da função) recorrendo à resolução gráfica ou numérica de equações.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Aprofundamento do estudo dos modelos de grafos ou populacionais com trabalho de projeto (*)	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos modelos de grafos ou populacionais a num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.	

	Interpretar de forma crítica informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos de grafos ou populacionais, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de - Colorir um mapa, aplicando o número cromático de um grafo; - Resolver problemas de sistemas de distribuição tais como: patrulhamento, distribuição de correio ou outros, de modo a que se possam encontrar soluções que permitam encontrar caminhos sem repetir arestas, começando e terminando no mesmo vértice; - Modelar as interações entre os diferentes personagens de uma obra literária por meio de um grafo de arestas ponderadas; -Estudar populações afetadas por vírus, evolução de propagação de bactérias ou vírus ou crescimento bacteriano num laboratório, o crescimento de uma determinada espécie vegetal/animal sem ter em conta os recursos; - Aproximar através de um modelo a evolução de uma população (exemplo da freguesia local) ao longo de um século a partir dos dados disponíveis em sítios da Internet Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	
(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 11.º ano tal como é exemplificado na proposta seguinte.			

Pensamento Computacional

MODELOS DE GRAFOS
Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada, ou em problemas semelhantes anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação das etapas de resolução.
Podem ser desenhadas configurações para exploração, estabelecimento e testagem de conjeturas, com dois softwares gratuitos. São eles:
- Grinvin http://www.grinvin.org/en/start.html.
- GEPHI - The Open Graph Viz Platform https://gephi.org.

MODELOS POPULACIONAIS
Para fomentar a visualização gráfica e a interpretação do crescimento dos diferentes tipos de funções pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como por exemplo, o GeoGebra:
- Crescimento linear versus crescimento exponencial: https://www.geogebra.org/m/c5jcwbdh
- Funções Exponenciais e o Novo Coronavírus: https://www.geogebra.org/m/hvkwdwv4
- Curva de crescimento logístico: https://www.geogebra.org/m/bhyvBC4j
- Crescimento do leão marinho: https://www.geogebra.org/m/n8caGQWf
- Funciones exponencial y logarítmica: https://www.geogebra.org/m/pXfHPKvH
- Função Exponencial e Logarítmica: https://www.geogebra.org/m/tquatedq
- Exponential and logistic growth: https://www.geogebra.org/m/qvy4fbrn

Possíveis aprofundamentos

Podem ser introduzidos outros modelos de crescimento comuns como o do modelo de Gompertz, Obtido em:
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gompertz_function
- https://www.geogebra.org/m/rbxepcnd
- https://www.geogebra.org/m/d5dwwxss

Bibliografia de referência

Abrantes, P. (1994). *Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas?* Educação & Matemática, nº 30, p. 17-20.
Bernardes, A., Colaço, T. (1997). Sismos, exponenciais e logaritmos: uma proposta de modelação matemática. *Educação & Matemática, n.º 43*, p. 13-16.
Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
COMAP. (1999). *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.
Feiteira, R., & Pires, M. (2008). Grafos e Jogos. *Educação & Matemática, n.º 97*, p. 19-24.
Guia do Estudante (2020). *Coronavírus: o que é crescimento exponencial e como pode cair nas provas*. Editora Abril. Obtido de https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/coronavirus-o-que-e-crescimento-exponencial-e-como-pode-cair-nas-provas/.
Malkevitch, J. (1995). *Modelos de Grafos*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa, 1999). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online.
Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
Nápoles, S., (2018). O crescimento exponencial de populações: Euler ou Malthus?, *Rev. Ciência Elem., V6*(2):041.
Pires, M., & Kravtechenko, V. (2007). Reflexões sobre o ensino de Grafos. *Educação & Matemática, nº 93*, p. 11-15.

Precatado, A., Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.
Simões, M. (1999). *Teoria dos grafos – aplicações práticas* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online.
Teixeira, P. et al (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P. et al (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P. et al (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Torres, T. A. (2007). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores: um estudo com alunos do 12º ano de escolaridade*. Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia. Braga.
Torres, T. A., Coutinho, C. & Fernandes, J. (2008). Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores. *UNIÓN, Sept. 2008, nº 15*, p. 9 - 31. Obtido de http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/8269
Vieira, A,; Veloso, E. & Lagarto, M. J. (org.) (1997). Relevância da História no Ensino da Matemática. História da Matemática - *Cadernos do GTHEM – 1* APM. Lisboa: APM.

Proposta

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Inferência Estatística em trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Inferência Estatística num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar processos associados à Inferência Estatística, tirando partido da tecnologia.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)

	Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Estimar a proporção de alunos que almoçam na cantina da escola num certo dia da semana; - Prever os resultados eleitorais para a Associação de Estudantes; - Conhecer os hábitos de reciclagem dos agregados familiares dos alunos da escola; - Estimar o atraso de uma certa carreira de autocarro de um determinado horário. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Bibliografia de referência

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
Amado, N. & Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de: http://hdl.handle.net/10400.1/15482.
George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de: https://www.edutopia.org/project-based-learning.
Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: http://hdl.handle.net/10400.1/6872.
Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
PROBABILIDADE Fenómeno aleatório Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Modelo de probabilidade Acontecimentos União e interseção de acontecimentos	Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura). Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios. Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem que se recorrer a um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)

Probabilidade Probabilidade frequencista Regras da probabilidade Probabilidade da união de acontecimentos Regra de Laplace	Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por P(A), como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, P(A) é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B). Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem. Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiparáveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $Probabilidade\ de\ A = \frac{Número\ de\ resultados\ favoráveis\ a\ A}{Número\ de\ resultados\ possíveis}$	Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados “jogos de sorte e azar”. Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: “sair uma face com um n.º de pintas par”, “sair uma face com um n.º de pintas maior ou igual a 5”, “sair uma face com um n.º de pintas maior que 6”, etc. Programa python para simular o lançamento... Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace. ... evitando o uso excessivo de combinatória Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo. Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo	Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)

		sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.	Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
Probabilidade condicionada Definição	Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento.	
Regra do produto	Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) . P(B\|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) . P(A\|B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar.	Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores.	
Árvore de probabilidade	Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia.	Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível.	
Tabelas de contingência	Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada.		
Acontecimentos independentes	Identificar que os acontecimentos A e B, com P(A)>0 e P(B)>0, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, P(A|B)=P(A) (A independente de B) ou P(B|A)=P(B) (B independente de A). Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se P(A∩B)=P(A)xP(B). As duas definições de	Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo	

	independência são equivalentes desde que se exija que P(A)>0 e P(B)>0.	rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição). Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando: $P(B) = P(B\|A_1).P(A_1) + \cdots + P(B\|A_n).P(A_n)$	
Modelos de probabilidade em espaços finitos Variáveis aleatórias (discretas) Função massa de probabilidade Valor médio e desvio padrão populacional	Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada. Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado. Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente.	Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas. Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$. Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição.	

	Compreender o paralelismo entre valor médio μ e a média $\bar{x}$ e também, de modo idêntico, para o desvio padrão populacional σ e desvio padrão (amostral) s, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. Calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p.	Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas, destacando a interpretação frequencista da probabilidade, em que as frequências relativas são interpretadas como probabilidades. Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos.	
Modelo Normal Propriedades	Reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios. Identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio padrão σ. Saber que o valor médio determina o eixo de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio padrão. Calcular probabilidades com base nesta família de modelos.	Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o “n.º de carros que passam numa determinada portagem das 8h às 9h”, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é $\mathbb{R}^+$. Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto. Salientar que vários cientistas, ao trabalharem com dados, obtinham histogramas cuja população poderia ser modelada por um modelo Normal. Este modelo é a base de muitos dos processos de inferência estatística clássica. Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades, com base no modelo Normal, associadas a quaisquer intervalos.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em *Python* para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f1=0
f2=0
f3=0
f4=0
f5=0
f6=0
for i in range(0,n):
    r=random.randint(1, 6)
    if r==1:
        f1=f1+1
    elif r==2:
        f2=f2+1
    elif r==3:
        f3=f3+1
    elif r==4:
        f4=f4+1
    elif r==5:
        f5=f5+1
    elif r==6:
        f6=f6+1
print("Freq. relativa da saída da face 1 = "+str(f1/n))
print("Freq. relativa da saída da face 2 = "+str(f2/n))
print("Freq. relativa da saída da face 3 = "+str(f3/n))
print("Freq. relativa da saída da face 4 = "+str(f4/n))
print("Freq. relativa da saída da face 5 = "+str(f5/n))
print("Freq. relativa da saída da face 6 = "+str(f6/n))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Estudar alguns modelos de probabilidade discretos, tais como o Uniforme em n pontos, o Binomial(n,p) e o Poisson(λ), assim como os modelos contínuos, o Uniforme no intervalo [a,b] e o Exponencial(λ).
Explorar a utilização da tecnologia para simular determinados acontecimentos e utilizar a aproximação frequencista da probabilidade para estimar a probabilidade desses acontecimentos.
Explorar o problema das três portas (Monty Hall).

Bibliografia de referência

ALEA - Noções de Probabilidade, obtido de: https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt.
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.
Graça Martins, M. E. et al. (1999). Probabilidades e Combinatória. Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.
Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
INTRODUÇÃO À INFERÊNCIA ESTATÍSTICA Introdução à inferência estatística Raciocínio indutivo ou inferencial Parâmetro e estatística Estimador e estimativa	Compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja uma amostra, e que a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população. Conhecer que parâmetro é uma caraterística numérica da população e que estatística é uma caraterística numérica da amostra. Compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra. Saber que à estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma determinada amostra também se chama estimativa.	Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados. Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade. Salientar que o parâmetro é uma caraterística numérica da população, (normalmente desconhecida) enquanto a estatística é uma caraterística numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores, que numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, é uma estatística. Chamar a atenção dos alunos que o termo estatística se utiliza tanto para referir uma função das amostras, o estimador ($\bar{X}$) como o valor observado dessa função para uma determinada amostra que tenha sido selecionada, a estimativa ($\bar{x}$).	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)

Amostras aleatórias	Compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória, quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente, pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir para a população, os resultados aí verificados. Compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição. Compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente.	Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas diferentes, quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra. Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2. Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão.	Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
Distribuição de amostragem de uma estatística Distribuição de amostragem da média Teorema Limite Central (TLC)	Compreender que para averiguar da eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtidos pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis (da mesma dimensão), utilizando um determinado esquema de amostragem. Compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras. Compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a	Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral: $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ e $S'^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}$ e explicar que a razão da utilização da primeira, é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional σ. Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem,	

Estimativas pontuais e estimativas intervalares	utilização do modelo Normal e a utilização da média como estimador do valor médio μ. Reconhecer as limitações das estimativas pontuais, na medida em que, devido à variabilidade amostral, podem apresentar tantos valores diferentes quantas as amostras utilizadas para as obter.	independentemente da forma da distribuição da população subjacente. Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar, para estimar o parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas.	Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
Intervalos de confiança Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95% Intervalo de confiança para qualquer nível 100*(1-a) Intervalo de confiança, para o valor médio, com outros níveis de confiança: 90% e 99% Margem de erro	Utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio μ, desconhecido, de uma população com desvio padrão σ, para obter a seguinte probabilidade $P\left(\bar{X}-1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{X}+1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0{,}95$ e chamar ao intervalo $\left[\bar{x}-1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ um intervalo de 95% de confiança para μ, em que se substitui o parâmetro σ, quando desconhecido, pelo desvio-padrão amostral s. Fórmula para qualquer nível de confiança. Adaptar o intervalo de confiança anterior para os níveis de confiança de 90% e 99%, substituindo 1,96 respetivamente pelos valores 1,645 e 2,576. Saber que a margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo de confiança.	Explorar o significado de intervalo aleatório, cuja leitura correta deve ser realçada, tendo em consideração que o aleatório está nos limites do intervalo, pelo que se deve ler “a probabilidade do intervalo conter μ, é 95%” e não “a probabilidade de μ estar contido”. Realçar o significado da confiança de 95%. Sugerir que essa confiança pode ser entendida do seguinte modo: se recolhêssemos 100 amostras e se calculássemos para cada uma delas o intervalo $\left[\bar{x}-1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ esperar-se-ia que aproximadamente 95 dos intervalos contivessem o valor médio; como, na prática, só se recolhe uma amostra, só se calcula um intervalo, não se sabendo se é um dos que contém ou não μ. Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar. Propor programa em python...	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

<table>
<tr>
<td>Intervalo de confiança para a proporção (populacional) p</td>
<td>Reconhecer que a proporção (populacional) p, é um caso particular do valor médio de uma população constituída por uns e zeros, conforme a caraterística que se está a estudar está ou não presente na população e que o estimador que se utiliza é a proporção amostral, que se representa por $\hat{P}$.

Saber fazer uma leitura adequada da informação veiculada pela comunicação social quando apresentam resultados de sondagens, na forma de intervalos de confiança.</td>
<td>Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção p, admitindo que o modelo de probabilidade para a população X é

<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Probabilidade</td><td>p</td><td>$1-p$</td></tr>
</table>
Valor médio de $X = p$
Variância de $X = p(1-p)$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em *Python* para explorar a noção de intervalo de confiança. Extraem-se sucessivas amostras, com a mesma dimensão, de uma população com distribuição Normal N(0,1) e para cada uma delas apresenta-se o intervalo de 95% de confiança para o valor médio. Pode verificar-se que este intervalo depende da amostra e que nem sempre contém o valor médio da população. Pode também fazer-se variar a dimensão das amostras, o nível de confiança e comparar as amplitudes dos intervalos.

```
import random
import statistics
import math

num_amostras=100
dim_amostra=20

for i in range(num_amostras):
    amostra=[random.normalvariate(0,1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio=statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao=statistics.stdev(amostra)
    d=1.96*desvio_padrao/math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [',vmedio-d,',',vmedio+d ,']')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* 3.11.0 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Estudar a relação entre a margem de erro e a dimensão da amostra utilizada.

Bibliografia de referência

Alea – *Introdução à Inferência Estatística*, obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=1205&lang=pt.
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online.
Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Cofinanciado por:

POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu