MATILDE ALMEIDA | DIANA BARROCA | FILIPE GALEGO | JOÃO MARQUES | JOÃO TERROSO | SANDRA TEIXEIRA

RESOLUÇÕES – Caderno de atividades

FICHA 1 – MODELOS MATEMÁTICOS NAS ELEIÇÕES

1.

1.1. O número de votos validamente expressos nesta eleição foi:

$$n.º\ de\ votos\ validamente\ expressos = 134 + 231 + 407 + 59 = 831$$

Logo, a percentagem de votos validamente expressos de cada candidato foi:

$$Percentagem\ candidato\ A = \frac{134}{831} \times 100 \approx 16\%$$

$$Percentagem\ candidato\ B = \frac{231}{831} \times 100 \approx 28\%$$

$$Percentagem\ candidato\ C = \frac{407}{831} \times 100 \approx 49\%$$

$$Percentagem\ candidato\ D = \frac{59}{831} \times 100 \approx 7\%$$

1.2. O vencedor desta eleição foi o candidato C. Foi considerado vencedor por maioria simples, pois não registou mais de 50% dos votos validamente expressos.

2.

2.1. Tendo em conta que foram registados 900 votos validamente expressos, então o número de votos na candidata Luísa Poluidora foi:

$$N.º\ de\ votos\ Luísa\ Poluidora = 900 - (543 + 235) = 122$$

A Luísa Poluidora obteve 122 votos nesta eleição.

2.2. Tendo em conta os resultados registados, podemos verificar que a vencedora foi a Joana Ambiente.

Para obter maioria absoluta, um candidato deveria obter mais de 50% dos votos validamente expressos, ou seja:

$$N.º\ de\ votos\ necessários\ para\ maioria\ absoluta = \frac{900}{2} + 1 = 451$$

Logo, Joana Ambiente venceu estas eleições com maioria absoluta dos votos.

2.3. Tendo em conta que foram registados 302 votos em branco na primeira contagem de votos, então Luísa Pouco Poluidora conseguiu convencer 50% destes 302 eleitores. Ou seja:

$$N.º\ de\ eleitores\ convencidos = 0{,}5 \times 302 = 151\ eleitores$$

Fazendo uma recontagem e apuração dos votos, temos que:

$$N.º\ de\ votos\ Joana\ Ambiente = 543 \qquad N.º\ de\ votos\ Leonardo\ Reciclagem = 235$$

$$N.º\ de\ votos\ Luísa\ Pouco\ Poluídora = 122 + 151 = 273$$

Podemos então verificar que, mesmo com a conquista de mais votantes, a eleição mantém a Joana Ambiente como vencedora por maioria absoluta (para obter maioria absoluta, um candidato necessitaria de obter 529 votos validamente expressos).

3.

3.1. Os boletins de voto recolhidos permitem organizar os dados numa tabela de preferências semelhante à seguinte:

1.ª Preferência	*The Blaze*	*Foals*	*Roosevelt*
2.ª Preferência	*Foals*	*Parcels*	*The Blaze*
3.ª Preferência	*Parcels*	*Roosevelt*	*Foals*
4.ª Preferência	*Roosevelt*	*Tha Blaze*	*Parcels*
N.º de votos	2	3	2

3.2. Pontuando cada uma das bandas de acordo com as preferências dos 7 alunos, podemos verificar que:

$$Foals\ \rightarrow 4\times 3+3\times 2+2\times 2+1\times 0=22\ pontos$$
$$Parcels\ \rightarrow 4\times 0+3\times 3+2\times 2+1\times 2=15\ pontos$$
$$The\ Blaze\rightarrow 4\times 2+3\times 2+2\times 0+1\times 3=17\ pontos$$
$$Roosevelt\ \rightarrow 4\times 2+3\times 0+2\times 3+1\times 2=16\ pontos$$

Podemos concluir que a banda vencedora foi *Foals*.

3.3. Fazendo um levantamento do número de primeiras preferências de cada uma das bandas, podemos verificar que:

$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Foals=3$$
$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ The\ Blaze=2$$
$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Roosevelt=2$$
$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Parcels=0$$

Para obter maioria absoluta no conjunto das primeiras preferências, uma das bandas deveria de obter:

$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ maioria\ absoluta=\frac{7+1}{2}=4$$

Como nenhuma das bandas registou 4 primeiras preferências no conjunto dos 7 boletins de voto, então nenhuma alcançou maioria absoluta no conjunto das primeiras preferências.

3.4. Fazendo o devido ajuste nos boletins de votos e na tabela de preferências, temos que:

1.ª Preferência	*The Blaze*	*Parcels*	*Roosevelt*
2.ª Preferência	*Parcels*	*Roosevelt*	*The Blaze*
3.ª Preferência	*Roosevelt*	*Tha Blaze*	*Parcels*
N.º de votos	2	3	2

Realizando a nova apuração de pontos pelas bandas:

$$Parcels \ \rightarrow 3\times 3+2\times 2+1\times 2=15\ pontos$$
$$The\ Blaze \rightarrow 3\times 2+2\times 2+1\times 3=13\ pontos$$
$$Roosevelt \ \rightarrow 3\times 2+2\times 3+1\times 2=14\ pontos$$

Após a retirada de *Foals* da eleição, a banda eleita é *Parcels* com 15 pontos.

4. Consideremos a situação seguinte com 3 candidatos A, B e C e 9 votos validamente expressos

1.ª Preferência	*A*	*B*	*C*
2.ª Preferência	*B*	*C*	*B*
3.ª Preferência	*C*	*A*	*A*
N.º de votos	5	3	1

Para obter maioria absoluta, um dos candidatos terá de obter mais de metade dos votos validamente expressos. Neste caso:

$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ maioria\ absoluta=\frac{9+1}{2}=5$$

Fazendo a apuração das primeiras preferências de cada candidato:

$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ A=5$$
$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ B=2$$
$$N.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ C=2$$

Concluímos que A é o vencedor da eleição por maioria absoluta, com 5 primeiras preferências.

Apurando as pontuações obtidas por cada candidato pelo método de contagem de Borda:

$$A \rightarrow 3 \times 5 + 2 \times 0 + 1 \times (3 + 1) = 19 \, pontos$$
$$B \rightarrow 3 \times 3 + 2 \times (5 + 1) + 1 \times 0 = 21 \, pontos$$
$$C \rightarrow 3 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 5 = 14 \, pontos$$

Aplicando o método de contagem de Borda, o vencedor é o candidato B com 21 pontos.

5.

5.1. A percentagem de votantes que registaram um voto validamente expresso foi:

$$percentagem\ votantes\ com\ v.v.e. = 100\% - 13\% = 87\%$$

Tendo em conta que o número de votantes, x, abrangem os votos validamente expressos e votos brancos ou nulos, podemos então definir a seguinte proporção:

$$\frac{4263}{x} = \frac{87\%}{100\%}$$

Ou seja:

$$x = \frac{4263 \times 100}{87} = 4900$$

Estes 4900 votantes correspondem a 95% dos eleitores, y, inscritos, pois a percentagem de abstenção foi 5%. Definindo uma nova proporção, obtemos:

$$\frac{4900}{y} = \frac{95\%}{100\%}$$
$$y = \frac{4900 \times 100}{95} \approx 5158$$

Nesta eleição estavam inscritos 5158 eleitores, aproximadamente.

5.2. Temos que existiram 4263 votos validamente expressos. Para que um candidato garantisse vitória por maioria absoluta, então teria que registar mais de metade dos votos validamente expressos. Ou seja:

$$N.º\ de\ votos\ para\ maioria\ absoluta = \frac{4263 + 1}{2} = 2132$$

Para vencer por maioria absoluta, um candidato deveria registar, no mínimo, 2132 votos validamente expressos.

6.

6.1. As pontuações obtidas por cada um dos alunos candidatos foram:

$$João \rightarrow 3 \times 10 + 2 \times (4 + 7) + 1 \times (3 + 5) = 60\, pontos$$

$$Sandra \rightarrow 3 \times 4 + 2 \times (10 + 3 + 5) + 1 \times 7 = 55\, pontos$$

$$Teresa \rightarrow 3 \times (3 + 5 + 7) + 2 \times 0 + 1 \times (10 + 4) = 59\, pontos$$

O aluno mais pontuado foi o João. A segunda aluna mais pontuada foi a Teresa. Podemos então concluir que o João foi eleito delegado e a Teresa subdelegada de turma.

6.2. Apurando as pontuações de cada um dos candidatos, tendo em conta a distribuição de pontuações indicada pela professora, temos que:

$$João \rightarrow 6 \times 10 + 4 \times (4 + 7) + 1 \times (3 + 5) = 112\, pontos$$

$$Sandra \rightarrow 6 \times 4 + 4 \times (10 + 3 + 5) + 1 \times 7 = 103\, pontos$$

$$Teresa \rightarrow 6 \times (3 + 5 + 7) + 4 \times 0 + 1 \times (10 + 4) = 104\, pontos$$

Mesmo com a alteração de pontuações, o João mantem-se o aluno mais votado, seguido da Teresa. Logo, o resultado da eleição mantinha-se, pelo que a conjetura da Maria está correta.

FICHA 2 – MODELOS MATEMÁTICOS NA PARTILHA

1.

1.1. Deveremos começar por determinar os quocientes que resultam da divisão do número de votos validamente expressos pelo conjunto de divisores da sequência 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente.

Força Política	PXZ	PXY	PXX
N.º de votos / **Divisores**	390	289	300
1	390,00	289,00	300,00
2	195,00	144,50	150,00
3	130,00	96,33	100,00
4	97,50	72,25	75,00

Logo, atribui-se os 7 mandatos às forças políticas com os 7 maiores quocientes. Ou seja:

Força Política	PXZ	PXY	PXX
N.º de votos / **Divisores**	390	289	300
1	390,00 (1)	289,00 (3)	300,00 (2)
2	195,00 (4)	144,50 (6)	150,00 (5)
3	130,00 (7)	96,33	100,00
4	97,50	72,25	75,00

Podemos concluir que à força política PXZ são atribuídos 3 mandatos e às forças políticas PXY e PXX são atribuídos 2 mandatos a cada uma.

1.2. Começamos por determinar os quocientes que resultam da divisão do número de votos validamente expressos de cada uma das forças políticas por 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente.

	A	B	C	D	E
N.º de votos / Divisores	490	987	678	290	459
1	490,00	987,00	678,00	290,00	459,00
3	163,33	329,00	226,00	96,67	153,00
5	98,00	197,40	135,60	58,00	91,80
7	70,00	141,00	96,86	41,43	65,57

De seguida, atribuímos os 9 mandatos ás listas que registam os 9 maiores quocientes:

Força Política	A	B	C	D	E
N.º de votos / Divisores	490	987	678	290	459
1	490,00 (3)	987,00 (1)	678,00 (2)	290,00 (6)	459,00 (4)
3	163,33 (9)	329,00 (5)	226,00 (7)	96,67	153,00
5	98,00	197,40 (8)	135,60	58,00	91,80
7	70,00	141,00	96,86	41,43	65,57

Assim, a força política A recebe 2 mandatos, a força política B recebe 3 mandatos, a força política C recebe 2 mandatos, a força política D recebe 1 mandato e a força política E recebe 1 mandato.

2.

2.1. Para determinar a diferença na distribuição de convites pelos 4 grupos, de seguida aplicamos ambos os métodos propostos:

- Método 1

Ao dividirmos o número de alunos de cada grupo pela lista de divisores 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente, obtemos os seguintes resultados:

Grupo	B	C	P	R
N.º de alunos / **Divisores**	430	1020	850	200
1	430,0	1020,0	850,0	200,0
2	215,0	510,0	425,0	100,0
3	143,3	340,0	283,3	66,7
4	107,5	255,0	212,5	50,0
5	86,0	204,0	170,0	40,0

Atribui-se então os 10 convites ao grupo que apresentam os 10 maiores termos da série que quocientes obtidos anteriormente:

Grupo	B	C	P	R
N.º de alunos / **Divisores**	430	1020	850	200
1	430,0 (4)	1020,0 (1)	850,0 (2)	200,0
2	215,0 (9)	510,0 (3)	425,0 (5)	100,0
3	143,3	340,0 (6)	283,3 (7)	66,7
4	107,5	255,0 (8)	212,5 (10)	50,0
5	86,0	204,0	170,0	40,0

Pelo método 1, o grupo B iria receber 2 convites, o grupo C iria receber 4 convites, o grupo P iria receber 4 convites e o grupo R não iria receber nenhum convite.

- Método 2

Fazendo os respetivos cálculos para cada grupo tendo em conta atribuição de convites por proporção direta, podemos verificar que:

$$N.º\ de\ convites\ grupo\ B = \frac{430}{2500} \times 10 = 1{,}72 \approx 2$$

$$N.º\ de\ convites\ grupo\ C = \frac{1020}{2500} \times 10 = 4{,}08 \approx 4$$

$$N.º\ de\ convites\ grupo\ P = \frac{850}{2500} \times 10 = 3{,}4 \approx 3$$

$$N.º\ de\ convites\ grupo\ R = \frac{200}{2500} \times 10 = 0{,}8 \approx 1$$

Pela aplicação do método 2, o grupo B receberia 2 convites, o grupo C receberia 4 convites, o grupo P receberia 3 convites e o grupo R receberia 1 convite.

Tendo em conta a aplicação destes métodos, o grupo R com a aplicação do método 1 não teria convites atribuídos. No entanto, com o método 2 R receberia 1 convite. Logo, o grupo R sairia favorecido com a aplicação do método 2.

2.2. Aplicando o método de Sainte Laguë aos valores apresentados, começamos por determinar os quocientes que se obtém pela divisão do número de alunos de cada grupo por 1, 3, 5, 7, 9, e assim sucessivamente:

Grupo	B	C	P	R
N.º de alunos / **Divisores**	430	1020	850	200
1	430,0	1020,0	850,0	200,0
3	143,3	340,0	283,3	66,7
5	86,0	204,0	170,0	40,0
7	61,4	145,7	121,4	28,6
9	47,8	113,3	94,4	22,2

De seguida, atribui-se os 10 convites aos grupos com os 10 maiores quocientes registados. Ou seja:

Grupo	B	C	P	R
N.º de alunos / **Divisores**	430	1020	850	200
1	430,0 (3)	1020,0 (1)	850,0 (2)	200,0 (7)
3	143,3 (10)	340,0 (4)	283,3 (5)	66,7
5	86,0	204,0 (6)	170,0 (8)	40,0
7	61,4	145,7 (9)	121,4	28,6
9	47,8	113,3	94,4	22,2

Ao aplicar o método de Sainte Laguë, podemos concluir que seriam atribuídos 2 convites ao grupo B, 4 convites ao grupo C, 3 convites ao grupo P e 1 convite ao grupo R.

Segundo o primeiro método, o grupo R não receberia nenhum convite. O método de Sainte Laguë prevê a atribuição de um convite ao grupo R. Logo, o método de Sainte Laguë favorece o grupo R em comparação com o primeiro método.

3. Iniciemos por aplicar o método de Hondt. Começamos por determinar os quocientes obtidos pela divisão do número de cidadãos de cada região por 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente. Ou seja:

Região	Plana	Reta	Circular	Trigonométrica
N.º de Cidadãos / **Divisores**	345	109	59	203
1	345,0	109,0	59,0	203,0
2	172,5	54,5	29,5	101,5
3	115,0	36,3	19,7	67,7
4	86,3	27,3	14,8	50,8
5	69,0	21,8	11,8	40,6
6	57,5	18,2	9,8	33,8
7	49,3	15,6	8,4	29,0
8	43,1	13,6	7,4	25,4
9	38,3	12,1	6,6	22,6

De seguida, atribuem-se os 16 equipamentos às regiões que registem os 16 maiores quocientes:

Região	Plana	Reta	Circular	Trigonométrica
N.º de Cidadãos / **Divisores**	345	109	59	203
1	345,0 (1)	109,0 (5)	59,0 (10)	203,0 (2)
2	172,5 (3)	54,5 (12)	29,5	101,5 (6)
3	115,0 (4)	36,3	19,7	67,7 (9)
4	86,3 (7)	27,3	14,8	50,8 (13)
5	69,0 (8)	21,8	11,8	40,6 (16)
6	57,5 (11)	18,2	9,8	33,8

7	49,3 (14)	15,6	8,4	29,0
8	43,1 (15)	13,6	7,4	25,4
9	38,3	12,1	6,6	22,6

Segundo o método de Hondt, a região Plana receberia 8 painéis solares, a região Reta receberia 2 painéis, a região Circular receberia 1 painel e a região Trigonométrica receberia 5 painéis solares.

Aplicando agora o método de Sainte Laguë, iniciamos por determinar os quocientes resultantes da divisão do número de cidadãos de cada região por 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente:

Região	Plana	Reta	Circular	Trigonométrica
N.º de Cidadãos / **Divisores**	345	109	59	203
1	345,0	109,0	59,0	203,0
3	115,0	36,3	19,7	67,7
5	69,0	21,8	11,8	40,6
7	49,3	15,6	8,4	29,0
9	38,3	12,1	6,6	22,6
11	31,4	9,9	5,4	18,5
13	26,5	8,4	4,5	15,6
15	23,0	7,3	3,9	13,5
17	20,3	6,4	3,5	11,9

De seguida, atribui-se os painéis solares às regiões que apresentam os 16 maiores quocientes registados:

Região	Plana	Reta	Circular	Trigonométrica
N.º de Cidadãos / Divisores	345	109	59	203
1	345,0 (1)	109,0 (4)	59,0 (7)	203,0 (2)
3	115,0 (3)	36,3 (11)	19,7	67,7 (6)
5	69,0 (5)	21,8	11,8	40,6 (9)
7	49,3 (8)	15,6	8,4	29,0 (13)
9	38,3 (10)	12,1	6,6	22,6 (16)
11	31,4 (12)	9,9	5,4	18,5
13	26,5 (14)	8,4	4,5	15,6
15	23,0 (15)	7,3	3,9	13,5
17	20,3	6,4	3,5	11,9

Pelo método de Sainte Laguë, a região Plana iria receber 8 painéis, a região Reta iria receber 2 painéis, a região Circular receberia 1 painel e a região Trigonométrica receberia 5 painéis.

Concluímos então que a escolha do método de partilha , de entre os dois sugeridos, não leva a distribuições dos painéis diferentes de entre as regiões.

4.

4.1. Fazendo a distribuição proporcional dos 10 mil euros pelas 5 instituições, podemos verificar que:

$$N.^{\underline{o}}\ de\ Utentes = 314 + 109 + 208 + 150 + 201 = 982$$

$$Quantia\ instituiçõa\ A = \frac{314}{982} \times 10\,000 \approx 3197{,}56\ €$$

$$Quantia\ instituição\ B = \frac{109}{982} \times 10\,000 \approx 1109{,}98\ €$$

$$Quantia\ instituição\ C = \frac{208}{982} \times 10\,000 \approx 2118{,}13\ €$$

$$Quantia\ instituição\ D = \frac{150}{982} \times 10\,000 \approx 1527{,}49\ €$$

$$Quantia\ instituição\ E = \frac{201}{982} \times 10\,000 \approx 2046{,}84\ €$$

No caso da distribuição diretamente proporcional, a instituição A receberia 3197,56 €, a instituição B receberia 1109,98 €, a instituição C receberia 2118,13 €, a instituição D receberia 1527,49 € e a instituição E receberia 2046,84 €.

4.2.

a) Aplicando o método de Hondt, começamos por determinar os quocientes obtidos pela divisão do número de utentes de cada instituição:

Instituição	A	B	C	D	E
N.º de Utentes / **Divisores**	314	109	208	150	201
1	314,0	109,0	208,0	150,0	201,00
2	157,0	54,5	104,0	75,0	100,50
3	104,7	36,3	69,3	50,0	67,00
4	78,5	27,3	52,0	37,5	50,25
5	62,8	21,8	41,6	30,0	40,20

A atribuição das tranches de mil euros é feita baseada nos 10 maiores quocientes obtidos pelas instituições. Ou seja:

Instituição	A	B	C	D	E
N.º de Utentes / **Divisores**	314	109	208	150	201
1	314,0 (1)	109,0 (6)	208,0 (2)	150,0 (5)	201,00 (3)
2	157,0 (4)	54,5	104,0 (8)	75,0	100,50 (9)
3	104,7 (7)	36,3	69,3	50,0	67,00
4	78,5 (10)	27,3	52,0	37,5	50,25
5	62,8	21,8	41,6	30,0	40,20

Concluímos então que a instituição A receberá 4000 €, a instituição B receberá 1000 €, a instituição C receberá 2000 €, a instituição D receberá 1000 € e a instituição E receberá 2000 €.

Em comparação com a distribuição proporcional do dinheiro, o método de Hondt favorece a instituição A e prejudica as restantes.

b) Comecemos por simular a distribuição das tranches de dinheiro pelas instituições através do método de Sainte Laguë.

Os quocientes resultantes da divisão do número de utentes por 1, 3, 5, 7, 9, e assim sucessivamente, são:

Instituição	A	B	C	D	E
N.º de Utentes / **Divisores**	314	109	208	150	201
1	314,0	109,0	208,0	150,0	201,00
3	104,7	36,3	69,3	50,0	67,00
5	62,8	21,8	41,6	30,0	40,20
7	44,9	15,6	29,7	21,4	28,71

De seguida, atribuímos as tranches de mil euros às instituições com os 10 maiores quocientes:

Instituição	A	B	C	D	E
N.º de Utentes / **Divisores**	314	109	208	150	201
1	314,0 (1)	109,0 (5)	208,0 (2)	150,0 (4)	201,00 (3)
3	104,7 (6)	36,3	69,3 (7)	50,0 (10)	67,00 (8)
5	62,8 (9)	21,8	41,6	30,0	40,20
7	44,9	15,6	29,7	21,4	28,71

No caso da aplicação do método de Sainte Laguë, a instituição A receberia 3000 €, a instituição B receberia 1000 €, a instituição C receberia 2000 €, a instituição D receberia 2000 € e a instituição E receberia 2000 €.

Com a possível cedência da Câmara para a utilização do método de Sainte Laguë para a distribuição do dinheiro, a instituição D seria beneficiada, pois receberia mais 1000 euros em relação à aplicação do método de Hondt.

5.

5.1. A percentagem de abstenção é determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} N.^{\text{o}}\ de\ abstencionistas &= 253\,865 - (58\,399 + 28\,844 + 14\,933 + \cdots + 617 + 838 + 2790) \\ &= 118\,452 \end{aligned}$$

$$Percentagem\ de\ abstenção = \frac{118\,452}{253\,865} \times 100 \approx 46{,}7\%$$

A percentagem de abstenção nestas eleições foi de 46,7% aproximadamente.

5.2. Usando as potencialidades da folha de cálculo, começamos por registar os dados relativos à distribuição de votos pelas forças políticas e criar uma coluna com os divisores a usar para determinar os quocientes.

Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	PCP-PEV	IL	PAN	BE	PTP	L	RIR	MPT	ADN
V.V.E.	58399	28844	14933	12028	3677	3555	3046	3036	1369	858	727	696	617
Divisores													
1													
2													
3													
4													
5													
6													

De seguida, usando a ferramenta de arrastar ao conjunto de dados, obtemos os quocientes da divisão do número de votos validamente expressos por 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente.

Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	PCP-PEV	IL	PAN	BE	PTP	L	RIR	MPT	ADN
V.V.E.	58399	28844	14933	12028	3677	3555	3046	3036	1369	858	727	696	617
Divisores													
1	58399,0	28844,0	14933,0	12028,0	3677,00	3555,00	3046,00	3036,0	1369,0	858,0	727,0	696,0	617,0
2	29199,5	14422,0	7466,5	6014,0	1838,50	1777,50	1523,00	1518,0	684,5	429,0	363,5	348,0	308,5
3	19466,3	9614,7	4977,7	4009,3	1225,67	1185,00	1015,33	1012,0	456,3	286,0	242,3	232,0	205,7
4	14599,8	7211,0	3733,3	3007,0	919,25	888,75	761,50	759,0	342,3	214,5	181,8	174,0	154,3
5	11679,8	5768,8	2986,6	2405,6	735,40	711,00	609,20	607,2	273,8	171,6	145,4	139,2	123,4
6	9733,2	4807,3	2488,8	2004,7	612,83	592,50	507,67	506,0	228,2	143,0	121,2	116,0	102,8
7	8342,7	4120,6	2133,3	1718,3	525,29	507,86	435,14	433,7	195,6	122,6	103,9	99,4	88,1
8	7299,9	3605,5	1866,6	1503,5	459,63	444,38	380,75	379,5	171,1	107,3	90,9	87,0	77,1
9	6488,8	3204,9	1659,2	1336,4	408,56	395,00	338,44	337,3	152,1	95,3	80,8	77,3	68,6
10	5839,9	2884,4	1493,3	1202,8	367,70	355,50	304,60	303,6	136,9	85,8	72,7	69,6	61,7
11	5309,0	2622,2	1357,5	1093,5	334,27	323,18	276,91	276,0	124,5	78,0	66,1	63,3	56,1
12	4866,6	2403,7	1244,4	1002,3	306,42	296,25	253,83	253,0	114,1	71,5	60,6	58,0	51,4
13	4492,2	2218,8	1148,7	925,2	282,85	273,46	234,31	233,5	105,3	66,0	55,9	53,5	47,5
14	4171,4	2060,3	1066,6	859,1	262,64	253,93	217,57	216,9	97,8	61,3	51,9	49,7	44,1
15	3893,3	1922,9	995,5	801,9	245,13	237,00	203,07	202,4	91,3	57,2	48,5	46,4	41,1
16	3649,9	1802,8	933,3	751,8	229,81	222,19	190,38	189,8	85,6	53,6	45,4	43,5	38,6
17	3435,2	1696,7	878,4	707,5	216,29	209,12	179,18	178,6	80,5	50,5	42,8	40,9	36,3
18	3244,4	1602,4	829,6	668,2	204,28	197,50	169,22	168,7	76,1	47,7	40,4	38,7	34,3
19	3073,6	1518,1	785,9	633,1	193,53	187,11	160,32	159,8	72,1	45,2	38,3	36,6	32,5
20	2920,0	1442,2	746,7	601,4	183,85	177,75	152,30	151,8	68,5	42,9	36,4	34,8	30,9
21	2780,9	1373,5	711,1	572,8	175,10	169,29	145,05	144,6	65,2	40,9	34,6	33,1	29,4
22	2654,5	1311,1	678,8	546,7	167,14	161,59	138,45	138,0	62,2	39,0	33,0	31,6	28,0
23	2539,1	1254,1	649,3	523,0	159,87	154,57	132,43	132,0	59,5	37,3	31,6	30,3	26,8
24	2433,3	1201,8	622,2	501,2	153,21	148,13	126,92	126,5	57,0	35,8	30,3	29,0	25,7
25	2336,0	1153,8	597,3	481,1	147,08	142,20	121,84	121,4	54,8	34,3	29,1	27,8	24,7

Posteriormente, usamos a ferramenta ORDEM que permite ordenar cada um dos quocientes de entre todos os quocientes registados pela folha de cálculo criada:

Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	PCP-PEV	IL	PAN	BE	PTP	L	RIR	MPT	ADN
V.V.E.	58 399	28 844	14 933	12 028	3 677	3 555	3 046	3 036	1 369	858	727	696	617
Divisores													
1	1	3	5	8	30	33	38	39	73	97	106	110	117
2	2	7	13	17	59	61	66	68	111	138	144	146	152
3	4	11	21	27	79	82	87	88	134	157	168	172	181
4	6	15	29	40	93	94	101	102	147	179	192	197	209
5	9	19	41	50	105	108	119	120	161	198	216	221	230
6	10	23	48	56	118	123	129	130	174	219	234	235	240
7	12	26	54	62	126	128	136	137	186	231	239	241	246
8	14	32	58	69	133	135	141	142	199	237	245	247	254
9	16	36	64	75	139	140	148	149	212	243	250	253	260
10	18	43	70	80	143	145	154	155	224	248	256	259	267
11	20	46	74	85	150	151	159	160	229	252	262	265	274
12	22	51	78	89	153	156	165	166	236	258	269	271	280
13	24	53	84	92	158	162	170	171	238	263	275	278	285
14	25	55	86	96	163	164	176	177	242	268	279	282	289
15	28	57	90	99	167	169	183	184	244	272	283	286	293
16	31	60	91	103	173	175	188	189	249	277	287	290	299
17	34	63	95	109	178	180	193	194	251	281	292	294	304
18	35	65	98	113	182	185	201	202	255	284	296	298	309
19	37	67	100	115	187	190	205	207	257	288	300	302	312
20	42	71	104	121	191	195	211	213	261	291	303	306	315
21	44	72	107	124	196	200	217	218	264	295	307	310	318
22	45	76	112	125	203	204	222	223	266	297	311	313	321
23	47	77	114	127	206	208	225	226	270	301	314	317	323
24	49	81	116	131	210	214	227	228	273	305	316	320	324
25	52	83	122	132	215	220	232	233	276	308	319	322	325

Podemos então concluir que: o PPD/PSD.CDS-PP recebeu 23 mandatos; o PS recebeu 11 mandatos; JPP recebeu 5 mandatos; CH recebeu 4 mandatos; PCP-PEV, IL, PAN e BE receberam 1 mandato cada.

5.4. Tendo em conta que a assembleia regional da Madeira elege 47 deputados, então para que um partido garante maioria absoluta da assembleia terá de obter:

$$N.^{\underline{o}}\ de\ deputados\ para\ maioria\ absoluta = \frac{47+1}{2} = 24$$

PPD/PSD.CDS-PP elegeu apenas 23 mandatos, ficando a 1 mandato para obter a maioria absoluta. Como a IL recebeu 1 mandato, este partido teve um papel fulcral nesta eleição, pois coligando com PPD/PSD.CDS-PP dava a garantia de que a maioria absoluta seria atingida.

FICHA 3 – MODELOS MATEMÁTICOS NAS FINANÇAS

1. A compensação por cessação de contrato por parte do João é calculada percorrendo os passos descritos. Assim:

$$RD = 800 \div 30 \approx 26{,}67 \text{ €}$$

Tendo em conta que o João iniciou o seu contrato em janeiro de 2019 e terminou em maio de 2023, então possui 4 anos completos e 5 meses de trabalho nesta empresa. Ou seja:

$$MC = 26{,}67 \times 14 \times 4 = 1493{,}52 \text{ €}$$

De seguida, determina-se o montante de compensação dos restantes meses trabalhados pelo João:

$$MNC = \frac{26{,}67}{12} \times 5 \approx 11{,}11 \text{ €}$$

A compensação a ser atribuída ao João é determinada por:

$$CF = 1493{,}52 + 11{,}11 = 1504{,}63 \text{ €}$$

O João irá receber uma compensação no valor de 1504,63 € por cessação de contrato.

2. Comecemos por determinar quanto é que a empresa pagou por cada mesa do tipo M e por cada mesa do tipo L:

$$Preço\ mesa\ M = 50 + 5 \times 4 = 70 \text{ €} \qquad Preço\ mesa\ L = 90 + 4 \times 6 = 114 \text{ €}$$

Por cada trabalhador, foi ainda cobrado uma contribuição para atribuição de um presente especial, sendo que foi pago na totalidade:

$$Total\ Presente\ Especial = 5{,}50 \times 110 = 605 \text{ €}$$

Logo, temos que o custo total deste evento para a empresa é de:

$$Total\ pago\ TecTudo = 20 \times 70 + 5 \times 114 + 605 = 2575\text{€}$$

Sabemos que o custo da organização da festa é de 1000 euros, pelo que o lucro obtido com a sua organização é:

$$Lucro = 2575 - 1000 = 1575 \text{ €}$$

A empresa de organização de eventos lucrou 1575 € com a realização deste evento.

3. Para decidir qual o melhor estabelecimento para adquirir estas bolachas para a sua família, a Maria deverá determinar o preço de referência que será termo de comparação. Neste caso, poderá optar por determinar o preço por grama de bolachas em cada um dos estabelecimentos. Assim:

$$Preço\ por\ grama\ A = \frac{1{,}99}{300} \approx 0{,}0066\ €$$

$$Preço\ por\ grama\ B = \frac{4{,}50}{750} = 0{,}006\ €$$

$$Preço\ por\ grama\ C = \frac{3{,}25}{500} 0{,}0065\ €$$

Podemos então concluir que o melhor estabelecimento para adquirir as bolachas será o estabelecimento B.

4. A conversão entre euros e dólares é diretamente proporcional, pelo que poderemos definir a seguinte proporção:4

$$\frac{1€}{x} = \frac{1{,}06\$}{1\$}$$

Logo, podemos concluir que:

$$x = \frac{1 \times 1}{1{,}06} \approx 0{,}94\ €$$

A 25 de outubro de 2023, 1 dólar americano valia 0,94 euros, aproximadamente.

5.

5.1. No caso de um regime de capitalização por juros simples, então:

$$N.^{\text{o}}\ de\ anos = 4 \qquad N.^{\text{o}}\ de\ capitalizações = 1 \quad taxa\ de\ juro\ anula = 1{,}6\% = 0{,}016$$

$$Capital\ Inicial = 30\,450\ €$$

$$Capital\ Final = 30\,450 + 30\,450 \times 4 \times 0{,}016 = 32\,398{,}80\ €$$

O Luís acumularia 32 398,80 euros num depósito efetuado segundo estas condições.

5.2. No caso de o capital ser investido na modalidade de juros compostos, então:

$$N.^{\text{o}}\ de\ anos = 4 \qquad N.^{\text{o}}\ de\ capitalizações = 1 \quad taxa\ de\ juro\ anula = 1{,}6\% = 0{,}016$$

$$Capital\ Inicial = 30\,450\ €$$

$$Capital\ Final = 30\,450 \times (1 + 0{,}016)^4 \approx 32\,446{,}07$$

Na modalidade de juro composto nas condições descritas, o Luís iria acumular um total de 32 446,07 € neste depósito.

6.

6.1. Tendo por referência a tabela da página 64 do manual relativa à retenção na fonte de IRS, temos que o Daniel irá reter em fonte de IRS 15,1% do seu salário bruto mensal, acrescido de 11% de contribuição para a Segurança Social. Assim, a percentagem de descontos aplicada no salário bruto mensal do Daniel é:

$$Percentagem\ de\ descontos = 13\% + 15{,}1\% = 26{,}1\%$$

O total de desconto é determinado por:

$$Total\ de\ desconto = 1300 \times 0{,}261 = 339{,}30$$

Logo, o salário líquido mensal do Daniel é:

$$Salário\ liquído\ mensal = 1300 - 339{,}3 = 960{,}7\ €$$

O salário líquido mensal do Daniel é de 960,70 euros.

6.2. O Daniel reteve na fonte de IRS mensalmente 15,1% do seu salário bruto mensal. Ou seja:

$$Retenção\ na\ fonte\ de\ IRS\ mensal = 0{,}151 \times 1300 = 196{,}30\ €$$

Tal corresponde a uma quantia total anual de:

$$Retenção\ na\ fonte\ de\ IRS\ anual = 196{,}30 \times 14 = 2748{,}2\ €$$

O Daniel reteve 2748,20 € na fonte de IRS ao longo desse ano.

6.3. O rendimento coletável do Daniel ao longo do ano é:

$$salário\ bruto\ anual = 1300 \times 14 = 18\,200\ €$$

$$rendimento\ coletável = 18\,200 - 4104 = 14\,096€$$

Logo, o rendimento coletável do Daniel enquadra-se no 3.º escalão, pelo que:

$$a = 11\,284 \times 0{,}16692 \approx 1883{,}53\ €$$

$$b = 0{,}265 \times (14\,096 - 11\,284) = 745{,}18\ €$$

$$coleta = 1883{,}53 + 745{,}18 = 2628{,}71\ €$$

Tendo em conta a quantia acumulada em retenção na fonte de IRS ao longo do ano, bem como das deduções à coleta a aplicar, então temos que:

$$2748{,}2 + 745 = 3493{,}2€$$

$$restituição = 2628{,}71 - 3493{,}2 = -864{,}49\ €$$

O Estado terá de restituir ao Daniel a quantia de 864,49 € nesse ano.

FICHA 4 – POPULAÇÃO, AMOSTRA E VARIÁVEL. MEDIDAS DE LOCALIZAÇÃO

1.

1.1. Massa de cada um dos alunos da turma X do décimo ano.

Variável estatística quantitativa continua.

1.2. Cor do cabelo de cada um dos alunos da turma X do décimo ano.

Variável estatística qualitativa nominal.

1.3. Menção (Não satisfaz, Satisfaz, Satisfaz Bem) atribuída ao comportamento de cada um dos alunos da turma X na última aula de matemática.

Variável estatística qualitativa ordinal.

1.4. Número de irmãos de cada um dos alunos da turma X do 10.º ano.

Variável estatística quantitativa discreta.

1.5. Tamanho (XS, S, M, L, XL) da camisola vestida por cada um dos alunos da turma X do decimo ano.

Variável estatística qualitativa ordinal.

1.6. Tipo de sangue de cada um dos professores da escola do Humberto.

Variável estatística qualitativa nominal.

1.7. Idade, em anos, de cada um dos professores da escola do Humberto.

Variável estatística quantitativa discreta.

1.8. Tempo, em minutos, de viagem, entre a casa e a escola, de cada um dos alunos da Turma X.

Variável estatística quantitativa continua.

2.

2.1. Alunos do décimo ano da escola da Mariana.

2.2. Neste estudo, foi realizada uma sondagem.

2.3. A amostra tem dimensão 26.

2.4.

Idade dos alunos

Idade	14	15	16	17
Frequência absoluta	3	10	11	2
Frequência relativa (%)	11,54	38,46	42,31	7,69

2.5. A moda é 16 anos.

2.6. A média deste conjunto de dados é 15,5.

2.7. A mediana é 15,5.

3.

(A) Sondagem. A amostra escolhida não é adequada, pois como os indivíduos inquiridos são todos da mesma cidade, poderão escolher o clube dessa cidade.
(B) Sondagem. A amostra é representativa.
(C) Sondagem. A amostra escolhida não é adequada, pois os inquiridos tinham de possuir telefone e voluntariaram-se para responder.
(D) Censo, pois foi estudada toda a população (os alunos do 10.º ano).
(E) Sondagem. A amostra é representativa.

4.

4.1. Este estudo é um censo, porque é estudada toda a população.

4.2. A variável em estudo é a altura dos jogadores que praticam basquetebol na Equipa dos Traquinas. Trata-se de uma variável quantitativa contínua.

4.3.

Altura dos jogadores

Altura (cm)	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
[175, 180[	4	4	$\frac{4}{20}=20\%$	20%
[180, 185[	3	7	$\frac{3}{20}=15\%$	35%
[185, 190[	1	8	$\frac{1}{20}=5\%$	40%
[190, 195[	5	13	$\frac{5}{20}=25\%$	65%
[195, 200[	2	15	$\frac{2}{20}=10\%$	75%
[200, 205[	3	18	$\frac{3}{20}=15\%$	90%
[205, 210[	1	19	$\frac{1}{20}=5\%$	95%
[210, 215[	1	20	$\frac{1}{20}=5\%$	100%

4.4. A classe modal é a classe [190,195[que é a classe à qual corresponde a maior frequência absoluta.

4.5. A classe mediana é a classe [190,195[que é a classe onde se atingem os 50% de frequência relativa acumulada.

4.6.

Altura dos jogadores

Altura (cm)	Frequência absoluta	Marca da classe
[175, 180[	4	177,5
[180,185[	3	182,5
[185,190[	1	187,5
[190,195[	5	192,5
[195,200[	2	197,5
[200,205[	3	202,5
[205,210[	1	207,5
[210,215[	1	212,5

Média

$$\bar{x} = \frac{4 \times 177{,}5 + 3 \times 182{,}5 + 187{,}5 + 5 \times 192{,}5 + 2 \times 197{,}5 + 3 \times 202{,}5 + 207{,}5 + 212{,}5}{20}$$

$$= \frac{3830}{20} = 191{,}5$$

A média é aproximadamente igual a 191,5.

4.7. Variável quantitativa discreta.

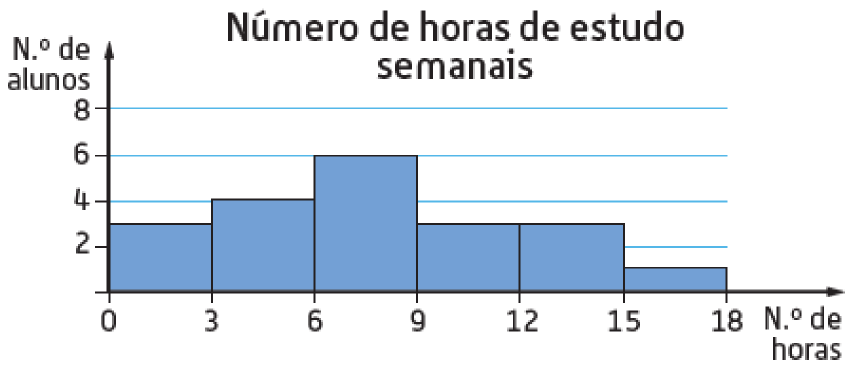
FICHA 5 – ORGANIZAÇÃO DE DADOS. HISTOGRAMA. NEDIDAS DE LOCALIZAÇÃO. MEDIDAS DE DISPERSÃO

1.

1.1. Trata-se de uma variável quantitativa continua.

1.2. A turma tem 3 + 4 + 6 + 3 + 3 + 1 = 20 alunos

1.3.



Fonte: Própria

2.

2.1.

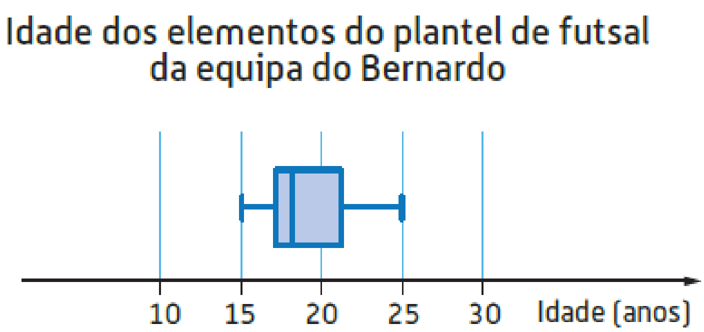
Idade dos elementos do plantel de futsal da equipa do Bernardo

Idade	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Frequência Absoluta	1	1	2	4	2	1	1	2	0	0	1

2.2. A moda é 18, porque é a idade com a maior frequência absoluta.

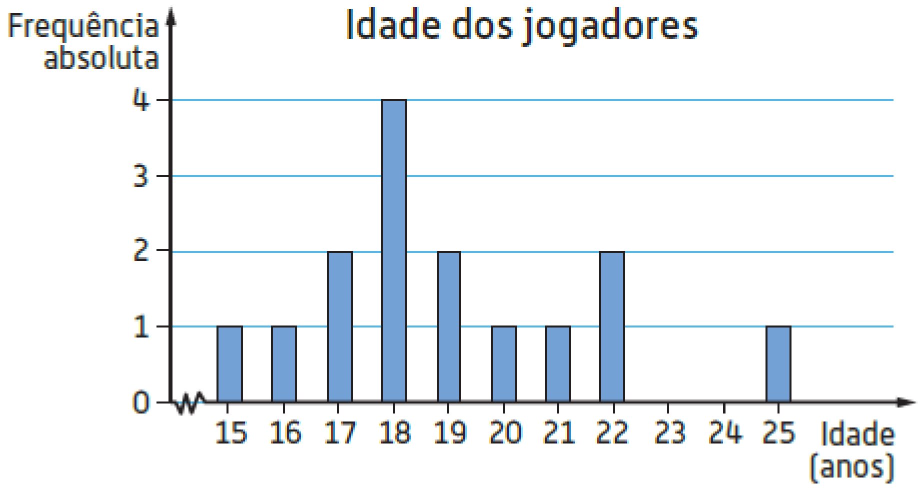
A mediana é 18. A média é 19. A variância é 6,9. O desvio padrão é 2,6.

2.3.



Fonte: Equipa do Bernardo

2.4.



Fonte: Equipa do Bernardo

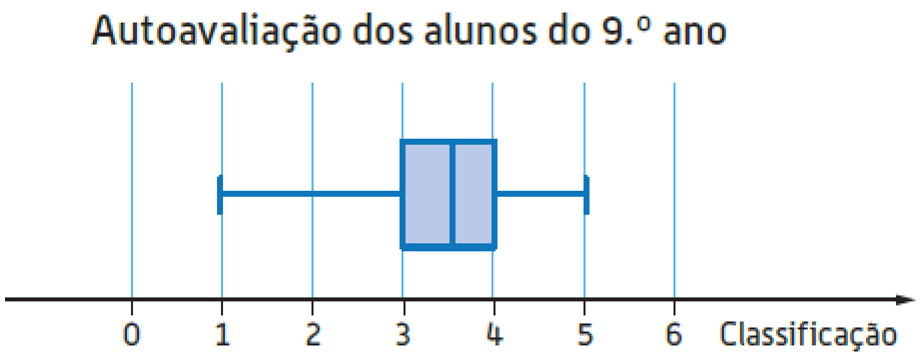
3.

3.1. Responderam ao inquérito 90 alunos.

3.2. Classificação de autoavaliação.

3.3. A variável é quantitativa discreta.

3.4.



Fonte: Própria

4.

4.1.

Mínimo	50
Máximo	200
Amplitude	150

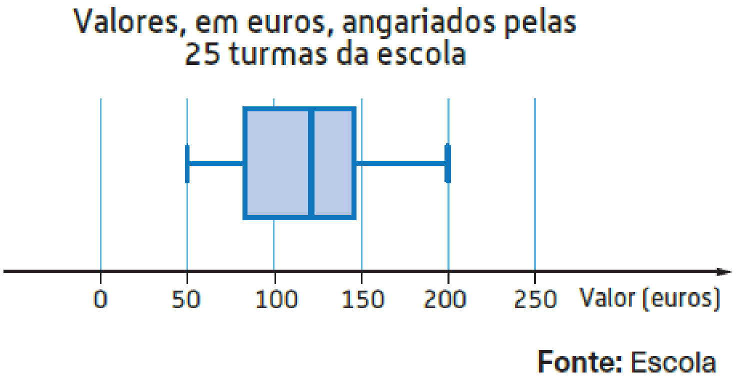
$$Amplitude \;=\; 200 - 50 = 150$$

4.2.

1.º Quartil	80
3.º Quartil	145
Amplitude interquartil	65

$$Amplitude\ interquartil = 3.^{\text{º}}\ quartil - 1.^{\text{º}}\ Quartil = 145 - 80 = 65$$

4.3.



4.4.

Percentil 80	150

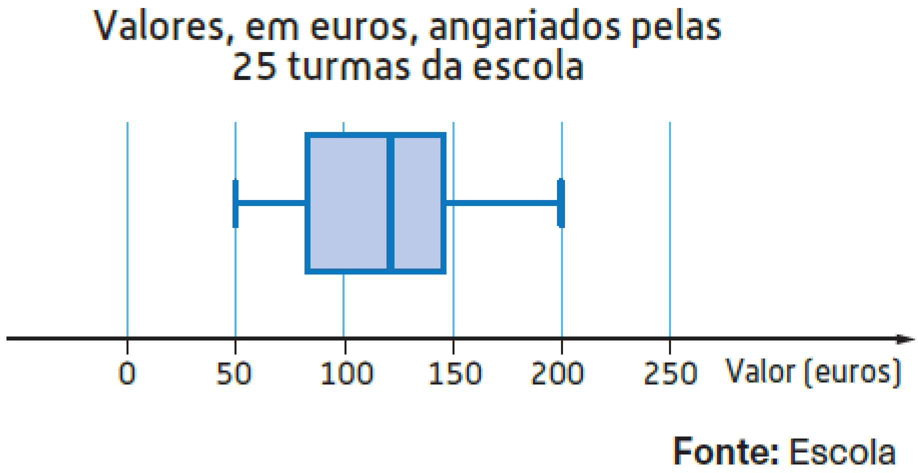
Significa que 80% das turmas angariam até 150 euros.

5.

5.1. A moda é 21 e a mediana é 32,5.

5.2. O primeiro quartil é 21 e o terceiro quartil é 45.

5.3.



6.

6.1. A média das idades dos elementos do elenco é 18.

6.2. O desvio padrão das idades dos elementos do elenco é 14,47.

6.3. Sim. O 60.

6.4.

a) A média das idades dos elementos do elenco será 19.

b) O desvio padrão das idades dos elementos do elenco será 14,47.

7.

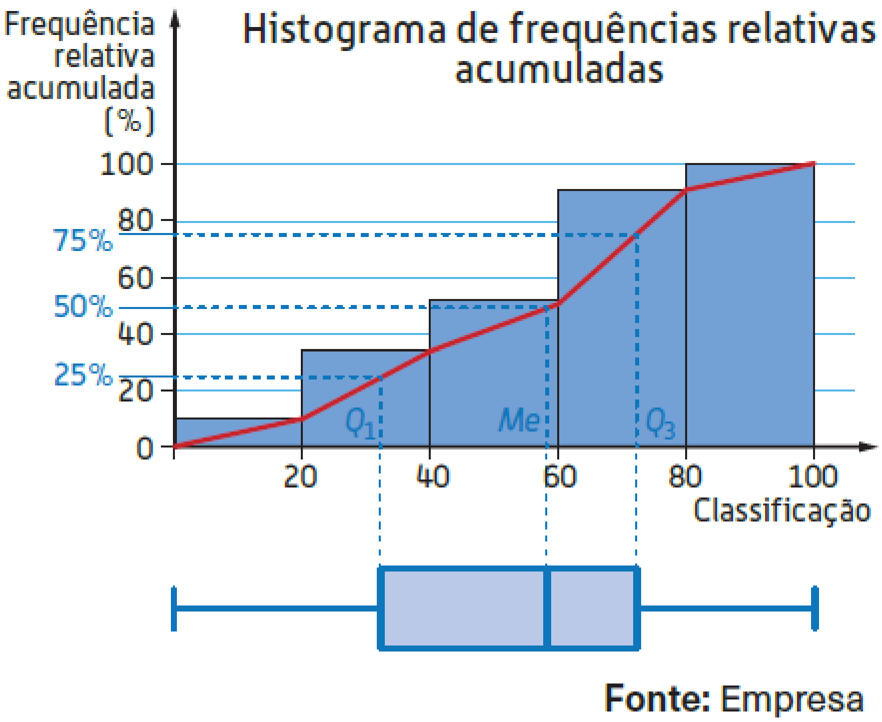
7.1.

Classificações obtidas no teste de conhecimentos

Classificação	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada
[0, 20[	5	5
[20, 40[	12	17
[40, 60[	8	25
[60, 80[	20	45
[80, 100[	5	50

7.2. Um valor aproximado da média é 53,2. Um valor aproximado do desvio padrão é 24,04.

7.3. e **7.4.**



8. Um valor aproximado do desvio padrão é 7,118.

9.

9.1. Variância $= 19{,}54$

9.2. Desvio padrão $= 4{,}42$

9.3.

Medida do comprimento de algumas trutas

Comprimento (cm)	Frequência absoluta
[20, 25[	1
[25, 30[	4
[30, 35[	6
[35, 40[	1

10.

10.1. O Manuel tem classificação máxima mais elevada do que a Maria.

10.2. O Manuel tem classificação mediana mais elevada do que a Maria.

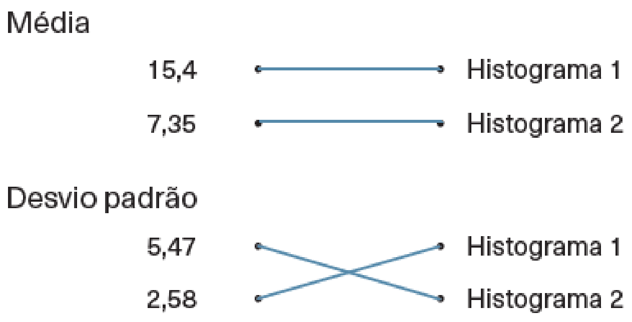
10.3. A amplitude interquartis das classificações do Manuel é maior do que a amplitude interquartis das classificações da Maria

11.

11.1. A medida de localização mais adequada é a mediana. Os valores mais pequenos influenciam muito a média.

11.2. A medida de dispersão mais adequada é o desvio padrão, pois caracteriza bem a dispersão dos dados resultante da existência de *outliers*.

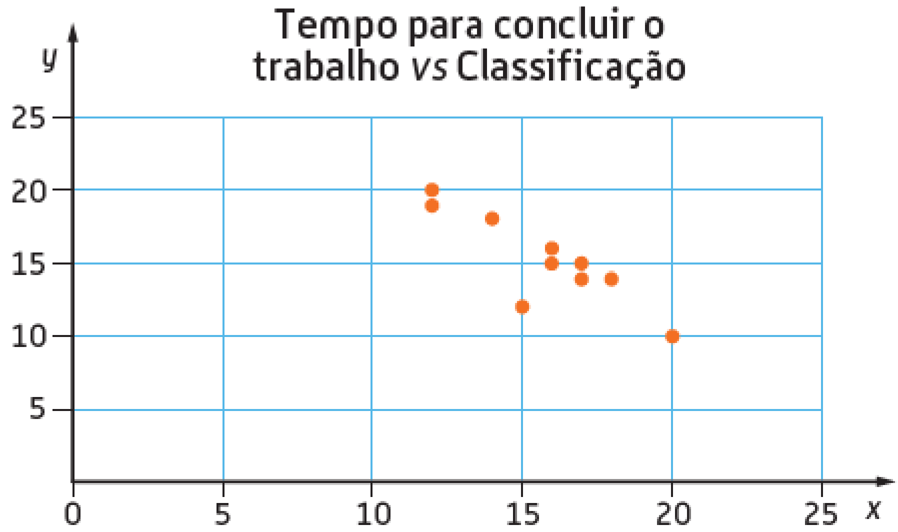
12.



FICHA 6 – DADOS BIVARIADOS. DADOS QUANTITATIVOS. DIAGRAMA DE DIS+ERSÃO. COEFICIENTE DE CORREAÇÃO LINAER. RETA DE REGRESSÃO

1.

1.1.

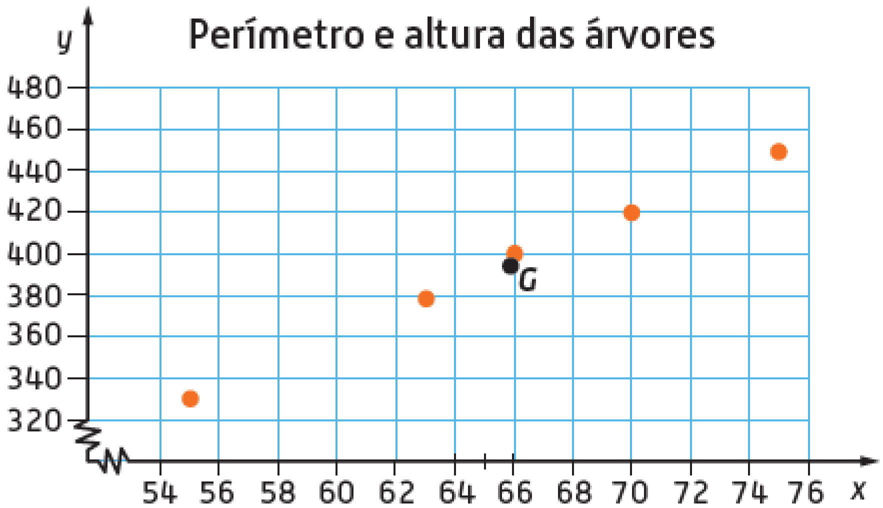


1.2. O coeficiente de correlação é -0,88. Trata-se de uma correlação negativa forte.

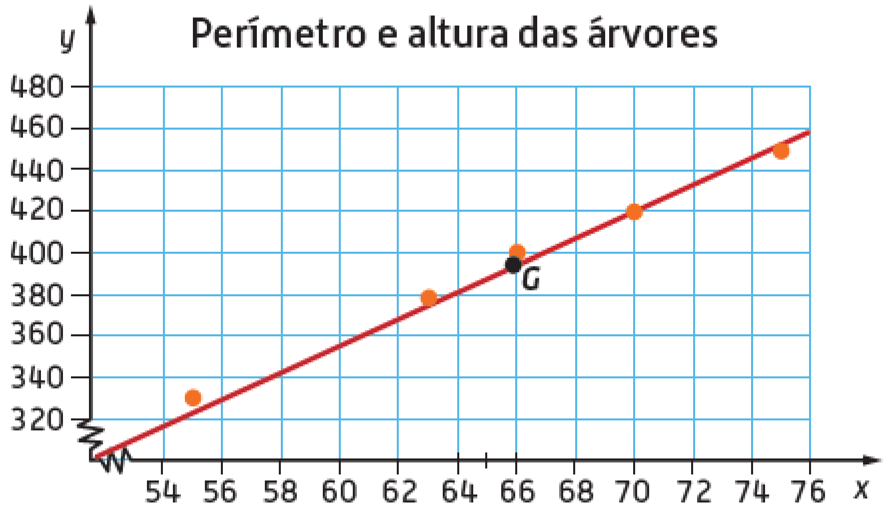
1.3. A variável independente é o tempo para concluir o trabalho. A variável dependente é a classificação.

2.

2.1. $G(65{,}8;\ 393{,}6)$



2.2.



2.3.

rad	REGRESSAO	
Dados	Gráfico	Estat
	X1	Y1
de pontos N		5
variância cov		293.92
produtos ∑xy		130964
correlação r		0.997041
Regressão y		y=a·x+b
ficiente a a		6.479718
ficiente b b		-32.76543
terminação r2		0.9940907

Equação da reta de regressão $y = 6{,}48x - 32{,}77$

2.4. Valor do coeficiente de correlação 0,997.

2.5. $y = 6{,}48 \times 80 - 32{,}77 = 485{,}63$

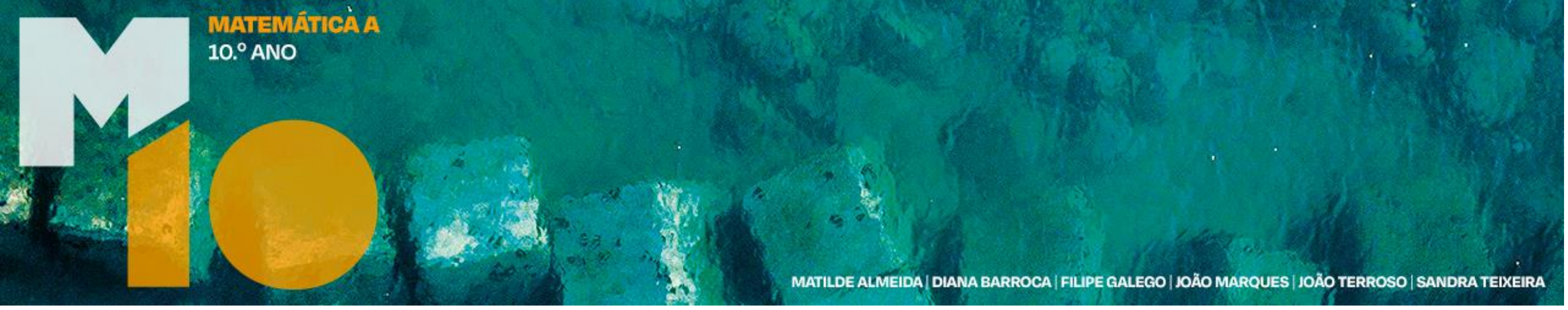
A altura estimada de uma árvore com 80 cm de perímetro é 485,63 cm.

2.6. 5 metros = 500 centímetros.

$$500 = 6{,}48x - 32{,}77 \Leftrightarrow x = \frac{500 + 32{,}77}{6{,}48} \Leftrightarrow x \approx 82{,}22$$

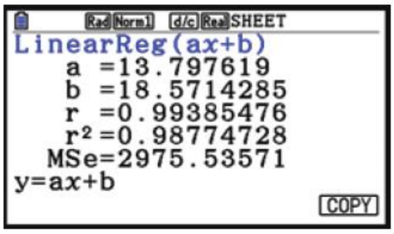
O perímetro estimado de uma árvore com 5 metros de altura é 82,22 cm.

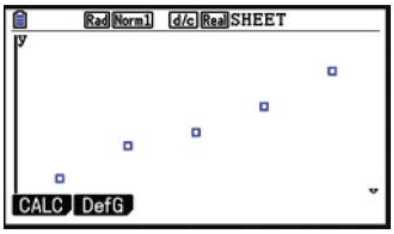
3. (A)



4.

4.1.





$y = 13{,}8\,x + 18{,}57$

4.2. Seja $x = 50$.

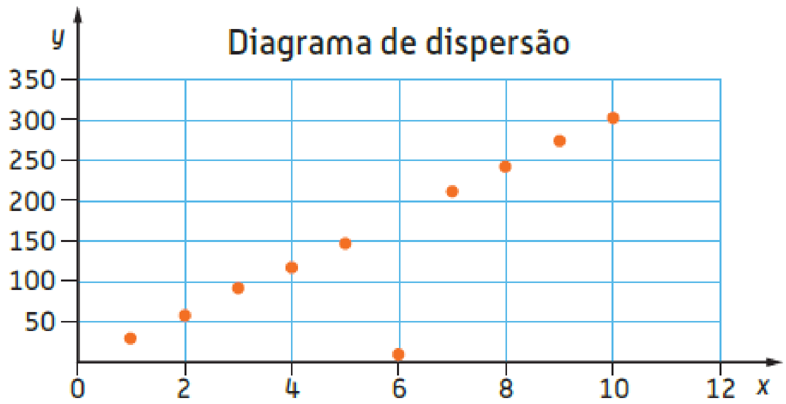
$y = 13{,}8 \times 50 + 18{,}57 = 708{,}57 \approx 709$ acessos

5.

(A) 0,997 diagrama 1	(B) 0,718 diagrama 3
(C) -0,997 diagrama 2	(D) -0,718 diagrama 4

6.

6.1.



6.2. O *outlier* é o ponto (6,10).

6.3. O coeficiente de correlação é 0,85.

6.4. O valor do coeficiente de correlação, sem considerar o *outlier*, é 0,9998.

FICHA 7 – PONTOS NOTÁVEIS CLÁSSICOS DE UM TRIÂNGULO

1.

1.1.

a) $\dot{A}J$

b) DE

c) $[CE]$

d) $[CF]$

1.2.

a) AJ **b)** CE **c)** CF **d)** DE

1.3.

a) $B\hat{A}J = J\hat{A}C$, logo, a semirreta $\dot{A}J$ é bissetriz do ângulo BAD e, portanto, todos os pontos dessa semirreta são equidistantes dos lados $[AB]$ e $[AC]$. Assim, como o ponto P pertence ao segmento $[AJ]$, conclui-se que é equidistante dos lados $[AB]$ e $[AC]$. Por outro lado, sabemos que $\overline{PE} = 5cm$ e, como a reta PE é perpendicular à reta AB, a distância do ponto P ao lado $[AB]$ é de $5\ cm$. Assim, conclui-se que a distância do ponto P ao lado $[AC]$ é de $5\ cm$.

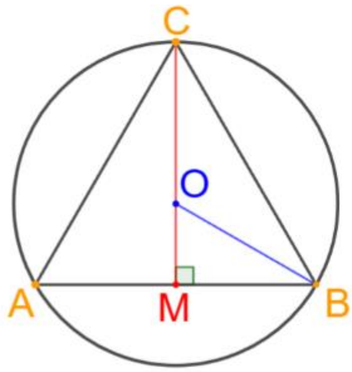
R.: $5\ cm$

b) Pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{AP} = \sqrt{12^2 + 5^2}\ cm = 13\ cm$.
Como o ponto P pertence à mediatriz do lado $[AB]$, o ponto P é equidistante dos vértices A e B e, portanto, $\overline{BP} = \overline{AP} = 13cm$.

R.: $13\ cm$

2. Não. A localização encontrada corresponde ao ponto equidistante dos locais onde os passeios se cruzam. Deveriam ter determinado o incentro do triângulo que representa o jardim, construindo as bissetrizes de dois dos seus ângulos internos e determinando a interseção das mesmas. Este ponto localiza-se necessariamente no interior do jardim, visto que o incentro de um triângulo se localiza necessariamente no seu interior.

3. Seja O o circuncentro do triângulo $[ABC]$ e M o ponto médio do lado $[AB]$.
Como O é o circuncentro do triângulo, OM é a mediatriz de $[AB]$ e, portanto, os triângulos $[BMC]$ e $[OMB]$ são retângulos.
Como o triângulo [ABC] é equilátero $\overline{BC} = \overline{AB} = 2cm$.
Como M é o ponto médio de [AB], $\overline{MB} = 1cm$.
Pelo Teorema de Pitágoras, vem que:
$\overline{CM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2$
Seja a o comprimento de $[CM]$, em cm.
$a^2 + 1^2 = 2^2 \Leftrightarrow a^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$
$\overline{CM} = \sqrt{3}cm$
Como o triângulo é equilátero, sabemos que o ponto O é o baricentro e, portanto, $\overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}cm$.



$A_{círculo} = \pi \times raio^2 = \pi \times \overline{CO}^2 = \pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\ cm^2 = \frac{4}{3}\pi\ cm^2$

$A_{[ABC]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CM}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} cm^2 = \sqrt{3} cm^2$

$A_{sombreada} = A_{círculo} - A_{[ABC]} = \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) cm^2 \approx 22{,}1 cm^2$

R.: $22{,}1 cm^2$

4.

4.1.

G é o baricentro do triângulo $[ABC]$, logo, $[AE]$ e $[CD]$ são medianas do triângulo e, portanto, D e E são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[BC]$, respetivametne.

Assim, $\overline{AD} = \overline{BD} = 5cm$.

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AE} = \frac{2}{3} \times 6cm = 4cm$

Como $[AE]$ e $[CD]$ são perpendiculares em G, os triângulos $[ADG]$, $[CGE]$ e $[AGC]$ são retângulos em G.

Pelo Teorema de Pitágoras, vem que:

$\overline{AG}^2 + \overline{DG}^2 = \overline{AD}^2$

Seja a o comprimento de $[DG]$, em cm.

$4^2 + a^2 = 5^2 \Leftrightarrow 16 + a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow a = \pm 3$

$\overline{DG} = 3cm$

$\overline{CG} = 2\overline{DG} = 2 \times 3cm = 6cm$

R.: **a)** $\overline{AD} = 5cm$ **b)** $\overline{AG} = 4cm$ **c)** $\overline{DG} = 3cm$ **d)** $\overline{CG} = 6cm$

4.2.

Pelo Teorema de Pitágoras, vem que:

$\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{CG}^2$ e $\overline{CE}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{CG}^2$

Sejam b e c, respetivamente, os comprimentos de $[AC]$ e $[CE]$, em cm.

$b^2 = 4^2 + 6^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 + 36 \Leftrightarrow b^2 = 52 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{52}$

$c^2 = 2^2 + 6^2 \Leftrightarrow b^2 = 4 + 36 \Leftrightarrow b^2 = 40 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{40}$

$\overline{AC} = \sqrt{52}cm$ e $\overline{CE} = \sqrt{40}cm$

$\overline{BC} = 2\overline{CE} = 2\sqrt{40}cm$

$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \left(10 + \sqrt{52} + 2\sqrt{40}\right)cm \approx 29{,}9cm$

R.: $29{,}9\ cm$

5.

Seja M o ponto médio do lado $[AB]$.

G é o baricentro do triângulo $[ABC]$, logo, $\overline{MG} = \frac{1}{2}\overline{GC}$.

M é o ponto médio de $[AB]$, logo, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.
Como $\overline{AB} = \overline{CG}$, concluímos que $\overline{AM} = \overline{MG}$ e, portanto, $A\hat{G}M = M\hat{A}G$.
Analogamente se conclui que $M\hat{G}B = G\hat{B}M$.

$$A\hat{G}B + G\hat{B}A + B\hat{A}G = 180° \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\hat{G}B + G\hat{B}M + M\hat{A}G = 180° \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\hat{G}B + M\hat{G}B + A\hat{G}M = 180° \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\hat{G}B + A\hat{G}B = 180° \Leftrightarrow 2A\hat{G}B = 180° \Leftrightarrow A\hat{G}B = \frac{180°}{2} \Leftrightarrow A\hat{G}B = 90°$$

R.: $90°$

FICHA 8 – RETA DE EULER E CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS

1. $\overline{GH} = 2\overline{OG}$ e N é o ponto médio do segmento $[OH]$.

1.1.

a) $\overline{ON} = \frac{\overline{OH}}{2} = \frac{12}{2}cm = 6cm$

b) $\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{OH} = \frac{1}{3} \times 12cm = 4cm$

c) $\overline{GN} = \overline{ON} - \overline{OG} = 6cm - 4cm = 2cm$

1.2.

a) $\overline{OH} = 3\overline{OG} = 3 \times 5cm = 15cm$

b) $\overline{GH} = 2\overline{OG} = 2 \times 5cm = 10cm$

c) $\overline{GN} = \overline{ON} - \overline{OG} = \frac{\overline{OH}}{2} - \frac{\overline{OH}}{3} = \frac{15}{2}cm - \frac{15}{3}cm = (7{,}5 - 5)cm = 2{,}5cm$

1.3.

a) $\overline{GN} = \overline{ON} - \overline{OG} = \frac{\overline{OH}}{2} - \frac{\overline{OH}}{3} = \frac{3\overline{OH}}{6} - \frac{2\overline{OH}}{6} = \frac{\overline{OH}}{6}$

$$\overline{OG} = \frac{\overline{OH}}{3} = 2 \times \frac{\overline{OH}}{6} = 2 \times \overline{GN} = 2 \times 1cm = 2cm$$

b) $\overline{GH} = 2 \times \overline{OG} = 2 \times 2cm = 4cm$

c) $\overline{ON} = \overline{OG} + \overline{GX} = 2cm + 1cm = 3cm$

2.1. O incentro e o baricentro têm de ser pontos do interior do triângulo, pelo que não podem estar contidos nos lados, em particular, não podem coincidir com um dos vértices. Como o circuncentro está à mesma distância dos três vértices do triângulo, se coincidisse com um deles teria de coincidir com os outros dois e não existiria triângulo. Assim, conclui-se que esse ponto notável é o ortocentro. Se o ortocentro é um dos vértices então o triângulo tem de ser retângulo, pois, para as alturas se intersetarem num dos vértices, as mesmas têm de coincidir com os dois lados que contêm esse vértice.

R.: Triângulo retângulo

2.2. Os quatro pontos notáveis clássicos coincidem se as medianas também forem alturas e estiverem contidas nas mediatrizes e nas bissetrizes do triângulo e tal acontece apenas nos triângulos equiláteros.

R.: Triângulo equilátero (consequentemente é um triângulo acutângulo).

2.3. O incentro e o baricentro têm de ser pontos do interior do triângulo, pelo que não podem estar contidos nos lados, em particular, não podem coincidir com o ponto médio de um deles.

Se o ortocentro fosse o ponto médio de um dos lados, a altura relativa a um dos vértices desse lado seria o próprio lado e seria perpendicular ao lado oposto ao vértice o que era impossível pois teríamos um triângulo com dois lados paralelos. Assim, o único ponto notável que pode coincidir com o ponto médio de um dos lados do triângulo é o circuncentro.

Como o circuncentro é o ponto médio de um dos lados, a circunferência que circunscreve o triângulo tem esse lado como diâmetro e o vértice oposto, estando contido nessa circunferência, vê os outros dois vértices segundo um ângulo reto. Conclui-se, assim, que o triângulo [ABC] é retângulo.

R.: Triângulo retângulo.

2.4. A reta não existe se todos os pontos forem coincidentes e tal acontece se o triângulo for equilátero.

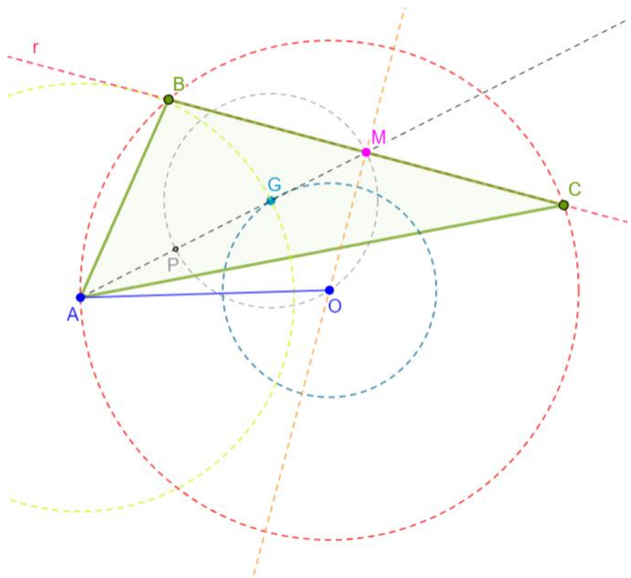
R.: Triângulo equilátero (consequentemente é um triângulo acutângulo).

2.5. O ortocentro é exterior ao triângulo apenas se as alturas referentes a dois dos vértices não intersetam os lados opostos, tal acontece quando o triângulo é obtusângulo.

R.: Triângulo obtusângulo.

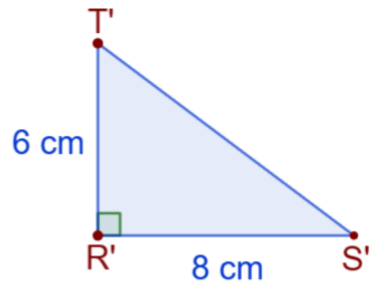
3.

1. Construir o segmento de reta $[AO]$ com 7 cm de comprimento.
2. Construir a circunferência e centro no ponto A e 6 cm de raio.
3. Construir a circunferência de centro no ponto O e 3 cm de raio.
4. Marcar o ponto G, baricentro do triângulo $[ABC]$, que é um dos pontos de interseção das duas circunferências construídas.
5. Marcar o ponto M, ponto médio do lado $[BC]$, que é o ponto da semirreta $\dot{A}G$ de interseção das duas circunferências construídas.
6. Traçar a reta OM (é a mediatriz do lado $[BC]$).
7. Traçar a reta r, perpendicular à reta OM pelo ponto M.
8. Traçar a circunferência de centro no ponto O que contém o ponto A.
9. Marcar os pontos B e C, que correspondem aos pontos de interseção da circunferência construída no passo 8 e a reta r.
10. Construir o triângulo $[ABC]$.



4.

4.1. O círculo de 9 pontos do triângulo $[RST]$ é o círculo limitado pela circunferência circunscrita ao triângulo $[R'S'T']$. Como o triângulo $[R'S'T']$ é retângulo em R', a circunferência que o circunscreve tem diâmetro [S'T'].



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{S'T'} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

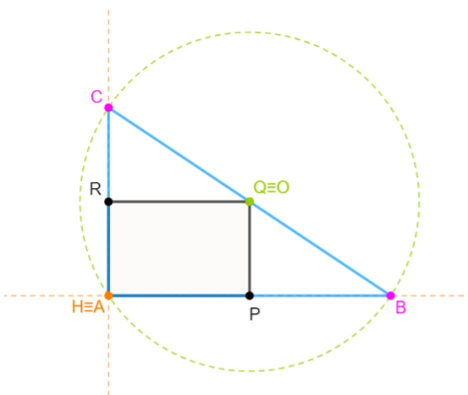
$\text{raio}_{circ.9\,pontos} = \frac{10}{2} = 5$.

Assim, conclui-se que o raio da circunferência de 9 pontos do triângulo $[RST]$ mede $5\ cm$.

4.2. A distância do circuncentro do triângulo $[RST]$ ao vértice R é igual à medida do comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[RST]$ e, portanto, é o dobro da medida do comprimento do raio da circunferência do 9 pontos desse triângulo.
Assim, conclui-se que a distância do circuncentro do triângulo $[RST]$ ao vértice R é de $10\ cm$.

5.

5.1. Seja Q o vértice oposto ao vértice H, no retângulo $[HPQR]$. O ponto médio, N, do segmento $[PR]$ é o centro da circunferência dos 9 pontos do triângulo $[ABC]$.
Como o centro da circunferência dos 9 pontos de um triângulo é o ponto médio do segmento de reta de extremos no ortocentro e no circuncentro desse triângulo, conclui-se que o ponto Q é o circuncentro do triângulo $[ABC]$.
Assim, PQ e PR são mediatrizes do triângulo $[ABC]$ e, portanto, as retas PH e RH contêm dois dos lados do triângulo $[ABC]$, aqueles cujos pontos médios são P e R, respetivamente. Como as retas PH e RH se intersetam no ponto H, conclui-se que o ponto H coincide com um dos vértices do triângulo $[ABC]$. Para determinar os outros dois vértices do triângulo $[ABC]$ basta determinar os pontos de interseção da circunferência circunscrita a esse triângulo com as retas PH e RH.



Protocolo de construção:

0. Contruir o retângulo [HPQR] tal que $\overline{HP} = 6cm$ e $\overline{HR} = 4cm$.

1. Traçar as retas HP e HR.

2. Construir a circunferência de centro no ponto Q e raio $[QH]$.

3. Marcar os pontos B e C, interseção da circunferência com as retas HP e HR, respetivamente.

4. Traçar o triângulo $[ABC]$, tendo em conta que o ponto A coincide com o ponto H.

5.2. Em 5.1. já vimos que o ponto H coincide com um dos vértices do triângulo $[ABC]$ e que os dois lados que se intersetam nesse ponto são perpendiculares, visto que estão contidos nas retas PH e RH que, por conterem lados consecutivos de um retângulo, são perpendiculares.

Assim, o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

Seja A o vértice que coincide com o ponto H. Sejam B e C os vértices do triângulo tais que os pontos P e R são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[AC]$, respetivamente.

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2\overline{AP} \times 2\overline{AR}}{2} = 2\overline{AP} \times \overline{AR} = 2\overline{HP} \times \overline{HR} = 2 \times \text{Área}_{[HPQR]}$$

Assim, conclui-se que o triângulo $[ABC]$ tem o dobro da medida da área do retângulo $[HPQR]$.

6.

6.1. $\text{raio}_{circ.circunscrita} = 2\overline{MN} = 2 \times 4 = 8$

$\text{área}_{circ.circunscrita} = \pi \times 8^2 = 64\pi$

Resposta: $64\pi\ cm^2$

6.2.

1. Construir o segmento de reta $[GM]$ com $3\ cm$ de comprimento.

2. Construir a circunferência de centro no ponto G e com $2\ cm$ de raio.

3. Construir a circunferência de centro no ponto M e com $4\ cm$ de raio.

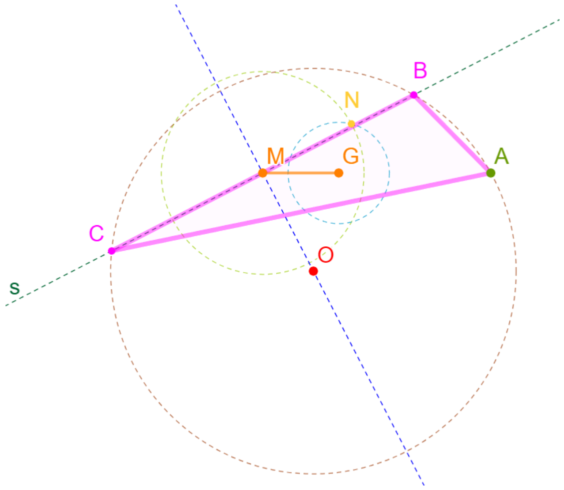
4. Marcar o ponto N, um dos pontos de interseção das circunferências traçadas nos passos 2 e 3.

5. Determinar o ponto O, circuncentro do triângulo, ponto de interseção da semirreta $\dot{N}G$ com a circunferência de centro no ponto G e raio com o dobro do comprimento do segmento de reta $[GN]$.

6. Traçar a circunferência de centro no ponto O e raio com o dobro do comprimento do segmento de reta $[MN]$ com $4\ cm$ de comprimento.

7. Construir a reta OM.

8. Construir a reta s, perpendicular à reta OM.
9. Marcar os pontos B e C, pontos de interseção da circunferência traçada no passo 5 e a reta s.
10. Determinar o ponto A, ponto de interseção da semirreta $\dot{M}G$ com a circunferência de centro no ponto G e raio com o dobro do comprimento do segmento $[MG]$.
11. Construir o triângulo $[ABC]$.



7. Em qualquer triângulo, a distância do baricentro ao ortocentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro. Assim, a distância do circuncentro ao ortocentro é o triplo da distância do baricentro ao ortocentro.
Como o triângulo não é equilátero, os pontos O, G e H estão contidos na mesma reta, a reta de Euler do triângulo, e são distintos. Assim, a altura h dos triângulos $[OMG]$ e $[OMH]$ relativa ao vértice M é igual à distância do ponto M à reta de Euler, reta que contém os lados opostos ao vértice M desses dois triângulos.
Assim,
$$\text{Área}_{[OMH]} = \frac{\overline{OH} \times h}{2} = \frac{3\overline{OG} \times h}{2} = 3 \times \frac{\overline{OG} \times h}{2} = 3\ \text{Área}_{[OMG]}$$
E, portanto, o triângulo $[OMH]$ tem o triplo da área do triângulo $[OMG]$.

FICHA 9 – FUNÇÕES DEFINIDAS POR TABELAS, GRÁFICOS OU ANALITICAMENTE

1. As funções são as correspondências I e III.

A correspondência II não representa uma função porque ao Luís correspondem duas nacionalidades. A correspondência IV não representa uma função porque a 7 não corresponde qualquer distância.

2. II é a correspondência que representa necessariamente uma função, pois, a cada valor do raio de um círculo corresponde uma e uma só área.

I. Não representa uma função, pois, ao mês de fevereiro correspondem os elementos 28 e 29.

III. Não representa uma função, pois, a cada continente podemos corresponder mais do que um país.

3.

3.1. $f(x) = 2x + 2$

3.2.

$f(-2) = 2 \times (-2) + 2 = -4 + 2 = -2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$

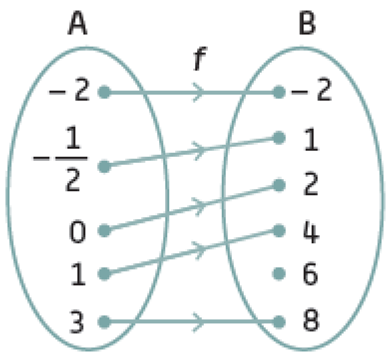
$f(0) = 2 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

$f(1) = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4$

$f(3) = 2 \times 3 + 2 = 6 + 2 = 8$

$D' = \{-2, 1, \ 2, 4, 8\}$

3.3.



4.

4.1. A distância do parque a casa do João é de 3,5 km.

4.2. $0{,}75\text{ h} = 0{,}75 \times 60\text{ min} = 45\text{ min}$

Eles demoraram 45 minutos a chegar ao parque.

4.3. $(1{,}25 - 0{,}75)\text{h} = 0{,}5\text{h} = 30\text{ min}$

Os dois amigos estiveram 30 minutos parados no parque.

4.4. A afirmação é falsa. Depois de estarem parados no parque, os amigos afastaram-se ainda mais da casa do João, ficando a 4 km da mesma, e só depois se começaram a aproximar.

4.5. Os amigos demoraram duas horas desde o início da corrida até regressarem a casa do João.

5.

5.1.

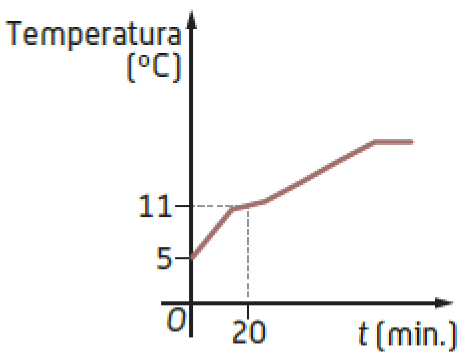
A – IV

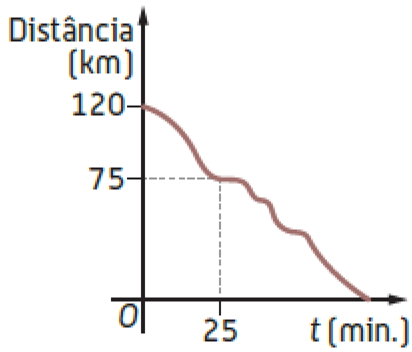
B – I

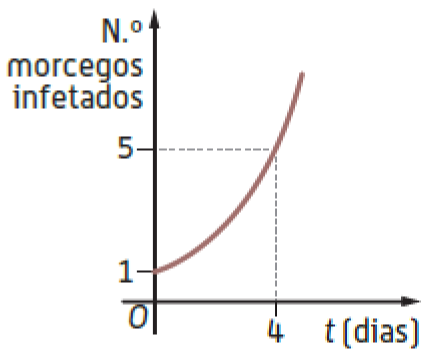
C – III

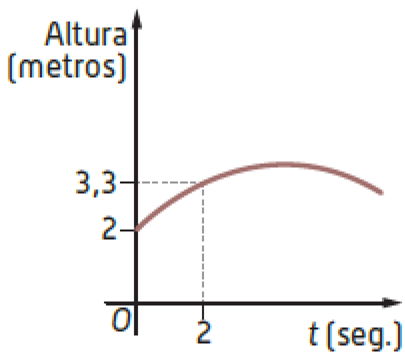
D – II

5.2.









FICHA 10 – DOMINIO, CONJUNTO DE CHEGADA, CONTRADOMINIO, VARIÁVEL INDEPENDENTE E VARIÁVEL DEPENDENTE

1.

1.1. $f(2) = 2^2 = 4$;

A imagem do objeto 2 é 4.

1.2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

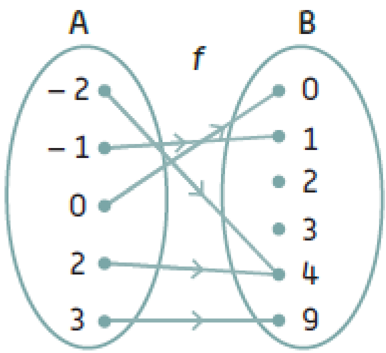
Como 1 não pertence ao domínio de f, então, -1 é o objeto cuja imagem por f é igual a 1.

1.3.

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(0) = (-2)^2 = 4$

$f(3) = 3^2 = 9$



1.4. $D_f = A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$, $D'_f = \mathrm{B} = \{0, 1, 4, 9\}$ e $Conjunto\ de\ chegada\ de\ f = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$

2.

2.1. A correspondência é uma função pois a cada valor de x corresponde um e um só valor de f(x).

2.2.

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

2.3. $D_f = A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$; $D'_f = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}\right\}$; Conjunto de chegada = $\mathbb{R}$

2.4. $f(x) = \frac{1}{2}x$

3.

3.1. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 3 - 2 \times \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

3.2. $f(x) = -5 \Leftrightarrow 3 - 2x^2 = -5 \Leftrightarrow -2x^2 = -5 - 3 \Leftrightarrow -2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

3.3. $f(3) = 3 - 2 \times 3^2 = 3 - 2 \times 9 = 3 - 18 = -15$

3.4. $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3 - 2x^2 = 1 \Leftrightarrow -2x^2 = 1 - 3 \Leftrightarrow -2x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

-1 e 1 são os objetos cuja imagem por f é 1.

3.5. Com os domínio e conjunto de chegada são conjuntos de números reais então a função é real de variável real.

4.

4.1.

a) $D_f = \{-1; 0; 1; 2; 4\}$

b) $D'_f = \{1; 4; 7; 10; 16\}$

4.2. A imagem de 4 por *f* é 16.

4.3. $f(2) = 10$ e $f(-1) = 1$

4.4. $y = ax + 4$, pois, o ponto de coordenadas (0,4) pertence à reta que que contém os pontos assinalados.

(-1,1) pertence à função, logo, $1 = a \times (-1) + 4 \Leftrightarrow \; 1 = -a + 4 \Leftrightarrow \; a = 4 - 1 \Leftrightarrow a = 3$

Assim, $f(x) = 3x + 4$. (D)

5.

5.1.

N.º de bilhetes (n)	1	2	5	8	10
Valor a pagar (p)	6	12	30	48	60

$1 \times 6 = 6; 2 \times 6 = 12; 5 \times 6 = 30; 8 \times 6 = 48; 10 \times 6 = 60$

5.2. A variável independente é o número de bilhetes e a variável dependente é o valor a pagar.

5.3. $p(n) = 6n$

5.4. $p(24) = 6 \times 24 = 144$

O valor total a pagar pelos bilhetes é de 144 €.

6.

6.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

6.2. $D_f = \mathbb{R}$

6.3. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 8 - x > 0\} =]-\infty, 8[$

$8 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -8 \Leftrightarrow x < 8$

6.4. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$

6.5. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

$9 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow -x^2 \neq -9 \Leftrightarrow x^2 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 3$

6.6. Para qualquer valor de x, se tem $x^2 + 1 > 0$.

Assim, $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \geq 0\} =]-1; +\infty[$

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

6.7. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$ Condição universal

6.8. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 9 \geq 0\} = [-9, +\infty[$

$x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -9$

FICHA 11 – ZEROS E SINAL DE UMA FUNÇÃO. MONOTONIA E EXTREMOS

1.

1.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1$

1.2. $f(-5) = \frac{1-3\times(-5)}{(-5)^2-1} = \frac{1+15}{25-1} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ é a imagem de -5 por f.

1.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x = 0 \ \wedge x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow -3x = -1 \ \wedge x^2 \neq 1 \Leftrightarrow -3x = -1 \ \wedge$ $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \wedge \ x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ é zero da função f.

2.

2.1. a) f é negativa em]4, 6[.

b) f é crescente em $[5, +\infty[$.

2.2. A afirmação é falsa. Por exemplo:

- 2<3 e f(2)<f(3)
- 3<5 e f(3)>f(5)

Assim, concluo que f não é monótona em [1,5].

2.3.

a) Mínimo relativo: -2
Máximos relativos: 6 e 7

b) Mínimo absoluto: -2
Máximo absoluto: não tem

c) Minimizante: 5

d) Maximizantes: 1 e 3

3.

3.1. $D_f = [-2, -1[\cup [0, 5]$

3.2. B. *f* é crescente em [0,3] e em]3,5]

3.3. $C.S. = \{-2, 0\}$

3.4.

Mínimo relativo: 1

Mínimo absoluto: não existe

Máximos relativos: 1, 2 e 3

Máximo absoluto:3

4.

4.1. a) $f(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 2 + 1 = 3$

A imagem de -1 por f é 3.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ é o objeto cuja imagem por f é zero.

c) $f(-2) = -2 \times (-2) + 1 = 4 + 1 = 5$

$-2 \times 3 + 1 = -6 + 1 = -5$

Como a representação gráfica da função f é parte de uma reta, então ela é monótona em todo o seu domínio. Como o declive é negativo, então, f é decrescente, logo,

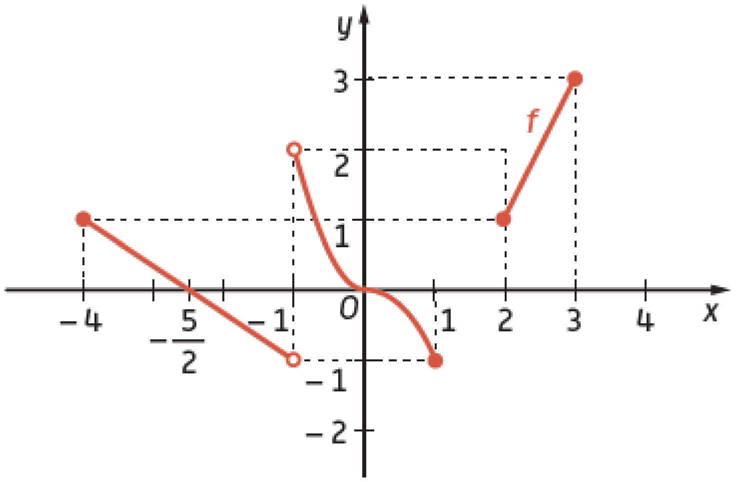
$D'_f =]-5{,}5]$

4.2. I. Verdadeira, pois, os seus pontos pertencem a uma reta de declive negativo (-2).

II. Falsa. A função *f* não é linear, pois, a sua expressão não é do tipo $f(x) = ax$, com $\in \mathbb{R}$, ou seja, a origem do referencial não pertence à sua representação gráfica.

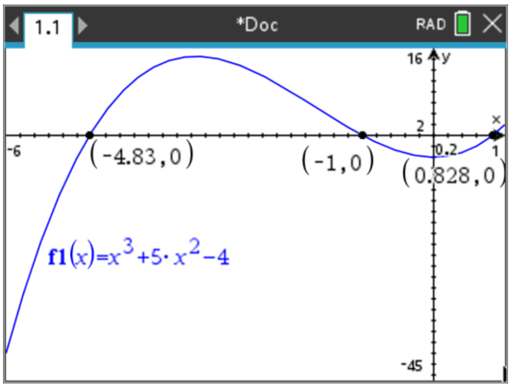
III. Falsa. -5 não é o mínimo absoluto de *f*, pois não pertence ao seu contradomínio.

5. Por exemplo:

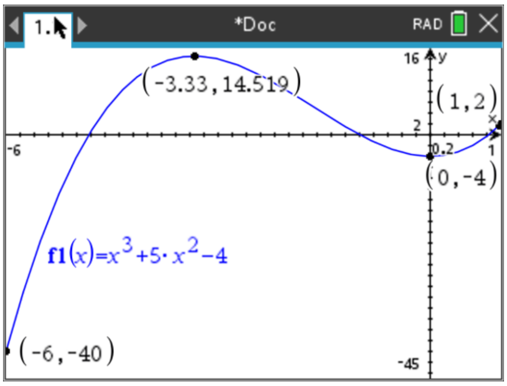


6.

6.1. Zeros: -4,83; -1 e 0,83



6.2.



Mínimos relativos: - 4 e -40

Máximos relativos: 2 e 14,52

Mínimo absoluto: - 40

Máximo absoluto: 14,52

6.3. f é crescente em $[-6;\ -3{,}33]$ e em $[0;\ 1]$.

7.

7.1.

● Zeros de f: $]-3,-1[\cup\{3\}$

● Zeros de g: $\{-2,7\}$

7.2.

● Função f: f é negativa em $[-1,3[$; f é positiva em $[-7,-3]\cup]3,4[$; f é nula em $]-3,-1[\cup\{3\}$

● Função g: g é negativa em $]-4,-2[\cup]3,7[$; g é positiva em $]-\infty,-4[\cup]-2,3]\cup]7,+\infty[$; g é nula em $\{-2,7\}$

7.3.

● Função f:

Mínimos relativos: -4 e 0

Mínimo absoluto: -4

Máximos relativos: 0 e 5

Máximo absoluto: 5

● Função g:

Mínimos relativos: -2 e 4

Mínimo absoluto: não tem

Máximo relativo: 4

Máximo absoluto: não tem

7.4.

● Função f: f é decrescente em $[-7,3]$ e em $[-1\ 1]$; f é crescente em $[1,4[$; f é constante em $]-3,-1[$

● Função g: g é decrescente em $]-\infty,-4[$ e em $[3,6[$; g é crescente em $]-4,0]\cup[6,+\infty[$; g é constante em $[0,3]$.

8.1. O valor máximo da distância corresponderá ao comprimento da diagonal [AC] do retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

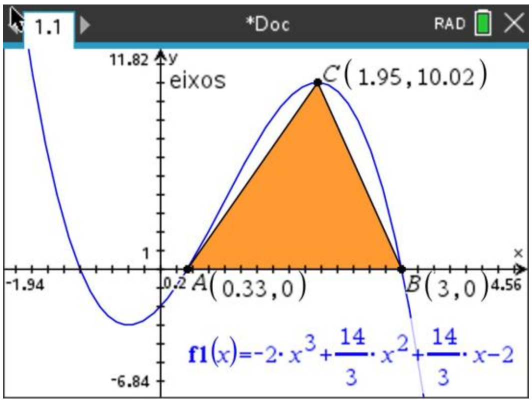
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=10^2+4^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=100+16 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=116 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC}=\sqrt{116} \Leftrightarrow \overline{AC}=2\sqrt{29}$$

O valor mínimo da distância entre os pontos A e P será o valor do comprimento do lado [AD], ou seja, 4 cm.

O máximo absoluto da função d é $2\sqrt{29}$ cm e o mínimo absoluto é 4 cm.

8.2. O gráfico que descreve a situação é o III. A distância inicial do ponto P ao ponto A é igual ao comprimento do lado [AB], ou seja, 10. À medida que o ponto P se move sobre o lado [BC] a referida distância vai aumentando até ao valor máximo de $2\sqrt{29}$ cm (aproximadamente 10,77 cm). À medida que o ponto se desloca de C para D a distância do ponto P ao ponto A vai diminuindo até ao valor mínimo de 4 cm, o qual corresponde à medida do lado [AD] do retângulo.

9.



Recorrendo à calculadora gráfica temos que:

A(0,33; 0); *B*(3, 0); *C*(1,95; 10,02)

Assim, a área do triângulo [*ABC*] é dada por:

$$A = \frac{\overline{AB} \times y_C}{2} = \frac{(3 - 0{,}33) \times 10{,}02}{2} \approx 13{,}38$$

FICHA 12 – FUNÇÃO AFIM

1.

1.1. $f\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{4}{3} \times \frac{9}{2} + 5 = -6 + 5 = -1$

R.: -1

1.2. $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x + 5 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = \frac{5}{2} - 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = \frac{5}{2} - \frac{10}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}$

R.: $\frac{15}{8}$

1.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x + 5 = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = -5 \Leftrightarrow x = -5 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$

R.: $\frac{15}{4}$

2.

2.1. 2 km = 2000 m

$$f(2000) = 15 - \frac{1}{100} \times 2000 = 15 - 20 = -5$$

R.: -5 ℃

2.2. $f(0) = 15 - \frac{1}{100} \times 0 = 15 - 0 = 15$

R.: 15 ℃

2.3. O coeficiente de a é $-\frac{1}{100}$ e representa a variação da temperatura por cada metro de variação da altitude a que o drone se encontra, ou seja, por cada metro de aumento de altitude, a temperatura baixa uma centésima de grau.

3. A reta que representa graficamente a função f tem, num referencial cartesiano e monométrico, declive igual à ordenada na origem e, portanto, tem de ter o mesmo sinal. Ora, a reta r tem declive negativa e ordenada na origem positiva e a reta s tem declive positivo e ordenada na origem negativa, pelo que nenhuma das duas pode representar graficamente a função f.

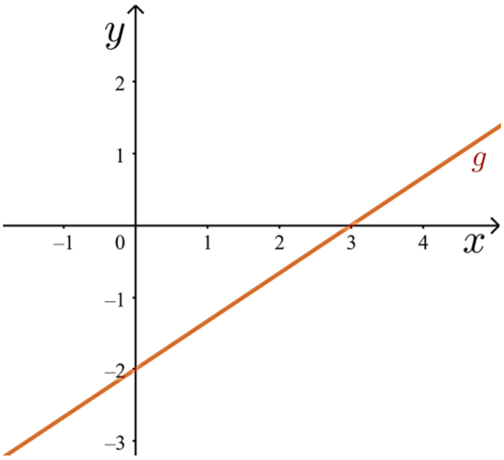
4.

4.1.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 5 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -5 \Leftrightarrow x = -5 \times (-3) \Leftrightarrow x = 15$

A função f é positiva em $]-\infty, 15[$ e negativa em $]15, +\infty[$.

A função f é estritamente decrescente.



A função g é negativa em $]-\infty, 3[$ e positiva em $]3, +\infty[$.

A função g é estritamente crescente.

4.2.

$g(x) = ax - 2$

$g(3) = 0 \Leftrightarrow a \times 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}x - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + \frac{15}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x = -\frac{6}{3} - \frac{15}{3} \Leftrightarrow -\frac{3}{3}x = -\frac{21}{3} \Leftrightarrow -3x = -21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-21}{-3} \Leftrightarrow x = 7$

$f(7) = -\frac{1}{3} \times 7 + 5 = -\frac{7}{3} + 5 = -\frac{7}{3} + \frac{15}{3} = \frac{8}{3}$

R.: $\left(7, \frac{8}{3}\right)$

5.

5.1. A função f é decrescente e -2 é zero da função, logo, todos os objetos menores do que -2 têm imagem positiva e todos os objetos maiores do que -2 têm imagem negativa.

R.: A função f tem um único zero, -2, é positiva em $]-\infty, -2[$ e negativa em $]-2, +\infty[$.

5.2. Tendo em conta o que foi referido na alínea **5.1.**, conclui-se que, das quatro opções dadas, apenas o ponto de coordenadas $(-3{,}5)$ pertence ao gráfico de f.

R.: (B)

6.

6.1. Para a função ser negativa em todo o seu domínio todos os objetos têm a mesma imagem que tem de ser negativa. Assim,

- f tem de ser constante e, portanto, $2k - 1 = 0$
  $2k - 1 = 0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

- em particular, $f(0)$ tem de ser negativo.
  $f(0) < 0 \Leftrightarrow 1 - 4k < 0 \Leftrightarrow 1 < 4k \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k$

Como $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, o valor de k terá de ser $\frac{1}{2}$.

R.: $k = \frac{1}{2}$

6.2. Para a função ser decrescente o declive da reta que a representa num referencial cartesiano tem de ser negativo. Assim, $2k - 1 < 0$

$2k - 1 < 0 \Leftrightarrow 2k < 1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2}$

R.: $k \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

7.

7.1. $f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} f(3) = -5 \\ f(-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 3 + b = -5 \\ a \times (-3) + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 1 + 3a = -5 \\ b = 1 + 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = -5 - 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = -6 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-6}{6} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 + 3 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ b = 1 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

R.: $f(x) = -x - 2$

7.2. $f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(5) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 2 + b = 0 \\ a \times 5 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2 - 5a = 0 \\ b = 2 - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{-3} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 2 - 5 \times \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ b = 2 - \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

R.: $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

7.3. A função f é uma função afim que não tem zeros, logo, é uma função constante.
Assim, como a imagem de 7 é -2, todas as imagens são iguais a -2 e, portanto,
$f(x) = -2$.
R.: $f(x) = -2$

8.

8.1. $f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} f(20) = -120 \\ f(50) = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 20 + b = -120 \\ a \times 50 + b = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a + 210 - 50a = -120 \\ b = 210 - 50a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -30a = -120 - 210 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30a = -330 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-330}{-30} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 210 - 50 \times 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ b = 210 - 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -340 \end{cases}$$

$f(x) = 11x - 340$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 11x - 340 = 0 \Leftrightarrow 11x = 340 \Leftrightarrow x = \frac{340}{11}$$

$x \approx 30{,}9$
R.: 31 camisolas

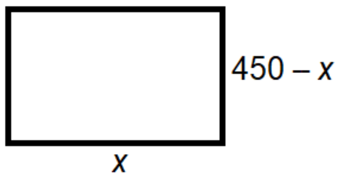
8.2. $f(100) = 11 \times 100 - 340 = 1100 - 340 = 760$
R.: 760 €

FICHA 13 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

1.

1.1. Seja x o comprimento, em metros, de um dos lados do terreno.

Como o perímetro do terreno é 900 metros, a soma dos comprimentos de dois lados consecutivos é $450\ metros$.



Seja A a função que faz corresponder a cada valor de x a área do terreno, então:

$$A(x) = x(450 - x)$$

Cálculo da abcissa do vértice da parábola que contém a representação gráfica da função A:

$x(450 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 450 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 450$

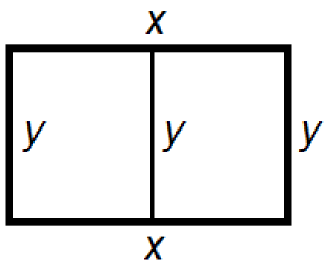
$x_V = \dfrac{0 + 450}{2} = 225$

$450 - 225 = 225$

Assim, o terreno de área máxima é aquele que é um quadrado de lado com $\underline{225\ metros}$ de comprimentos.

R.: 225 metros por 225 metros.

1.2. Seja x, em metros, o comprimento de um dos lados do terreno e y o comprimento, em metros, do outro lado do terreno que será paralelo à divisória.



$2x + 3y = 900 \Leftrightarrow 3y = 900 - 2x \Leftrightarrow y = \dfrac{900 - 2x}{3} \Leftrightarrow y = 300 - \dfrac{2x}{3}$

Seja B a função que faz corresponder a cada valor de x a área do terreno, então:

$$B(x) = x\left(300 - \frac{2x}{3}\right)$$

Cálculo da abcissa do vértice da parábola que contém a representação gráfica da função B:

$x\left(300-\frac{2x}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 300-\frac{2x}{3}=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 300=\frac{2x}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 450=x$

$x_V=\frac{0+450}{2}=225$

$y=300-\frac{2\times 225}{3}=300-150=150$

Assim, o terreno de área máxima é aquele que é um retângulo de lados com 225 metros e 150 metros de comprimento, colocando a divisória paralela ao menor dos lados.

2.

$f(2)=2\times 2+8=12$

$g(2)=12 \Leftrightarrow a\times 2^2=12 \Leftrightarrow a\times 4=12 \Leftrightarrow a=\frac{12}{4} \Leftrightarrow a=3$

$g(x)=3x^2$

A função g é representada graficamente num referencial cartesiano por uma parábola de vértice na origem do referencial e com a concavidade voltada para cima.

Assim, a função g:

tem um único zero, que é 0, e é positiva em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

é decrescente em $\mathbb{R}_0^-$ e crescente em $\mathbb{R}_0^+$ e 0 é o seu mínimo absoluto.

3.

3.1. A representação gráfica da função g obtém-se fazendo uma translação de 8 $unidades$ para cima da representação gráfica da função f.

A representação gráfica da função h obtém-se fazendo uma translação de 13 $unidades$ para a esquerda da representação gráfica da função f.

A representação gráfica da função i obtém-se fazendo uma translação de 6 $unidades$ para a direita da representação gráfica da função f.

A representação gráfica da função j obtém-se fazendo uma translação de 3 $unidades$ para baixo da representação gráfica da função f.

3.2. $D'_f=[0,+\infty[\,;D'_g=[8,+\infty[\,;D'_h=[0,+\infty[\,;D'_i=[0,+\infty[\,;D'_j=[-3,+\infty[$

4.

4.1. Concavidade voltada para baixo ($a=-3$).

4.2. Concavidade voltada para cima ($a=7$).

4.3. Concavidade voltada para cima ($a=1$).

4.4. Concavidade voltada para cima ($a=1$).

4.5. Concavidade voltada para baixo ($a=-2$).

4.6. Concavidade voltada para baixo ($a=-1$).

5. $f-3\,;g-7\,;h-4\,;i-9\,;j-1\,;k-6\,;l-5\,;m-2\,;n-8$

As funções *j* e *m* são representadas por parábolas com o mesmo vértice (-5, 0), sendo que a que representa a função j será mais aberta do que a que representa a função m. Assim, a função j é representada pela parábola 1 e a função m é representada pela parábola 2.

A função *f* é representada por uma parábola de vértice em (0, 0), voltada para cima, logo, é representada pela parábola 3.

A função *h* é representada por uma parábola de vértice em (0, 1), voltada para cima, logo, é representada pela parábola 4.

A função *l* é representada por uma parábola de vértice em $\left(\frac{9}{2},-2\right)$, voltada para cima, logo, é representada pela parábola 5.

A função *k* é representada por uma parábola de vértice em (-4, -1), voltada para baixo, logo, é representada pela parábola 6.

A função *g* é representada por uma parábola de vértice em (0, 0), voltada para baixo, logo, é representada pela parábola 7.

A função *n* é representada por uma parábola de vértice em $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$, voltada para baixo, logo, é representada pela parábola 8.

A função *i* é representada por uma parábola de vértice em $(3,0)$, voltada para baixo, logo, é representada pela parábola 9.

6.
6.1.

	Parábola que representa graficamente a função		
Função	**Vértice**	**Equação eixo de simetria**	**Sentido da concavidade**
f	$(3, 1)$	$x=3$	voltada para cima
g	$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$	$x=-1$	voltada para cima
h	$(0,-1)$	$x=0$	voltada para baixo

6.2. $D'_f=[1,+\infty[\,;D'_g=\left[-\frac{2}{3},+\infty\right[\,;D'_h=]-\infty,-1]$

6.3.

● A função f é positiva em todo o seu domínio.

● $g(x)=0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=\frac{2}{3} \Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x+1=-\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x+1=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=-1-\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x=\frac{1}{\sqrt{3}}-1 \Leftrightarrow x=-1-\frac{\sqrt{3}}{3} \vee$

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-1$

A função g é positiva em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}-1,+\infty\right[$ e negativa em $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}-1,\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right[$.

● A função h é negativa em todo o seu domínio.

6.4. A função f é decrescente em $]-\infty,3]$, crescente em $[3,+\infty[$ e o seu mínimo absoluto é 1.
A função g é decrescente em $]-\infty,-1]$, crescente em $[-1,+\infty[$ e o seu mínimo absoluto é $-\frac{2}{3}$.
A função h é crescente em $]-\infty,0]$, decrescente em $[0,+\infty[$ e o seu máximo absoluto é -1.

7.

$f(x)=ax^2-4$

$f(-4)=0 \Leftrightarrow a\times(-4)^2-4=0 \Leftrightarrow 16a=4 \Leftrightarrow a=\frac{4}{16} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-4$

$g(x)=a(x+4)^2$

$g(0)=-4 \Leftrightarrow a\times(0+4)^2=-4 \Leftrightarrow a\times 16=-4 \Leftrightarrow a=\frac{-4}{16} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$

$g(x)=-\frac{1}{4}(x+4)^2$

$h(x)=a(x-2)^2+1$

$h(0)=3 \Leftrightarrow a\times(0-2)^2+1=3 \Leftrightarrow a\times 4=3-1 \Leftrightarrow 4a=2 \Leftrightarrow a=\frac{2}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

$h(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

R.: $f(x)=\frac{1}{4}x^2-4$; $g(x)=-\frac{1}{4}(x+4)^2$; $h(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

8. Seja f uma função cuja representação gráfica coincide, no seu domínio, com a trajetória do repuxo de água.

$x_V=(1,2)$

$f(x)=a(x-1)^2+2$

$f(3)=0 \Leftrightarrow a(3-1)^2+2=0 \Leftrightarrow a\times 4+2=0 \Leftrightarrow 4a=-2 \Leftrightarrow a=\frac{-2}{4} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

$f(0)=-\frac{1}{2}(0-1)^2+2=-\frac{1}{2}\times 1+2=-\frac{1}{2}+2=-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$

R.: 1,5 metros

9.

9.1.

● $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$

$x_V = \dfrac{6+(-2)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$f(2) = 3 \times (2+2) \times (2-6) = 3 \times 4 \times (-4) = -48$

$V(2, -48)$

● $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

$x_V = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{2} = \dfrac{\frac{5}{6}}{2} = \dfrac{5}{12}$

$g\left(\frac{5}{12}\right) = -\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{5}{12}-\frac{4}{12}\right) \times \left(\frac{5}{12}-\frac{6}{12}\right) =$

$= -\left(\dfrac{1}{12}\right) \times \left(-\dfrac{1}{12}\right) = \dfrac{1}{144}$

$V\left(\dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{144}\right)$

	Parábola que representa graficamente a função		
Função	Vértice	Equação eixo de simetria	Sentido da concavidade
f	$(2, -48)$	$x = 2$	voltada para cima
g	$\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{144}\right)$	$x = \frac{5}{12}$	voltada para baixo

9.2. $D'_f = [-48, +\infty[\,;\, D'_g = \left]-\infty, \frac{1}{144}\right]$

9.3.

A função f é positiva em $]-\infty, -2[\, \cup\,]6, +\infty[$ e negativa em $]-2, 6[$.

A função g é negativa em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e positiva em $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.

9.4. A função f é decrescente em $]-\infty, 2]$, crescente em $[2, +\infty[$ e o seu mínimo absoluto é -48.

A função g é crescente em $\left]-\infty, \frac{5}{12}\right]$, decrescente em $\left[\frac{5}{12}, +\infty\right[$ e o seu máximo absoluto é $\frac{1}{144}$.

10.

10.1. Se a bola atingiu a altura máxima 3 $segundos$ depois de ter sido atirada a partir do solo, então vai regressar ao solo 3 $segundos$ depois de ter atingido a altura máxima. Assim, volta a atingir o solo 6 $segundos$ depois de ter sido atirada a partir do solo.

R.: 6 $segundos$

10.2. $h(t) = at(t-6)$

$h(3) = 44{,}1 \Leftrightarrow a \times 3 \times (3-6) = 44{,}1 \Leftrightarrow a \times 3 \times (-3) = 44{,}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \times (-9) = 44{,}1 \Leftrightarrow a = \dfrac{44{,}1}{-9} \Leftrightarrow a = -4{,}9$

R.: $h(t) = -4{,}9t(t-6)$, os valores de α e de β são 0 e 6 e correspondem aos instantes, em segundos, em que a bola se encontrava no solo.

11.

11.1.

● $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -3 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 2$

$x_V = \dfrac{0+2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

$f(x) = (x-1)^2 - 4$

● $g(x) = 28 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 28 = 28 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 28 - 28 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 10$

$x_V = \dfrac{0+10}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

$g(5) = 5^2 - 10 \times 5 + 28 = 25 - 50 + 28 = -25 + 28 = 3$

$g(x) = (x-5)^2 + 3$

● $h(x) = 4 \Leftrightarrow -4x^2 + 4x + 4 = 4 \Leftrightarrow -4x^2 + 4x = 4 - 4 \Leftrightarrow -4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(-4x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee -4x = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-4}{-4} \Leftrightarrow x = 1$

$x_V = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$h\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \dfrac{1}{2} + 4 = -1 + 2 + 4 = 5$

$h(x) = -4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 5$

11.2.

● $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{4} \ \Leftrightarrow \ x - 1 = \pm 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x - 1 = -2 \vee x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = -2 + 1 \vee x = 2 + 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

A função f é positiva em $]-\infty, -1[\, \cup\,]3, +\infty[$ e negativa em $]-1{,}3[$.

● $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = -3$ Equação impossível

A função g é positiva em $\mathbb{R}$.

● $h(x) = 0 \Leftrightarrow -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{-5}{-4} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{5}{4}} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

A função h é negativa em $\left]-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$ e positiva em $\left]\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$.

12.

Seja f a função afim representada graficamente pela reta AB.

$f(x) = ax + 5$

$f(3) = 0 \Leftrightarrow a \times 3 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$

$f(x) = -\frac{5}{3}x + 5$

$P\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right)$

Seja a a função que faz corresponder a cada valor de x a área do retângulo $[ORPQ]$.

$a(x) = x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right)$

$a(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ -\frac{5}{3}x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -\frac{5}{3}x = -5 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow x = 0 \vee \ x = 3$

$x_V = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

$y_V = a\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{3} \times \frac{3}{2} + 5\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2} + 5\right) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$

$\overline{OQ} = \frac{3}{2}$

$\overline{PQ} = -\frac{5}{3} \times \frac{3}{2} + 5 = -\frac{5}{2} + 5 = \frac{5}{2}$

R.: O retângulo pode ter no máximo $\frac{15}{4}$ de área e tal acontece quando $\overline{OQ} = \frac{3}{2}$ e $\overline{PQ} = \frac{5}{2}$.

13.

A soma do perímetro do quadrado com o perímetro do círculo é igual a 1 m.

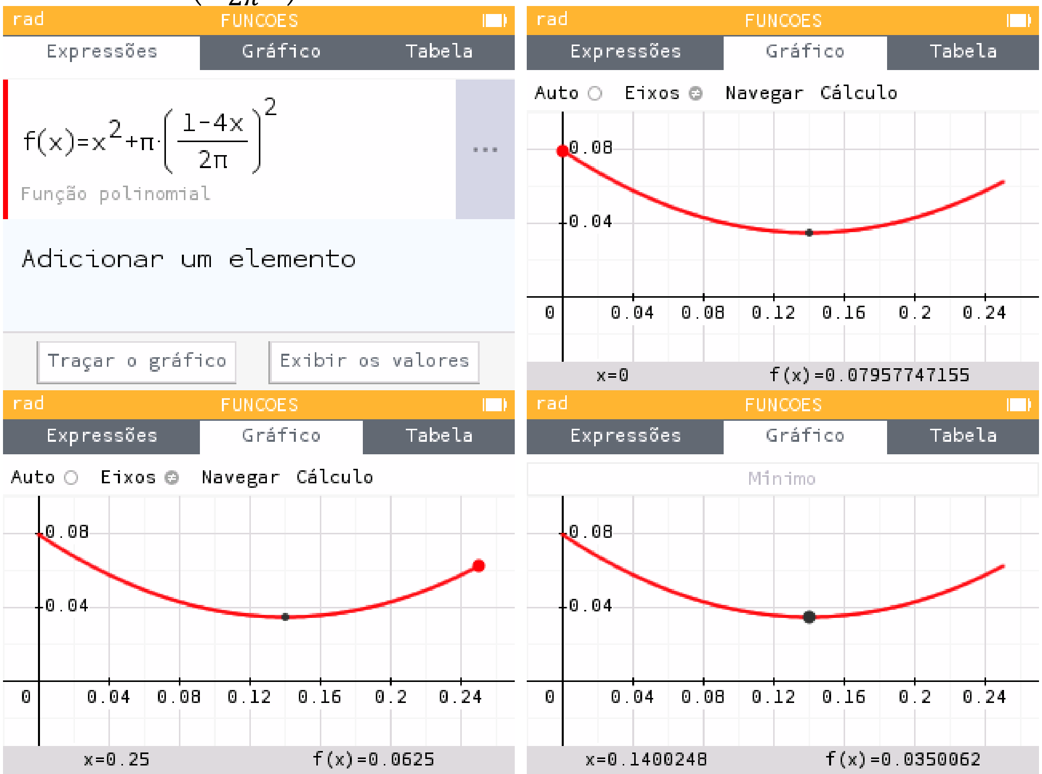
Seja x o comprimento do lado do quadrado e r o raio do círculo.

O perímetro do quadrado é dado por $4x$ e o perímetro do círculo é dado por $1-4x$.

$2\pi r = 1-4x \Leftrightarrow r = \dfrac{1-4x}{2\pi}$

Seja f a função que faz corresponder a cada valor de x no intervalo $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ a soma das áreas do círculo e do quadrado.

$f(x) = x^2 + \pi\left(\dfrac{1-4x}{2\pi}\right)^2$



Quando x é aproximadamente 0,1400 , a função f atinge o seu mínimo absoluto.

$P_{\text{quadrado}} \approx 4 \times 0{,}1400 = 0{,}56$

$P_{\text{círculo}} = 1 - P_{\text{quadrado}} = 1 - 0{,}5600 = 0{,}44$

R.: O perímetro do quadrado é 0,56 e o perímetro do círculo é 0,44.

FICHA 14 – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 2.º GRAU

1.

1.1. $3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm4}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-2-4}{6} \lor x=\frac{-2+4}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-6}{6} \lor x=\frac{2}{6} \Leftrightarrow x=-1 \lor x=\frac{1}{3}$

$S=\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$

1.2. $2x^2+4=9x \Leftrightarrow 2x^2-9x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\times2\times4}}{2\times2} \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{9\pm7}{4} \Leftrightarrow x=\frac{9-7}{4} \lor x=\frac{9+7}{4} \Leftrightarrow x=\frac{2}{4} \lor x=\frac{16}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \lor x=4$

$S=\left\{\frac{1}{2},4\right\}$

1.3. $x^2+9=12x-3x^2 \Leftrightarrow x^2+3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\times4\times9}}{2\times4} \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{0}}{8} \Leftrightarrow x=\frac{12\pm0}{8} \Leftrightarrow x=\frac{12}{8} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

1.4. $2x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\times2\times3}}{2\times2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{4}$

$S=\emptyset$

1.5. $3(x-1)-5=x^2-3x \Leftrightarrow 3x-3-5=x^2-3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+3x+3x-3-5=0 \Leftrightarrow -x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-8)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow\Leftrightarrow x=$
$\frac{-6\pm\sqrt{4}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm2}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-6-2}{-2} \lor x=\frac{-6+2}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-8}{-2} \lor x=\frac{-4}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4 \lor x=2$

$S=\{2,4\}$

1.6. $x^2-\frac{x-3}{3}=10-\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{3x^2}{3}-\frac{x}{3}+\frac{3}{3}=\frac{30}{3}-\frac{x}{3} \Leftrightarrow 3x^2-x+3=30-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-x+x+3-30=0 \Leftrightarrow 3x^2-27=0 \Leftrightarrow 3x^2-27=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pm\sqrt{0^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pm6}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-6}{2} \lor x=\frac{6}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-3 \lor x=3$

$S=\{-3,3\}$

Ou, sem recurso à fórmula resolvente...

$x^2-\frac{x-3}{3}=10-\frac{x}{3}\Leftrightarrow\frac{3x^2}{3}-\frac{x}{3}+\frac{3}{3}=\frac{30}{3}-\frac{x}{3}\Leftrightarrow 3x^2-x+3=30-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-x+x+3-30=0\Leftrightarrow 3x^2-27=0\Leftrightarrow 3x^2-27=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=\pm 3$

$S=\{-3,3\}$

2.

2.1. $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 1=16-4=8>0$

A função f tem 2 zeros.

R.: 2

2.2. $g(x)=0\Leftrightarrow 7x^2-\frac{x}{2}+1=0$

$\Delta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\times 7\times 1=\frac{1}{4}-28<0$

A função f não tem zeros.

R.: 0

2.3. $h(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0$

$\Delta=(-12)^2-4\times 4\times 9=144-144=0$

A função f tem um zero.

R.: 1

2.4. $i(x)=0\Leftrightarrow -7x^2+53x=0$

$\Delta=53^2-4\times(-7)\times 0=53^2>0$

A função f tem 2 zeros.

R.: 2

3.

3.1. $k-3=0\Leftrightarrow k=3$

R.: 3

3.2. Na alínea 3.1. já vimos que para f ser uma função quadrática k não pode ser 3.

Se a parábola não interseta o eixo Ox, então a função f não tem zeros e, portanto, $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4 \times (k-3) \times 1 < 0 \Leftrightarrow 4 - 4k + 12 < 0 \Leftrightarrow 16 < 4k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16}{4} < k \Leftrightarrow 4 < k$

R.: $k \in]4, +\infty[$

3.3. A reta que representa a função g é tangente à parábola que representa a função f, logo, os gráficos das duas funções intersetam-se num único ponto e, portanto, a equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (k-3)x^2 - 2x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow (k-3)x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4 \times (k-3) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow 9 + 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

R.: $\frac{3}{4}$

4.

4.1. Cada uma das n equipas joga em casa com as outras $n-1$ equipas.

Assim, $j(n) = n(n-1) = n^2 - n$.

4.2. $j(10) = 10^2 - 10 = 100 - 10 = 90$

R.: 90

4.3. $j(n) = 240 \Leftrightarrow n^2 - n = 240 \Leftrightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-240)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{961}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 31}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1-31}{2} \vee n = \frac{1+31}{2} \Leftrightarrow$

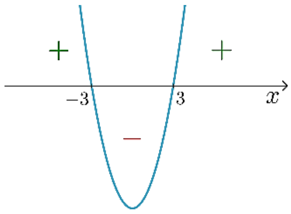
$\Leftrightarrow n = \frac{-30}{2} \vee n = \frac{32}{2} \Leftrightarrow n = -15 \vee n = 16$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 16$.

R.: 16

5.

5.1. $x^2 - 9 < 0$



$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

$S =]-3{,}3[$

5.2. $(x-5)^2 \geq 0$

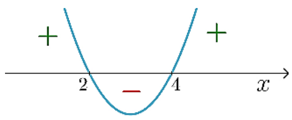
O quadrado de qualquer número real é não inferior a zero, logo, $S = \mathbb{R}$.

5.3. $x^2 + 8 \leq 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\times 1\times 8}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6\pm 2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6-2}{2} \vee x = \frac{6+2}{2} \Leftrightarrow$

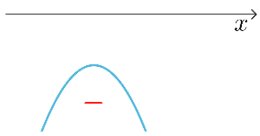
$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \vee x = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$



$S = [2{,}4]$

5.4. $x - x^2 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow -x^2 + x - \frac{3}{2} > 0$

$-x^2 + x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

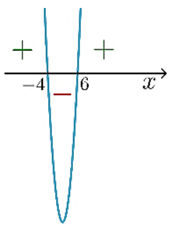


$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-6}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{-5}}{2}$

$S = \emptyset$

5.5. $2(x-1)^2 < 50 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 - 50 < 0$

$2(x-1)^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 50 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 25 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x - 1 = \pm 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = -5 \vee x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = -5 + 1 \vee x = 5 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 6$

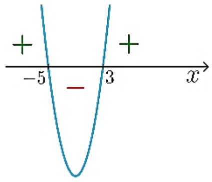
$S =]-4{,}6[$

5.6. $(x-3)(x+5) \geq 0$

$(x-3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \vee x+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$

$S =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$



6. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + mx - 2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 + mx - 2x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m - 2 = 0$

6.1. A reta r é tangente à parábola, logo, os gráficos das funções f e g intersetam-se num único ponto e, portanto, a equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + mx - 2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 + mx - 2x - 2 + m = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m - 2 = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (m-2) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \frac{8 \pm 4}{2} \Leftrightarrow m = \frac{8-4}{2} \vee m = \frac{8+4}{2} \Leftrightarrow m = \frac{4}{2} \vee m = \frac{12}{2} \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 6$

R.: $m \in \{2,6\}$

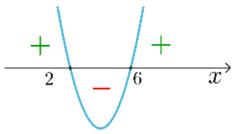
6.2. A reta r não interseta a parábola, logo, os gráficos das funções f e g não se intersetam e, portanto, a equação $f(x) = g(x)$ não tem soluções.

Pela alínea 6.1.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m - 2 = 0$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (m-2) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m + 8 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 < 0$

$m^2 - 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 6$ (ver resolução de **6.1.**)



R.: $m \in]2,6[$

7.

7.1. $D_a =]0,5]$

7.2. $a(x) = A_{[ABCD]} - A_{[PBQR]} = 8 \times 5 - x^2 = 40 - x^2 = -x^2 + 40$

7.3. A função a não tem máximo. A área sombreada aproxima-se de 40 à medida que o ponto P se aproxima do ponto B, mas, como o ponto P nunca coincide com o ponto B, a área do retângulo é tão próxima de 40 quando quisermos, mas nunca é 40.

O valor mínimo da área da parte sombreada é $40 - 5^2 = 40 - 25 = 15$, que se obtém quando a área do quadrado $[PBQR]$ é máxima.

R.: A função a não tem máximo. O mínimo absoluto da função a é 15.

7.4. $a(x) \geq 20 \Leftrightarrow -x^2 + 40 \geq 20 \Leftrightarrow$

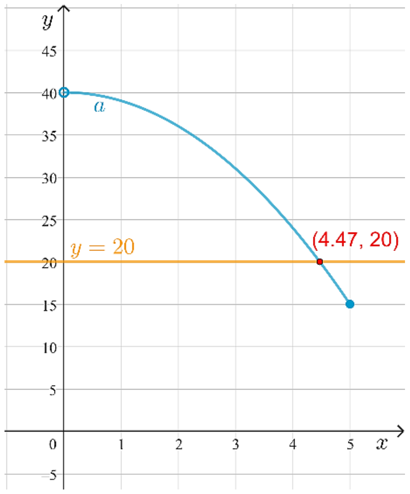
$\Leftrightarrow -x^2 + 40 - 20 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 20 \geq 0$

$-x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -20 \Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{20}$

Notar que $x \in]0,5]$

R.: $\left]0, \sqrt{20}\,\right]$



FICHA 15 – FUNÇÃO DEFINIDA POR RAMOS. FUNÇÃO MÓDULO

1.

1.1.

- $x \leq 0$

$f(x) = ax$

$f(-2) = -2 \Leftrightarrow a \times (-2) = -2 \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = x$

- $0 < x \leq 2$

$f(x) = ax^2$

$f(2) = 4 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 4 \Leftrightarrow a \times 4 = 4 \Leftrightarrow a = 1$

$f(x) = x^2$

- $x > 2$

$f(x) = 4$

Resposta: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

1.2. $D'_f =]-\infty, 4]$

1.3. A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e constante em $[2, +\infty[$.

f não tem mínimos relativos e 4 é o único máximo relativo de f que é também máximo absoluto da função.

2.

2.1.

a) $f(-4) = 1 - (-4+4)^2 = 1 - 0^2 = 1 - 0 = 1$

b) $f(-2) = 1 - (-2+4)^2 = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$

c) $f(0) = -3$

d) $f(2) = 2 - 2 = 0$

e) $f(5) = 2 - 5 = -3$

2.2.

a)

- $x \leq -2$

$f(x) = -3 \Leftrightarrow 1 - (x+4)^2 = -3 \Leftrightarrow -(x+4)^2 = -3 - 1 \Leftrightarrow -(x+4)^2 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 4 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x + 4 = \pm 2 \Leftrightarrow x + 4 = -2 \vee x + 4 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 - 4 \vee x = 2 - 4 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = -2$

-6 e -2 pertencem ao intervalo considerado.

- $-2 < x < 2$

$f(x) = -3$ para qualquer valor de x no intervalo considerado.

- $x \geq 2$

$f(x) = -3 \Leftrightarrow 2 - x = -3 \Leftrightarrow -x = -3 - 2 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$

5 pertence ao intervalo considerado.

Resposta: $x \in [-2{,}2[\cup \{-6{,}5\}$

b)

- $x \leq -2$

$f(x) = -8 \Leftrightarrow 1 - (x+4)^2 = -8 \Leftrightarrow -(x+4)^2 = -8 - 1 \Leftrightarrow -(x+4)^2 = -9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 9 \Leftrightarrow x + 4 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x + 4 = \pm 3 \Leftrightarrow x + 4 = -3 \vee x + 4 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3 - 4 \vee x = 3 - 4 \Leftrightarrow x = -7 \vee x = -1$

-7 pertence ao intervalo considerado. -1 não pertence ao intervalo considerado.

- $-2 < x < 2$

$f(x) = -3 \neq -8$ para qualquer valor de x no intervalo considerado.

- $x \geq 2$

$f(x) = -8 \Leftrightarrow 2 - x = -8 \Leftrightarrow -x = -8 - 2 \Leftrightarrow -x = -10 \Leftrightarrow x = 10$

10 pertence ao intervalo considerado.

Resposta: $x \in \{-7{,}10\}$

2.3.

$f(x) = 0$

- $x \leq -2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - (x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow -(x+4)^2 = -1 \Leftrightarrow (x+4)^2 = \dfrac{-1}{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 4 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x + 4 = \pm 1 \Leftrightarrow x + 4 = -1 \vee x + 4 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 - 4 \vee x = 1 - 4 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -3$

-5 e -3 pertencem ao intervalo considerado.

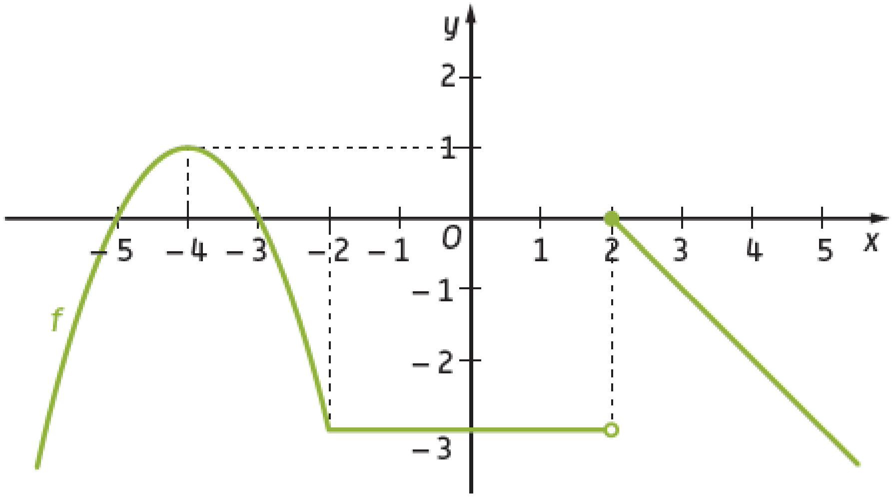
- $-2 < x < 2$

$f(x) \neq 0$ para qualquer valor de x no intervalo considerado.

- $x \geq 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$

2 pertence ao intervalo considerado.



2.4.

x	$-\infty$	-5		-3		2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

2.5. A função f é:

- estritamente crescente em $]-\infty, -4]$;
- estritamente decrescente em $[-4, -2]$ e em $[2, +\infty[$;
- constante em $[-2,2[$.

3.

3.1.

- $0 \leq x \leq 8$

$f(x) = ax$

$f(8) = 2 \Leftrightarrow a \times 8 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{8} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{4}x$ ou seja

$f(x) = \frac{x}{4}$

- $8 < x \leq k, k \in \mathbb{R}$

$f(x) = a(x - 9{,}8)^2 + 2{,}25$

$f(8) = 2 \Leftrightarrow a \times (8 - 9{,}8)^2 + 2{,}25 = 2 \Leftrightarrow a \times (-1{,}8)^2 + 2{,}25 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \times 3{,}24 + 2{,}25 = 2 \Leftrightarrow a \times 3{,}24 = 2 - 2{,}25 \Leftrightarrow a \times 3{,}24 = -0{,}25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{0{,}25}{3{,}24} \Leftrightarrow a = -\dfrac{25}{324}$

$f(x) = -\dfrac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 + 2{,}25$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 + 2{,}25 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 = -2{,}25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 9{,}8)^2 = -2{,}25 \times \left(-\dfrac{324}{25}\right) \Leftrightarrow (x - 9{,}8)^2 = 29{,}16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 9{,}8 = \pm\sqrt{29{,}16} \Leftrightarrow x - 9{,}8 = \pm 5{,}4 \Leftrightarrow x - 9{,}8 = -5{,}4 \vee x - 9{,}8 = 5{,}4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -5{,}4 + 9{,}8 \vee x = 5{,}4 + 9{,}8 \Leftrightarrow x = 4{,}4 \vee x = 15{,}2$

R.: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 8 \\ -\frac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 + 2{,}25 & \text{se} \quad 8 < x \leq 15{,}2 \end{cases}$

O ciclista alcançou o solo a 15,2 m do ponto de partida.

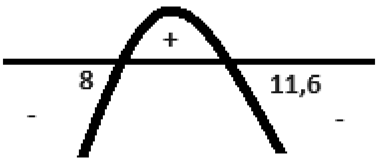
3.2. $f(x) > 2 \Leftrightarrow -\frac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 + 2{,}25 > 2 \Leftrightarrow -\frac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 + 0{,}25 > 0$

$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\dfrac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 + 2{,}25 = 2 \Leftrightarrow -\dfrac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 = 2 - 2{,}25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{25}{324}(x - 9{,}8)^2 = -\dfrac{25}{100} \Leftrightarrow (x - 9{,}8)^2 = \dfrac{324}{100} \Leftrightarrow x - 9{,}8 = \pm\sqrt{3{,}24} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 9{,}8 = \pm 1{,}8 \Leftrightarrow x - 9{,}8 = -1{,}8 \vee x - 9{,}8 = 1{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 9{,}8 - 1{,}8 \vee x = 9{,}8 + 1{,}8 \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 11{,}6$



$f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in]8; 11{,}6[$

$11{,}6 - 8 = 3{,}6$

R.: 3,6 m, aproximadamente.

4.

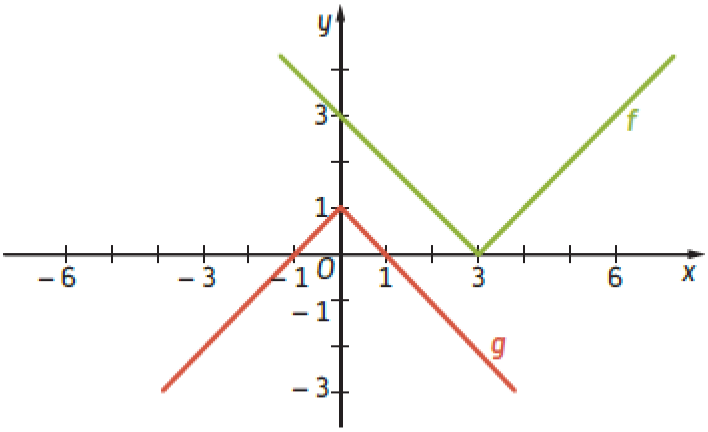
4.1.

- $f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se} \quad x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$

- $g(x) = 1-|x| = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1-(-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1+x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

R.: $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1+x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

4.2.



4.3.

a) $D'_f = [0, +\infty[$; $D'_g =]-\infty, 1]$

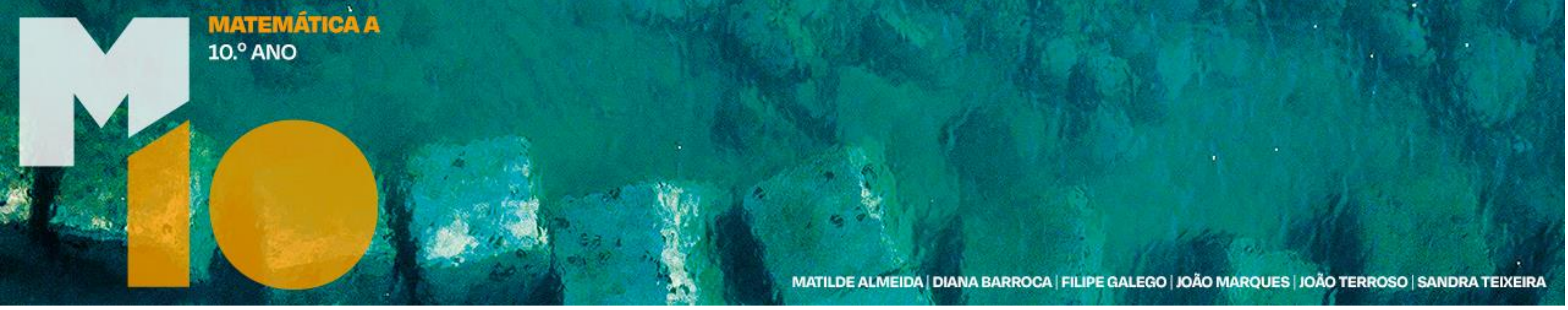
b)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c) A função f é decrescente em $]-\infty, 3]$ e crescente em $[3, +\infty[$.

A função g é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

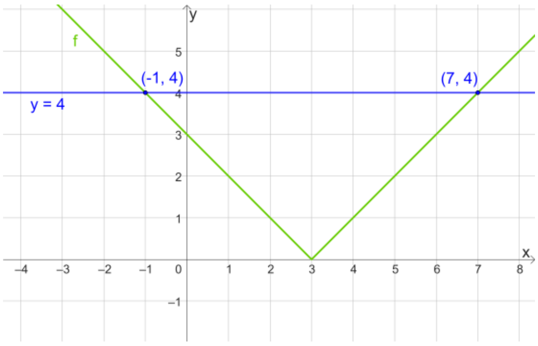


4.4.

a) $f(x) = 4 \Leftrightarrow |x - 3| = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \ \vee \ x - 3 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 + 3 \ \vee \ x = -4 + 3 \Leftrightarrow x = 7 \ \vee \ x = -1$

ou

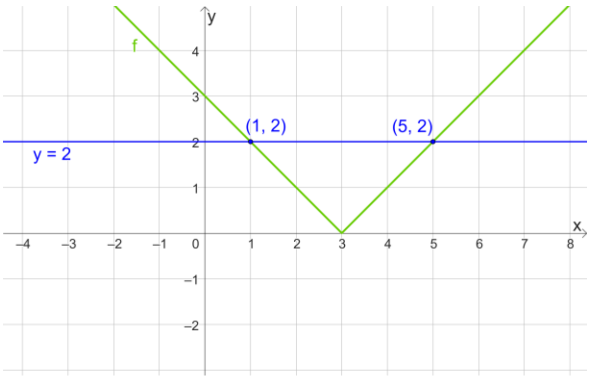


R.: $S = \{-1, 7\}$

b) $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow |x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \ \Leftrightarrow -2 + 3 \leq x \leq 2 + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$

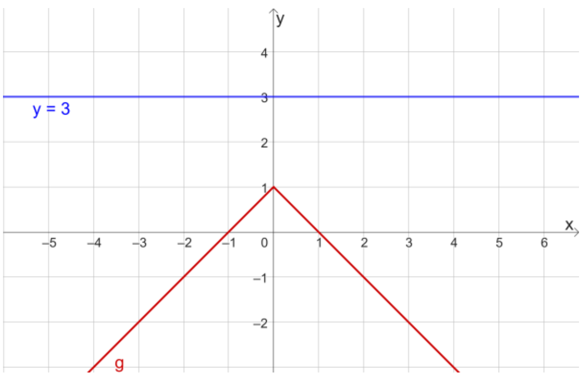
ou



R.: $S = [1,5]$

c) $g(x) < 3 \Leftrightarrow 1 - |x| < 3 \Leftrightarrow -|x| < 3 - 1 \ \Leftrightarrow -|x| < 2 \Leftrightarrow |x| > -2$ Condição universal

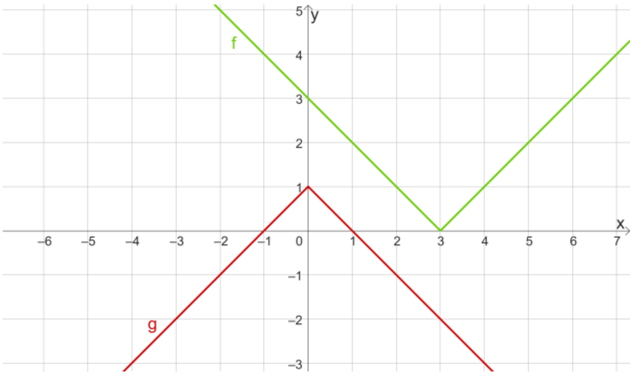
ou



R.: $S = \mathbb{R}$

d) $f(x) \leq g(x)$

As semirretas que constituem a representação gráfica de f e de g são paralelas, duas a duas. Assim, não existem pontos de interseção.



R.: $S = \emptyset$

5.1. $|x| = 17 \Leftrightarrow x = -17 \ \vee \ x = 17$

R.: $S = \{-17, 17\}$

5.2. $|x| + 5 = 0 \Leftrightarrow |x| = -5$

R.: $S = \emptyset$

5.3. $|x - 2| = 7 \Leftrightarrow x - 2 = -7 \ \vee \ x - 2 = 7 \Leftrightarrow x = -7 + 2 \ \vee \ x = 7 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -5 \ \vee \ x = 9$

R.: $S = \{-5, 9\}$

5.4. $2|x + 5| = 3 \Leftrightarrow |x + 5| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x + 5 = -\frac{3}{2} \ \vee \ x + 5 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2} - 5 \ \vee \ x = \dfrac{3}{2} - 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{13}{2} \ \vee \ x = -\dfrac{7}{2}$

R.: $S = \left\{-\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$

5.5. $4\left|x - \frac{7}{2}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| = 0 \Leftrightarrow x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

R.: $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

5.6. $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

R.: $S =]-5, 5[$

5.7. $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$

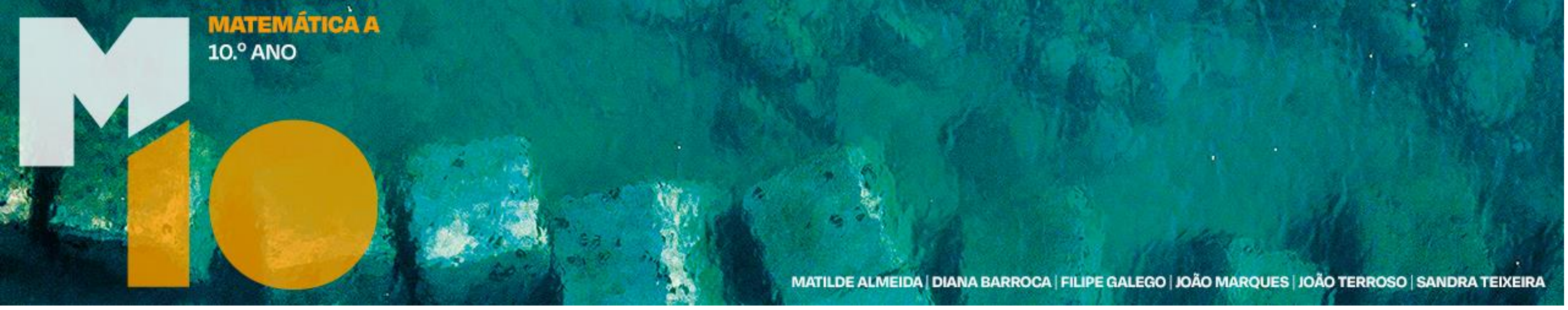
R.: $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

5.8. $|x + 2| + 1 < 0 \Leftrightarrow |x + 2| < -1$

R.: $S = \emptyset$

5.9. $|x - 8| + 3 > 0 \Leftrightarrow |x + 2| > -3$

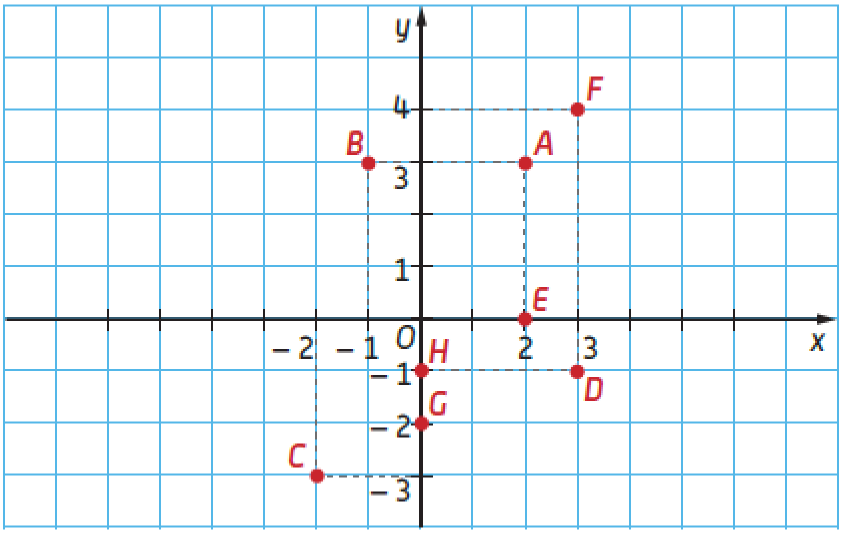
R.: $S = \mathbb{R}$



FICHA 16 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

1.

1.1. Representando o conjunto dos pontos considerados num referencial ortogonal monométrico xOy:



1.2. Um ponto pertence ao 2.º quadrante se a sua abcissa for negativa e a sua ordenada for positiva. O único ponto nestas condições é o ponto B.

1.3. A imagem do ponto A por uma meia-volta de centro na origem é o ponto C.

1.4. As imagens dos pontos A, B e C pela reflexão no eixo das abcissas são:

$$A'(2,-3) \qquad B'(-1,-3) \qquad C'(-2,3)$$

1.5. As imagens dos pontos D, E e F pela reflexão segundo o eixo Oy são:

$$D'(-3,-1) \qquad E'(-2,0) \qquad F'(-3,4)$$

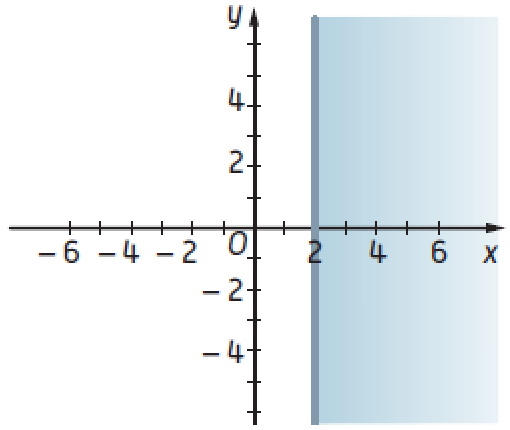
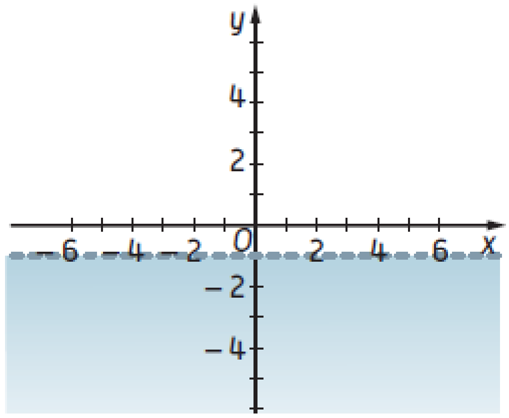
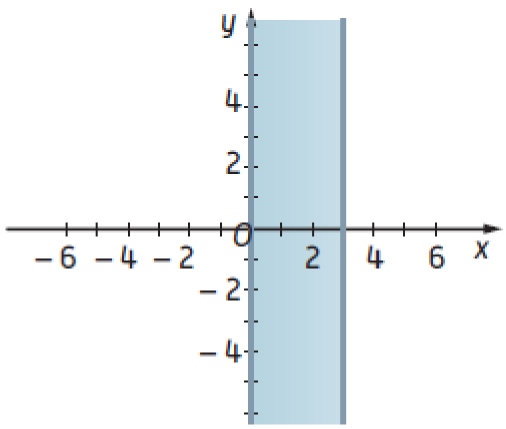
1.6. Tendo em conta as coordenadas dos pontos A e B, ambos os pontos têm ordenada igual a 3. Logo, a equação da reta AB é $y = 3$.

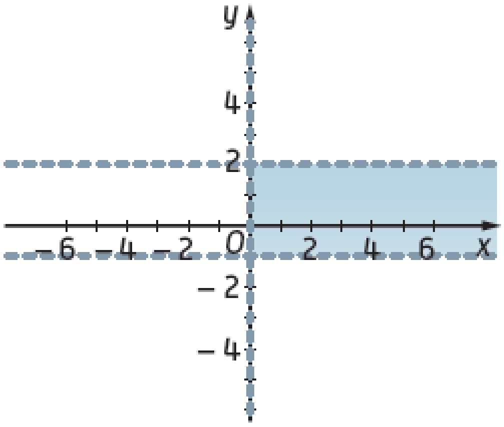
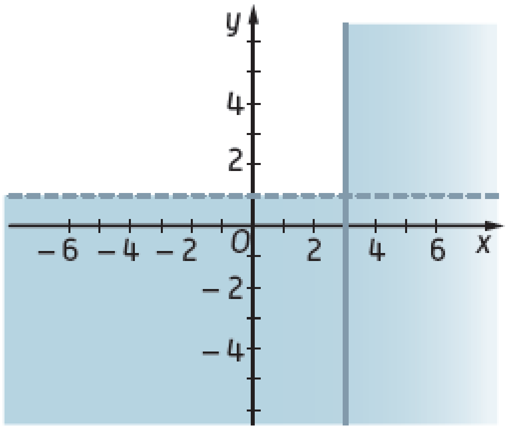
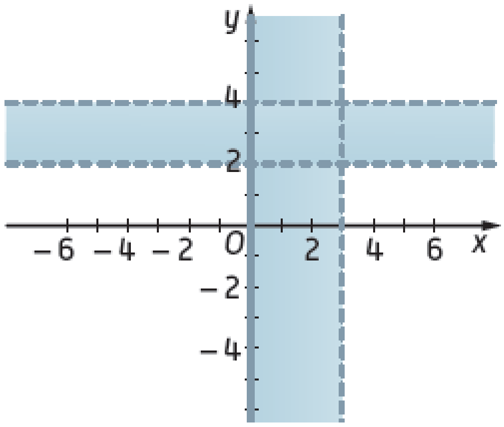
1.7. As coordenadas dos pontos G e H são $(0,-2)$ e $(0,-1)$, respetivamente. Ambos os pontos definem um segmento de reta contido na reta $x = 0$. Logo, a sua mediatriz será uma reta horizontal cuja ordenada que contém o ponto médio do segmento de reta $[GH]$. Assim, a equação da mediatriz de $[GH]$ é:

$$y = \frac{-2-1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$$

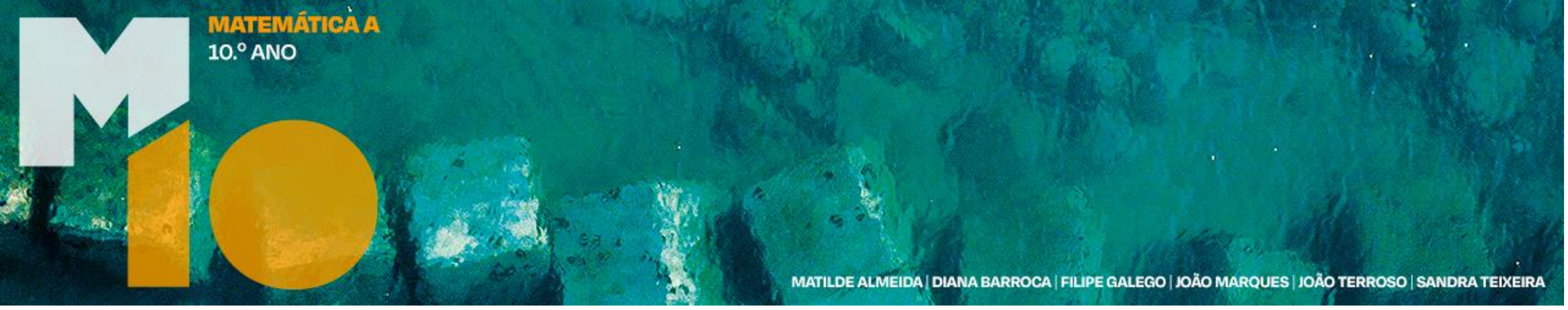
2.

2.1. Representando cada um dos domínios planos num referencial cartesiano o.m. xOy:

$A: x \geq 2$	
$B: y < -1$	
$C: 0 \leq x \leq 3$	

$D: x > 0 \wedge -1 < y < 2$	
$E: x \geq 3 \vee y < 1$	
$F: 0 \leq x < 3 \vee 2 < y < 4$	

2.2. Usando a entrada do *software GeoGebra*, obtemos as representações anteriores.



3.

3.1. Considerando $A(1,-3)$ e $B(-2,0)$, a distância entre A e B é determinada por:

$$d(A,B)=\sqrt{\left(1-(-2)\right)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}\,u.m.$$

3.2. A distância entre os pontos C e D é:

$$d(C,D)=\sqrt{\left(-2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2}-(-2)\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{34}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}\,u.m.$$

3.3. A distância entre os pontos E e F é:

$$d(E,F)=\sqrt{(-1-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{16+0}=4\,u.m.$$

3.4. A distância entre os pontos G e H é:

$$d(G,H)=\sqrt{(0-0)^2+(7+4)^2}=\sqrt{169}=13\,u.m.$$

4.

4.1. A distância entre A e B é calculada por:

$$d(A,B)=\sqrt{(k+1-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{(k-3)^2+(-2)^2}=$$

$$=\sqrt{k^2-6k+9+4}=\sqrt{k^2-6k+13}$$

Tendo em conta que a distância entre A e B é 5, então:

$$\sqrt{k^2-6k+13}=5\Leftrightarrow k^2-6k+13=5^2\Leftrightarrow k^2-6k-12=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 1\times(-12)}}{2\times 1}\Leftrightarrow k=\frac{6\pm\sqrt{84}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{6\pm\sqrt{2^2\times 3\times 7}}{2}\Leftrightarrow k=\frac{6\pm 2\sqrt{21}}{2}\Leftrightarrow k=3+\sqrt{21}\ \vee\ k=3-\sqrt{21}$$

Concluímos então que $k\in\{3-\sqrt{21};3+\sqrt{21}\}$.

4.2. Tem-se que:

$$k = 3 - \sqrt{21} \qquad A_1 = (3 - \sqrt{21} + 1; 3) = (4 - \sqrt{21}; 3)$$
$$k = 3 + \sqrt{21} \qquad A_2 = (3 + \sqrt{21} + 1; 3) = (4 + \sqrt{21}; 3)$$

Logo:

$$M_1 = \left(\frac{x_{A_1} + x_B}{2}; \frac{y_{A_1} + y_B}{2}\right) = \left(\frac{4 - \sqrt{21} + 4}{2}; \frac{3 + 5}{2}\right) = \left(4 - \frac{\sqrt{21}}{2}; 4\right)$$
$$M_2 = \left(\frac{x_{A_2} + x_B}{2}; \frac{y_{A_2} + y_B}{2}\right) = \left(\frac{4 + \sqrt{21} + 4}{2}; \frac{3 + 5}{2}\right) = \left(4 + \frac{\sqrt{21}}{2}; 4\right)$$

4.3.

a) Para que B pertença à circunferência de centro $C(3,4)$ e comprimento da medida do raio 2, então $d(C, B) = 2$. Assim:

$$d(B, C) = \sqrt{(3-4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Logo, B pertence à circunferência.

b) Comecemos por determinar a distância de A ao centro C:

$$k = 2 \qquad A = (2 + 1,3) = (3,3)$$
$$d(C, A) = \sqrt{(3-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

Como a $d(C, A)$ é menor do que o comprimento da medida do raio da circunferência, então A é interior à circunferência de centro C e comprimento da medida do raio $\sqrt{2}$.

5.

5.1. O domínio plano representado é definido pela condição $x > 3$.

5.2. O domínio plano representado pela área colorida é definido pela condição:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 3^2 \lor y < 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \lor y < 3$$

5.3. O domínio plano representado é definido pela condição:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 \geq 2^2 \land x \geq -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 \geq 4 \land x \geq -2$$

5.4. Neste caso, o domínio plano é definido pela condição:

$$x \geq -2 \land y < 2 \land y \geq x - 1$$

6.

6.1. Temos que:

$$A(-3{,}2) \quad B(2{,}2) \quad C(-3,-2) \quad D(2,-2)$$

6.2. O ponto equidistante dos quatro vértices do retângulo é o ponto médio dos segmentos de reta $[AD]$ e $[BC]$. Logo:

$$M_{[AD]} = M_{[BC]} = \left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}\right) = \left(\frac{-3+2}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

6.3. O centro da circunferência que inscreve o retângulo corresponde ao ponto $M_{[AD]} = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. A medida do comprimento do raio corresponde à distância de $M_{[AD]}$ a um dos vértices do retângulo. Logo:

$$raio = d\left(M_{[AD]}, A\right) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - (-3)\right)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 4} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

A equação reduzida da circunferência é:

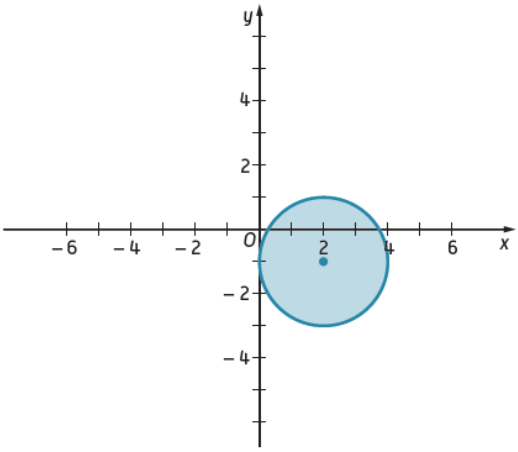
$$\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{41}{4}$$

6.4. A condição que define o domínio plano representado pelo retângulo $[ABCD]$ é:

$$-3 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2$$

7.

7.1. Tendo em conta o descrito no enunciado, os conjuntos de pontos descrito são representados da seguinte forma em referencial cartesiano o.m. xOy:



7.2. Para além da reta definida pelo eixo das ordenadas $x = 0$, as retas tangentes ao círculo e que são paralelas aos eixos coordenados são:

$$x = 0 \qquad x = 4 \qquad y = -3 \qquad y = 1$$

7.3. Os lados do quadrado que circunscreve o círculo pertencem às retas tangentes ao círculo, pelo que a medida do comprimento do seu lado é igual à medida do comprimento do diâmetro da circunferência. Assim:

$$lado = 4 \qquad A_{quadrado} = 4^2 = 16\, u.a.$$

7.4. O domínio plano definido pelos pontos cujas ordenadas são não inferiores aos simétricos das suas abcissas é definido pela condição:

$$y \geq -x$$

Como a ordenada do ponto $C, y_C = -1$, é superior ao simétrico da sua abcissa $-x_C = -2$, então C pertence a este domínio plano.

7.5. A condição que resulta da interseção do círculo com o domínio plano cujas ordenadas são não negativas é:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 2^2 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$$

8.

8.1. Como a reta BD é paralela ao eixo das ordenadas, então as abcissas de B e de D coincidem. Logo:

$$x_B = x_D = 3 \qquad y_B = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Logo, as coordenadas de B são $(3,6)$.

8.2. O ponto C resulta da interseção da circunferência c_1 com a reta CB.

A circunferência c_1 é definida pela equação:

$$Centro = A = (2,3) \qquad raio = d(A,D) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$c_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

Logo:

$$(x-2)^2+\left(\frac{x}{2}+\frac{9}{2}-3\right)^2=5 \Leftrightarrow (x-2)^2+\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2=5 \Leftrightarrow x^2-4x+4+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-16x+16+x^2+6x+9=20 \Leftrightarrow 5x^2-10x+5=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times 1}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x=1$$

Temos então que:

$$x_C=1 \quad y_C=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Concluímos que $C(1,5)$.

8.3. A reta CD é definida pela expressão $y=mx+b$. Temos que $m=-1$, pois $m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{5-3}{1-2}=-2$. Logo, $y=-2x+b$.

Tendo em conta que C pertence a CD podemos equacionar:

$$5=-2+b \Leftrightarrow 5+2=b \Leftrightarrow 7=b$$

A reta CD é definida pela condição $y=-2x+7$.

A reta AB também é definida pela condição $y=mx+b$. Neste caso, $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-3}{3-2}=3$. Ou seja, $y=3x+b$. Como $A(2,3)$ pertence a AB, então:

$$3=3\times 2+b \Leftrightarrow 3=6+b \Leftrightarrow 3-6=b \Leftrightarrow -3=b$$

A reta AB é definida pela equação $y=3x-3$.

O domínio plano definido pelo interior e fronteiras do polígono $[ACB]$ é:

$$y\geq -2x+7 \wedge y\leq \frac{x}{2}+\frac{9}{2} \wedge y\geq 3x-3$$

8.4. Seja G o ponto de interseção da reta AC com o eixo das ordenadas. Temos que:

$$A_{[OECF]} = A_{[OEG]} - A_{[ECG]}$$

Tem-se que:

$$y_E = 0 \qquad 0 = -2x + 7 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$A_{[OEG]} = \frac{y_G \times x_E}{2} = \frac{7 \times \frac{7}{2}}{2} = \frac{49}{4}$$

$\overline{CG} = d(C,G) = \sqrt{(1-0)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ $\qquad \overline{CE} = d(C,E) = \sqrt{(1-0)^2 + \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$A_{[ECG]} = \frac{\overline{CG} \times \overline{CE}}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

Concluímos então que:

$$A_{[OECF]} = A_{[OEG]} - A_{[ECG]} = \frac{49}{4} - \frac{5}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

Concluímos que a área do polígono $[OECF]$ é 11 unidades de área.

8.5. Por hipótese, $C(1,5)$ e $E(-2,1)$. Assim:

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10y + 2y = 2x + 4x + 4 + 1 + 1 + 25 \Leftrightarrow -8y = 6x + 31 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{8}x - \frac{31}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{31}{8}$$

A mediatriz de $[CE]$ é definida por $y = -\frac{3}{4}x - \frac{31}{8}$, tal como queríamos mostrar.

8.6. Tem-se que:

$$A(2,3) \qquad B(3,6) \qquad C(1,5)$$

O baricentro do triângulo $[ABC]$ tem coordenadas:

$$Baricentro = \left(\frac{2+3+1}{3}, \frac{3+6+5}{3}\right) = \left(2, \frac{14}{3}\right)$$

As coordenadas do baricentro do triângulo $[ABC]$ são $\left(2, \frac{14}{3}\right)$, como queríamos mostrar.

FICHA 17 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

1. Num referencial cartesiano do espaço, xOy, um ponto que pertença ao 2.º octante tem abcissa negativa e ordenada e cota negativas. Logo, o ponto $\left(-\frac{2}{3}, 2{,}3\right)$ pertence ao 2.º octante.

Opção (C)

2.

2.1. Um plano paralelo ao plano coordenado xOy corresponde a um conjunto de pontos do plano com a mesma cota. Temos que os pontos A, D e F tem cota igual a -4, logo os pontos A, D e F pertencem ao mesmo plano paralelo ao plano coordenado xOy.

2.2. Um ponto que pertença ao 3.º octante tem abcissa e ordenada negativas e cota positiva. Sendo assim, o ponto C pertence ao 3.º octante.

2.3. A medida do comprimento do segmento de reta $[AB]$ é dada por:

$$\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{\left(-2-(-1)\right)^2 + \left(3-(-3)\right)^2 + \left(-4-(-1)\right)^2}$$
$$= \sqrt{(-2+1)^2 + (3+3)^2 + (-4+1)^2} =$$

$$= \sqrt{1+36+9} = \sqrt{46}\, u.m.$$

O comprimento do segmento de reta $[AB]$ é $\sqrt{46}$ unidades de medida.

2.4.

a) O conjunto de pontos que estão à mesma distância de A e B corresponde ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$. A equação algébrica que define o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é determinada por:

$$\left(x-(-2)\right)^2 + (y-3)^2 + \left(z-(-4)\right)^2 = \left(x-(-1)\right)^2 + \left(y-(-3)\right)^2 + \left(z-(-1)\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 8z + 16 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x + 4 - 6y + 9 + 8z + 16 = 2x + 1 + 6y + 9 + 2z + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x - 2x - 6y - 6y + 8z - 2z + 4 + 9 + 16 - 1 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 12y + 6z + 18 = 0 \Leftrightarrow x - 6y + 3z + 9 = 0$$

O lugar geométrico do conjunto de pontos que estão à mesma distância de A e B fica definido por $x - 6y + 3z + 9 = 0$.

b) Os pontos pertencentes ao eixo coordenado Oz têm abcissa e ordenada nulas. No caso de existir, o ponto de interseção do plano mediador com o eixo das cotas terá como coordenadas $(0,0,z)$. Assim:

$$0 - 6 \times 0 + 3z + 9 = 0 \Leftrightarrow 3z = -9 \Leftrightarrow z = -3$$

O ponto de interseção desse lugar geométrico com o eixo das cotas é o ponto de coordenadas $(0,0,-3)$.

2.5. Tendo em conta que um diâmetro da esfera é $[CD]$, então:

$$centro = M_{[CD]} = \left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-1-2}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$raio = \frac{d(C,D)}{2} = \frac{\sqrt{(-2-0)^2 + \left(-1-(-2)\right)^2 + \left(6-(-4)\right)^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-1+2)^2 + (6+4)^2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{4+1+100}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{2}\ u.m.$$

A inequação reduzida da esfera de diâmetro $[CD]$ é:

$$\left(x-(-1)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + (z-1)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{105}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 \leq \frac{105}{4}$$

Para verificar se A é exterior à esfera, poderemos determinar a distância de A ao centro da esfera. Ou seja:

$$d(A, centro) = \sqrt{\left(-2-(-1)\right)^2 + \left(3 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + (-4-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2+1)^2 + \left(3 + \frac{3}{2}\right)^2 + (-4-1)^2} =$$
$$= \sqrt{1 + \frac{81}{4} + 25} = \sqrt{\frac{185}{4}} = \frac{\sqrt{185}}{2}$$

Como $d(A, centro) > raio_{esfera}$, então A é um ponto exterior à esfera.

3.

3.1. Para determinar as coordenadas dos restantes vértices do cubo, precisamos de determinar a medida do comprimento da sua aresta. Ora:

$$aresta = d(A,B) = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + \left(0-(-1)\right)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

As coordenadas dos vértices do cubo são:

$A(0,0,-1)$ $B(0,1,0)$ $C\left(\sqrt{2},0,-1\right)$ $D\left(\sqrt{2},1,0\right)$ $E(0,0,1)$ $F(0,-1,0)$ $G\left(\sqrt{2},-1,0\right)$ $H\left(\sqrt{2},0,1\right)$

3.2. Como o segmento de reta $[EH]$ é paralelo ao plano xOy, então o plano mediador deste segmento de reta é paralelo ao plano yOz.

O plano mediador irá ser definido por $x = k$, em que k é uma constante real, e contém o ponto médio de $[EH]$:

$$M_{[EH]} = \left(\frac{x_E + x_H}{2}, \frac{y_E + y_H}{2}, \frac{z_E + z_H}{2}\right) = \left(\frac{0+\sqrt{2}}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1\right)$$

O plano mediador de $[EH]$ é definida pela condição $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3. A face $[EFGH]$ é perpendicular à face $[ACGF]$. Logo a distância do ponto médio de $[EH]$ é igual à medida do comprimento da aresta do cubo.

A distância do ponto médio de $[EH]$ á face $[ACGF]$ é $\sqrt{2}$ unidades de medida.

3.4. O centro da superfície esférica inscrita no cubo corresponde o ponto médio das suas diagonais espaciais:

$$M_{[CE]} = \left(\frac{x_C + x_E}{2}, \frac{y_C + y_E}{2}, \frac{z_C + z_E}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$$

A medida do comprimento do raio da superfície esférica corresponde a metade da medida do comprimento do cubo.

A equação reduzida da superfície esférica inscrita no cubo é:

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$$

3.5. O volume da pirâmide $[AEFG]$ é determinada por:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times A_{[EFG]} \times \overline{EF} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AF} \times \overline{FG}}{2} \times \overline{EF} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{2}\, u.v.$$

A razão entre o volume da pirâmide e o volume do cubo é:

$$V_{cubo} = \overline{AB}^3 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}\, u.v.$$

$$razão = \frac{V_{cubo}}{V_{pirâmide}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{2}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

Podemos concluir que o volume do cubo é o sêxtuplo do volume da pirâmide.

4.

4.1. Tendo em conta as informações dadas, temos que as coordenadas dos vértices do prisma são:

$A(2,2,-1) \quad B(2,-2,-1) \quad C(2,-2,4) \quad D(-2,-2,-1) \quad E(-2,2-1) \quad F(-2,-2,4)$

$G(-2,2,4) \quad H(2,2,4)$

4.2.

a) Corresponde ao plano CGH.

b) Corresponde ao segmento de reta $[AB]$.

4.3. O prisma $[ABCDEFGH]$ é definido pela condição $-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -1 \leq z \leq 4$.

4.4. Começamos por observar que $B = (-2,2,-1)$. Tem-se que:

$$\overline{BG} = d(B,G) = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + (-2-2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-2)^2 + (-1-4)^2} =$$

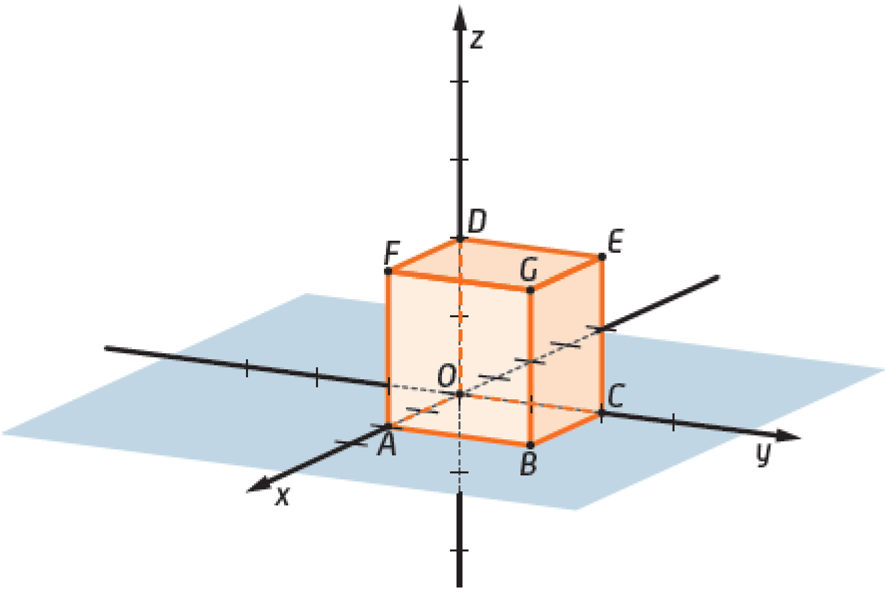
$$= \sqrt{16+16+25} = \sqrt{57}\, u.m.$$

A equação da superfície esférica de centro no ponto B e comprimento do raio $\overline{BG}$ é:

$$\left(x-(-2)\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z-(-1)\right)^2 = \sqrt{57}^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 57$$

5.

5.1. Tendo em conta a descrição feita no enunciado, a representação do cubo* no referencial cartesiano o.m. $Oxyz$ é:



*A localização dos pontos poderá variar.

As coordenadas dos vértices do cubo são:

$$O(0,0,0) \quad A(2,0,0) \quad B(2,2,0) \quad C(0,2,0)$$
$$D(0,0,2) \quad E(0,2,2) \quad F(2,0,2) \quad G(2,2,2)$$

5.2. A área da base da pirâmide coincide com a área da base do cubo. A altura da pirâmide e do cubo tem igual comprimento. Podemos então afirmar que a razão entre o volume da pirâmide e o volume do cubo é $\frac{1}{3}$.

Demonstrando algebricamente, seja a a medida do comprimento da aresta do cubo. Temos que:

$$V_{cubo} = a^3 \qquad V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times altura = \frac{1}{3} \times a^2 \times a = \frac{a^3}{3}$$

Logo:

$$razão = \frac{V_{pirâmide}}{V_{cubo}} = \frac{\frac{a^3}{3}}{a^3} = \frac{a^3}{3} \div a^3 = \frac{a^3}{3} \times \frac{1}{a^3} = \frac{a^3}{3a^3} = \frac{1}{3}$$

6.

6.1. Como a superfície esféria é tangente ao plano $y=-3$, então o comprimento do seu raio corresponde à distância do centro ao plano. Ou seja:

$$raio = 2-(-3) = 2+3 = 5$$

A equação reduzida da superfície esférica é:

$$(x-2)^2+(y-2)^2+\left(z-(-2)\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2 = 25$$

6.2. Planos perpendiculares ao eixo das abcissas são planos paralelos ao plano coordenado yOz, sendo que estes são definidos por $x=k$, com k constante real.

Como o plano a considerar contém o centro da superfície esférica $(2,2,-2)$, então a equação que o define é $x=2$.

6.3. Para que o ponto $A(1,1,1)$ pertença à superfície esférica, então a distância desse ponto ao centro C da superfície esférica é igual ao comprimento do raio. Assim:

$$d(A,C) = \sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2+\left(1-(-2)\right)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Tem-se que $\sqrt{11}$ é inferior ao comprimento do raio da superfície esférica, concluímos que A não pertence à superfície esférica.

7.

7.1. Usando Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $[CFA]$, tem-se que:

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 \Leftrightarrow \overline{CF}^2 = 8^2+8^2 \Leftrightarrow \overline{CF}^2 = 64+64 \Leftrightarrow \overline{CF}^2 = 128 \Leftrightarrow \overline{CF} = \sqrt{128} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CF} = \sqrt{2^2\times 2^2\times 2^2\times 2} \Leftrightarrow \overline{CF} = 8\sqrt{2}$$

Podemos então concluir que:

$$F = \left(0, \frac{8\sqrt{2}}{2}, \frac{8\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-4, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$$

$$G = \left(-4,0,8\sqrt{2}\right) \qquad D = \left(4,-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right) \qquad I = (16,0,0)$$

7.2. As pirâmides $[ACFI]$ e $[BJKI]$ são semelhantes, cuja razão de semelhança de ampliação é 2. Logo:

$$\overline{KJ} = \frac{\overline{FC}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Logo, a medida do volume da pirâmide $[BKJI]$ é:

$$V_{[BKJI]} = \frac{1}{3}\times A_{[BKJ]}\times \overline{IB} = \frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{2}\times 8 = \frac{64}{3}\ u.v.$$

Opção (B)

7.3. O lugar geométrico definido pelo conjunto de pontos cuja distância ao ponto I é $\overline{BI}$ é a superfície esférica de centro no ponto I e medida do comprimento do raio igual a 8 unidades de medida. Assim:

$$(x-16)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=8^2 \Leftrightarrow (x-16)^2+y^2+z^2=64$$

A superfície esférica é definida pela equação $(x-16)^2+y^2+z^2=64$.

7.4. A reta EF é paralela ao eixo das abcissas. Logo, fica definida pela condição $y=4\sqrt{2} \wedge z=4\sqrt{2}$.

7.5. Temos que:

$$C=\left(-4,-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right) \qquad E=\left(4,4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right)$$

Logo, a equação do plano mediador de $[CE]$ é dada por:

$$\left(x-(-4)\right)^2+\left(y-\left(-4\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(z-4\sqrt{2}\right)^2=(x-4)^2+\left(y-4\sqrt{2}\right)^2+\left(z-4\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2+\left(y+4\sqrt{2}\right)^2+\left(z-4\sqrt{2}\right)^2=(x-4)^2+\left(y-4\sqrt{2}\right)^2+\left(z-4\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x+16+y^2+8\sqrt{2}y+32=x^2-8x+16+y^2-8\sqrt{2}y+32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x+8x+8\sqrt{2}y+8\sqrt{2}y=0 \Leftrightarrow 16x+16\sqrt{2}y=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{2}y=0$$

FICHA 18 – NORMA DE UM VETOR. OPERAÇÕES COM VETORES. VETORES COLINEARES

1.

1.1.

a) $\|\vec{a}\| = 3$

b) $\|\vec{b}\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

c) $\|\vec{d} + \vec{c}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

d) $\|\vec{d} - \vec{e}\| = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$

1.2.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \boldsymbol{\vec{a}}$

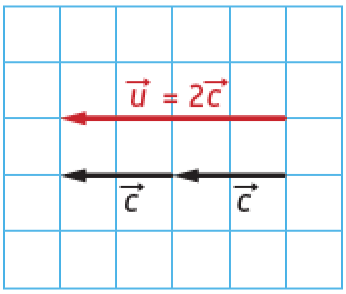
b) $\vec{a} + \vec{b} = \boldsymbol{\vec{d}}$

c) $\vec{b} = \vec{d} + 3\boldsymbol{\vec{f}}$

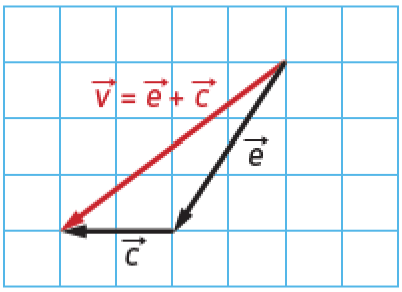
d) $\vec{c} - \boldsymbol{\vec{a}} = \vec{e}$

1.3.

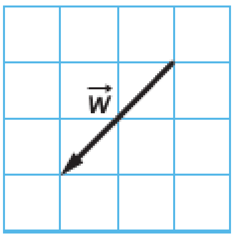
a)



b)



c) $2\sqrt{2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{2^2 + 2^2}$



2.

2.1. $2(\vec{u}+\vec{v})-(2\vec{u})-3(2\vec{v})=2\vec{u}+2\vec{v}-2\vec{u}-6\vec{v}=-4\vec{v}$

2.2. $3\vec{u}-2(\vec{u}+\vec{v})+3(\vec{v}-\vec{u})=3\vec{u}-2\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{v}-3\vec{u}=-2\vec{u}+\vec{v}$

2.3. $\frac{3}{2}(\vec{v}-2\vec{u})-\frac{1}{3}(\vec{u}-\vec{v})-3\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right)=\frac{3}{2}\vec{v}-3\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}-\frac{3}{2}\vec{v}=-\frac{9}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=$
$-\frac{10}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$

3.

3.1.

• I é falsa, pois, apesar de os segmentos de reta orientados terem o mesmo comprimento e a mesma direção, estes têm sentidos contrários.

• II é falsa, pois:

$\vec{u}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{FL}$

e $\vec{v}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{FL}$ e $\overrightarrow{MI}$ não são vetores simétricos.

3.2.

a) $\overrightarrow{GI}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ p.e.

b) $D+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CA}=D+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IG}=G$

c) $\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{LM}-\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

3.3.

a) Verdadeiro

$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{FB}$

b) Falso

$-\overrightarrow{GL}=\overrightarrow{LG}$ e $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{MG}$

c) Verdadeiro

$\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{HD}$

d) Falso

$G+\overrightarrow{FA}=G+\overrightarrow{GB}=B$

e) Verdadeiro

$K-2\overrightarrow{DI}=K+\overrightarrow{KA}=A$

f) Verdadeiro

$E+2\overrightarrow{LH}-\overrightarrow{HC}=E+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{LH}+\overrightarrow{CH}=A+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{LH}=A+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{LH}=F+\overrightarrow{FB}=B$

4.

4.1. $k = -1$

4.2. $k = 2$

4.3. $k = \frac{3}{2}$

4.4. $k = \frac{1}{3}$

4.5. $k = -1$

5.

a)
$$\mu(\vec{u} - 2\vec{v}) - 2\vec{u} = -\lambda(5\vec{u}) - \vec{v} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu\vec{u} - 2\mu\vec{v} - 2\vec{u} = -5\lambda\vec{u} - \vec{v} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mu - 2)\vec{u} - 2\mu\vec{v} = -5\lambda\vec{u} - \vec{v} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu - 2 = -5\lambda \\ -2\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - 2 = -5\lambda \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = \frac{3}{2} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{10} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)
$$-3(\lambda\vec{u}) - \mu(4\vec{v} - 2\vec{u}) = 2\lambda(\vec{v} - \vec{u}) - \lambda^2\vec{u} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3\lambda\vec{u} - 4\mu\vec{v} + 2\mu\vec{u} = 2\lambda\vec{v} - 2\lambda\vec{u} - \lambda^2\vec{u} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-3\lambda + 2\mu)\vec{u} - 4\mu\vec{v} = (-2\lambda - \lambda^2)\vec{u} + 2\lambda\vec{v} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda + 2\mu = -2\lambda - \lambda^2 \\ -4\mu = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda + 2\left(-\frac{1}{2}\lambda\right) = -2\lambda - \lambda^2 \\ \mu = -\frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda - \lambda = -2\lambda - \lambda^2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda - \lambda + 2\lambda = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\lambda - 2) = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \vee \lambda - 2 = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -\frac{1}{2} \times 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -\frac{1}{2} \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

6.1. Para provar que o quadrilátero [*DBFH*] é um trapézio basta provar que os lados [*HF*] e [*DB*] são paralelos.

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{DC} = 3\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}\right) = 3\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = 3\overrightarrow{DB}$$

Assim, concluo que os vetores $\overrightarrow{HF}$ e $\overrightarrow{DB}$ são colineares, logo, os lados [*HF*] e [*DB*] são paralelos.

6.2. $\overline{AB} = 2 \times \overline{DE} = 2 \times 1 = 2\ cm$

$\overline{HG} = 3 \times \overline{AB} = 3 \times 2 = 6\ cm$

$A_{[EFGH]} = 6 \times 6 = 36\ cm^2$

$A_{[ABCD]} = 2 \times 2 = 4\ cm^2$

$A_{[CBF]} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\overline{CF} \times \overline{CB}}{2} = \frac{(6-1)\times 2}{2} = 5\ cm^2$

$A_{[DEH]} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\overline{DE} \times \overline{EH}}{2} = \frac{1 \times 6}{2} = 3\ cm^2$

$A_{[DBFH]} = \frac{36}{2} + \frac{4}{2} + 5 + 3 = 18 + 2 + 5 + 3 = 28\ cm^2$

6.3.

a) Comecemos por calcular o comprimento das bases do trapézio que correspondem às diagonais dos quadrados.

- $\overline{AB} = \overline{DA} = 2\ cm$

  $\overline{BD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{BD} = \pm 2\sqrt{2}$

  Como $\overline{BD} > 0$, então $\overline{BD} = 2\sqrt{2}$.

- $\overline{HG} = \overline{GF} = 3 \times 2 = 6\ cm$

  $\overline{HF}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{GF}^2 \Leftrightarrow \overline{HF}^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{HF}^2 = 72 \Leftrightarrow \overline{HF} = \pm\sqrt{72} \Leftrightarrow \overline{HF} = \pm 6\sqrt{2}$

  Como $\overline{HF} > 0$, então $\overline{HF} = 6\sqrt{2}$.

- $A_{[DBFH]} = \frac{\overline{HF} + \overline{BD}}{2} \times a \Leftrightarrow 28 = \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \times a \Leftrightarrow 56 = 8\sqrt{2} \times a \Leftrightarrow a = \frac{56}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{56\sqrt{2}}{16} \Leftrightarrow a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

b) O perímetro do trapézio [DBFH] é dado por:

$$Perímetro = \overline{DB} + \overline{BF} + \overline{FH} + \overline{HD}$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

- $\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 \Leftrightarrow \overline{BF}^2 = 2^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{BF}^2 = 4 + 25 \Leftrightarrow \overline{BF} = \pm\sqrt{29}$

  Como $\overline{BF} > 0$, então $\overline{BF} = \sqrt{29}$.

- $\overline{DH}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EH}^2 \Leftrightarrow \overline{DH}^2 = 1^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{DH}^2 = 37 \Leftrightarrow \overline{DH} = \pm\sqrt{37}$

  Como $\overline{DH} > 0$, então $\overline{DH} = \sqrt{37}$.

Assim, $Perímetro = 2\sqrt{2} + \sqrt{29} + 6\sqrt{2} + \sqrt{37} = 8\sqrt{2} + \sqrt{29} + \sqrt{37}\ cm.$

FICHA 19 – VETORES: DO PLANO AO ESPAÇO

1.

1.1.

a) Por exemplo, [A,B], [D,C], [E,F] e [H,G].
b) Por exemplo, [B,C] e [C,G].
c) Por exemplo, [A,B] e [C,D].
d) Por exemplo, [A,B] e [C,D].

1.2.

a) $D+\overrightarrow{DA}=A$

b) $F+\overrightarrow{ED}=F+\overrightarrow{FC}=C$

c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}$ p.e.

d) $F-(B-C)F-\overrightarrow{CB}=F+\overrightarrow{BC}=F+\overrightarrow{FG}=G$

e) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$

f) $B+\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{BC}=B+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}=C+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FG}=F+\overrightarrow{FG}=G$

1.3. (B)

$$D+\vec{x}=C+\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow\vec{x}=C+\overrightarrow{CH}-D\Leftrightarrow\vec{x}=H-D\Leftrightarrow\vec{x}=\overrightarrow{DH}\Leftrightarrow\vec{x}=\overrightarrow{BF}$$

1.4.

$$A-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}=A+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}=A+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FG}=G$$

1.5.

$$V=60\Leftrightarrow A_{base}\times alt=60\Leftrightarrow\overline{BC}^2\times\overline{AB}=60\Leftrightarrow\overline{BC}^2\times5=60\Leftrightarrow\overline{BC}^2=\frac{60}{5}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\overline{BC}=\pm\sqrt{12}$$

Como $\overline{BC}>0$, então, $\overline{BC}=\sqrt{12}$.

O comprimento do raio (r) da superfície esférica de centro no centro do prisma e que contém os seus vértices é igual a metade ao comprimento da diagonal do paralelepípedo, ou seja, $r=\overline{AG}$.

$$\overline{AG}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CG}^2\Leftrightarrow\overline{AG}^2=5^2+\sqrt{12}^2+\sqrt{12}^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\overline{AG}^2=25+12+12\Leftrightarrow\overline{AG}^2=49\Leftrightarrow\overline{AG}=\pm\sqrt{49}\Leftrightarrow\overline{AG}=\pm7$$

Como $\overline{AG}>0$, então, $\overline{AG}=7$.

$r=\frac{7}{2}=3{,}5$

O comprimento do raio (r) da superfície esférica de centro no centro do prisma e que contém os seus vértices é igual a 3,5 cm.

2.

2.1.

a) $B+\overrightarrow{JK}=B+\overrightarrow{BC}=C$

b) $G+2\overrightarrow{NS}=G+\overrightarrow{GT}=T$

c) $S+\overrightarrow{JL}+\overrightarrow{MC}=S+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{JL}=S+\overrightarrow{SJ}+\overrightarrow{JL}=L$

d) $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{BN}$ p.e.

e) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}+\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{IJ})+\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QR})+\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}$ p.e.

f) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{QJ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{JQ}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{JQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{AT}$ p.e.

2.2.

$\overrightarrow{OJ}+2(K-D)=\overrightarrow{OJ}+2\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{EQ}$

$\|\overrightarrow{OJ}+2(K-D)\|=\|\overrightarrow{EQ}\|$

O volume de cada cubo é dado por $256:4=64\ cm^3$.

O comprimento da aresta de cada cubo é $a=\sqrt[3]{64}=4\ cm$.

Assim, $\|\overrightarrow{EQ}\|=\sqrt{4^2+8^2+8^2}=\sqrt{16+64+64}=\sqrt{144}=12\ cm$.

3.

3.1.

a) $N+\overrightarrow{NG}=G$

b) $A+\overrightarrow{DC}=A+\overrightarrow{AB}=B$

c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BG}$ p.e.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$ p.e.

e) $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}$ p.e.

f) $-\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HN}=\overrightarrow{FN}$ p.e.

3.2. $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3.3. Como o volume do prisma é ao produto das suas 3 dimensões, então,

$$V=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CG}\Leftrightarrow 72=4\times\overline{BC}\times 6\Leftrightarrow\overline{BC}=\frac{72}{24}\Leftrightarrow\overline{BC}=3$$

Então, como $\|\overrightarrow{AN}\|$ corresponde a metade do comprimento da diagonal espacial do prisma temos:

$\|\overrightarrow{AN}\|=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2+3^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+9+36}=\frac{1}{2}\sqrt{61}\approx 3{,}91$ m.

4.

4.1.

A. Verdadeira

B. Falsa. Os vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{KH}$ são simétricos.

C. Verdadeira.

4.2.

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{LE}$

(D)

5.

5.1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EG} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}\right) + \left(\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JG}\right)$

Como $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{EI}$ e $\overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{JG}$ temos:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$

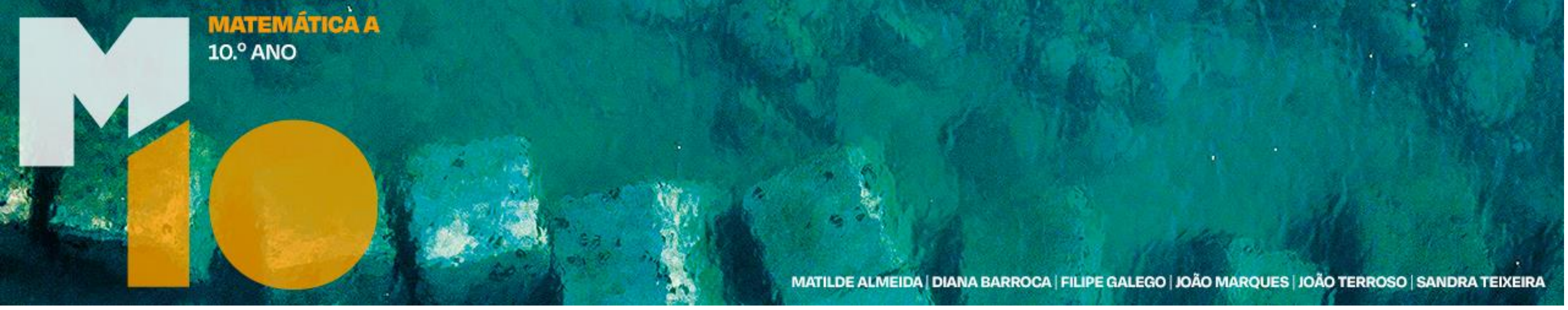
5.2.

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BG}$

b) $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

c) Pela alínea 5.1., sabemos que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{IJ}$

Assim, $\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EG}\right) = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{IJ}\right) = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ}$



FICHA 20 – COORDENADAS DE UM VETOR NUM REFERENCIAL ORTONORMADO

1.

1.1. $\vec{u}(2,-3)$

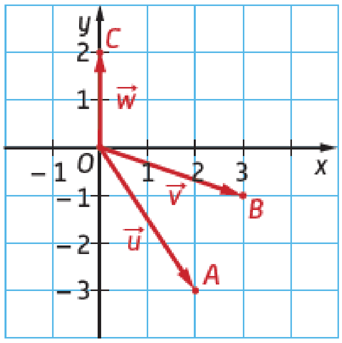
1.2.

Componentes de $\vec{u}$: $2\overrightarrow{e_1}$ e $-3\overrightarrow{e_2}$;

Componentes de $\vec{v}$: $3\overrightarrow{e_1}$ e $-\overrightarrow{e_2}$;

Componentes de $\vec{w}$: $0\overrightarrow{e_1}$ e $2\overrightarrow{e_2}$.

1.3.

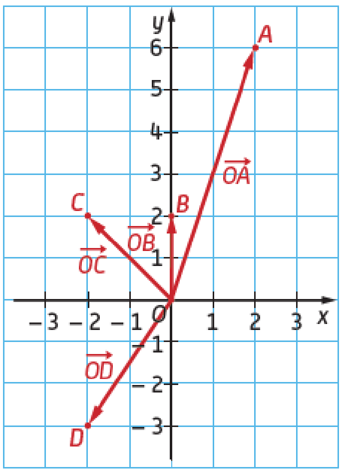


2.

2..1.

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{a}(2,6)$$
$$\vec{b} = 0\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{b}(0,2)$$
$$\vec{c} = -2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{c}(-2,2)$$
$$\vec{d} = -2\overrightarrow{e_1} + (-3)\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{d}(-2,-3)$$
$$\vec{e} = 2\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{e}(2,4)$$
$$\vec{f} = -3\overrightarrow{e_1} + -3\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{f}(-3,-3)$$
$$\vec{g} = -3\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2},\text{ logo } \vec{g}(-3,0)$$

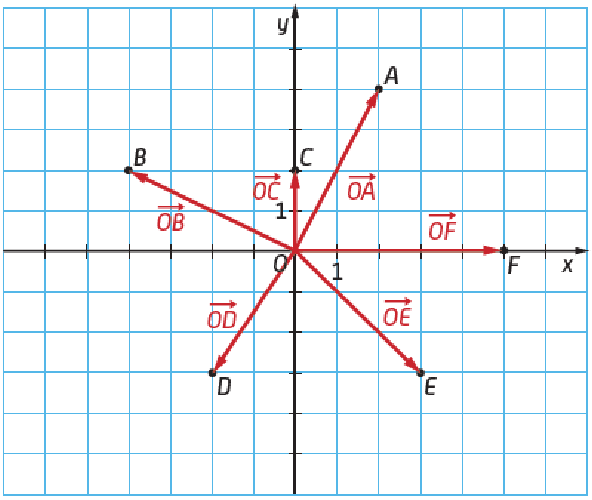
2.2.



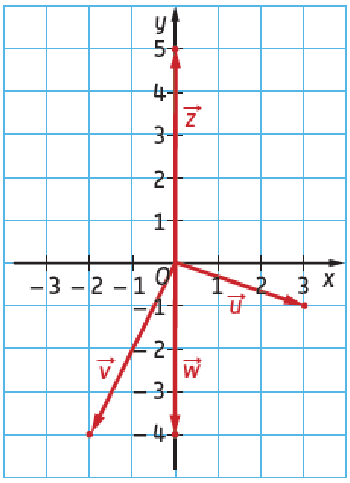
3.

3.1. $A(2,4)$; $B(-4,2)$; $C(0,2)$; $D(-2,-3)$; $E(3,-3)$; $F(5,0)$

3.2.



3.3.

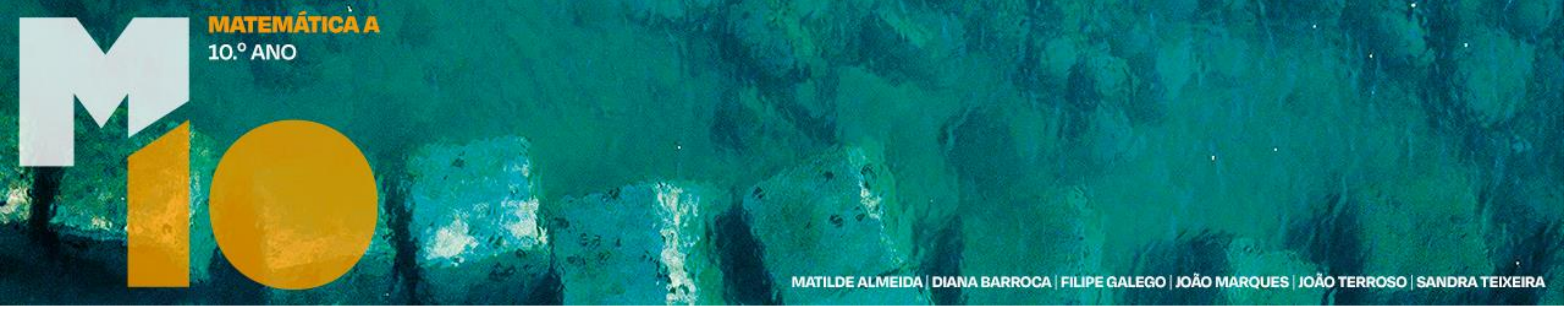


4.

4.1. $\vec{a}$ e $\vec{c}$. Estes vetores são93 vetores simétricos.

4.2. $\vec{d} - 3(\vec{a} - \vec{b}) = (3,-2,2) - 3((2,0,-3) - (1,5,-1)) =$

$$= (3,-2,2) - 3(1,-5,-2) = (3,-2,2) - (3,-15,-6) = (0,13,8)$$



5.

5.1.

a) $\overrightarrow{OL}$ p.e.

b) $\overrightarrow{OH}$ p.e.

c) $\overrightarrow{OC}$ p.e.

d) $\overrightarrow{OJ}$ p.e.

5.2.

$V_{cubo} = 32 : 4 = 8\ cm^3$

Assim, supondo que a representa o comprimento de cada aresta do cubo, temos:

$a = \sqrt[3]{8} = 2\ cm$

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OI} = (-2,2,0)$

b) $\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NK}{}^{\backprime} = \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OM} = (0,-2,2)$

c) $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{LR} = \overrightarrow{FL} + \overrightarrow{LR}{}^{\backprime} = \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{OQ} = (-2,-2,2)$

d) $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{ON} = (0,0,2)$

5.3.

a) $\|\overrightarrow{NQ}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm

b) $\|\overrightarrow{OS}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

6.

6.1. Plano *NOM*.

6.2. A(2, 0, 0); B(2, 6, 0); C(-2, 6, 0); D(-2, 0, 0); E(2, 0, 4); F(2, 6, 4); G(-2, 6, 4); H(-2, 0, 4); M(0, 6, 0); N(0, 0, 4)

6.3.

$\overrightarrow{OA}$ (2, 0, 0); $\overrightarrow{OB}$ (2, 6, 0); $\overrightarrow{OC}$ (-2, 6, 0); $\overrightarrow{OD}$ (-2, 0, 0); $\overrightarrow{OE}$ (2, 0, 4); $\overrightarrow{OF}$ (2, 6, 4); $\overrightarrow{OG}$ (-2, 6, 4); $\overrightarrow{OH}$ (-2, 0, 4); $\overrightarrow{OM}$ (0, 6, 0); $\overrightarrow{ON}$ (0, 0, 4)

6.4. $-\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{MD}$ (B)

7.

7.1. $\vec{u}(3,-2); \vec{v}(-1,2); \vec{w}(1,0); \vec{z}(0,-3)$

7.2.

a) $\vec{u} + \vec{v} = (3,-2) + (-1,2) = (2,0)$

b) $-2\vec{v} = -2(-1,2) = (2,-4)$

c) $\vec{w} + \frac{1}{3}\vec{z} = (1,0) + \frac{1}{3}(0,-3) = (1,0) + (0,-1) = (1,-1)$

d) $\vec{u} - (\vec{z} + \vec{w}) = (3,-2) - \big((0,-3) + (1,0)\big) = (3,-2) - (1,-3) = (2,1)$

8.

8.1. $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}=(3,1)+(0,-2)=(3,-1)$

8.2. $\vec{x}=-\vec{v}+2\vec{w}=-(0,-2)+2(2,-1)=(0,2)+(4,-2)=(4,0)$

8.3. $\vec{u}=\vec{x}+\vec{w}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{u}-\vec{w}\Leftrightarrow\vec{x}=(3,1)-(2,-1)\Leftrightarrow\vec{x}=(1,2)$

8.4. $\vec{v}=\vec{w}-2\vec{x}\Leftrightarrow 2\vec{x}=\vec{w}-\vec{v}\Leftrightarrow\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{w}-\vec{v})\Leftrightarrow\vec{x}=\frac{1}{2}((2,-1)-(0,-2))\Leftrightarrow\vec{x}=\frac{1}{2}(2,1)\Leftrightarrow\vec{x}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$

9.

9.1. $\vec{u}(3,-1,1)$; $\vec{v}(-2,0,4)$.

9.2.

a) $\vec{x}=\vec{u}+\vec{z}=(3,-1,1)+(5,-2,1)=(8,-3,2)$

b) $\vec{w}=\vec{v}-\vec{x}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{v}-\vec{w}\Leftrightarrow\vec{x}=(-2,0,4)-(-4,3,0)\Leftrightarrow\vec{x}=(2,-3,4)$

c) $\vec{z}+\vec{w}=\frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{x})\Leftrightarrow 2\vec{z}+2\vec{w}=\vec{v}+\vec{x}\Leftrightarrow\vec{x}=2\vec{z}+2\vec{w}-\vec{v}\Leftrightarrow\vec{x}=2(5,-2,1)+2(-4,3,0)-(-2,0,4)\Leftrightarrow\vec{x}=(10,-4,2)+(-8,6,0)-(-2,0,4)\Leftrightarrow\vec{x}=(4,2,-2)$

10.

10.1. A(3, -3, -3); B(3, 3, -3); C(-3, 3, -3); D(-3, -3, -3); E(3, -3, 0); F(3, 3, 0); G(-3, 3, 0); H(-3, -3, 0); I(3, -3, 3); J(3, 3, 3); K(-3, 3, 3); L(-3, -3, 3); M(3, 0, 0); N(0, 3, 0); O(0, 0, 0); P(0, 0, 3)

10.2. $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(3,0,0)$; $\vec{v}=\overrightarrow{ON}=(0,3,0)$; $\vec{w}=\overrightarrow{OP}=(0,0,3)$

10.3. $\overrightarrow{BP}=-1\overrightarrow{OM}-1\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OP}$

10.4. $\overrightarrow{BP}=-1\overrightarrow{OM}-1\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OP}=-1(3,0,0)-1(0,3,0)+2(0,0,3)=(-3,-3,6)$

FICHA 21 – VETORES COLINEARES. VETORES COMO DIFERENÇA DE DOIS PONTOS

1. • $\vec{a}$ e $\vec{e}$, pois, $\frac{-3}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ é uma proposição verdadeira. $\vec{e} = -\frac{3}{2}\vec{a}$

• $\vec{b}$ e $\vec{f}$, pois, ambos têm a primeira coordenada nula. $\vec{f} = -5\vec{b}$.

• $\vec{c}$ e $\vec{d}$, pois, $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{1} \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ é uma proposição verdadeira. $\vec{d} = 2\sqrt{2}\vec{c}$

2.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,-4) - (-2,1) = (6,-5)$

b) $\overrightarrow{CA} = A - C = (-2,1) - (0,2) = (-2,-1)$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(C - B) - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\big((0,2) - (4,-4)\big) - (6,-5) =$
$= \frac{1}{2}(-4,6) - (6,-5) = (-2,3) - (6,-5) = (-8,8)$

3.

3.1. $\vec{u}(2,-3)$; $\vec{v}(a,1)$; $\vec{w}(0,b)$

3.2. a) Para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares temos de ter:

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{-3} \Leftrightarrow a = \frac{2 \times 1}{-3} \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

b) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow (0,b) = (2,-3) + (a,1) \Leftrightarrow (0,b) = (2+a,-2) \Leftrightarrow 0 = 2 + a \ \wedge\ b = -2 \Leftrightarrow a = -2 \wedge b = -2$

3.3. Por exemplo: $A(1,4)$ e $B(3,1)$

4.

4.1.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (a,0) - (3,b^2-4) = (a-3,-b^2+4)$

Como $\overrightarrow{AB}(1,0)$, então, $(a-3,-b^2+4) = (1,0) \Leftrightarrow a - 3 = 1 \wedge -b^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4 \wedge b^2 = 4 \Leftrightarrow a = 4 \wedge (b = -2 \vee b = 2)$

4.2. Pela alínea 4.1, $\overrightarrow{AB} = (a-3,-b^2+4)$

Como $a = 2$ e $b = 1$, então, $\overrightarrow{AB} = (2-3,-1^2+4) = (-1,3)$, logo, $\overrightarrow{BA} = (1,-3)$.

Como $\vec{u}$ é colinear com $\overrightarrow{BA}$, então, existe $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\vec{u} = k(1,-3) = (k,-3k)$.

Assim, $\frac{-3k}{k} = -3$.

5.

5.1. $\frac{1}{-2} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Proposição falsa
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

5.2. $\frac{-\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{-3} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ Proposição verdadeira
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

5.3. $\vec{u}$ tem as primeira e terceira coordenadas nulas e $\vec{v}$ não, logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

5.4. • $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a terceira coordenada nula.
• $\frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{3}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Proposição verdadeira
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

6.

6.1.

a) Seja M o ponto médio de $[AB]$, então

$$M\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{-1+0}{2}, \frac{4+3}{2}\right)$$

Ou seja $M\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,0,3) - (2,-1,4) = (-6,1,-1)$

6.2. $\overrightarrow{AC} = C - A = (2a, -b, c^2) - (2,-1,4) = (2a-2, -b+1, c^2-4)$
Como $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ então

$$(2a-2, -b+1, c^2-4) = 2(-6,1,-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2=-12 \\ -b+1=2 \\ c^2-4=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-10 \\ -b=1 \\ c^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-1 \\ c=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, $a=-5, b=-1$ e $c=-\sqrt{2}$ ou $c=\sqrt{2}$.

7.

7.1.

a) $\overrightarrow{BC} = C - B = (0,1,-2) - (3,3,1) = (-3,-2,-3)$

b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \frac{3}{2}(-3,2,1) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{6}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$

c) $\overrightarrow{AB} - \vec{u} = B - A - \vec{u} = (3,3,1) - (2,5,1) - (-3,2,1) = (1,-2,0) - (-3,2,1) = (4,-4,-1)$

7.2.
$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,3,1) - (2,5,1) = (1,-2,0)$
$\frac{-\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} = -\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB}$ e o vetor de coordenadas $\left(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0\right)$ têm a terceira coordenada nula.
Assim, conclui-se que os vetores referidos são colineares.

7.3. $\frac{2k}{-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{k}{4}}{1} \Leftrightarrow -\frac{2k}{3} = -\frac{1}{4} \wedge -\frac{1}{4} = -\frac{k}{4} \Leftrightarrow 8k = 3 \wedge k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8} \wedge k = 1$
Condição impossível.
Assim, conclui-se que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ não são colineares.

MATILDE ALMEIDA | DIANA BARROCA | FILIPE GALEGO | JOÃO MARQUES | JOÃO TERROSO | SANDRA TEIXEIRA

FICHA 22 – SOMA DE UM PONTO COM UM VETOR. NORMA DE UM VETOR

1.

1.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,3) - (4,-2) = \left(1 - 4, 3 - (-2)\right) = (-3,5)$

$\frac{-6}{-3} = \frac{-3}{5} \Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{5}$ Proposição falsa

Concluímos que $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ não são colineares.

1.2.

a) $C = A + \vec{u} = (4,-2) + (-6,-3) = (4-6,-2-3) = (-2,-5)$

b) $D = B - \frac{1}{3}\vec{u} = (1,3) - \frac{1}{3}(-6,-3) = (1,3) - \left(-\frac{6}{3}, -\frac{3}{3}\right) = (1,3) - (-2,-1) = (3,4)$

1.3. $\overrightarrow{AE} = 2\vec{u} \Leftrightarrow E - A = 2\vec{u} <\Rightarrow E = A + 2\vec{u} \Leftrightarrow E = (4,-2) + 2(-6,-3) \Leftrightarrow E = (4 - 12, -2 - 6) \Leftrightarrow E = (-8,-8)$

Concluí que E tem abcissa e ordenada iguais.

1.4. Como $\vec{v}$ é colinear com $\vec{u}$, então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Assim, $\vec{v} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda(-6,-3) = (-6\lambda, -3\lambda)$

Como $\|\vec{v}\| = 3$, então, $\sqrt{(-6\lambda)^2 + (-3\lambda)^2} = 3 \Leftrightarrow 36\lambda^2 + 9\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow 45\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{9}{45} \Leftrightarrow$

$\lambda^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\vec{v}$ e $\vec{u}$ têm sentidos contrários então $\lambda < 0$, logo, $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Concluímos que

$$\vec{v}\left(-6 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right), -3 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)$$

Ou seja, $\vec{v}\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

2.

2.1. translação; $\overrightarrow{AA'}$ (por exemplo).

2.2.

a) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{B'B} = -(-8,4) = (8,-4)$

b) $C' = C + \overrightarrow{CC'} = C + \overrightarrow{BB'} = C - \overrightarrow{B'B} = (-2,5) - (-8,4) = (-2+8, 5-4) = (6,1)$

2.3. $\left\|\overrightarrow{DD'}\right\| = \left\|\overrightarrow{BB'}\right\| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ u.m.$

3.

3.1. Ponto B

3.2.

a) $\overrightarrow{MG} = G - M = (2,1) - (-2,3) = (2+2, 1-3) = (4,-2)$

b) $C(2,0)$ e $O(2,3)$, logo, $\overrightarrow{CO} = O - C = (2,3) - (2,0) = (2-2, 3-0) = (0,3)$

c) $B(0,0)$ e $H(4,1)$, logo, $\overrightarrow{BH} = H - B = (4,1) - (0,0) = (4,1)$

d) $I(-2,2)$ e $D(4,0)$, logo, $\overrightarrow{ID} = D - I = (4,0) - (-2,2) = (4+2, 0-2) = (6,-2)$

3.3.

$\|\overrightarrow{MG}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\|\overrightarrow{CO}\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

$\|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$\|\overrightarrow{ID}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3.4.

$\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{HC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{NP} + 4\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{NP} + 3\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{NA}$

$\overrightarrow{NA} = A - N = (-2,0) - (0,3) = (-2,-3)$

$\left\|\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{HC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}\right\| = \|\overrightarrow{NA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$

4.

4.1. $C = A + \overrightarrow{AC} = (-1,-2) + (6,7) = (5,5)$

4.2. Para provar que [*ABCD*] é um paralelogramo, basta provar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Assim,

$\overrightarrow{AB} = B - A = (7,1) - (-1,-2) = (7+1, 1+2) = (8,3)$

$\overrightarrow{DC} = C - D = (5,5) - (-3,2) = (5+3, 5-2) = (8,3)$

Logo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c.q.d.

4.3.

$\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-3,2) - (-1,-2) = (-3+1, 2+2) = (-2,4)$

$\overline{AD} = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$Perímetro = 2\overline{AB} + 2\overline{AD} = 2\sqrt{73} + 2 \times 2\sqrt{5} = \left(2\sqrt{73} + 4\sqrt{5}\right)$ u.m.

5.

5.1. • $B = A + \overrightarrow{DC} = A + C - D = (3,0,0) + (4,-7,0) - (7,-3,0) = (0,-4,0)$

Como as primeira e terceiras coordenadas de *B* são nulas, então, podemos concluir que *D* é um ponto do eixo Oy.

• $H = D + \overrightarrow{DH} = D + \overrightarrow{BF} = (7,-3,0) + (0,0,6) = (7,-3,6)$

5.2. O plano *BFH* é o plano mediador de [*AC*]. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano *BFH*, temos que:

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + z^2 = (x-4)^2 + (y+7)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 14y + 49 + z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6x + 8x - 14y + 9 - 16 - 49 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 14y - 56 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 7y - 28 = 0$$

Plano *BFH*: $x - 7y - 28 = 0 \wedge z \in \mathbb{R}$.

5.3. $\|\overrightarrow{BF}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (7,-3,0) - (3,0,0) = (4,-3,0)$

$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 = \|\overrightarrow{AB}\|$

$V = A_b \times \text{altura} = 5^2 \times 6 = 25 \times 6 = 150$ u.v.

FICHA 23 – EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA NO PLANO

1.

1.1. Por exemplo, os vetores de coordenadas (0,1) e (0,2).

1.2. Por exemplo, os vetores de coordenadas (1,0) e (-1,0).

1.3. Por exemplo, os vetores de coordenadas (3,-2) e (6,-4).

1.4. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,6) - (3,1) = (-5,5)$

Por exemplo, os vetores de coordenadas (-5,5) e (-1,1).

2.

2.1. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta, temos que

$$(x,y) = (5,0) + k(-2,4), k \in IR.$$

2.2. Um vetor diretor da reta AB é $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,3) - (2,4) = (-4,-1)$$

Logo, sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta AB, temos que:

$$(x,y) = (2,4) + k(-4,-1), k \in \mathbb{R}.$$

2.3. Como a reta é paralela a Ox, então, por exemplo, o vetor de coordenadas (1,0) é um vetor diretor da reta.

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta, temos que:

$$(x,y) = (-1,4) + k(1,0), k \in \mathbb{R}.$$

2.4. Como a reta é paralela a Oy, então, por exemplo, o vetor de coordenadas (0,1) é um vetor diretor da reta.

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta, temos que:

$$(x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) + k(0,1), k \in \mathbb{R}.$$

3.

3.1. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta r, temos que:

$$(x,y) = (-2,0) + k(-3,-4), k \in \mathbb{R}.$$

3.2. Substituindo x por 3, obtemos:

$$(3,y) = (-2,0) + k(-3,-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -2 - 3k \\ y = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -5 \\ y = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{5}{3} \\ y = -4 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$$

O ponto pedido tem de coordenadas $\left(3, \frac{20}{3}\right)$.

3.3. Substituindo na equação da reta, temos:

$(4{,}8) = (-2{,}0) + k(-3,-4) \Leftrightarrow (4{,}8) = (-2-3k,-4k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = -2 - 3k \wedge 8 = -4k \Leftrightarrow 3k = -6 \wedge 4k = -8 \Leftrightarrow k = -2 \wedge k = -2 \Leftrightarrow k = -2$

Provei que o ponto pertence à reta.

4.

4.1.

• Interseção com Ox:

$$(x,0) = (2{,}1) + k(1{,}3) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ 0 = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 3k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

• Interseção com Oy:

$$(0,y) = (2{,}1) + k(1{,}3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 + k \\ y = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ y = 1 + 3 \times (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

O ponto pedido tem coordenadas $(0,-5)$.

4.2. Um dos pontos poderá ser o de coordenadas (2, 1).

Consideremos outro ponto da reta r de abcissa igual a 1.

$$(1,y) = (2{,}1) + k(1{,}3) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 + k \\ y = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 1 + 3 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Outro dos pontos poderá ser o de coordenadas (1, -2).

4.3. $(a+1,-8) = (2{,}1) + k(1{,}3) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 2 + k \\ -8 = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + k \\ 3k = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ k = -\frac{9}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = 1 - 3 \\ k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ k = -3 \end{cases}$

$a = -2$

5.

5.1.

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (-2,3) - (-3,-1) = (1,4)$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow D - A = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow D = A + 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow D = (2,-1) + 2(1,4) \Leftrightarrow D = (4,7)$$

5.2.

$M\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$, logo, $M(0,1)$

5.3.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,3) - (2,-1) = (-4,4)$$

5.4. O centro do círculo é o ponto médio de [AB], ou seja, M(0,1).

O seu raio, r, será dado por:

$$r = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Assim, dado um ponto P(x, y) qualquer do círculo, a equação do círculo será:

$$x^2 + (y-1)^2 \leq \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

Ou seja, $x^2 + (y-1)^2 \leq 8$.

5.5.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,-1) - (2,-1) = (-5,0)$$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r, temos que:

$$(x, y) = (-2,3) + k(-5,0), k \in \mathbb{R}.$$

5.6. O raio r da circunferência corresponderá à distância entre o ponto C e a origem do referencial.

Assim, $r = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Assim, dado um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência referida, a sua equação será dada por:

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{10}^2$$

Ou seja, $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 10$.

5.7. Como a reta s é paralela ao eixo Oy, então, o vetor de coordenadas (0,1) é um dos seus vetores diretores.

Como passa pelo ponto (3, -1) e sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta s, temos que:

$$(x, y) = (3,-1) + k(0,1), k \in \mathbb{R}.$$

6.

6.1. A(-2,3) e B(5, -2)

6.2. $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,-2) - (-2,3) = (7,-5)$$

6.3.

a) $\overrightarrow{AB}(7,-5)$ é um vetor diretor da reta AB e A(-2,3) é um dos seus pontos, logo, sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta AB, temos que:

$$AB: (x,y) = (-2,3) \ + k(7,-5), k \in \mathbb{R}.$$

b) $[AB]: (x,y) = (-2,3) + k(7,-5), k \in [0,1]$

c) $\dot{A}B: (x,y) = (-2,3) + k(7,-5), k \in \mathbb{R}_0^+$

6.4.

- Interseção com Ox:

$$(x,0) = (-2,3) \ + k(7,-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 7k \\ 0 = 3 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 5k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 7 \times \dfrac{3}{5} \\ k = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \dfrac{21}{5} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ k = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(\frac{11}{5}, 0\right)$.

- Interseção com Oy:

$$(0,y) = (-2,3) \ + k(7,-5) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2 + 7k \\ y = 3 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k = 2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{7} \\ y = 3 - 5 \times \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 3 - \dfrac{10}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{11}{7} \end{cases}$$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(0, \frac{11}{7}\right)$.

6.5. Substituindo na equação da reta AB:

$$(-3,5) = (-2,3) + k(7,-5) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -2 + 7k \\ 5 = 3 - 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k = -1 \\ 5k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{7} \\ k = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Sistema impossível.

O ponto de coordenadas $(-3,5)$ não pertence à reta AB.

7.

7.1. $\overrightarrow{BA}$ é um vetor diretor da reta AB

$$\overrightarrow{BA} = (0,4) - (2,-1) = (-2,5)$$

Assim, uma equação vetorial da reta poderá ser $(x,y) = (2,-1) + k(-2,5), k \in \mathbb{R}$.

7.2.

A semirreta $\dot{A}B$ poderá ser definida por

$$(x,y) = (2,-1) + k(-2,5), k \in [-1,+\infty[$$

Substituindo:

$$(-2,9) = (2,-1) + k(-2,5) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2 - 2k \\ 9 = -1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 4 \\ 5k = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Assim, como $2 \in \mathbb{R}$, então, o ponto C pertence à reta AB.

Como $2 \notin [-1,+\infty[$, então, o ponto C pertence à semirreta $\dot{A}B$.

FICHA 24 – EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA NO ESPAÇO

1.

1.1.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-1,4) - (3,-1,0) = (2-3,-1+1,4-0) = (-1,0,4)$

b) $B - 2\vec{u} = (2,-1,4) - 2(2,-1,1) = (2,-1,4) - (4,-2,2) = (2-4,-1+2,4-2) = (-2,1,2)$

1.2.

a) $\overrightarrow{AB}(-1,0,4)$.

Sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta *AB*, uma equação da reta *AB* é

$$(x,y,z) = (3,-1,0) + k(-1,0,4), k \in \mathbb{R}$$

b) Sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta

$$(x,y,z) = (3,-1,0) + k(2,-1,1), k \in \mathbb{R}$$

c) Sendo $B(2,-1,4)$ e $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta,

$$y = -1 \wedge z = 4$$

d) Sendo $B(2,-1,4)$ e $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta

$$x = 2 \wedge y = -1$$

2.

2.1. Dada a reta *AB*, qualquer vetor diretor desta é colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$, assim, provemos que o vetor $\vec{r}$ de coordenadas (3,6,-6) é colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,-1,1) - (-1,1,-1) = (-2+1,-1-1,1+1) = (-1,-2,2)$$

Então

$$\frac{3}{-1} = -3; \frac{6}{-2} = -3; \frac{-6}{2} = -3$$

Ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{r}$ são colineares, logo, $\vec{r}$ é vetor diretor da reta.

2.2. Seja $P(x,y,z)$ um ponto da reta AB.

$AB: (x,y,z) = (-1,1,-1) + k(3,6,-6), k \in \mathbb{R}$

2.3. Seja $Q(x,y,z)$ um ponto da reta r paralela à reta AB.

$r: (x,y,z) = (2,0,-1) + k(3,6,-6), k \in \mathbb{R}$

3.

3.1. (A)

3.2. O vetor de coordenadas (0,0,1) é um exemplo de vetor diretor da reta pedida, logo, a equação vetorial da reta pedida poderá ser:

$$(x,y,z) = (1,-2,4) + k(0,0,1), k \in \mathbb{R}$$

4. Os seus vetores diretores das retas são colineares, pois, $(2,-2,4)=-2(-1,1,-2)$. Assim, para que as retas sejam coincidentes, o ponto da reta s, de coordenadas $(a,3,-3)$, tem que pertencer à reta r, ou seja,

$$(a,3,-3)=(3,-1,5)+k(-1,1,-2)\Leftrightarrow(a,3,-3)=(3-k,-1+k,5-2k)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-k\\3=-1+k\\-3=5-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\\k=3+1\\2k=5+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-4\\k=4\\k=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\k=4\end{cases}$$

Para que as retas sejam coincidentes temos que ter $a=-1$.

5.

5.1. $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BH}=2\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BH}\right)=2\overrightarrow{GH}$ c.q.d.

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}=$$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BE}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ c.q.d.

5.2. Como as faces [ABCO] e [OCED] estão contidas em planos coordenados, que são perpendiculares, então as faces referidas também são perpendiculares, logo, $E\hat{C}B=90°$, ou seja, o triângulo [BCE] é retângulo.

5.3. O vetor $\overrightarrow{BD}$ é um vetor diretor da reta BD.

B pertence ao plano coordenado xOy, logo, $z_B=0$.

$x_B=2\times x_G=2\times2=4$ e $y_B=y_G=7$.

Assim B(4,7,0).

Temos ainda que, $D\in Oz$, logo, $x_D=y_D=0$.

Sabemos também que $z_D=2z_G=4$. Logo, D(0,0,4).

Assim,

$$\overrightarrow{BD}=D-B=(0,0,4)-(4,7,0)=(0-4,0-7,4-0)=(-4,-7,4)$$

Uma equação vetorial da reta BD é

$$(x,y,z)=(4,7,0)+k(-4,-7,4),k\in\mathbb{R}.$$

5.4. Pela alínea anterior, B(4,7,0).

Determinemos as coordenadas ponto E.

E pertence ao plano coordenado yOz logo $x_E=0, y_E=y_G=7$ e $z_E=2z_G=2\times2=4$.

Assim E(0,7,4).

Seja $P(x,y,z)$ um plano mediador de [BE], então,

$$\overline{PB}=\overline{PE}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-7)^2+(z-4)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-14y+49+z^2=x^2+y^2-14y+49+z^2-8z+16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-8x-14y+14y+8z=49+16-16-49\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-8x+8z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-z=0$$

A condição do plano mediador de [*BE*] é $x-z=0\wedge y\in\mathbb{R}$

6.

6.1. $x^2+y^2+z^2-25=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=25$

Logo, $r^2=25$, ou seja, $r=5$.

6.2.

- B pertence a Ox, logo $B(x_B, 0{,}0)$.

Como B pertence à superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2-25=0$, então,

$x_B^2+0^2+0^2=25 \Leftrightarrow x_B=-\sqrt{25} \vee x_B=\sqrt{25} \Leftrightarrow x=-5 \vee x=5$

Como $x_B>0$, então B(5,0,0).

• Como a reta é paralela ao eixo Oz, o vetor de coordenadas (0, 0, 1) é um vetor diretor desta. Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta pedida e como o ponto B(5, 0, 0) lhe pertence, então, uma equação vetorial poderá ser:

$$(x,y,z)=(5{,}0{,}0)+k(0{,}0{,}1), k\in\mathbb{R}.$$

6.3.

a) Seja o ponto C o centro da circunferência.

Sabemos que: $\overline{OC}=k; \overline{OA}=5$ e $\overline{CA}=4$.

Como o triângulo [OCA] é retângulo em C, então:

$$\overline{OA}^2=\overline{OC}^2+\overline{CA}^2 \Leftrightarrow 5^2=k^2+4^2 \Leftrightarrow k^2=25-16 \Leftrightarrow k^2=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-\sqrt{9} \vee k=\sqrt{9} \Leftrightarrow k=-3 \vee k=3$$

Como $k\in IR^+$, $k=3$.

b)

O ponto *A* pertence ao plano yOz, logo $x_A=0$.

A circunferência obtida pela interseção do plano $z=3$ com a superfície esférica tem de condição $x^2+y^2=16 \wedge z=3$.

Logo, como o ponto A pertence à referida circunferência, $z_A=3$ e

$x^2+y_A^2=16 \Leftrightarrow y_A=-\sqrt{16} \vee y_A=\sqrt{16} \Leftrightarrow y_A=-4 \vee y_A=4$.

Como $y_A>0$, então A(0,4,3).

c) B(5,0,0).

Um vetor diretor da reta AB é, por exemplo, $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5{,}0{,}0)-(0{,}4{,}3)=(5,-4,-3)$

Então, sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta AB, temos que

$(x,y,z)=(0{,}4{,}3)+k(5,-4,-3), k\in\mathbb{R}$

FICHA 25 – EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA NO PLANO. PARALELISMO DE RETAS

1.

1.1. $y = 3x - 2$

1.2. Como a reta tem a direção de $\vec{r}(-1,5)$, então, o declive é dado por $a = \frac{5}{-1} = -5$.

Assim, $y = -5x + b$.

Como o ponto $A(0,3)$ pertence à reta, então:

$$3 = -5 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 3$$

Assim, a equação da reta pedida é: $y = -5x + 3$.

1.3. Como a reta contém os pontos $A(-2,3)$ e $B(-5,2)$, então, $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-5,2) - (-2,3) = (-3,-1)$$

Assim, o declive da reta é $a = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$.

Logo, $y = \frac{1}{3}x + b$.

Como o ponto $A(-2,3)$ pertence à reta, então:

$$3 = \frac{1}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{11}{3}$$

Assim, a equação da reta pedida é: $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

1.4. Como a reta é paralela ao eixo Ox e contém o ponto $A(8,-6)$, então, a equação da reta será $y = -6$.

1.5. Como as retas referidas são paralelas, então, o vetor de coordenadas (2, -6) também é vetor diretor da reta pedida. Assim, o seu declive será dado por $a = \frac{-6}{2} = -3$.

Logo, $y = -3x + b$.

Como o ponto $A(5,-2)$ pertence à reta, então:

$$-2 = -3 \times 5 + b \Leftrightarrow b = -2 + 15 \Leftrightarrow b = 13$$

Assim, a equação da reta pedida é: $y = -3x + 13$.

2.

2.1. Como retas paralelas têm o mesmo declive, então, a equação da reta r será do tipo $y = \frac{3}{4}x + b$.

Como o ponto $A(-3,0)$ pertence à reta r, então:

$$0 = \frac{3}{4} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$$

Assim, a equação da reta r é: $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

2.2. $2y - 5x = 6 \Leftrightarrow 2y = 5x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + 3$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, $r: y = \frac{5}{2}x + b$.

Determinemos as coordenadas do ponto interseção da reta de equação $y = 3x - 6$ com o eixo Ox:

$$0 = 3x - 6 \Leftrightarrow 0 = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, o ponto referido terá de coordenadas (2, 0).

Substituindo na equação dada, temos: $0 = \frac{5}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -5$.

Então, a equação de reta r é: $y = \frac{5}{2}x - 5$

3.

3.1. Como o declive é igual a -2, então, o vetor de coordenadas $(1, -2)$ é um vetor diretor.

Como o ponto de coordenadas $(0,4)$ pertence à reta, então, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x, y) = (0,4) + k(1, -2), k \in \mathbb{R}$$

3.2. Como o declive é igual a $2\sqrt{3}$, então, o vetor de coordenadas $(1,2\sqrt{3})$ é um vetor diretor.

Como o ponto de coordenadas $(0, -1)$ pertence à reta, então, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x, y) = (0, -1) + k(1,2\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$$

3.3. $y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 6$

A reta é paralela ao eixo Ox, logo, um dos vetores diretores tem de coordenadas (1,0).

Como, por exemplo, o ponto de coordenadas $(0,6)$ pertence à reta, então, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x, y) = (0,6) + k(1,0), k \in \mathbb{R}$$

3.4. $3x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

A reta é paralela ao eixo Oy, logo, um dos vetores diretores tem de coordenadas (0,1).

Como, por exemplo, o ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right)$ pertence à reta, então, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right) + k(0,1), k \in \mathbb{R}$$

4.

4.1. Determinemos os pontos da reta cujas abcissas sejam 1 e 2.

•$(1, y)$

$$(1, y) = (-5{,}0) + k(4, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -5 + 4k \\ y = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 6 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y = -2 \times \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Ponto $(1, -3)$.

•$(2, y)$

$$(2, y) = (-5{,}0) + k(4, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -5 + 4k \\ y = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 7 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{4} \\ y = -2 \times \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{7}{4} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Ponto $\left(2, -\frac{7}{2}\right)$.

4.2. Como vetor de coordenadas $(4, -2)$ é um vetor diretor da reta, então, o seu declive será dado por $a = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Logo, $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como o ponto $A(-5{,}0)$ pertence à reta, então:

$$0 = -\frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

Assim, a equação da reta pedida é: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

4.3.

Interseção com Ox:

O ponto pedido tem coordenadas $(-5{,}0)$.

Interseção com Oy:

$$(0, y) = (-5{,}0) + k(4, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5 + 4k \\ y = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 5 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{4} \\ y = -2 \times \left(\frac{5}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

O ponto pedido tem coordenadas $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

4.4. Para que o ponto pertença à reta r temos de ter:

$$(1{,}2-a)=(-5{,}0)+k(4,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-5+4k \\ 2-a=-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k=6 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{2} \\ 2-a=-2\times\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} - \\ 2-a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{2} \\ a=5 \end{cases}$$

$a=5$

5.

5.1. $3y-6x=2 \Leftrightarrow 3y=6x+2 \Leftrightarrow y=2x+\frac{2}{3}$

Declive: 2

Vetor diretor da reta: (1,2), por exemplo.

5.2.

$3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-6\times(-1)=2 \Leftrightarrow -4+6=2 \Leftrightarrow 2=2$ P.V.

Provei que o ponto A pertence à reta r.

5.3. $3\times(-2k)-6\times(k-2)=2 \Leftrightarrow -6k-6k+12=2 \Leftrightarrow -12k=-10 \Leftrightarrow k=\frac{-10}{-12} \Leftrightarrow k=\frac{5}{6}$

5.4. Vetor diretor da reta: (1,2)

Como o ponto B de coordenadas $(2,-2)$ pertence à reta, então, sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x,y)=(2,-2)+k(1{,}2), k\in\mathbb{R}$$

5.5. A reta é paralela ao eixo Ox, logo, um dos vetores diretores tem de coordenadas (1,0).

Como, por exemplo, o ponto de coordenadas $(2,-2)$ pertence à reta, então, sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x,y)=(2,-2)+k(1{,}0), k\in\mathbb{R}$$

5.6. A reta é paralela ao eixo Oy, logo, um dos vetores diretores tem de coordenadas (0,1).

Como, por exemplo, o ponto A de coordenadas $\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$ pertence à reta, então, sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x,y)=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)+k(0{,}1), k\in\mathbb{R}$$

6.

6.1.

a)

•Como o ponto A tem abcissa 1, então, substituindo na equação da reta temos:

$$y=\frac{1}{3}\times 1-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

Assim $A\left(1,-\frac{2}{3}\right)$

•Como o ponto B tem ordenada $\frac{4}{3}$, então, substituindo na equação da reta temos:

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\times x-1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{4}{3}+1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{7}{3} \Leftrightarrow x=7$$

Assim $B\left(7,\frac{4}{3}\right)$

a) Seja M o ponto médio de [AB]. Então:

$M\left(\frac{1+7}{2},\frac{-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{2}\right)$ ou seja $M\left(4,\frac{1}{3}\right)$.

6.2. Como os pontos A e B pertencem à reta r, então, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(7,\frac{4}{3}\right)-\left(1,-\frac{2}{3}\right)=\left(6,\frac{6}{3}\right)=(6,2)$$

Como, por exemplo, o ponto A de coordenadas $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ pertence à reta, então, sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da mesma, temos que:

$$(x,y)=\left(1,-\frac{2}{3}\right)+k(6,2), k\in\mathbb{R}$$

6.3.

• O centro da circunferência é o ponto médio de [AB], ou seja, $M\left(4,\frac{1}{3}\right)$.

• O raio da circunferência é dado por:

$$r=\frac{1}{2}d(A,B)=\frac{1}{2}\sqrt{(1-7)^2+\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4}=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$$

Assim, a equação da circunferência é:

$$(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$$

Ou seja, $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=10$.

6.4. $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leq 10 \wedge y\leq 0 \wedge y\leq\frac{1}{3}x-1$

7.

7.1. Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da mediatriz de [AB], temos que:

$$\overline{PA}=\overline{PB} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1=x^2+4x+4+y^2-4y+4$$
$$\Leftrightarrow -2y+4y=6x+4x+4+4-9-1 \Leftrightarrow 2y=10x-2 \Leftrightarrow y=5x-1$$

7.2. Comecemos por determinar a equação da reta AC.

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,-3)-(3,1)=(-3,-4)$$

Declive: $a=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da reta AC, a equação reduzida é:

$$y=\frac{4}{3}x-3$$

Substituindo pelas coordenadas de $E\left(2,-\frac{1}{3}\right)$, temos:

$-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\times 2-3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}=\frac{8}{3}-\frac{9}{3} \Leftrightarrow -1=-1$ P.V.

Provei que o ponto E pertence à reta AC.

8.

8.1. $a=\frac{4}{1}=4$

$y=4x+2$

8.2. $y=-x+b$

$6=-(-2)+b \Leftrightarrow b=6-2 \Leftrightarrow b=4$

$y=-x+4$

8.3. $y=b$

$B(3,-1)\in \mathrm{r}$, logo, $y=-1$

9.

9.1.

$r: y=-2x+1$

s: $2y=6x-1 \Leftrightarrow y=3x-\frac{1}{2}$

$t: -2x=y+6 \Leftrightarrow y=-2x-6$

$u: 4x+2y-1=0 \Leftrightarrow 2y=-4x+1 \Leftrightarrow y=-2x+\frac{1}{2}$

Retas r e t. São retas com o mesmo declive: -2.

9.2.

a) $y = 3x + b$

$(0,4)$ pertence à reta, logo, $y = 3x + 4$

b) $y = 3x + b$

$(2,1)$ $1 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 1 - 6 \Leftrightarrow b = -5$

$y = 3x - 5$

10.

10.1. Declive: -1

Ordenada na origem: 4

10.2. $\vec{r}(1,-1)$ e $(0,4) \in$ r

$r: (x, y) = (0,4) + k(1,-1), k \in \mathbb{R}$

10.3.

$$y = -x + b$$
$$A(-2,1)\ ;\ 1 = -(-2) + b \Leftrightarrow b = 1 - 2 \Leftrightarrow b = -1$$
$$y = -x - 1$$

10.4.

$\vec{v} = k(1,-1) = (k, -k), k \in \mathbb{R}$

$\| \vec{v} \| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (-k)^2} = 4 \Leftrightarrow k^2 + k^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k^2 = 16 \Leftrightarrow k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$

- Se $k = -2\sqrt{2}, \vec{v}(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
- Se $k = 2\sqrt{2}, \vec{v}(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

11.

11. 1.

$\vec{r}(-3,1)$

$\vec{v} = c(-3,1) = (-3c, c)$

$\| \vec{v} \| = 3\sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(-3c)^2 + c^2} = (3\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9c^2 + c^2 = 9 \times 10 \Leftrightarrow 10c^2 = 90 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 = 9 \Leftrightarrow c = \pm 3$

- Se $c = -3, \vec{v}(-3 \times (-3), -3)$ ou seja $\vec{v}(9, -3)$
- Se $c = 3, \vec{v}(-3 \times 3{,}3)$ ou seja $\vec{v}(-9{,}3)$

11.2.

$a = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$
$y = -\frac{1}{3}x + b$
$(-2,4)\ ;\ 4 = -\frac{1}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 4 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{10}{3}$
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

11.3. $(x, y) = (-1,5) + k(-3,1),\ k \in \mathbb{R}$

12.

12.1. $a = -2$

Por exemplo: $(1, -2)$ e $(-1,2)$

12.2. • Eixo Ox

$0 = -2x + 5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$
$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

- Eixo Oy: $(0,5)$

12.3.

a) $y = -2x - 3$

b)

$Ponto\ (1,0)$
$y = -2x + b$
$0 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2$
$y = -2x + 2$

c)

$y = -2x + b$
$(-2,3)\ ;\ 3 = -2 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3 - 4 \Leftrightarrow b = -1$
$y = -2x - 1$

13.

13.1. r: $y + 3x = 6 \Leftrightarrow y = -3x + 6$

Declive de r: -3

Declive de s: $\frac{-3}{1} = -3$

r e s são retas paralelas, pois têm o mesmo declive.

$(3, -4)$, $-4 = -3 \times 3 + 6 \Leftrightarrow -4 = -3$ P.F.

O ponto de coordenadas $(3, -4)$ pertence a s e não pertence a r, logo, r e s não são retas coincidentes.

13.2.

• Reta s

$(1,2) = (3,-4) + k(1,-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3 + k \\ 2 = -4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - 3 \\ 3k = -4 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ 3k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$

$(1,2) \in s$

- Reta r

$2 + 3 \times 1 = 6 \Leftrightarrow 5 = 6$ $P.F.$

$(1,2) \notin r$

13.3.

• Reta r

$y + 3 \times 2 = 6 \Leftrightarrow y = 6 - 6 \Leftrightarrow y = 0$

$(2,0) \in r$

- Reta s

$(2,y) = (3,-4) + k(1,-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 + k \\ y = -4 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - 3 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -4 - 3 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = -4 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

$(2,-1) \in s$

13.4. $r: a = -3$, logo, $\vec{r}(1,-3)$

$(0,6)$ pertence à reta

$(x,y) = (0,6) + k(1,-3), k \in \mathbb{R}$

13.5. s: $a = \frac{-3}{1} = -3$

$y = -3x + b$

$(3,-4)$ $-4 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -4 + 9 \Leftrightarrow b = 5$

$y = -3x + 5$

14.

14.1.

$2(1 - 3k) = -4 \Leftrightarrow 2 - 6k = -4 \Leftrightarrow -6k = -6$

$\Leftrightarrow k = \frac{-6}{-6} \Leftrightarrow k = 1$

14.2. $2(1 - 3k) = -\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 2 - 6k = -\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 6k = \sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{6}$

14.3.

$a = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$

$2(1-3k) = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2 - 6k = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 4 - 12k = -5$

$\Leftrightarrow 12k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{12} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

14.4. $2(1-3k) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3k = 0 \Leftrightarrow 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

15.

15.1. $x = 4$

15.2. $y = -2x - 2$

15.3. $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,-1) - (-1,-4) = (2+1, -1+4) = (3,3)$

Declive da reta AC: $a = \frac{3}{3} = 1$

Como o declive da reta AC é 1, então, esta é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, pois têm o mesmo declive.

$y = x + b$

$C(2,-1);\ -1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1 - 2 \Leftrightarrow b = -3$

$$y = x - 3$$

15.4.

$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -2x - 2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x = 1 \\ y = \frac{1}{3} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

15.5.

•Circunferência:

$C(2,-1)$

Raio $= \overline{AC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{18})^2$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 18$

Região

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 18 \wedge x \leqslant 4 \wedge y \leqslant x - 3 \wedge y \geqslant -2x - 2$$