

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2.ª FASE – 22 DE JULHO DE 2026**

1.

Como $\log_a(b^2) = 16 \Leftrightarrow 2 \log_a b = 16 \Leftrightarrow \log_a b = 8$

Então $\log_a\left(\frac{a}{b}\right) = \log_a a - \log_a b = 1 - 8 = -7$

Resposta correta: (A)

2.

2.1. Para estudarmos a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, determinemos a expressão analítica da segunda derivada da função f :

$$f''(x) = \left(\frac{1 + 2\ln x}{x}\right)' = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times x - (1 + 2\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{2 - 1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{1 - 2\ln x}{x^2}$$

Procuremos os zeros da segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \\ &= e^{\frac{1}{2}} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \wedge x \neq 0 \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, então $x = \sqrt{e}$.

Tendo em conta que o sinal de $f''(x)$ é o sinal de $1 - 2\ln x$ pois $x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$; estudando a variação do sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido da concavidade do gráfico da função, obtem-se:

	0		$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1 - 2\ln x$	n.d	+	0	–
x^2	n.d	+	+	+
Sinal de f''	n.d	+	0	–
Sentido de concavidade do gráfico de f	n.d	∪	P.I.	∩

Concluimos, pela análise da tabela, que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]0; \sqrt{e}]$, tem a concavidade voltada para baixo em $[\sqrt{e}; +\infty[$ e admite um ponto de inflexão no ponto de abcissa $\sqrt{e}$.

2.2.

Para determinarmos a área do triângulo $[AOB]$, e tendo em conta que $A(e, 2)$, temos que conhecer as coordenadas do ponto B .

Ora, como r é a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa e e temos que o declive da reta r (m_r) é igual a:

$$m_r = f'(e) = \frac{1+2\ln e}{e} = \frac{3}{e}$$

Sendo a reta s perpendicular à reta r , temos que o seu declive (m_s) é igual a $-\frac{e}{3}$.

Assim uma equação que define a reta s é: $y = -\frac{e}{3}x + b$

Como o ponto de coordenadas $(-3, 0)$ pertence à reta s , temos que

$$0 = -\frac{e}{3} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = -e$$

$$s: y = -\frac{e}{3}x - e$$

Sendo B o ponto de interseção da reta s com o eixo O_y , concluímos que B tem de coordenadas $(0, -e)$.

$$\text{Assim, } A_{[AOB]} = \frac{x_A \times \overline{OB}}{2} = \frac{e \times e}{2} = \frac{e^2}{2}.$$

3. (AE 2018)

Sabemos que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4$.

Pretende-se determinar $P(A \cup B)$.

Pelas leis de De Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

Logo, $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$.

Como $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

Temos $P(A \cup B) = 1 - 0,4 = 0,6$

Resposta correta: (B)

3. (AE 2023)

Sabemos que o preço X de uma refeição segue uma distribuição normal, com média 7 euros, e

$P(X > 9) = 0,12$.

Pretende-se calcular $P(7 < X < 9)$.

A distribuição normal é simétrica em relação à média. Como a média é 7 euros, metade dos valores são maiores do que 7 e metade dos valores são menores do que 7, logo $P(X > 7) = 0,5$.

Como $P(X > 7) = P(7 < X < 9) + P(X > 9)$

Então:

$$0,5 = P(7 < X < 9) + 0,12 \Leftrightarrow P(7 < X < 9) = 0,5 - 0,12 \Leftrightarrow P(7 < X < 9) = 0,38$$

Ou seja: $P(7 < X < 9) = 38\%$

Resposta correta: (B)

4.

Na tabela seguinte, apresentam-se as percentagens da despesa anual média associada à habitação e à alimentação de seis anos.

Ano	Habitação, x (%)	Alimentação, y (%)
1989/1990	12,4	29,5
1994/1995	20,6	21,0
2005/2006	26,6	15,5
2010/2011	29,2	13,3
2015/2016	31,9	14,3
2022/2023	39,0	12,9

a) Usando a calculadora gráfica, determinamos os desvios-padrão populacionais, obtendo os seguintes valores:

Para a habitação: $\sigma_x \approx 8,43$ pontos percentuais.

Para a alimentação: $\sigma_y \approx 5,90$ pontos percentuais.

Como $8,43 > 5,90$, as percentagens da despesa em habitação apresentam maior dispersão do que as percentagens da despesa em alimentação. Assim, a resposta correta para **(a)** é a **(3)**.

b) Em 2022/2023, a alimentação correspondeu a 12,9% da despesa total e teve o valor de 3121 euros. Calculamos a despesa total:

$$0,129 \times T = 3121 \Leftrightarrow T = 3121 \div 0,129, \text{ ou seja } T \approx 24\,193,80 \text{ €}$$

Calculamos 39,0% da despesa total, pois essa é a percentagem da habitação, arredondada às unidades.

$$H = 0,39 \times 24\,193,80 \approx 9435,58 \text{ €} \approx 9435 \text{ €}$$

Assim, a resposta correta para **(b)** é a **(3)**.

c) Calculamos o coeficiente de correlação linear, usando a calculadora gráfica, arredondado às centésimas:

$$r \approx -0,93$$

Assim, a resposta correta para **(c)** é a **(1)**.

d) Pretende-se estimar a percentagem da despesa em alimentação, y , quando a percentagem da despesa em habitação é $x = 19,8\%$.

A reta de regressão de y em função de x , usando os dados da tabela e arredondando os parâmetros às milésimas, é:

$$y = -0,648x + 35,006$$

Substituímos x por 19,8:

$$y = -0,648 \times 19,8 + 35,006 \Leftrightarrow y = -12,8304 + 35,006 = 22,1756 \approx 22,2\%$$

Assim, a resposta correta para **(d)** é a **(2)**.

5.

Os números pretendidos deverão terminar em 0 ou 5 para serem múltiplos de 5. Sendo maiores do que 50 000 deverão iniciar-se em 5, 6, 7, 8, ou 9.

Se terminarem em 0, podem iniciar-se em 5, 6, 7, 8, ou 9, o que corresponde a $5 \times {}^8A_3 = 1680$ números diferentes.

Se terminarem em 5, podem iniciar-se em 6, 7, 8 ou 9, o que corresponde a $4 \times {}^8A_3 = 1344$ números diferentes.

Assim sendo, o número total de números naturais com cinco algarismos diferentes, múltiplos de 5 e maiores do que 50 000, é igual a $1680 + 1344 = 3024$.

6.

Sejam M : “sair um cartão com um número múltiplo de 3” e P : “sair um cartão com um número par”.

Tem-se que:

$$P(M) = 0,625 \text{ e } P(P|\bar{M}) = \frac{1}{3}$$

Como

$$\begin{aligned} P(P|\bar{M}) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{P(P \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(P \cap \bar{M}) = \frac{1}{3} \times P(\bar{M}) \Leftrightarrow P(P \cap \bar{M}) = \frac{1}{3} \times (1 - P(M)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(P \cap \bar{M}) = \frac{1}{3} \times 0,375 \Leftrightarrow P(P \cap \bar{M}) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$P(\bar{P} \cup M) = 1 - P(\overline{\bar{P} \cup M}) = 1 - P(P \cap \bar{M}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

7. (AE 2018)

Tem-se que $u_n = \frac{3n+5}{n+2}$

Estudamos o sinal de $u_{n+1} - u_n$ para concluir sobre o tipo de monotonia de (u_n) .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)+5}{n+1+2} - \frac{3n+5}{n+2} = \frac{3n+8}{n+3} - \frac{3n+5}{n+2} = \\ &= \frac{3n^2+8n+6n+16-3n^2-5n-9n-15}{(n+2).(n+3)} = \frac{1}{(n+2).(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Conclui-se assim que (u_n) é monótona crescente.

7. (AE 2023)

Sabe-se que $f(x) = x^2 e^x - \frac{1}{2}$ e, sendo assim, $f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$

Pelo método de Newton-Raphson, sendo $x_0 = -1$, a aproximação do zero de f após a primeira iteração, x_1 , é dada por:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} \Leftrightarrow x_1 = -1 - \frac{e^{-1} - \frac{1}{2}}{-e^{-1}} = -\frac{e}{2} \approx -1,359141$$

Como tal, o resultado arredondado às milésimas é $-1,359$.

8.1.

A opção (A) não é a correta, porque $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} > 0$, pois o ângulo formado pelos dois vetores é agudo e não obtuso.

A opção (B) é a correta, porque $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, pois $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{AD}$.

A opção (C) não é a correta, porque $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} \neq 0$, dado que, os dois vetores não são perpendiculares.

A opção (D) não é a correta, porque $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, uma vez que $\overrightarrow{FC} \perp \overrightarrow{AD}$.

Resposta correta: (B)

8.2.

O volume V de um cubo é determinado por $V = a^3$, onde a representa a medida do comprimento da aresta do cubo.

Como uma face do cubo está contida no plano BCF e o ponto A pertence à face oposta, a distância entre A e o plano BCF coincide com o comprimento da aresta do cubo ($a = \overline{AB}$).

O plano BCF é dado por $-3x + 6y - 2z + 14 = 0$, pelo que um vetor normal do plano é $\vec{n}(-3, 6, -2)$

Uma equação da reta que contém o ponto A e é perpendicular a BCF é:

$$(x, y, z) = (-3, 5, 2) + k(-3, 6, -2), k \in \mathbb{R}$$

Portanto, um ponto genérico da reta tem coordenadas $(-3 - 3k, 5 + 6k, 2 - 2k)$, $k \in \mathbb{R}$

Determinamos o ponto do plano pertencente à reta, ou seja, o ponto B :

$$\begin{aligned} -3(-3 - 3k) + 6(5 + 6k) - 2(2 - 2k) + 14 &= 0 \Leftrightarrow 9 + 9k + 30k + 36k - 4 + 4k + 14 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 49k = -49 \Leftrightarrow k = -1 \end{aligned}$$

Como $k = -1$, o ponto B tem de coordenadas $(0, -1, 4)$.

Calculamos a aresta, ou seja, a distância entre A a B .

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (5 - (-1))^2 + (2 - 4)^2} = 7$$

Assim, o volume do cubo é $7^3 = 343$

9.

A reta AD é paralela à reta BC , uma vez que $[ABCD]$ é um retângulo. Logo as retas têm o mesmo declive.

Uma equação da reta AD , é da forma $y = -2x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Uma vez que a reta AD contém o ponto A de coordenadas $(2, 0)$, obtemos:

$$0 = -2 \times 2 + b, \text{ isto é, } b = 4.$$

Consequentemente o ponto D tem coordenadas $(0, 4)$, visto ser a interseção da reta AD , com o eixo das ordenadas.

A reta AD é perpendicular à reta DC , uma vez que $[ABCD]$, é um retângulo.

Tendo em conta a relação entre os declives de retas perpendiculares, o declive da reta DC é $\frac{1}{2}$.

Assim, a reta DC tem equação $y = \frac{1}{2}x + 4$.

O ponto C é a interseção das retas DC e BC .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = -2x + 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5 = \frac{1}{2}x + 4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - \frac{1}{2}x = -5 + 4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2}x = -1 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -2 \times \frac{2}{5} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{21}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

O ponto C tem coordenadas $\left(\frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

10.

A afirmação I é falsa, pois, se a derivada de f é negativa para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então f é monótona decrescente. Em particular, $f(1) < f(0)$, ou seja, $f(1) < 2$.

A afirmação II também é falsa, porque o domínio de $\frac{1}{f}$ seria $\mathbb{R}$ apenas se a função f não tivesse zeros, o que não ocorre. Como a função f é contínua em $[1, 2]$, por ser contínua em $\mathbb{R}$, e $f(1) \times f(2) < 0$, o teorema de Bolzano garante que f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 2[$, o que impossibilita que o domínio de $\frac{1}{f}$ seja $\mathbb{R}$.

11.

Seja $z = e^{i\theta} \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sendo $\arg(z) = \theta$.

Ao multiplicarmos o número complexo z por i , o seu afixo é transformado por uma rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ de centro na origem do plano complexo.

Podemos afirmar que $\arg(iz) = \theta + \frac{\pi}{2}$.

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, conclui-se que $0 + \frac{\pi}{2} < \theta + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta + \frac{\pi}{2} < \pi$.

Assim $\frac{\pi}{2} < \arg(iz) < \pi$, isto é $\arg(iz) \in 2.^{\circ}Q$.

Conclui-se então que o ponto que corresponde ao afixo do número complexo z é o ponto B .

Resposta correta: (B)

12.

Consideremos o número complexo z escrito na forma algébrica $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $Re(z) + Im(z) = 0 \Leftrightarrow Im(z) = -Re(z) \Leftrightarrow b = -a$.

Podemos escrever $z = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}$.

Tem-se $z = \frac{w}{3-4i} \Leftrightarrow w = z \times (3-4i) \Leftrightarrow w = (a-ai)(3-4i) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow w = 3a - 4ai - 3ai + 4ai^2 \Leftrightarrow w = 3a - 7ai - 4a \Leftrightarrow w = -a - 7ai$$

Logo: $|w| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-a)^2 + (-7a)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{50a^2} = 5 \Leftrightarrow 50a^2 = 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $w = -a - 7ai \wedge Re(w) < 0$, logo $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e então, na forma algébrica:

$$w = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2}i.$$

13. (AE 2018)

Pretende-se determinar o menor valor de a , para o qual a função f , de domínio $[0, a]$, definida por $f(x) = \sin(2x) + \cos x$ tem, exatamente, vinte zeros.

Começa-se por determinar o número de zeros da função f no intervalo $[0, 2\pi[$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

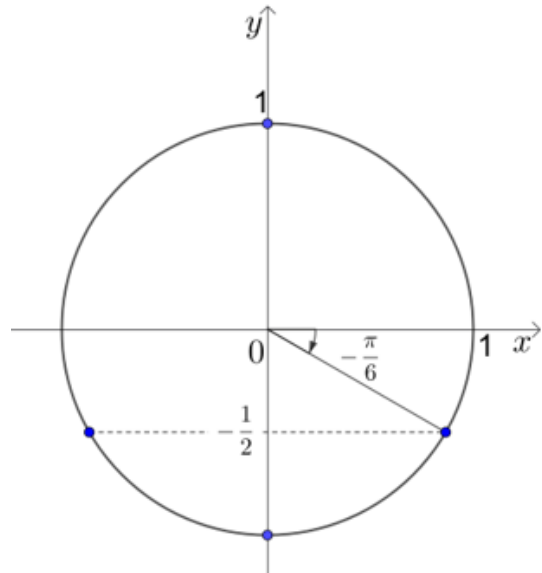
$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

Verifica-se que no intervalo $[0, 2\pi[$ a função f tem, exatamente, quatro zeros, sendo $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ o maior desses zeros.

Como $5 \times 2\pi = 10\pi$, no intervalo $[0, 10\pi[$, a função f tem, exatamente, vinte zeros, sendo o maior desses zeros $10\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{59\pi}{6}$.

Portanto, conclui-se que o menor valor de a é $\frac{59\pi}{6}$.



13. (AE 2023)

Sabe-se que $\overline{PR} = \overline{PQ}$, $\overline{PB} = 6$ e $\overline{QR} = 6\sqrt{6}$

Como o ponto B é o baricentro do triângulo $[PQR]$, tem-se,

$$\overline{PB} = \frac{2}{3} \overline{PS} \Leftrightarrow 6 = \frac{2}{3} \overline{PS} \Leftrightarrow \overline{PS} = 9$$

O ponto C é o circuncentro do triângulo $[PQR]$, pelo que $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR}$.

Tem-se ainda que $\overline{CP} = \overline{PS} - \overline{CS} = 9 - \overline{CS}$, portanto $\overline{CR} = 9 - \overline{CS}$.

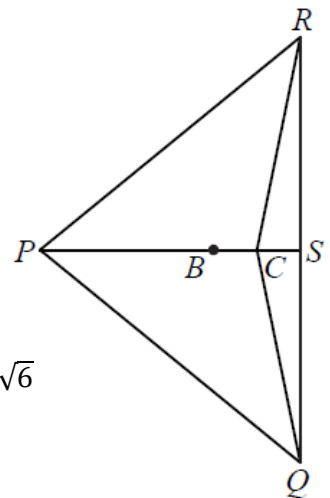
O ponto S é o ponto médio do segmento de reta $[RQ]$, pelo que $\overline{SR} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$

Assim, tem-se:

$$(9 - \overline{CS})^2 = \overline{CS}^2 + (3\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow 81 - 18\overline{CS} + \overline{CS}^2 = \overline{CS}^2 + 54$$

$$\Leftrightarrow 18\overline{CS} = 27$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{3}{2}$$



14.

A distância, d , entre os pontos A e B pela superfície do cone, é dada

pela expressão $d(x) = \frac{2r}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, com $x \in]0,1[$

Pretende-se determinar o valor de x para o qual a distância entre os pontos A e B , pela superfície do cone, excede em 40% o comprimento do diâmetro da base do cone.

Assim, tem-se,

$$d(x) = 2r + 0,4 \times 2r \Leftrightarrow d(x) = 1,4 \times 2r$$

$$\Leftrightarrow \frac{2r}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1,4 \times 2r$$

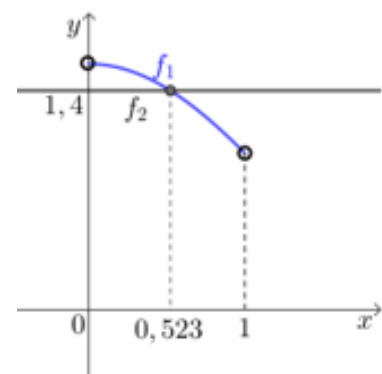
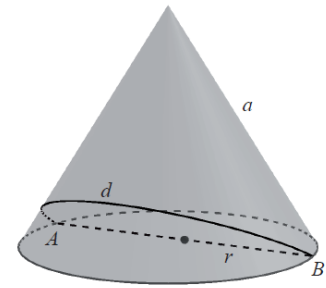
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1,4$$

Recorrendo à calculadora e considerando

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ e } f_2(x) = 1,4,$$

determinam-se as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das funções f_1 e f_2 .

O valor de x é, aproximadamente, 0,523



15.

A reta de equação $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 2$$

Assim, o declive da assíntota ao gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$, é:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \frac{x+e^x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e^x}{xe^x} = -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{xe^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{xe^x} = \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = -1 + 0 + 0 = -1 \end{aligned}$$

A ordenada na origem é:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{x+e^x}{e^x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e^x}{e^x} = \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 2 + \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} + 1 = 3 + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $y = -x + 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g , quando $x \rightarrow +\infty$.

16.

Os triângulos $[COD]$ e $[CAB]$ são semelhantes, pois têm dois ângulos iguais, o ângulo ACB que é comum aos dois triângulos e os ângulos COD e CAB são iguais por serem de lados paralelos e ambos obtusos.

Assim, como o triângulo $[COD]$ é isósceles, dado que $\overline{OC} = \overline{OD} = 1$, o triângulo $[CAB]$ também é isósceles. Então,

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{OC} + \overline{OA} = 1 + \overline{OA}.$$

Como $\cos \alpha = \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$, tem-se que:

$$\overline{AB} = 1 + \overline{OA} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ como queríamos mostrar.}$$

FIM