Exame final nacional de Matemática A **(2024, Época especial)**

Proposta de resolução

1. De acordo com a definição por recorrência, calculamos o segundo e o terceiro termo da sucessão:

   - $a_1 = 3$;
   - $a_2 = 2 \times u_1 + 2 = 2(3) + 2 = 8$;
   - $a_3 = 2 \times u_2 + 2 = 2(8) + 2 = 18$;

   Resposta: **Opção C**

2.

   2.1. Como sabemos que:

   - a linha que tem 19 cartões, é a linha cujo segundo número número é 18, ou seja, a linha em que os números são da forma ${}^{18}C_p$;
   - o quarto de número de cada linha, quando existe, é da forma ${}^{n}C_3$;

   Temos que: o quarto número da linha que contém, exatamente, 19 cartões, é:

   $${}^{18}C_3 = 816$$

   Resposta: **Opção A**

   2.2. Como sabemos que em cada linha o número de cartões é superior ao da linha anterior em uma unidade, o número de cartões em cada linha é uma progressão aritmética de razão 1 e cujo primeiro termo é 1, temos que:

   - o número de cartões na última linha da figura, n, é dado pelo termo geral:

   $$c_n = 1 + (n-1) \times 1 = 1 + n - 1 = n$$

   - a soma de n termos desta progressão aritmética, ou seja, o número total de cartões usados para uma figura com n linhas, é:

   $$S_n = 3081$$

   Assim, resolvendo a equação anterior, temos:

   $$S_n = 3081 \Leftrightarrow \frac{c_1 + c_n}{2} \times n = 3081 \Leftrightarrow \frac{1+n}{2} \times n = 3081 \Leftrightarrow n(1+n) = 3081 \times 2 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow n + n^2 = 6162 \Leftrightarrow n^2 + n - 6162 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6162)}}{2(1)} \Leftrightarrow n = 78 \vee n = -79$$

   Como n é a ordem de uma sucessão, é um valor natural, pelo que, $n \neq -79$, ou seja, $n = 78$.

3.

3.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x=0$, temos que verificar se $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0)=\dfrac{4\cos 0}{\operatorname{sen} 0-2}=\dfrac{4\times 1}{0-2}=\dfrac{4}{-2}=-2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4\cos x}{\operatorname{sen} x-2}=\dfrac{4\cos 0^+}{\operatorname{sen} 0^+-2}=-2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-e^{6x}}{3x}=\dfrac{1-e^{6\times 0^-}}{3\times 0^-}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{6x}}{3x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{6x}}{3x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\left(-1+e^{6x}\right)}{3x}\times\frac{2}{2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(-2\times\frac{e^{6x}-1}{6x}\right)=$$

(considerando $y=6x$, temos que se $x\to 0^-$, então $y\to 0^-$)

$$=\lim_{y\to 0^-}-2\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=-2\times 1=-2$$

Como $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x=0$.

3.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para $x\in]0,2\pi]$:

$$f'(x)=\left(\frac{4\cos x}{\operatorname{sen} x-2}\right)'=\frac{(4\cos x)'(\operatorname{sen} x-2)-(4\cos x)(\operatorname{sen} x-2)'}{(\operatorname{sen} x-2)^2}=$$

$$=\frac{4(\cos x)'(\operatorname{sen} x-2)-(4\cos x)\left((\operatorname{sen} x)'-(2)'\right)}{(\operatorname{sen} x-2)^2}=\frac{4(-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x-2)-(4\cos x)(\cos x-0)}{(\operatorname{sen} x-2)^2}=$$

$$=\frac{-4\operatorname{sen}^2 x+8\operatorname{sen} x-4\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x-2)^2}=\frac{-4\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x-2\operatorname{sen} x\right)}{(\operatorname{sen} x-2)^2}=\frac{-4}{(\operatorname{sen} x-2)^2}\times(1-2\operatorname{sen} x)$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $x\in]0,2\pi]$:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\underbrace{\frac{-4}{(\operatorname{sen} x-2)^2}=0}_{\text{Cond. impossível}}\vee 1-2\operatorname{sen} x=0\Leftrightarrow -2\operatorname{sen} x=-1\Leftrightarrow \operatorname{sen} x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Assim, como $x\in]0,2\pi[$, as únicas soluções da equação são $x=\dfrac{\pi}{6}\vee x=\dfrac{5\pi}{6}$, $(k=0)$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$\frac{-4}{(\operatorname{sen} x-2)^2}$	n.d.	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$1-2\operatorname{sen} x$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f'	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f	n.d.	$\searrow$	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	min.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left]0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ e no intervalo $\left[\dfrac{5\pi}{6},2\pi\right]$;
- tem extremos relativos para: $x=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{5\pi}{6}$ e $x=2\pi$.

4.

4.1. Designando por a o número de bolas amarela inicialmente existentes no saco e por v o número de bolas verdes inicialmente existentes no saco, temos que:

- $P(A) = \dfrac{a}{a+v}$
- $P(B|A) = \dfrac{a-1}{a-1+v}$

E assim, como $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$, e como $a \geq 1$ e $v \geq 1$, então $a - 1 + v \geq 1$, ou seja, $a - 1 + v \neq 0$ e assim vem que:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow P(A) \times P(B|A) = \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{\frac{2}{3}P(A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+v} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(a-1) = 2(a-1+v) \Leftrightarrow 3a - 3 = 2a - 2 + 2v \Leftrightarrow a = 2v + 1$$

Logo, como v é um número natural, $2v$ é um número par, e $2v + 1$ é um número ímpar, ou seja, o número de bolas amarela inicialmente existentes no saco, a, é um número ímpar.

4.2. Como estão no saco 200 bolas e 49% são verdes, sabemos que o conteúdo do saco é constituído por:

- $200 \times 0{,}49 = 98$ bolas verdes, e
- $200 - 98 = 102$ bolas amarelas.

Assim, extraindo ao acaso 4 bolas do saco, o número de conjuntos diferentes que é possível formar, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^{200}C_4$.

O número destes conjuntos que contém, pelo menos, 3 bolas verdes, é a soma dos conjuntos que contêm 3 bolas verdes e 1 amarela com os conjuntos formados por 4 bolas verdes. Ou seja, o número de casos favoráveis, é ${}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4$.

Assim, a probabilidade do conjunto das 4 quatro bolas conter, pelo menos, três bolas verdes, na forma de dízima, arredondado às décimas, é:

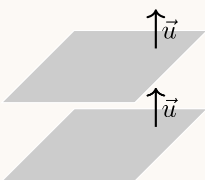
$$\frac{{}^{98}C_3 \times {}^{102}C_1 + {}^{98}C_4}{{}^{200}C_4} \approx 0{,}3$$

5.

5.1. Como a equação que define o plano que contém a base do cone é $x + 2y - 8 = 0$, o vetor normal deste plano, $\vec{u}(1,2,0)$, também é um vetor normal de qualquer plano paralelo ao plano da base do cone, pelo que a equação do plano que pretendemos definir é da forma:

$$x + 2y + d = 0$$

Como se pretende que o plano contenha o ponto de coordenadas $(1, -3{,}4)$, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:



$$1 + 2(-3) + d = 0 \Leftrightarrow 1 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$$

E assim, uma equação que define o plano paralelo ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, -3, 5)$, é:

$$x + 2y + 5 = 0$$

Resposta: **Opção C**

5.2. Como os pontos A e B pertencem ambos ao plano definido pela equação $x - 2y - 8 = 0$, temos que:

- o ponto A tem ordenada e cota nulas, porque pertence ao semieixo positivo Ox, ou seja a sua abcissa é: $x_A - 2(0) - 8 = 0 \Leftrightarrow x_A = 8$
- o ponto B tem abcissa e cota nulas, porque pertence ao semieixo positivo Oy, ou seja a sua ordenada é: $0 - 2(y_B) - 8 = 0 \Leftrightarrow 2y_B = 8 \Leftrightarrow y_B = \frac{8}{2} \Leftrightarrow y_B = 4$

Determinando as coordenadas do ponto M, ponto médio do segmento $[AB]$, temos:

$$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4,2,0)$$

Como $[AB]$ é um diâmetro da base do cone, e o cone é reto, o ponto médio do segmento de reta pertence à reta MV, perpendicular à base do cone que contém o vértice. Assim, como o vetor normal do plano que contém a base do cone, $\vec{v}(1,2,0)$, também é um vetor diretor da reta MV, uma equação da reta MV é:

$$(x,y,z) = (4,2,0) + k(1,2,0), k \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas do ponto V, são da forma $(4+k\,,2+2k\,,0)$ e como a sua abcissa tem menos uma unidade do que a sua ordenada, obtemos o valor de k a que corresponde o ponto V, resolvendo a equação:

$$4 + k = 2 + 2k - 1 \Leftrightarrow 4 - 2 + 1 = 2k - k \Leftrightarrow 3 = k$$

Ou seja, as coordenadas do ponto V são $\big(4+3\,,2+2(3)\,,0\big) = (7\,,8\,,0)$

6. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos vencimentos (em euros) dos funcionários da área comercial, e noutra lista as frequências absolutas, ou seja, o número de funcionários correspondente a cada valor da lista anterior, e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da mediana, da média e o do desvio padrão, com aproximação às décimas:

$$\tilde{x} = 940;\ \overline{x} = 955 \text{ e } \sigma \approx 49{,}58$$

Podemos assim constatar que a média dos vencimentos dos funcionários desta área é inferior ao funcionários da área de produção; e que o desvio padrão dos vencimentos dos funcionários da área de produção é inferior ao desvio padrão dos vencimentos dos funcionários da área comercial.

Podemos ainda observar que nenhum funcionários da área comercial tem um vencimento inferior a 900 euros. Sabemos ainda que existem $50 - 12 = 38$ funcionários na área de produção e como a mediana dos vencimentos deste funcionários é 900 e nenhum deles tem um vencimento igual a 900 euros, então metade deles tem um vencimento inferior a 900 euros, ou seja, $\frac{38}{2} = 19$ funcionários da empresa estão nestas condições a que corresponde uma percentagem, p, relativamente ao total dos funcionários da empresa, calculada por:

$$\frac{50}{19} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 19}{50} \Leftrightarrow p = 38\%$$

Logo, as correspondências corretas são:

- **I** $\rightarrow$ **b)**
- **II** $\rightarrow$ **a)**
- **III** $\rightarrow$ **c)**
- **IV** $\rightarrow$ **b)**

7. Como o ponto A pertence à circunferência de raio 4, centrada na origem e define com a origem e o semieixo positivo Ox um ângulo de amplitude α, as suas coordenadas são $(4\cos\alpha, 4\,\text{sen}\,\alpha)$.

   Assim temos que:

   - $\overline{AB} = 4\,\text{sen}\,\alpha$
   - $\overline{OB} = -4\cos\alpha$, porque $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, logo $\cos\alpha < 0$
   - $\overline{BD} = 2\,\overline{OB} = 2\times(-4\cos\alpha) = -8\cos\alpha$

   E assim a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida como a soma das áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, ou o dobro da área de um deles, porque são congruentes:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ABD]} + A_{[BCD]} = 2\times A_{[ABD]} = 2\times\frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{2} = \overline{BD}\times\overline{AB} =$$

$$= -8\cos\alpha\times 4\,\text{sen}\,\alpha = -32\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = -16(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) = -16\,\text{sen}\,(2\alpha)$$

8. Como a função f é polinomial, é conínua em $\mathbb{R}$, e em particular no intervalo $[0{,}1]$.

   Como $f(0) < 0 < f(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in\,]0{,}1[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1[$.

   C.A.

   $f(0) = a(0)^3 + 0 - 2 = -2$

   $f(1) = a(1)^3 + 1 - 2 = a - 1$
   Como $a > 1$, então $f(1) > 0$

9. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \,\wedge\, x + 1 > 0\}$

   Como $x > 0 \,\wedge\, -x > -1 \Leftrightarrow x > -1$,

   temos que $x \in]0, +\infty[\cap] - 1, +\infty[$ ou seja, $x \in]0, +\infty[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2\sqrt{x+1} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2(x+1)^{\frac{1}{2}} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2(x+1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_2 x - \log_2(x+1)) = -1 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2(x+1) = -2 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x}{x+1}\right) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 2^{-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{4} \underset{x\neq -1}{\Leftrightarrow} 4x = x + 1 \Leftrightarrow 4x - x = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

   Assim, como $\frac{1}{3} \in]0, +\infty[$, o conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

10. Como a massa da substância diminui 5% entre os instantes a e $3a$, temos que no instante $3a$, a massa da substância corresponde a 95% da massa existente no instante a, ou seja:

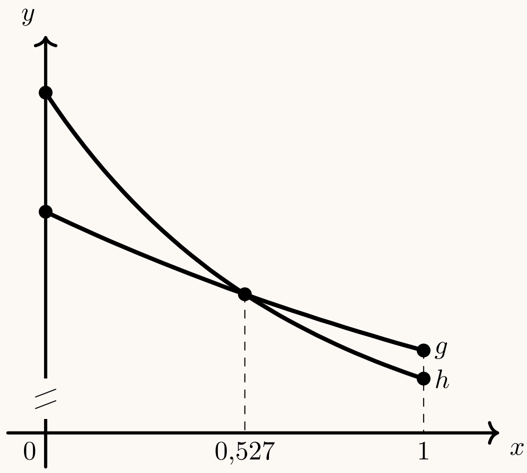
$$m(3a) = 0{,}95 \times m(a)$$

Desta forma, inserimos na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1764}{1 - 0{,}16e^{-0{,}42x}}$, e visualizamos os gráficos das funções:

- $g(x) = 0{,}95 \times f(x)$
- $h(x) = f(3x)$

reproduzidos na figura ao lado, para $0 < x < 1$, uma vez que o instante a ocorre no primeiro minuto da reação. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (com três casas decimais) da abcissa do ponto de interseção das funções g e h, a que correspondem o instante a:

$$a \approx 0{,}527$$



Assim temos que a amplitude do intervalo $[a,3a]$, em minutos, é:

$$3a - a = 2a \approx 2 \times 0{,}527 \approx 1{,}054 \text{ min}$$

Como 0,054 minutos correspondem a $60 \times 0{,}054 = 3{,}24$ segundos, a amplitude do intervalo é 1 minuto e 3 segundos.

11. Temos que:

- Como a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 e contem um ponto do 4.º quadrante, tem declive negativo, pelo que a função f é decrescente em $x = 0$, ou seja, $f'(0) < 0$. Assim, a afirmação **I.** é falsa.
- Como a origem pertence ao gráfico de f, temos que $f(0) = 0$ pelo que o declive da reta r é:

$$m_r = f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

Como a reta s é uma assíntota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, temos que o declive da reta s é:

$$m_s = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Logo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{8}{9} \Rightarrow m_r \times m_s \neq -1$ pelo que a afirmação **II.** é falsa.

12. Como $[ABCD]$ é um losango, $[AC]$ é uma das diagonais, e como $\overline{AC} = |z_1 - z_3| = 6$ e o ponto O é o ponto médio de $[AC]$, temos que $\overline{OA} = z_1 = \frac{6}{2} = 3$.

    Temos também que, como o triângulo $[OAB]$ é retângulo em 0:

    $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow 3^2 + |z_2|^2 = 5^2 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 25 - 9 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{16} \Rightarrow |z_2| = 4$

    Logo, $|z_2| = 4$ e z_2 é um imaginário puro, então $z_2 = 4i$.

    Como $[BD]$ também é uma diagonal do losango que é bissetada na origem pela outra diagonal, então $\overline{OB} = \overline{OD}$, ou seja, $|z_2| = |z_4|$, pelo que $z_4 = -4i$.

    Assim, vem que:
    $$z_2 \times z_4 = 4i \times (-4i) = -16i^2 = -16 \times (-1) = 16$$

    Resposta: **Opção B**

13. Temos que:

    - $z^2 = \left(2e^{i\theta}\right)^2 = 2^2 e^{i\theta \times 2} = 4e^{i(2\theta)}$
    - $2z\overline{z} = 2e^{(i \times 0)} \left(2e^{i\theta}\right) \left(2e^{i(-\theta)}\right) = 2 \times 2 \times 2e^{i(0+\theta-\theta} = 8e^{i \times 0} = 8$

    Logo, vem que:
    $$z^2 + 2z\overline{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 8 - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = -2 + 2\sqrt{3}i$$

    Escrevendo $-2 + 2\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica $(\rho e^{i\alpha})$ temos:

    - $\rho = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$
    - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$, α é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

    Desta forma temos que $2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$, pelo que:
    $$z^2 + 2z\overline{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

    Logo podemos obter o valor de θ:
    $$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{2 \times 3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

    Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para $k = 0$ temos que $\theta = \frac{\pi}{3}$

14. Como o domínio da função é $[0, +\infty[$, começamos por determinar o declive da assíntota não vertical do gráfico de g, quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x}}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\left(f(x)\right)^2}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} =$$

Como o gráfico de f admite uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$= \sqrt{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\right)^2 + \lim_{x\to+\infty} 4 + \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x}} = \sqrt{0^2 + 4 + \frac{5}{+\infty}} = \sqrt{0+4+0} = \sqrt{4} = 2$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} - 2x\right) \times \frac{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} + 2x}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} + 2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{\left(\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x}\right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x - 4x^2}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(f(x)\right)^2 + 5x}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\left(f(x)\right)^2 + 5x}{x}}{\frac{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x} + 2x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\left(f(x)\right)^2}{x} + 5}{\frac{\sqrt{\left(f(x)\right)^2 + 4x^2 + 5x}}{\sqrt{x^2}} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} \times f(x) + 5}{\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2}} + 2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} \times f(x) + 5}{\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} + 2} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times f(x) + 5\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4 + \frac{5}{x}} + 2\right)} =$$

$$= \frac{0+5}{\sqrt{0+4+0}+2} = \frac{5}{\sqrt{4}+2} = \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4}$$

Desta forma a equação da assíntota não vertical do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, é:

$$y = 2x + \frac{5}{4}$$