

RESOLUÇÕES

MINITESTE 1 – MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA

1.

1.1. Tem-se que:

$$\text{Percentagem de votantes} = 60,42\%$$

Logo, a percentagem de abstenção nesta união de freguesias foi:

$$\text{Percentagem de abstenção} = 100 - 60,42 = 39,58 \%$$

No universo de eleitores, a percentagem de abstenção nesta união de freguesias foi 39,58%.

1.2. 603 votantes \rightarrow 60,42%

$$x \text{ votantes} \rightarrow 100\%$$

$$x = \frac{603 \times 100}{60,42} \approx 998$$

Nesta união de freguesias, existiam 998 eleitores inscritos.

1.3. Tem-se que 603 votantes correspondem a 100% dos votantes. Assim:

a percentagem de votos validamente expressos registados foi:

$$\% \text{ votos validamente expressos} = 100 - 1,33 - 2,99 = 95,68\%$$

$$N^{\circ} \text{ de votos validamente expressos} = 0,9568 \times 603 \approx 577$$

Foram registados 577 votos validamente expressos.

1.4. Sabendo que foram registados 577 votos validamente expressos e desses 37,09% foram no partido MOV.PT, o número de votos validamente expressos nesse partido foi:

$$N.^\circ \text{ de votos validamente expressos MOV.PT} = 577 \times 0,3709 \approx 214$$

O n.º de votos validamente expressos registados no partido MOV.PT foram 214.

2.

2.1. O número de associados a votar nesta eleição foi:

$$N.^\circ \text{ de associados} = 40 + 30 + 50 + 15 = 135$$

Nesta eleição, votaram 135 associados.

2.2.

a) Apurando o número de primeiras preferências de cada candidato, temos que:

$$N.º \text{ de primeiras preferências Alice} = 40 + 15 = 55$$

$$N.º \text{ de primeiras preferências Bernardo} = 30$$

$$N.º \text{ de primeiras preferências Carolina} = 0$$

$$N.º \text{ de primeiras preferências Dionísio} = 50$$

Por maioria simples, a vencedora seria Alice.

b) Tendo em conta que existem 135 eleitores, o número mínimo de votos para obter maioria absoluta é:

$$N.º \text{ mínimo de votos para maioria absoluta} = \frac{135 + 1}{2} = 68$$

Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta, então ter-se-á de proceder a uma segunda volta com os dois candidatos mais votados (Alice e Dionísio).

Supondo que as preferências dos eleitores não se alteram, temos então que:

	40 + 15 = 55 votos	30 + 50 = 80 votos
1.ª preferência	Alice	Dionísio
2.ª preferência	Dionísio	Alice

Na segunda volta, o candidato vencedor seria o Dionísio com 80 votos.

c) Apurando as pontuações de cada um dos candidatos, temos que:

$$\text{Pontuação Alice} = 4 \times (40 + 15) + 3 \times 50 + 2 \times 30 + 1 \times 0 = 430 \text{ pontos}$$

$$\text{Pontuação Bernardo} = 4 \times 30 + 3 \times 40 + 2 \times 0 + 1 \times (50 + 15) = 305 \text{ pontos}$$

$$\text{Pontuação Carolina} = 4 \times 0 + 3 \times 15 + 2 \times (40 + 50) + 1 \times 30 = 255 \text{ pontos}$$

$$\text{Pontuação Dionísio} = 4 \times 50 + 3 \times 30 + 2 \times 15 + 1 \times 40 = 360 \text{ pontos}$$

O vencedor seria a Alice com 430 pontos.

2.3. Os 40 associados poderão evitar a vitória do Dionísio. No caso de trocarem a Alice com o Bernardo, no seu boletim de voto, faz com que o número de primeiras preferências na primeira volta mude. Ou seja:

$$N.º \text{ de primeiras preferências Alice} = 15$$

$$N.º \text{ de primeiras preferências Bernardo} = 15 + 40 = 55$$

$$N.º \text{ de primeiras preferências Carolina} = 0$$

$$N.º \text{ de primeiras preferências Dionísio} = 50$$

Assim, o Bernardo passa a ter mais de metade dos votos validamente expressos, sendo declarado vencedor logo na primeira volta.

3.

3.1. Começamos por verificar a distribuição de mandatos pelo método de Hondt e método de Sainte Laguë.

- Distribuição de mandatos pelo método de Hondt

Os quocientes obtidos pela divisão do número de votos validamente expressos de cada força política por 1, 2, 3, e assim sucessivamente, são:

Partido	PCP-PEV	PS	CDS-PP	PPD-PSD
Número de votos	3830	1203	975	575
Divisores				
1	3830,00	1203,00	975,00	575,00
2	1915,00	601,50	487,50	287,50
3	1276,67	401,00	325,00	191,67
4	957,50	300,75	243,75	143,75
5	766,00	240,60	195,00	115,00
6	638,33	200,50	162,50	95,83

Os 7 mandatos são atribuídos aos partidos que registam os 7 maiores quocientes. Ou seja:

Partido	PCP-PEV	PS	CDS-PP	PPD-PSD
Número de votos	3830	1203	975	575
Divisores				
1	3830,00 (1)	1203,00 (4)	975,00 (5)	575,00
2	1915,00 (2)	601,50	487,50	287,50
3	1276,67 (3)	401,00	325,00	191,67
4	957,50 (6)	300,75	243,75	143,75
5	766,00 (7)	240,60	195,00	115,00
6	638,33	200,50	162,50	95,83

Com o método de Hondt, temos que: PCP-PEV recebeu 5 mandatos, PS e CDS-PP receberam 1 mandato cada; PPD-PSD não recebeu qualquer mandato.

- Distribuição de mandatos pelo método de Sainte Laguë

Começamos por determinar os quocientes obtidos pelas divisões do número de votos validamente expressos por 1, 3, 5, e assim sucessivamente. Tem-se que:

Partido	PCP-PEV	PS	CDS-PP	PPD-PSD
Número de votos	3830	1203	975	575
Divisores				
1	3830,00	1203,00	975,00	575,00
3	1276,67	401,00	325,00	191,67
5	766,00	240,60	195,00	115,00
7	547,14	171,86	139,29	82,14
9	425,56	133,67	108,33	63,89

Tal com o método de Hondt, no método de Sainte Laguë, os mandatos são atribuídos às forças políticas com os 7 maiores quocientes. Assim:

Partido	PCP-PEV	PS	CDS-PP	PPD-PSD
Número de votos	3830	1203	975	575
Divisores				
1	3830,00 (1)	1203,00 (3)	975,00 (4)	575,00 (6)
3	1276,67 (2)	401,00	325,00	191,67
5	766,00 (5)	240,60	195,00	115,00
7	547,14 (7)	171,86	139,29	82,14
9	425,56	133,67	108,33	63,89

Concluimos que: PCP-PEV receberia 4 mandatos; PS, CDS-PP e PPD/PSD receberiam 1 mandato cada um.

- Comparação de resultados e comentário

Organizando os dados obtidos:

	PCP-PEV	PS	CDS-PP	PPD/PSD
Método de Hondt	5 mandatos	1 mandato	1 mandato	0 mandatos
Método de Sainte Laguë	4 mandatos	1 mandato	1 mandato	1 mandato

A utilização do método de Sainte Laguë faria com que o PPD/PSD (partido menos votado) conseguisse eleger 1 deputado, retirando poder político ao PCP-PEV que elegeria menos 1 deputado.

Assim, neste caso, a utilização do método de Hondt favorece o partido mais votado, em comparação com o método de Sainte Laguë.

4. Os 18 859,99 € correspondem a 119% do preço do carro.

Seja x o preço do carro sem IVA. Assim, tem-se que:

$$x + 0,19x = 18\,859,99 \Leftrightarrow 1,19x = 18\,859,99 \Leftrightarrow \frac{119}{100}x = 18\,859,99$$

$$\text{Preço sem IVA: } x = 18\,859,99 \times \frac{100}{119} \approx 15\,848,73 \text{ €}$$

No caso de ser aplicada uma taxa de IVA de 21%, então o preço de venda ao público seria:

$$PVP_{21\%} = 15\,848,73 \times 1,21 = 19\,176,96 \text{ €}$$

O preço de venda ao público com uma taxa de IVA de 21% seria 19 176,96 euros.

5. Estudemos ambas as propostas.

- Proposta banco A

Neste caso, tem-se que:

$$\text{Taxa de juro anual} = 4\% = 0,04$$

$$\text{Capital Inicial} = 1000 \text{ €}$$

$$N.^\circ \text{ de anos} = 6$$

$$N.^\circ \text{ de capitalizações} = 1$$

$$\text{Capital acumulado} = 1000 \times (1 + 0,04)^6 \approx 1265,32 \text{ €}$$

- Proposta banco B

Na proposta do banco B, tem-se que:

$$\textit{Taxa de juro semestral} = 2\% = 0,02$$

$$\textit{Capital Inicial} = 1000 \text{ €}$$

$$\textit{N.º de anos} = 6$$

$$\textit{N.º de capitalizações} = 2$$

$$\textit{Capital acumulado} = 1000 \times (1 + 0,02)^{6 \times 2} \approx 1268,24 \text{ €}$$

Ao fim de 6 anos, o banco A dá condições para acumular um total de 1265,32 euros e o banco B garante um capital acumulado no valor de 1268,24 euros.

Concluimos que o Manuel deverá optar pelo banco B.

MINITESTE 2 – ESTATÍSTICA

1.

1.1. Amostra (em 2018): 345

Clubes de fitness por área, em m^2 , em 2018

Área do Clube (em m^2)	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
$[0, 500[$	$0,30 \times 345 \approx 104$	30
$[500, 1000[$	$0,16 \times 345 \approx 55$	16
$[1000, 1500[$	$0,20 \times 345 = 69$	20
$[1500, 2000[$	$0,34 \times 345 \approx 117$	34
Total	345	100

1.2. Amostra (em 2017): 377

Clubes de fitness por área, em m^2 , em 2017

Área do Clube (em m^2)	Frequência absoluta simples	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa (%)	Frequência relativa acumulada (%)
$[0, 500[$	136	136	36	36
$[500, 1000[$	86	222	23	59
$[1000, 1500[$	76	298	20	79
$[1500, 2000[$	79	377	21	100
Total	377		100	

Classe mediana: $[500, 1000[$

1.3.

Amostra (em 2018): 345

Clubes de fitness por área, em m^2 , em 2018

Área do Clube (em m^2)	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)	Marca da classe
$[0, 500[$	104	30	250
$[500, 1000[$	55	16	750
$[1000, 1500[$	69	20	1250
$[1500, 2000[$	117	34	1750
Total	345	100	

A área média dos clubes analisados no ano de 2018 é aproximadamente igual a $1038,41 m^2$

2.

2.1. População em estudo: trabalhadores de uma empresa

2.2. Dimensão da amostra: 100 trabalhadores

2.3. Tabela de frequências relativas acumuladas.

Número de filhos em cada trabalhador

Número de filhos	0	1	2	3	4	5	6	7	total
Número de trabalhadores	18	20	28	19	7	4	3	1	100
Frequência relativa	0,18	0,2	0,28	0,19	0,07	0,04	0,03	0,01	1
Frequência relativa acumulada	0,18	0,38	0,66	0,85	0,92	0,96	0,99	1	

2.4. A percentagem de trabalhadores com pelo menos 2 filhos é igual a 62% (pois $1 - 0,38 = 0,62$).

2.5. $\bar{x} = 2,06$ e $s = 1,58$

2.6.

The image shows two screenshots of a statistical software interface. The top screenshot displays the following statistics:

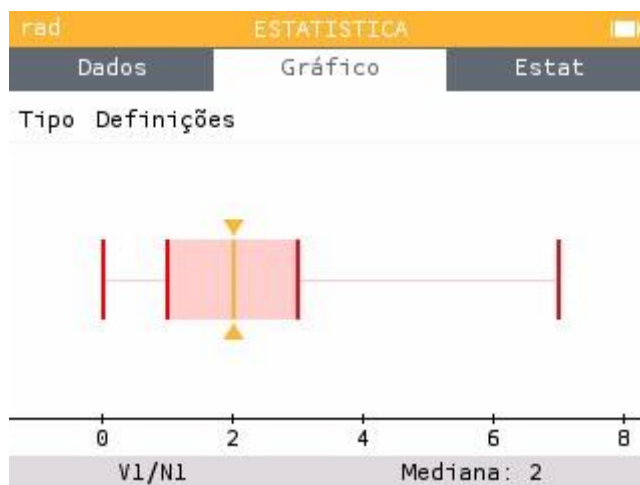
		V1/N1
Dimensão	n	100
Mínimo	Min	0
Máximo	Max	7
Amplitude	R	7
Média	\bar{x}	2.06
Desvio padrão	σ	1.573658
Variância	σ^2	2.4764
Primeiro quartil	Q1	1
Terceiro quartil	Q3	3

The bottom screenshot displays the following statistics:

		V1/N1
Variância	σ^2	2.4764
Primeiro quartil	Q1	1
Terceiro quartil	Q3	3
Mediana	Me	2
Amplitude interquartil	IQR	2
Somatório	$\sum x$	206
Soma dos quadrados	$\sum x^2$	672
Desvio padrão amostral	s	1.581586
Variância amostral	s ²	2.501414

Diagrama de extremos e quartis

Número de filhos em cada trabalhador



Fonte: Pesquisa

3.

$$720 + 800 + 910 = 2430$$

$$1100 \times 3 = 3300$$

$$3300 - 2430 = 870$$

$$\frac{870}{3} = 290$$

O pai do Henrique deve oferecer, a cada um dos jovens, 290 €.

4.1. Centro de gravidade desta nuvem de pontos: $G(\bar{x}, \bar{y})$

$$G(2001,5; 378,1)$$

4.2. Coeficiente de correlação linear das variáveis A e C : 0,89

O valor do coeficiente de correlação linear é positivo e próximo de 0,9. Logo, como se observa no diagrama de dispersão apresentado, trata-se de uma correlação linear positiva forte.

4.3.



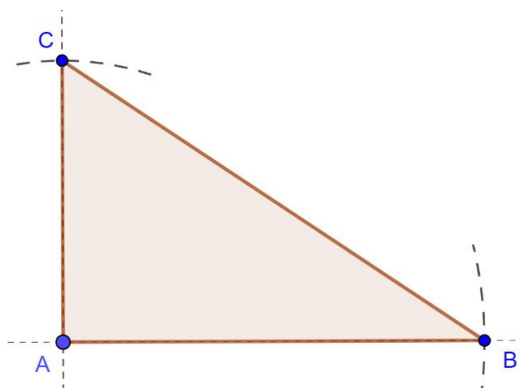
Equação da reta de regressão linear: $y = 9,25x - 18\,144,87$.

$$y = 9,25 \times 2008 - 18\,144,87 = 429,13$$

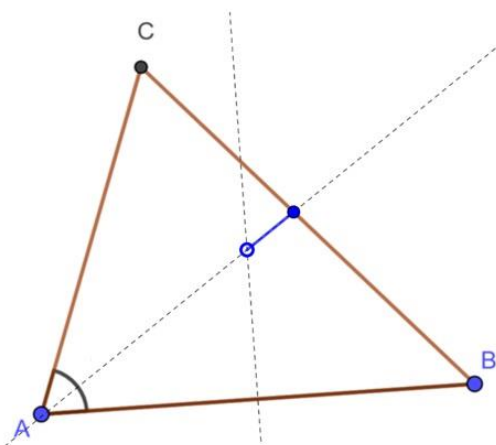
Terão sido registados, em 2008, 429 crimes.

MINITESTE 3 – GEOMETRIA SINTÉTICA NO PLANO

1. Como o circuncentro é ponto médio de $[BC]$, então o triângulo é retângulo em A .

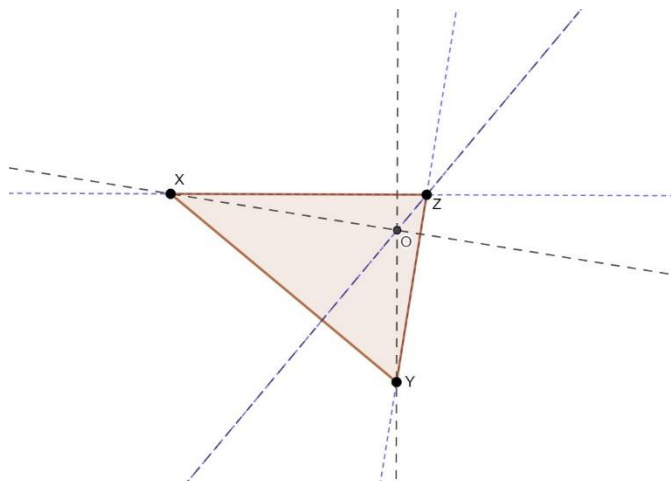


2. Será necessário construir a mediatriz de $[AB]$ e a bissetriz do ângulo interno em A .



3. O ortocentro é o ponto onde se interseam as 3 alturas relativas a um triângulo.

Opção C



4.

4.1. Como os quatro pontos notáveis coincidem, o triângulo é equilátero.

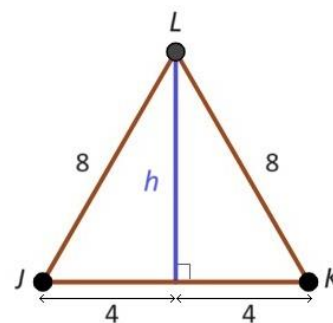
Seja h a altura do triângulo, relativamente a qualquer dos lados.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$h^2 + 4^2 = 8^2 \Leftrightarrow h^2 = 48 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{48}.$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{48}$

A área do triângulo é igual a $\frac{8 \times \sqrt{48}}{2} = 4\sqrt{48} \text{ cm}^2$.



4.2. Pela propriedade do baricentro relativamente aos comprimentos das medianas, a distância do baricentro (e incentro) ao vértice L é igual a $\frac{2}{3} \times h = \frac{2\sqrt{48}}{3} \text{ cm}$.

5.

5.1. Sabendo que o baricentro G divide qualquer uma das medianas na razão 1 para 2, tem-se

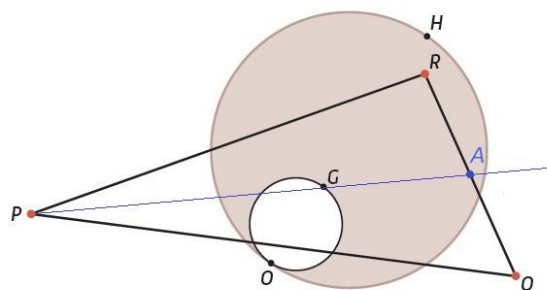
$$\overline{GA} = \frac{1}{3}\overline{PA} \text{ e } \overline{PG} = \frac{2}{3}\overline{PA}$$

$$\text{Então, } \overline{PA} = \frac{3}{2}\overline{PG}$$

e

$$\overline{GA} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\overline{PA} = \frac{1}{2}\overline{PA} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ cm}$$

Opção C



5.2. O raio da circunferência maior é igual a $\frac{\overline{OH}}{2} = \frac{15}{2}$

O, G e H pertencem à mesma reta e $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

$$\text{Tem-se } \overline{OH} = \overline{HG} + \overline{GO} \Leftrightarrow 15 = \overline{HG} + \overline{GO} \Leftrightarrow 15 = 2\overline{GO} + \overline{GO} \Leftrightarrow \overline{GO} = \frac{15}{3} = 5$$

O raio da circunferência menor é igual a $\frac{\overline{GO}}{2} = \frac{5}{2}$

Assim:

$$A = \pi \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 50\pi \text{ cm}^2$$

6.

6.1. Como a distância de N ao ortocentro é igual a h , a distância entre o ortocentro e o circuncentro é igual a $2h$. Logo, a distância pretendida é igual a $\frac{1}{3} \times 2h = \frac{2}{3}h$.

6.2. Como a distância de N ao ponto médio de $[AB]$ é igual a k , o raio da circunferência dos nove pontos mede k . Então, o raio da circunferência circunscrita mede $2k$.

Assim, a área pretendida mede $\pi \times (2k)^2 = 4k^2\pi$.

MINITESTE 4 – FUNÇÕES

1. Opção C

2.

2.1. $CD =] - \infty, 5]$

2.2.

Um dos zeros é zero de uma função afim, que vamos designar por g . O outro zero é zero de uma função quadrática, que vamos designar por h .

$$g(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} g(-3) = -2 \\ g(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-3) + b = -2 \\ a \times 3 + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 4 - 3a = -2 \\ b = 4 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6a = -6 \\ b = 4 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 - 3 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 1 \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$h(x) = a(x - 5)^2 + 5 \quad 3 = a(3 - 5)^2 + 5 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 5 \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 10 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{10}$$

Como $x > 5$, então $x = 5 + \sqrt{10}$

Os zeros de f são: -1 e $5 + \sqrt{10}$.

2.3.

a. $[1, 2]$, por exemplo

b. $[2, 5]$, por exemplo

2.4.

Máximo absoluto: 5

Mínimo absoluto: não há

Máximo relativo: 5

Mínimos relativos: -2 e 3

Maximizante: 5

Minimizantes: -3 e 3

2.5.

$$k \in [-2, 3[\cup [4, 5[$$

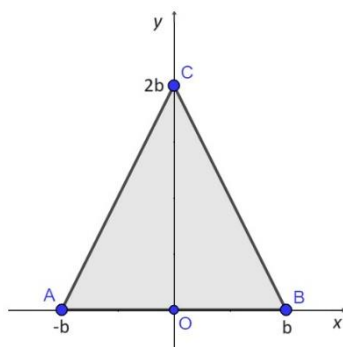
3.

3.1. Os pontos A e B têm ordenadas nulas.

$$2x + 2b = 0 \Leftrightarrow 2x = -2b \Leftrightarrow x = -b \qquad A(-b, 0)$$

$$s: y = -2x + 2b$$

$$-2x + 2b = 0 \Leftrightarrow 2x = 2b \Leftrightarrow x = b \qquad B(b, 0)$$



3.2. C tem abcissa nula.

$$-2 \times 0 + 2b = y \Leftrightarrow y = 2b \qquad C(0, 2b)$$

$$\text{Área} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2b \times 2b}{2} = 2b^2$$

Opção B

4.

4.1.

$$a = x_p \times y_p = x \cdot (-x + 30) = -x^2 + 30x$$

4.2.

$$a(x) = -x^2 + 30x = -(x^2 - 30x) = -(x^2 - 30x + 15^2) + 15^2 = -(x - 15)^2 + 225$$

A função que representa a área pode ser representada graficamente por uma parábola, com uma concavidade voltada para baixo, de vértice com coordenadas (15, 225).

Logo, a área é máxima quando $x = 15$. Então, $y_p = -15 + 30 = 15$.

A área é máxima quando $P(15, 15)$.

5.

$$5.1. g(x) = a(x - 2)^2 - 9$$

$$g(5) = 0 \Leftrightarrow 0 = a(5 - 2)^2 - 9 \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1$$

$$g(x) = (x - 2)^2 - 9$$

5.2.

As equações das retas referidas são do tipo $y = ax - 14$.

Os referidos pontos de tangência são pontos que pertencem, simultaneamente, à parábola e a uma das retas.

$$(x - 2)^2 - 9 = ax - 14 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 9 = ax - 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4 + a)x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4+a \pm \sqrt{(4+a)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4+a \pm \sqrt{(4+a)^2 - 36}}{2}$$

Para cada uma das retas ser tangente, a equação anterior tem de ter apenas uma solução.

Por um lado

$$(4 + a)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4 + a = \pm\sqrt{36} \Leftrightarrow 4 + a = 6 \vee 4 + a = -6 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -10$$

$$\text{Por outro lado, } x = \frac{4+a}{2} = 2 + 0,5a.$$

Para $a = 2$ (a reta com declive positivo),

$$y = ax - 14 = a(2 + 0,5a) - 14 = 2(2 + 1) - 14 = -8$$

Para $a = -10$ (a reta com declive negativo),

$$y = ax - 14 = a(2 + 0,5a) - 14 = -10(2 - 5) - 14 = 16$$

Os pontos de tangência são $A(3, -8)$ e $B(-3, 16)$.

6.

$$6.1. h(x) < -1 \Leftrightarrow |x + 3| - 2 < -1 \Leftrightarrow |x + 3| < 1 \Leftrightarrow x + 3 < 1 \wedge x + 3 > -1$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \wedge x > -4$$

$$S =]-4, -2[$$

6.2.

$$h(x) = |x + 3| - 2 = \begin{cases} x + 3 - 2, & \text{se } x + 3 \geq 0 \\ -x - 3 - 2, & \text{se } x + 3 < 0 \end{cases}, \text{ então } h(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 5, & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

MINITESTE 5 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO

1.

$$1.1. r: (x, y) = \left(-\frac{5}{2}, 1\right) + k(-2, 4), k \in \mathbb{R}$$

$$m = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y = -2x + b, \text{ a reta contém o ponto } \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

$$1 = -2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + b \Leftrightarrow 1 = 5 + b \Leftrightarrow 1 - 5 = b \Leftrightarrow -4 = b$$

$$r: y = -2x - 4$$

Opção D

$$1.2. P\left(a^2, 2a - \frac{7}{3}\right)$$

$$s: -2x + 3y = -3$$

$$-2a^2 + 3\left(2a - \frac{7}{3}\right) = -3 \Leftrightarrow -2a^2 + 6a - 7 + 3 = 0 \Leftrightarrow -2a^2 + 6a - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3-1}{2} \vee a = \frac{3+1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$$

$$R.: a \in \{1, 2\}$$

$$1.3. r: y = -2x - 4$$

$$s: -2x + 3y = -3 \Leftrightarrow 3y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 1$$

$$y \geq -2x - 4 \wedge y \geq \frac{2}{3}x - 1 \wedge x \leq 0 \wedge y \leq 0$$

$$1.4. m_t = m_s = \frac{2}{3}, \text{ logo, por exemplo } \vec{t} = (3, 2)$$

O ponto D tem coordenadas $(0, -4)$ porque é a ordenada na origem da reta r .

$$t: (x, y) = (0, -4) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 1.5. \quad & \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = -2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4 = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = -2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 12 = 2x - 3 \\ y = -2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = 9 \\ y = -2x - 4 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} \\ y = -2 \times \left(-\frac{9}{8}\right) - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} \\ y = \frac{18}{8} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} \\ y = \frac{9}{4} - \frac{16}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto I são $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{7}{4}\right)$.

$$1.6. A_{[BOCI]} = A_{[ACI]} - A_{[OBA]}$$

$$s: y = \frac{2}{3}x - 1$$

$$B(0, -1)$$

$$A(x, 0): 0 = \frac{2}{3}x - 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \text{ Logo } A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$A_{[OBA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times 1}{2} = \frac{3}{4} \text{ u. a.}$$

$$r: y = -2x - 4$$

$$C(x, 0): 0 = -2x - 4 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2. \text{ Logo } C(-2, 0)$$

$$\overline{CA} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$A_{[CAI]} = \frac{\overline{AC} \times |y_I|}{2} = \frac{\frac{7}{2} \times \frac{7}{4}}{2} = \frac{49}{16} \text{ u. a.}$$

$$A_{[BOCI]} = \frac{49}{16} - \frac{3}{4} = \frac{49}{16} - \frac{12}{16} = \frac{37}{16} \text{ u. a.}$$

$$1.7. A\left(\frac{3}{2}, 0\right), C(-2, 0) \text{ e } I\left(-\frac{9}{8}, -\frac{7}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{AI} = I - A = \left(-\frac{9}{8}, -\frac{7}{4}\right) - \left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(-\frac{9}{8} - \frac{3}{2}, -\frac{7}{4} - 0\right) = \left(-\frac{21}{8}, -\frac{7}{4}\right)$$

$$\text{O vértice } D: D = C + \overline{AI} = (-2, 0) + \left(-\frac{21}{8}, -\frac{7}{4}\right) = \left(-2 - \frac{21}{8}, -\frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{37}{8}, -\frac{7}{4}\right)$$

2.

2.1. C pertence à bissetriz dos quadrantes pares, logo as coordenadas são $C(x, -x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

C pertence à reta RP , logo, as suas coordenadas satisfazem a equação da reta, ou seja,
 $-x = -4x - 12 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = \frac{-12}{3} \Leftrightarrow x = -4$, logo $C(-4, 4)$

2.2. Como P pertence ao eixo Ox , então, $P(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Como também pertence à reta RP :

$$-4x - 12 = 0 \Leftrightarrow -4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{-4} \Leftrightarrow x = -3, \text{ logo } P(-3, 0).$$

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[SP]$. O triângulo $[CMP]$ é isósceles e retângulo e o raio, r , da circunferência é igual a \overline{CM} .

$$\overline{CP} = \sqrt{(-3 + 4)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{17}$$

$$r^2 + r^2 = \overline{CP}^2 \Leftrightarrow 2r^2 = (\sqrt{17})^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{17}{2}$$

Assim, a equação da circunferência é: $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = \frac{17}{2}$

2.3.

• $C(-4, 4)$ e $P(-3, 0)$. Seja $T(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[CP]$.

$$\overline{CT} = \overline{TP} \Leftrightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9 + y^2 \Leftrightarrow 8x - 6x - 8y = 9 - 32$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8y = -23 \Leftrightarrow 8y = 2x + 23 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 23}{8} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{23}{8}$$

• $Q(0, y)$ e $P(-3, 0)$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(0 + 3)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{9 + y^2}$$

Por outro lado, $\overline{PQ} = 2r$.

$$\overline{PQ} = 2r \Leftrightarrow \sqrt{9 + y^2} = 2 \times \sqrt{\frac{17}{2}} \Rightarrow (\sqrt{9 + y^2})^2 = \left(2 \times \sqrt{\frac{17}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow 9 + y^2 = 4 \times \frac{17}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9 + y^2 = 34 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow y = \pm 5.$$

Como $y > 0$ então $y = 5$. Assim, $Q(0, 5)$

- Ponto médio de $[PQ]$ com $P(-3, 0)$ e $Q(0, 5)$

$$M\left(\frac{-3 + 0}{2}, \frac{0 + 5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Substituindo na equação da referida mediatriz, temos:

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{23}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = -\frac{3}{8} + \frac{23}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2}, \quad \text{proposição verdadeira.}$$

Logo o ponto médio de $[PQ]$ pertence à mediatriz de $[CP]$.

3. Como M é o ponto médio de $[AD]$ e N é o ponto médio de $[BC]$, então, $[MN] // [AB]$. Assim, os triângulos $[ADB]$ e $[MDP]$ são semelhantes, assim como os triângulos $[BCD]$ e $[BNP]$.

$$\text{Como } \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{DA} \text{ então } \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

$$\text{Como } \overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \text{ então } \overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{DC}.$$

$$\text{Por outro lado, } \overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN} \Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DC} \Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$$

Como $[AB] // [DC]$, então $[MN]$ é paralelo a $[AB]$ e a $[DC]$.

\overline{AB} e \overline{DC} são vetores colineares, com o mesmo sentido, logo

$$\|\overline{MN}\| = \left\| \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) \right\| = \frac{1}{2}(\|\overline{AB}\| + \|\overline{DC}\|) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) \text{ c.q.d.}$$

4.

4.1. $\overline{CE}(2, -2, -4)$, $E(2, 0, -1)$, $C(0, 2, z)$ e $D(0, 0, z)$

$$\overline{CE} = E - C \Leftrightarrow (2, -2, -4) = (2, 0, -1) - (0, 2, z) \Leftrightarrow (2, -2, -4) = (2, -2, -1 - z)$$

$$\Leftrightarrow -4 = -1 - z \Leftrightarrow z = 3, \text{ logo } C(0, 2, 3).$$

Assim, $D(0, 0, 3)$

4.2. a) a reta AB

$$\text{b) } 2y - 3(1 + x) = 1 - 3x \Leftrightarrow 2y - 3 - 3x = 1 - 3x \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

$y = 2$ é a equação do plano BCG .

4.3. o segmento de reta $[FG]$.

Opção A

4.4. $A(2, 0, 3)$ e $G(0, 2, -1)$. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AG]$,

$$\overline{AP} = \overline{PG} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y - 6z - 2z = 5 - 13 \Leftrightarrow -4x + 4y - 8z + 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 2 = 0.$$

Ponto de interseção com o eixo Oz : $(0, 0, z)$

$$0 - 0 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow 2z = 2 \Leftrightarrow z = 1$$

Coordenadas do Ponto de interseção: $(0, 0, 1)$

4.5. O centro da superfície esférica pode ser, por exemplo, o ponto médio de $[FD]$.

$D(0, 0, 3)$ e $F(2, 2, -1)$

$$\text{Centro: } \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = (1, 1, 1)$$

$$r = \frac{\overline{DF}}{2} = \frac{\sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (3+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+16}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2}$$

Superfície esférica:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{24}}{2} \right)^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$$

$$\text{4.6. } \overline{EF} + \overline{CG} - \overline{AG} = \overline{EF} + \overline{CG} + \overline{GA} = \overline{EF} + \overline{CA} = \overline{DC} + \overline{CA} = \overline{DA}$$

Opção D

4.7. $E(2, 0, -1), M(1, 2, 1)$

$$\overrightarrow{EM} = M - E = (1, 2, 1) - (2, 0, -1) = (-1, 2, 2).$$

$$\vec{u} = (2k - 1, -3k, -6)$$

Para os vetores \overrightarrow{EM} e \vec{u} serem colineares têm que se verificar as igualdades: $\frac{2k-1}{-1} = \frac{-3k}{2} = \frac{-6}{2}$

Assim,

- $\frac{-3k}{2} = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow -6k = -12 \Leftrightarrow k = \frac{-12}{-6} \Leftrightarrow k = 2$
- $\frac{2k-1}{-1} = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow 4k - 2 = 6 \Leftrightarrow 4k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = 2$

R.: $k = 2$

4.8. $C(0, 2, 3), F(2, 2, -1)$

$$\overrightarrow{CF} = F - C = (2, 2, -1) - (0, 2, 3) = (2, 0, -4)$$

Seja $P \in [CF]$, então, $P = C + k\overrightarrow{CF}, k \in [0, 1]$ ou seja, sendo $P(x, y, z)$ temos

$$(x, y, z) = (0, 2, 3) + k(2, 0, -4), k \in [0, 1]$$

Opção B

4.9. $V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}} = 2 \times \frac{1}{3} A_b \times h$

Lado da base: $l^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow l^2 = 2 \Leftrightarrow l = \sqrt{2}$

$$A_b = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ u. a.}$$

Assim, $V_{\text{octaedro}} = \frac{2}{3} \times 2 \times 2 = \frac{8}{3} \text{ u. a.}$

