

Exame final nacional de Matemática A (2025, Época especial)

Proposta de resolução



1. Calculando o limite de cada uma das sucessões, temos:

- $\lim \frac{2 - n^2}{n} = \lim \frac{2 - n^2}{\frac{n}{n}} = \lim \frac{2 - n^2}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{0 - n}{1} = \lim(-n) = -\infty;$
- $\lim(-2)^n = \begin{cases} \lim(-2^n); n \text{ ímpar} \\ \lim 2^n; n \text{ npar} \end{cases} = \begin{cases} -\infty; n \text{ ímpar} \\ +\infty; n \text{ npar} \end{cases};$
- $\lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \begin{cases} \lim\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right); n \text{ ímpar} \\ \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n; n \text{ npar} \end{cases} = \begin{cases} 0^-; n \text{ ímpar} \\ 0^+; n \text{ npar} \end{cases} = 0;$
- $\lim(2n + 3) = 2(+\infty) + 3 = +\infty$

Resposta: **Opção C**

2. De acordo com o enunciado, temos que:

- $a_{10} - a_4 = 3$
- $a_4 \times a_{10} = 40$

Assim, resolvendo o sistema seguinte, usando a definição de progressão aritmética ($a_{10} = a_4 + 6r$), determinamos o valor do primeiro termo (a_1) e da razão (r) da progressão:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{10} - a_4 = 3 \\ a_4 \times a_{10} = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_4 + 6r - a_4 = 3 \\ a_4 \times (a_4 + 6r) = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6r = 3 \\ a_4^2 + a_4 \times 6r = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{6} \\ a_4^2 + a_4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a_4^2 + 3a_4 - 40 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a_4 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ a_4 = 5 \vee a_4 = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Como (a_n) é uma sucessão de termos positivos $a_4 = 5$, pelo que o primeiro termo é:

$$a_1 = a_4 - 3r = 5 - 3 \times \frac{1}{2} = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

Assim, calculamos a ordem, k , do termo 173, resolvendo a equação:

$$a_1 + (k-1) \times r = 173 \Leftrightarrow \frac{7}{2} + (k-1) \times \frac{1}{2} = 173 \Leftrightarrow \frac{7+k-1}{2} = 173 \Leftrightarrow 6+k = 346 \Leftrightarrow k = 346-6 \Leftrightarrow k = 340$$

3.

3.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x + 3 + \ln((1-x)^3)\right)' = (2x)' + (3)' + \left(\ln((1-x)^3)\right)' = 2 + 0 + \frac{((1-x)^3)'}{(1-x)^3} = \\ &= 2 + \frac{3(1-x)^2(1-x)'}{(1-x)^3} = 2 - \frac{3((1-x)')}{1-x} = 2 + \frac{3(0-1)}{1-x} = 2 - \frac{3}{1-x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{1-x} = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{3}{1-x} \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} 2(1-x) = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 - 2x = 3 \Leftrightarrow -2x = 3 - 2 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada no domínio da função e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1
f'	+	0	-	n.d.
f		↗	Máx.	↘
				n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$;
- tem um extremo relativo em $x = -\frac{1}{2}$.



3.2. Como a função g resulta de operações entre funções contínuas, em $] - \infty, 1[$ é contínua, pelo que a única reta que pode ser uma assíntota vertical (paralela ao eixo das ordenadas) do gráfico de g é a reta de equação $x = 1$.

Calculando $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3 + \ln((1-x)^3)}{x-1} = \frac{2(1^-) + 3 + \ln((1-1^-)^3)}{1^- - 1} = \\ &= \frac{2 + 3 + \ln 0^+}{0^-} = \frac{5 + (-\infty)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

Logo a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de g , sendo a única paralela ao eixo das ordenadas.

Averiguando se existem assíntotas horizontais (paralelas ao eixo das abcissas) do gráfico de g , temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3 + \ln((1-x)^3)}{x-1} = \frac{2(-\infty) + 3 + \ln((1-(-\infty))^3)}{-\infty - 1} = \frac{-\infty + \infty}{-\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3 + \ln((1-x)^3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{x-1} + \frac{\ln((1-x)^3)}{x-1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln((1-x)^3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln((1-x)^3)}{x-1} = 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln((1-x)^3)}{-(1-x)} = \\ &\text{(considerando } y = 1-x, \text{ temos que se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } y \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

$$= 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^3)}{-y} = 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln y}{-y} = 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-3 \times \frac{\ln y}{y} \right) = 2 - 3 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - 3 \times 0 = 2$$

Assim, como $D_g =] - \infty, 1[$, temos que a reta de equação $y = 2$ é a única assíntota do gráfico de g paralela ao eixo das abcissas.

3.3. Temos que:

$$g(0) = \frac{f(0)}{0-1} = \frac{2(0) + 3 + \ln((1-0)^3)}{-1} = \frac{0 + 3 + \ln(1^3)}{-1} = \frac{3+0}{-1} = -3$$

Assim temos que:

- a função f é contínua em $] - \infty, [$, porque resulta de operações entre funções contínuas neste intervalo, também é em $[-6, -5]$;

- $f(-6) < -3 < f(-5)$;

pelo que podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in] - 6, -5[$ tal que $f(c) = -3$, ou seja, que a equação $f(x) = -3 \Leftrightarrow f(x) = g(0)$, tem, pelo menos, uma solução em $] - 6, -5[$, isto é, a equação é possível neste intervalo.

C.A.

$$f(-6) = 2(-6) + 3 + \ln((1-(-6))^3) \approx -3,16$$

$$f(-5) = 2(-5) + 3 + \ln((1-(-5))^3) \approx -1,62$$



4. Considerando d , a abscissa do ponto D , temos que:

- $\overrightarrow{DC} = C - D = (0,8) - (d,0) = (-d,8)$;
- $\overrightarrow{DB} = B - D = (15,8) - (d,0) = (15 - d,8)$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = (-d,8) \cdot (15 - d,8) = -d(15 - d) + 8 \times 8 = -15d + d^2 + 64$

Logo, determinando o valor de d , recorrendo ao produto escalar, vem:

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 50 \Leftrightarrow d^2 - 15d + 64 = 50 \Leftrightarrow d = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(64)}}{2(1)} \Leftrightarrow d = 1 \vee d = 14$$

Como $\overline{OD} < \overline{DA}$, então $d = 1$, pelo que as coordenadas do ponto D , são $(1,0)$.

5. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores da distância percorrida, em quilómetros (as abcissas dos pontos do gráfico), e noutra lista os valores da energia gasta, em quilocalorias (os ordenadas dos pontos), e calculando as medidas estatísticas referentes às duas listas, obtemos os valores da média das distâncias percorridas (\bar{x}_d), e da mediana das quilocalorias gastas (\tilde{x}_e):

$$\bar{x}_d \approx 7,5 \text{ e } \tilde{x}_e = 515;$$

Com os dados das duas listas, podemos calcular o valor do coeficiente de correlação linear, cujo arredondamento às centésimas, é $r \approx 0,99$, o que significa que a correlação entre as duas variáveis é positiva forte.

Usando a regressão linear anterior, representando a reta de regressão e usando-a para obter uma estimativa da energia gasta num treino em que se percorra 6 quilómetros, ou seja calculando a ordenada do ponto da reta que tem abscissa 6, obtemos o valor 411 quilocalorias.

Logo, as correspondências corretas são:

- I \rightarrow a)
- II \rightarrow b)
- III \rightarrow c)
- IV \rightarrow b)

6.

6.1. Sobre um ponto da reta CD sabemos que:

- pertence ao plano que contém a base $[ABCD]$, e este é definido pela equação $x = 3$, então, como qualquer ponto desta reta, tem abscissa 3;
- pertence ao plano CDE , pelo que verifica a equação $5y + 2z - 62 = 0$.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única que representa um ponto que verifica cumulativamente as duas condições é $(3,4,21)$, porque a abscissa é 3 e $5(4) + 2(21) - 62 = 0$.

Resposta: **Opção A**



6.2. Como a reta EF é perpendicular ao plano CDE o vetor normal do plano, $\vec{v}(0,5,2)$, também é um vetor diretor da reta, e uma equação da reta EF é:

$$(x,y,z) = (-9,0,2) + k(0,5,2), k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $(-9,5k,2+2k)$, $k \in \mathbb{R}$

Como o ponto F é a interseção da reta EF com o plano CDE , substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta EF na equação do plano CDE , obtemos o valor de k , correspondente ao ponto F :

$$5(5k) + 2(2+2k) - 62 = 0 \Leftrightarrow 25k + 4 + 4k - 62 = 0 \Leftrightarrow 29k = 62 - 4 \Leftrightarrow k = \frac{58}{29} \Leftrightarrow k = 2$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto F são $(-9,5(2),2+2(2)) = (-9,10,6)$, e o comprimento da aresta da base é:

$$\overline{EF} = \sqrt{(-9 - (-9))^2 + (10 - 0)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{0 + 100 + 16} = \sqrt{116}$$

Como os planos que contêm as bases do prisma são paralelos. Como a base $[ABCD]$ está contida no plano de equação $x = 3$ e o ponto F tem abscissa -9 , então a base $[EFGH]$ está contida no plano de equação $x = -9$, pelo que a altura do prisma é:

$$\overline{AF} = 3 - (-9) = 12$$

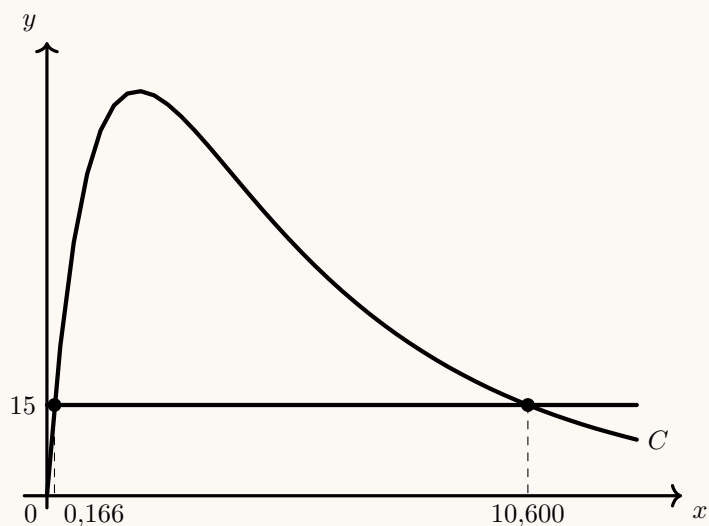
E assim temos que o volume do prisma é:

$$V = \overline{EF}^2 \times \overline{AF} = \sqrt{116}^2 \times 12 = 1392$$

7. Como a concentração de paracetamol tem de ser superior a 15 miligramas por litro de sangue para produzir efeito terapêutico significativo, a duração do efeito é a amplitude do intervalo que é solução da condição

$$C(t) > 15$$

Assim, inserimos na calculadora gráfica a expressão da função C , e função cujo gráfico é a reta horizontal de equação $y = 15$ e visualizamos os gráficos das funções reproduzidos na figura ao lado. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) das abscissas dos pontos de interseção das duas funções, a que correspondem os instantes em que a concentração aumenta para valores superiores a 15 mg/l ($t_1 \approx 0,166$) e depois em que baixa deste valor ($t_2 \approx 10,600$).



Assim, concluímos que o medicamento é eficaz no intervalo de tempo $]0,166 ; 10,600[$, ou seja, durante:

$$10,600 - 0,166 = 10,434 \text{ horas}$$

Como 0,434 horas correspondem a $60 \times 0,434 \approx 26$ minutos, concluímos que o paracetamol produz efeito terapêutico significativo durante 10 horas e 26 minutos.



8.

8.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um um aluno presente na assembleia, e os acontecimentos:

D : «Ser do 12.º ano»

A : «Frequentar a disciplina de Matemática A»

Temos que

$$P(\overline{D} \cup \overline{A}) = \frac{9}{11} \Leftrightarrow P(\overline{D \cap A}) = \frac{9}{11} \Leftrightarrow 1 - P(D \cap A) = \frac{9}{11} \Leftrightarrow -P(D \cap A) = \frac{9}{11} - 1 \Leftrightarrow P(D \cap A) = \frac{2}{11}$$

Designado por a o número de o número de alunos presentes na assembleia, sabemos que

$$P(D \cap A) = \frac{10}{a}$$

Logo determinando o valor de a , temos:

$$\frac{2}{11} = \frac{10}{a} \Leftrightarrow a = \frac{10 \times 11}{2} \Leftrightarrow a = 55$$

8.2. Como existem 25 alunos do 12.º ano na assembleia e se pretende escolher ao acaso, um conjunto de 3, o número de conjuntos diferentes que é possível escolher (sem considerar a ordem relevante), é ${}^{25}C_3$.

Como se pretende que destes 25 alunos, pelo menos um frequente a disciplina de Matemática A, o número de conjuntos de 3 alunos que verifica esta condição pode ser determinado pela diferença entre o números total de conjuntos de 3 alunos do 12.º ano e o número de conjuntos formado unicamente por alunos que não frequentam a disciplina ($25 - 10 = 15$ alunos). Ou seja, ${}^{25}C_3 - {}^{15}C_3$.

Assim, a probabilidade de selecionar um grupo de 3 alunos do 12.º ano, em que pelo menos um frequenta a disciplina de Matemática A, é:

$$\frac{{}^{25}C_3 - {}^{15}C_3}{{}^{25}C_3} = \frac{369}{460}$$

Resposta: **Opção C**

9. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar ao acaso, um dos alunos do 11.º ano desta escola, e os acontecimentos:

F : «O aluno frequenta a disciplina de Filosofia»

E : «O aluno frequenta a disciplina de Economia A»

Sabemos que:

- $P(F) = 2P(E) \Leftrightarrow P(E) = \frac{1}{2}P(F)$;
- $P(F \cup E) = 3P(F \cap E)$.

Assim:

- $P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E) \Leftrightarrow 3P(F \cap E) = P(F) + \frac{1}{2}P(F) - P(F \cap E) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3P(F \cap E) + P(F \cap E) = \frac{2}{2}P(F) + \frac{1}{2}P(F) \Leftrightarrow 4P(F \cap E) = \frac{3}{2}P(F) \Leftrightarrow P(F \cap E) = \frac{3}{8}P(F)$
- $P(\overline{E} \cap F) = P(F) - P(F \cap E) = P(F) - \frac{3}{8}P(F) = \frac{8}{8}P(F) - \frac{3}{8}P(F) = \frac{5}{8}P(F)$

Logo, a probabilidade do aluno escolhido ao não frequentar a disciplina de Economia A, sabendo-se que frequenta a disciplina de Filosofia, é:

$$P(\overline{E}|A) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{8}P(F)}{P(F)} = \frac{5}{8}$$



10. As coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g são as soluções da equação $f(x) = g(x)$. Assim resolvendo a equação temos:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \text{sen}^3 x = \text{sen} x \cos^2 x \Leftrightarrow \frac{\text{sen}^3 x}{\text{sen} x \neq 0} = \cos^2 x \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \text{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \text{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $x \in]0, \pi[$, a equação $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ é impossível, pelo que as soluções da equação são:

$$\text{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \text{sen} x = \text{sen} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$




Como $x \in]0, \pi[$, a equação tem duas soluções (para $k = 0$), nomeadamente $x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, pelo que as ordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos são:

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}^3 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
- $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen}^3 \frac{3\pi}{4} = \text{sen}^3 \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Logo as coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g são $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

11. Temos que:

- Como $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$ e $f''(x)$ tem exatamente dois zeros, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$		3	$+\infty$	
f''		-	0	+	0	+
f			Pt. I.			

Desta forma como em $x = 3$ não existe variação do sinal de f'' , então não existe um ponto de inflexão no gráfico de f com abcissa 3, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

- Como no intervalo $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$, $f''(x) < 0$, então a função f' é decrescente neste intervalo. Assim como $-2 < -1$, $f'(-2) > f'(-1)$, ou seja o declive da reta r é maior que o declive da reta s , pelo que a afirmação **II.** é falsa.

12.

12.1. Como $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$, e considerando $|w| = \rho$, temos que:

$$\frac{i^{23} \times w^2}{\bar{w}} = \frac{-i \times w^2 \times w}{\bar{w} \times w} = \frac{-i \times w^3}{\bar{w} \times w} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}} \times (\rho e^{i\theta})^3}{\rho e^{i(-\theta)} \times \rho e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}} \times \rho^3 e^{i3\theta}}{\rho^2 e^{i(-\theta)+\theta}} = \frac{\rho^3 e^{i(\frac{3\pi}{2}+3\theta)}}{\rho^2 e^{i \times 0}} = \rho e^{i(\frac{3\pi}{2}+3\theta)}$$

$$\text{Ou seja, } \text{Arg}\left(\frac{i^{23} \times w^2}{\bar{w}}\right) = 3\theta + \frac{3\pi}{2}.$$

Resposta: **Opção D**



12.2. Escrevendo $1 - i$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta > 0$, θ é um ângulo do 4.º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Assim $1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$.

Resolvendo a equação, vem:

$$\begin{aligned} (1-i)z^3 - 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &= 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)z^3 - 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)z^3 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^3 &= \frac{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}} \Leftrightarrow z^3 = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}))} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt[3]{8e^{i\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}} \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

Assim, os três números complexos que são solução da equação, são:

- ($k = 0$) $\rightarrow 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
- ($k = 1$) $\rightarrow 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- ($k = 2$) $\rightarrow 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Como w é uma das soluções da equação e $\operatorname{Arg} w \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, então $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Escrevendo w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

13. Para estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico, começamos por estudar o sinal de g'' :

- $g'(x) = ([f(x)]^2)' = 2 \times f(x) \times f'(x)$
- $g''(x) = (g'(x))' = (2 \times f(x) \times f'(x))' = 2(f(x) \times f'(x))' = 2(f'(x) \times f'(x) + f(x) \times (f'(x))') = 2((f'(x))^2 + f(x)f''(x))$

Assim, temos que:

- $2 > 0$
- $(f'(x))^2 > 0$ para $x \in \mathbb{R}$ porque $f'(x)$ é um número real e não se anula;
- $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$ porque f é positiva;
- $f''(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}$ porque o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Logo podemos concluir que $g''(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$ (porque g'' resulta de somas e produtos de funções positivas ou não negativas), ou seja, o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima.

