Tema 1 – Modelos matemáticos para a cidadania
1. Modelos matemáticos nas eleições

Recordar - Página 6 e 7

1.

1.1. Temos que $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$.

Logo:

$10\% \times 20 = 0{,}1 \times 20 = 2$

Logo, 10% de 20 euros é 2 euros.

1.2. Neste caso, $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$.

Ou seja:

$35\% \times 100 = 0{,}35 \times 100 = 35$

35% de 100 votantes é 35 votantes.

1.3. Podemos determinar $\frac{1}{3}$ de 90 kg, fazendo:

$\frac{1}{3} \times 90 = \frac{90}{3} = 30$

$\frac{1}{3}$ de 90 kg é 30 kg.

1.4. Temos que 4 milhões corresponde a $4\,000\,000$. Como pretendemos $\frac{7}{4}$, então:

$\frac{7}{4} \times 4\,000\,000 = 7 \times \frac{4\,000\,000}{4} = 7 \times 1\,000\,000 = 7\,000\,000$

$\frac{7}{4}$ de 4 milhões é 7 milhões.

2.

2.1. Observando a informação contida na tabela, podemos concluir que:

$N.^{\underline{o}}\ de\ jovens\ participantes = 16 + 47 + 20 + 45 + 37 + 8 + 35 + 14 + 56 + 45 = 323$

No estudo participaram 323 jovens.

2.2. Na semana anterior, podemos constatar que:

$$jovens\ que\ usaram\ mais\ horas\ o\ Instagram = 35 + 47 = 82$$

A percentagem de jovens deste conjunto que são do género feminino é:

$$percentagem = \frac{47}{82} \approx 57{,}3\%$$

82 jovens admitiram ter usado mais horas o Instagram, sendo que 57,3% eram do sexo feminino.

2.3. A percentagem de jovens do género masculino pode ser calculada da seguinte forma:

$$percentagem\ masculino = \frac{158}{323} \approx 48{,}9\%$$

48,9% dos jovens deste estudo eram do sexo masculino.

2.4. Determinando o número total de jovens que preferem cada rede social obtemos o seguinte.

Rede Social	Género Masculino	Género Feminino	Total de utilizadores
Facebook	8	16	$8 + 16 = 24$
Instagram	35	47	$35 + 47 = 82$
Twitter	14	20	$14 + 20 = 34$
BeReal	56	45	$56 + 45 = 101$
TikTok	45	37	$45 + 37 = 81$

Assim, verificamos que este conjunto de dados mostra a preferência pela rede social *BeReal*, pelo que esta rede social deveria ser aquela pela qual a empresa deveria optar. Claro está que, poder-se-á estender o estudo para um maior número de jovens para que as conclusões sejam mais fidedignas.

3.

3.1. O destino de férias eleito foi a cidade do Porto, pois apresenta a maior quantidade de respostas no estudo da publicação.

3.2. Organizamos os dados apresentados numa tabela de frequências.

Destino Preferido	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
Braga	$0{,}22 \times 1355 \approx 298$	22%
Porto	$0{,}3 \times 1355 \approx 407$	30%
Lisboa	$0{,}15 \times 1355 \approx 203$	15%
Monsanto	$0{,}07 \times 1355 \approx 95$	7%
Póvoa de Varzim	$0{,}26 \times 1355 \approx 352$	26%
Total	1355	100%

3.3. Apesar da publicação ter concluído que 30% dos participantes do estudo preferiam a cidade do Porto como melhor destino de férias, os restantes 70% dos leitores (logo, a maior parte) poderiam eleger a cidade do Porto como destino menos preferido de férias.

Tarefa 1 – Página 8

1. O número de deputados que participaram nesta moção é dado por:

$$n.^{\text{º}}\ de\ deputados = 119 + 73 + 11 + 8 + 6 + 5 + 1 + 1 = 224$$

Nesta moção de censura participaram 224 deputados.

2. Utilizando os dados fornecidos na tabela, temos que:

$$percentagem\ de\ votos\ contra = \frac{119 + 6 + 1}{224} = 56{,}25\%$$

Nesta moção de censura, 56,25% dos votos assumiram uma posição contra.

3. Utilizando os dados fornecidos na tabela, temos que:

$$percentagem\ de\ votos\ de\ abstenção = \frac{73 + 5 + 1}{224} \approx 35{,}3\%$$

35,27% dos votos abstiveram-se nesta moção.

4. No caso de as forças políticas votarem todas a favor e o PS contra, teríamos os resultados seguintes.

$$percentagem\ de\ votos\ a\ favor = \frac{73 + 11 + 8 + 6 + 5 + 1 + 1}{224} \approx 46{,}88\%$$

$$percentagem\ de\ votos\ contra = \frac{119}{224} \approx 53{,}13\%$$

Não seria possível. A maioria dos deputados pertence ao PS, pelo que seria impossível a aprovação da Moção de Censura. A maioria dos deputados votaria contra e não a favor desta moção.

Tarefa 2 – página 9

1. Os candidatos à Presidência do Clube, no ano de 2022, foram Frederico Varandas, Ricardo Oliveira e Nuno Sousa.

2. O número de votos validamente expressos é dado por:

$$votos\ validamente\ expressos = 64\,509 + 2\,216 + 5\,487 = 72\,212$$

Logo, foram registados 72 212 votos validamente expressos nesta eleição.

3. Podemos constatar que não, pois o número de votos validamente expressos é superior ao número de associados. Assim, haverá associados do Sporting que terão direito a mais votos do que os restantes.

4. O candidato Frederico Varandas obteve a seguinte percentagem de votos validamente expressos.

$$percentagem = \frac{64\,509}{72\,212} \approx 89{,}3\%$$

5. Os resultados não teriam sido alterados no caso de os votos nulos e brancos serem atribuídos a um dos candidatos perdedores. Nesse caso, Frederico Varandas continuaria a possuir um número de votos validamente expressos superior aos dos restantes dois candidatos.

Aplicar - Página 11

1.

1.1. O Bruno foi considerado o vencedor da eleição. Determinando o número de alunos que votaram no Bruno, concluímos que:

$$n.^{\text{o}}\ de\ alunos\ que\ votaram\ no\ Bruno = 0{,}32 \times 25 = 8$$

1.2. A turma poderá realizar uma nova votação em que apenas a Ana e a Diana (as mais votadas no primeiro escrutínio) participem.

Aplicar - Página 12

2.

2.1. Como estavam inscritos para votação 364 sócios e 143 não votaram, podemos então concluir que:

$$percentagem\ de\ abstenção = \frac{143}{364} \approx 39{,}3\%$$

A percentagem de abstenção nesta votação foi de 39,3%.

2.2. $$n.^{\underline{o}}\ de\ votos\ validamente\ expressos = 221 - (20+64) = 137$$

Candidatos	Ana Amões	Bruna Ferro	Luís Nunes	Total
N.º de Votos	$0{,}345 \times 137 \approx$ ≈ 47	48	$0{,}305 \times 137 \approx$ ≈ 42	$221 - 64 - 20 =$ $= 137$
Percentagem de Votos Validamente Expressos (%)	34,5	$100 - 34{,}5 - 30{,}5 =$ $= 35$	30,5	100

2.3. A posição da candidata Ana Amões tem por base o facto dos dois candidatos menos votados (a própria Ana e o Luís) conseguirem obter, em conjunto, 65% dos votos, mais do que os 35% dos votos validamente expressos na candidata Bruna Ferros. Logo, a maioria dos eleitores que foram votar não deverá ter ficado satisfeita com a eleição do novo Presidente da Associação.

2.4. Para que a maioria dos associados ficasse contente com a eleição do novo presidente, este candidato deveria obter, no mínimo:

$$n.^{\underline{o}}\ mínimo\ de\ votos = \frac{137+1}{2} = 69$$

Logo, para a maioria dos associados ficar contente com a eleição do novo presidente seria necessário que um dos candidatos tivesse 69 votos.

3.

3.1. O número de abstencionistas neste referendo foi:

$$abstenção = 46\,501\,241 - (17\,410\,742 + 16\,141\,241 + 26\,033) = 12\,923\,225$$

Logo, a percentagem de abstenção registada foi:

$$percentagem = \frac{12\,923\,225}{46\,501\,241} \approx 27{,}8\%$$

A percentagem de abstenção neste referendo foi de 27,8%.

3.2. A percentagem de eleitores que votaram a favor da permanência foi:

$$percentagem\ de\ eleitores\ a\ favor = \frac{16\,141\,241}{46\,501\,241} \approx 34{,}7\%$$

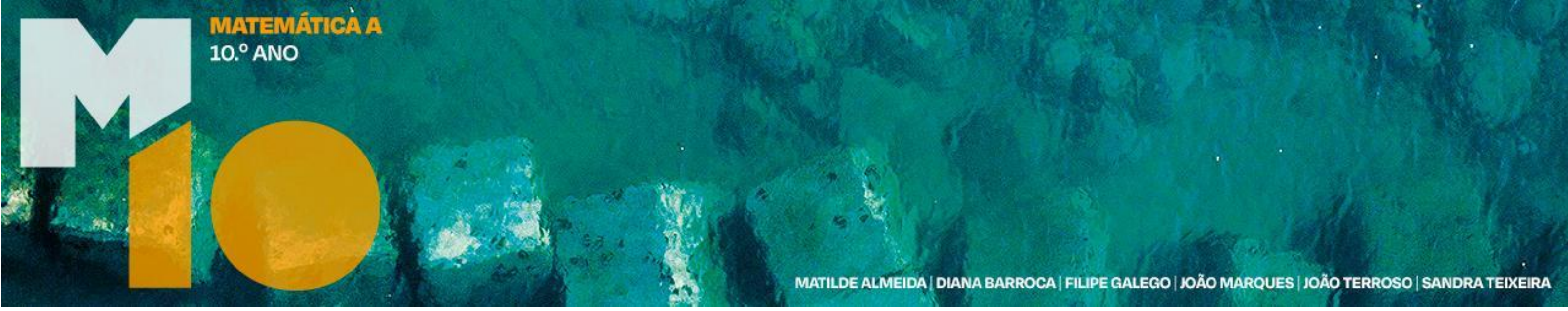
34,7% dos votos validamente expressos assumiram uma posição a favor da permanência do Reino Unido na União Europeia.

3.3. $$votos\ registados = 17410742 + 16141241 + 26033 = 33\,578\,016$$

A percentagem de votos não validamente expressos (isto é, votos brancos e votos nulos) é:

$$percentagem\ de\ votos\ brancos\ e\ nulos = \frac{26\,033}{33\,578\,016} \approx 0{,}1\%$$

0,1% dos votos registados não foram validamente expressos.



Tarefa 3 - Páginas 13

1.

1.1. Tendo em conta os eleitores inscritos e os votantes na eleição, podemos concluir que:

$$n.^{\underline{o}}\ abstencionistas$$
$$= 61\,133 - (6\,059 + 4\,045 + 3\,840 + 3\,360 + 2\,318 + 2\,009 + 1\,892 + 111) =$$
$$= 37\,499$$

$$percentagem\ absten\c{c}\tilde{a}o = \frac{37\,499}{61\,133} \approx 61{,}3\ \%$$

1.2. Temos que:

$$votos\ validamente\ expressos = 6\,059 + 4\,045 + 3\,840 + 3\,360 + 2\,318 + 2\,009 = 21\,631$$

O candidato mais votado foi Carlos Cortes, pelo que:

$$percentagem_{Carlos\ Cortes} = \frac{6\,059}{21\,631} \approx 28{,}0\%$$

1.3. Foi necessário um segundo sufrágio, pois, na votação de 19 de janeiro, nenhum dos candidatos ao cargo obteve mais de metade dos votos validamente expressos para ser declarado vencedor. Tal como preveem os estatutos da Ordem, os candidatos eleitos para a realização do segundo sufrágio foram Carlos Cortes e Rui Nunes.

2.

2.1. Temos que:

- $votos\ validamente\ expressos = 11\,176 + 6867 = 18\,043$
- $percentagem_{Carlos\ Cortes} = \frac{11\,176}{18\,043} \approx 61{,}9\%$

Podemos então concluir que Carlos Cortes, candidato mais votado neste segundo sufrágio, obteve mais de metade dos votos validamente expressos, pelo que foi declarado vencedor da eleição.

2.2. Temos que:

$$n.^{\underline{o}}\ de\ abstencionistas = 61\,133 - (11\,176 + 6\,867 + 1\,178 + 91) = 41\,821$$

Na hipótese deste conjunto de eleitores terem ido votar no candidato perdedor (e nesse caso, alterar o resultado da eleição em termos de vencedor), Rui Nunes obteria:

- $n.^{\underline{o}}\ suposto\ de\ votos\ Rui\ Nunes = 6\,867 + 41\,821 = 48\,688$
- $n.^{\underline{o}}\ suposto\ de\ votos\ validamente\ expressos = 18\,043 + 41\,821 = 59\,864$
- $percentagem_{Rui\ Nunes} = \frac{48\,688}{59\,864} \approx 81{,}3\%$

Neste caso, Rui Nunes seria declarado vencedor.

Aplicar - Página 16

4.

4.1. A candidata vencedora desta eleição foi Conceição Silva com 14 votos.

4.2. Para ser considerado vencedor por maioria absoluta, o candidato eleito deve ter mais de 50% dos votos validamente expressos. Assim, tendo em conta que foram recolhidos 27 votos, então:

$$N.^{\underline{o}}\ m\acute{\imath}nimo\ para\ maioria\ absoluta = \frac{27+1}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

Logo, podemos concluir que Conceição Silva foi eleita delegada de turma por maioria absoluta.

5.

5.1. Por hipótese, a lista B o correspondente a 20% dos votos obtidos pela lista A. Logo, a percentagem de votos validamente expressos na lista B foi:

$$Percentagem\ de\ votos\ validamente\ expressos\ B = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08 = 8\%$$

A lista obteve 8% dos votos validamente expressos.

5.2.

a) O número de votos validamente expressos nesta eleição é:

$$N.º\ de\ votos\ validamente\ expressos = 250 - (34 + 16) = 200$$

Assim, temos que:

- $N.º\ de\ v.v.e.A = 0{,}4 \times 200 = 80$
- $N.º\ de\ v.v.e.B = 0{,}08 \times 200 = 16$
- $N.º\ de\ v.v.e.C = \frac{1}{2} \times N.º\ v.v.e.A = \frac{1}{2} \times 80 = 40$
- $N.º\ de\ v.v.e.D = 200 - (80 + 16 + 40) = 64$

O n.º de votos validamente expressos obtidos pela lista D foi 64.

b) Por hipótese, a lista A é votada também pelos eleitores que registaram um voto branco ou um voto nulo. Assim, o número de votos validamente expressos na lista A seria:

$$N.º\ de\ votos\ validamente\ expressos\ A = 80 + 34 + 16 = 130$$

Para uma das listas serem consideradas vencedores por maioria absoluta nesta eleição, teriam de obter:

$$N.º\ mínimo\ de\ votos\ para\ maioria\ absoluta = \frac{250}{2} + 1 = 126$$

Como o n.º de votos validamente expressos de A seria superior a 126, então A seria considerado vencedor da eleição com maioria absoluta.

Tarefa 4 – Página 17

1. No dia 26 de janeiro de 1986, foram obtidos:

$$votos\ validamente\ expressos = 1\ 185\ 867 + 418\ 961 + 2\ 629\ 597 + 1\ 443\ 683 = 5\ 678\ 108$$

No dia 26 de janeiro de 1986, foram registados 5 678 108 votos validamente expressos.

2. Na votação do dia 26 de janeiro de 1986, o candidatado que obteve o maior número de votos (2 629 597) foi Freitas do Amaral. Logo, pelo Método de Maioria Simples, seria o vencedor desta eleição.

3.

3.1. Para algum dos candidatos obter maioria absoluta na primeira volta, seria necessário ter conseguido, pelo menos, 2 839 055 votos, já que:

$$\frac{N.º\ de\ votos\ validamente\ expressos}{2} = \frac{5\ 678\ 108}{2} = 2\ 839\ 054$$

O candidato mais votado, Freitas do Amaral, obteve apenas 2 629 597 votos, não tendo chegado à maioria absoluta.

3.2. O candidato com mais votos na primeira volta, Freitas do Amaral, não foi quem venceu as eleições presidenciais de 1986. Na segunda volta, foi Mário Soares quem venceu, pois obteve 51,2% dos votos validamente expressos.

Tarefa 5 – Página 18

1. O programa começa por discriminar: o número de eleitores inscritos (segunda linha); o número de votos brancos (quarta linha); o número de votos nulos (sexta linha); o número de votos no candidato A e no candidato B (oitava e décima linhas). Na décima primeira linha de código, o programa procede ao cálculo dos votos validamente expressos, sendo que, nas linhas doze e treze, o programa determina a percentagem dos votos validamente expressos nos candidatos A e B (respetivamente). Por fim, nas duas últimas linhas, o programa informa o utilizador de quais são as percentagens dos votos validamente expressos que os candidatos A e B obtiveram.

2.

2.1. O candidato A obteve $49{,}0\%$ dos votos validamente expressos e o candidato B obteve $51{,}0\%$ dos votos validamente expressos (valores aproximados às décimas).

2.2. Fazendo a alteração proposta, obtemos o seguinte programa:

```
#número de eleitores
nelei=304
#número de votos brancos
nbrancos=10
#número de votos nulos: 10
nnulos=8
#número de votos no candidato Carlos
nA=132
#número de votos na candidata Diana
nB=154
vve=nA+nB
pervveA=(nA/vve)*100
pervveB=(nB/vve)*100
print("O candidato Carlos obteve", pervveA, "% dos votos validamente expressos.")
print("A candidata Diana obteve", pervveB, "% dos votos validamente expressos.")
```

Neste caso, a percentagem obtida pelo Carlos é de $46{,}2\%$ (aproximadamente) e a percentagem da Diana é de $53{,}8\%$ (aproximadamente).

2.3. Fazendo a alteração proposta do programa e usando, por exemplo, uma eleição com 1234 eleitores inscritos em que foram registados 203 votos brancos, 10 votos nulos, 250 votos validamente expressos no candidato A e no candidato C e 521 votos validamente expressos no candidato C, podemos escrever nas linhas de código do *Python*:

```
#número de eleitores
nelei=1234
#número de votos brancos
nbrancos=203
#número de votos nulos: 10
nnulos=10
#número de votos no candidato A
nA=250
#número de votos no candidato B
nB=521
#número de votos no candidato C
nC=250
#cálculo do nº de votos validamente expressos e respetivas percentagens dos candidatos
vve=nA+nB+nC
pervveA=(nA/vve)*100
pervveB=(nB/vve)*100
pervveC=(nC/vve)*100
#obtemos então como resposta
print("O candidato A obteve", pervveA, "% dos votos validamente expressos.")
print("O candidato B obteve", pervveB, "% dos votos validamente expressos.")
print("O candidato C obteve", pervveC, "% dos votos validamente expressos.")
```

2.4. Fazendo o preenchimento da tabela com aproximação do valor das percentagens às décimas:

	N.º de Votos Validamente Expressos	Percentagem de Votos Validamente Expressos
Candidato A	4	18,2%
Candidato B	13	59,1%
Candidato C	5	22,7%

```
#número de eleitores
nelei=25
#número de votos brancos
nbrancos=2
#número de votos nulos: 10
nnulos=1
#número de votos no candidato A
nA=4
#número de votos no candidato B
nB=13
#número de votos no candidato C
nC=5
vve=nA+nB+nC
pervveA=(nA/vve)*100
pervveB=(nB/vve)*100
pervveC=(nC/vve)*100
print("O candidato A obteve", pervveA, "% dos votos validamente expressos.")
print("O candidato B obteve", pervveB, "% dos votos validamente expressos.")
print("O candidato C obteve", pervveC, "% dos votos validamente expressos.")
```

Assim, podemos constatar que o candidato B obteve maioria absoluta, pois alcançou mais de 50% dos votos validamente expressos.

Aplicar - Página 19

6.

6.1. A turma da Mariana regista um total de:

$$n.^{\text{o}}\ de\ alunos = 12 + 13 + 3 + 2 = 30$$

6.2. Temos que:

$$n.^{\text{o}}\ de\ votos\ validamente\ expressos = 12 + 13 + 3 = 28$$

Logo:

- $percentagem\ v.v.e.Mariana = \frac{12}{28} \approx 42{,}9\%$
- $percentagem\ v.v.e.Luís = \frac{13}{28} \approx 46{,}4\%$
- $percentagem\ v.v.e.Francisco = \frac{3}{28} \approx 10{,}7\%$

6.3. Apesar da vitória ter sido atribuída ao Luís, há possibilidade de os alunos que votaram na Mariana e no Francisco não ficarem agradados que este seja eleito delegado de turma, já que 15 alunos votaram nestes dois candidatos, contra 13 que votaram a favor do Luís.

6.4. No caso de todos os alunos manifestarem um voto válido nesta eleição, então o número de votos validamente expressos coincidirá com o número de alunos da turma. Ou seja, o número de votos validamente expressos seria 30. Assim, para obter a maioria absoluta, um dos alunos candidatos deveria registar mais de 50% dos votos validamente expressos, pelo que:

$$n.^{\text{o}}\ mínimo\ de\ votos = \frac{30}{2} + 1 = 15 + 1 = 16$$

Um dos três candidatos teria de conseguir 16 votos validamente expressos, para obter maioria absoluta.

7.

7.1. Nesta eleição foi registado um total de:

$$n.^{\text{o}}\ de\ votos = 5 + 30 + 13 + 20 + 12 = 80$$

Nesta eleição votaram 80 pessoas.

7.2.

a) Apurando o número de primeiras preferências de cada candidato, temos que:

- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ da\ Ana = 5 + 13 = 18$
- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ do\ Bruno = 30$
- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ do\ Carlos = 20$
- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ da\ Daniela = 12$

Pelo método da maioria simples, o vencedor da eleição seria o Bruno.

b) Analisando o número de últimas preferências de cada candidato, tem-se que:

- $n.^{\text{o}}\ últimas\ preferências\ Ana = 0$
- $n.^{\text{o}}\ de\ últimas\ preferências\ Bruno = 13 + 20 + 12 = 45$
- $n.^{\text{o}}\ de\ últimas\ preferências\ Carlos = 30$
- $n.^{\text{o}}\ de\ últimas\ preferências\ Daniela = 5$

Assim, apesar do Bruno ser considerado vencedor, existem muitos eleitores que preferem que ele não ocupe o cargo em eleição em comparação com todos os restantes candidatos. Logo, o resultado não será bem aceite por todos.

7.3.

a) Na primeira volta, os resultados obtidos por cada candidato em primeira preferência foram:

- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ na\ Ana = 5$
- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ no\ Bruno = 30$
- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ no\ Carlos = 20$
- $n.^{\text{o}}\ de\ votos\ na\ Daniela = 12$

Podemos verificar que nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta $\left(\frac{80}{2} + 1 = 41\ votos\right)$. Logo, os candidatos sujeitos a segunda escrutínio, numa segunda volta, são o Bruno e o Carlos.

b) Tendo em conta que a ordem de preferência se manteve, temos que:

1.ª Preferência	B	C
2.ª Preferência	C	B
N.º de votos	$30\ votos$	$5 + 13 + 20 + 12 = 50\ votos$

c) O vencedor numa segunda volta será o Carlos.

d) Neste caso, apesar de ainda não ser totalmente aceite, a maioria dos votantes é favorável à eleição do Carlos.

Tarefa 6 – Página 20

1. Tendo em conta os resultados da votação feita, temos que:

Preferência	*Coldplay*	*Arcade Fire*	*Kendrick Lamar*	*The Weeknd*
1.ª	132	*0*	*150*	$103 + 40 = 143$
2.ª	0	$132 + 103 + 40 + 150 = 425$	*0*	*0*
3.ª	190	*0*	$132 + 103 = 235$	*0*
4.ª	103	*0*	*40*	$132 + 150 = 282$

2. Aplicando o método de pontuação escolhido pela publicação, concluímos que:
   - $Coldplay \rightarrow 4 \times 132 + 3 \times 0 + 2 \times 190 + 1 \times 103 = 1\,011\, pontos$
   - $Arcade\ Fire \rightarrow 4 \times 0 + 3 \times 425 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 1\,275\, pontos$
   - $Kendrick\ Lamar \rightarrow 4 \times 150 + 3 \times 0 + 2 \times 235 + 1 \times 40 = 1\,110\, pontos$
   - $The\ Weeknd \rightarrow 4 \times 143 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 282 = 854\, pontos$

3. O eleito como melhor concerto do ano em Portugal por esta publicação foi *Arcade Fire* no Parque da Bela Vista, pois foi dos 4 concertos o que obteve melhor pontuação pelos leitores da publicação.
4. Pelo método de maioria simples, o concerto de Kendrick Lama seria o vencedor, pois foi o que obteve o maior número de votos na primeira preferência (150). Nenhum dos concertos obteve maioria absoluta (necessitaria de obter $\frac{425+1}{2} = 213$ votos).

Aplicar - Página 21

8. Tendo em conta a distribuição de preferências da eleição, verificamos que:
   - $Azul \rightarrow 4 \times (73 + 39) + 3 \times 13 + 2 \times (43 + 56) + 1 \times 0 = 685\, pontos$
   - $Preto \rightarrow 4 \times (43 + 13) + 3 \times (56 + 39) + 2 \times 73 + 1 \times 0 = 655\, pontos$
   - $Castanho \rightarrow 4 \times 56 + 3 \times 43 + 2 \times 13 + 1 \times (73 + 39) = 491\, pontos$
   - $Amarelo \rightarrow 4 \times 0 + 3 \times 73 + 2 \times 39 + 1 \times (43 + 13 + 56) = 409\, pontos$

   Concluímos que o vencedor desta eleição foi a cor Azul.

Tarefa 7 – Página 22

1. Tendo em conta o método de eleição usado, temos que:
   $Palhaço\ Assustador \rightarrow 3 \times 27 + 2 \times 0 + 1 \times (24 + 2) = 107\, pontos$
   $Enfermeira\ Horripilante \rightarrow 3 \times 24 + 2 \times 2 + 1 \times 27 = 103\, pontos$
   $Fada\ Encantada \rightarrow 3 \times 2 + 2 \times (27 + 24) + 1 \times 0 = 108\, pontos$

   Concluímos assim que a Fada Encantada é a vencedora do concurso. O ranking final foi: primeira posição Fada Encantada; segunda posição Palhaço Assustador; terceira posição Enfermeira Horripilante.

2. Retirando a Enfermeira Horripilante na distribuição dos votos, temos a reformulação seguinte.

1.ª Preferência	Fada Encantada	Palhaço Assustador
2.ª Preferência	Palhaço Assustador	Fada Encantada
N.º de votos	$24 + 2 = 26$	27

Assim, apurando as pontuações de cada um dos mascarados, concluímos que:

- $Fada\ Encantada \rightarrow 2 \times 26 + 1 \times 27 = 79\, pontos$
- $Palhaço\ Assustador \rightarrow 2 \times 27 + 1 \times 26 = 80\, pontos$

Assim, concluímos que quem vence, neste caso, será o Palhaço Assustador.
Ou seja, a Enfermeira Horripilante não gostou da máscara da Fada Encantada.

3. Restruturando os votos da tabela dada, vem que:

	1.ª Preferência	2.ª Preferência	3.ª Preferência
27 votos	Palhaço Assustador	Enfermeira Horripilante	Fada Encantada
24 votos	Enfermeira Horripilante	Fada Encantada	Palhaço Assustador
2 votos	Fada Encantada	Enfermeira Horripilante	Palhaço Assustador

As novas pontuações de cada uma das máscaras são:

- $Palhaço\ Assustador \rightarrow 3 \times 27 + 2 \times 0 + 1 \times (24 + 2) = 107\ pontos$
- $Enfermeira\ Horripilante \rightarrow 3 \times 24 + 2 \times (27 + 2) + 1 \times 0 = 130\ pontos$
- $Fada\ Encantada \rightarrow 3 \times 2 + 2 \times (24) + 1 \times 27 = 81\ pontos$

A alteração estratégica de voto acabou por provocar uma alteração no resultado da eleição.
Neste caso, a máscara vencedora seria a da Enfermeira Horripilante.

Aplicar - Página 22

9.

9.1. O número de eleitores que participaram nesta eleição é dado por:

$$n.^{\text{o}}\ de\ eleitores = 13 + 7 + 9 + 2 = 31$$

9.2. Como temos um número ímpar de eleitores, para que um candidato pudesse vencer por maioria absoluta, este teria de registar o número mínimo de votos seguinte.

$$n.^{\text{o}}\ mínimo\ de\ votos = \frac{31 + 1}{2} = 16$$

Para vencer com maioria absoluta, um candidato teria de ter 16 votos.

9.3. Comecemos por realizar um levantamento de primeiras preferências de cada candidato:

- $primeiras\ preferências\ A = 7$
- $primeiras\ preferências\ B = 0$
- $primeiras\ preferências\ C = 13 + 2 = 15$
- $primeiras\ preferências\ D = 9$

Logo, o candidato C será declarado vencedor por maioria simples.

9.4. Usando o método de contagem de Borda, apuramos as seguintes pontuações:

$A \rightarrow 4 \times 7 + 3 \times 13 + 2 \times 9 + 1 \times 2 = 87\ pontos$

$B \rightarrow 4 \times 0 + 3 \times 9 + 2 \times (7 + 2) + 1 \times 13 = 58\ pontos$

$C \rightarrow 4 \times (13 + 2) + 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times (7 + 9) = 76\ pontos$

$D \rightarrow 4 \times 9 + 3 \times (7 + 2) + 2 \times 13 + 1 \times 0 = 89\ pontos$

Usando o método de contagem de Borda, o vencedor seria o candidato D.

Aplicar - Página 23

10.

10.1. Tem-se que:

- $votos\ validamente\ expressos = 20$
- $n.^{\text{o}}\ de\ abstencionistas = 25 - 20 = 5$
- $percentagem\ de\ abstenção = \frac{5}{20} = 25\%$

10.2. Organizando uma tabela de preferências, vem que:

1.ª Preferência	A	A	C	B	C	B
2.ª Preferência	B	C	B	C	A	A
3.ª Preferência	C	B	A	A	B	C
N.º de votos	3	6	4	4	2	1

10.3. Apurando as pontuações de cada um dos candidatos, tem-se que:

- $A \rightarrow 3 \times (3+6) + 2 \times (2+1) + 1 \times (4+4) = 41\ pontos$
- $B \rightarrow 3 \times (4+1) + 2 \times (3+4) + 1 \times (6+2) = 37\ pontos$
- $C \rightarrow 3 \times (4+2) + 2 \times (6+4) + 1 \times (3+1) = 42\ pontos$

O vencedor desta eleição será C (Carlos).

10.4. Contabilizando as últimas preferências de cada candidato, obtemos os seguintes dados:

- $n.º\ de\ últimas\ preferência\ A = 4 + 4 = 8$
- $n.º\ de\ últimas\ preferências\ B = 6 + 2 = 8$
- $n.º\ de\ últimas\ preferências\ C = 3 + 1 = 4$

Os candidatos que registaram maior número de últimas preferências foram A e B (António e Bela).

Aplicar + - Páginas 25 a 34

Itens de Seleção

1.

1.1. O número de votos validamente expressos é:

$$votos\ validamente\ expressos = 345 + 201 + 302 + 507 = 1\,355$$

Opção (B)

1.2. Temos que:

$$n.º\ de\ abstencionistas = 2\,346 - (1\,355 + 35 + 56) = 900$$

Logo:

$$percentagem\ abstenção = \frac{900}{2346} \approx 38{,}4\%$$

Opção (A)

1.3. O número de votos validamente expressos registados nesta eleição é 1 355. Logo, determinamos as percentagens de votos de cada candidato.

- $percentagem\ Beatriz = \frac{345}{1355} \approx 25{,}5\%$
- $percentagem\ Pedro = \frac{201}{1355} \approx 14{,}8\%$
- $percentagem\ Francisco = \frac{302}{1355} \approx 22{,}3\%$
- $percentagem\ Stuart = \frac{507}{1355} \approx 37{,}4\%$

Podemos verificar que nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta, logo eliminamos as opções (A) e (C). Podemos constatar que *Stuart* Viana possui o maior número de votos dos candidatos. Assim, ele é o vencedor da eleição por maioria simples.
Opção (B)

2. Como o número de membros é par, então o número mínimo de votos necessário para haver maioria absoluta é:

$$n.^{\underline{o}}\ mínimo = \frac{54}{2} + 1 = 28$$

Opção (C)

3. Opção (A)

4. Nesta Assembleia, registamos o seguinte número de votos validamente expressos:

$$n.^{\underline{o}}\ de\ votos\ validamente\ expressos = 12 + 3 + 2 + 7 = 24$$

Logo, o número mínimo de votos validamente expressos para aprovação de determinada medida deverá ser:

$$n.^{\underline{o}}\ mínimo = \frac{24}{2} + 1 = 13$$

Logo, das coligações sugeridas, temos os seguintes números de votos associados:

- $votos\ B\ e\ C = 3 + 2 = 5$
- $votos\ C\ e\ D = 2 + 7 = 9$
- $votos\ B, C\ e\ D = 3 + 2 + 7 = 12$
- $votos\ A\ e\ C = 12 + 2 = 14$

Das quatro coligações propostas, a coligação A e C é uma coligação que levará à aprovação por maioria absoluta de uma proposta na assembleia.

Opção (D)

5. Determinando as pontuações obtidas por cada competidor, temos que:

- $Mágico\ Mike \rightarrow 4 \times 3 + 3 \times (5 + 7) + 2 \times 0 + 1 \times 2 = 50\ pontos$
- $Malabrista\ João \rightarrow 4 \times 7 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 5 = 46\ pontos$
- $Trapezista\ Luciano \rightarrow 4 \times (5 + 2) + 3 \times 0 + 2 \times 3 + 1 \times 7 = 41\ pontos$
- $Cantor\ José \rightarrow 4 \times 0 + 3 \times 2 + 2 \times (5 + 7) + 1 \times 3 = 33\ pontos$

Logo, o vencedor do concurso foi o Mágico Mike.

Opção (A)

6.

6.1. Tendo em conta a ordem de preferências e as posições ocupadas pelo Gel de Banho Spa, temos que:

$$Gel\ de\ Banho\ Spa \rightarrow 3 \times (22 + 20) + 2 \times (45 + 32) + 1 \times 31 = 311\ pontos$$

Opção (C)

6.2. Determinando as pontuações obtidas por cada um dos produtos da gama, temos que:

- $Gel\ de\ Banho\ Spa \rightarrow 3 \times (22 + 20) + 2 \times (45 + 32) + 1 \times 31 = 311\ pontos$
- $Gel\ de\ Banho\ Rosas\ do\ Deserto \rightarrow 3 \times 45 + 2 \times (31 + 20) + 1 \times (22 + 32) = 291\ pontos$
- $Gel\ de\ Banho\ Lavanda \rightarrow 3 \times (31 + 32) + 2 \times 22 + 1 \times (45 + 20) = 298\ pontos$

O gel de banho eleito por estes clientes é o Gel de Banho Spa.

Opção (B)

6.3. Temos agora que:

- $Gel\ de\ Banho\ Spa \rightarrow 9 \times (22 + 20) + 3 \times (45 + 32) + 1 \times 31 = 640\ pontos$
- $Gel\ de\ Banho\ Rosas\ do\ Deserto \rightarrow 9 \times 45 + 3 \times (31 + 20) + 1 \times (22 + 32) = 612\ pontos$
- $Gel\ de\ Banho\ Lavanda \rightarrow 9 \times (31 + 32) + 3 \times 22 + 1 \times (45 + 20) = 698\ pontos$

Podemos verificar que o gel de banho Lavanda passa a ser eleito como o gel de banho favorito. Logo, com a nova forma de pontuar, o vencedor altera-se.
Opção (C)

Itens de construção

7.

7.1. Tendo em conta os números registados durante a votação, temos que:

$$n.^{\underline{o}}\ de\ abstencionistas = 1255 - (622 + 438 + 18 + 35) = 142$$

Logo, a percentagem de abstenção registada foi:

$$percentagem\ de\ abstenção = \frac{142}{1255} \approx 11{,}3\%$$

A percentagem de abstenção nesta eleição foi de 11,3%.

7.2. Estudemos a possibilidade de o número de alunos abstencionistas terem alguma influência no resultado.
No caso de estes alunos votarem na lista B (lista perdedora), teríamos:

- $votos\ lista\ A = 622$
- $votos\ lista\ B = 438 + 142 = 580$

Mesmo com os alunos abstencionistas a votarem na lista B (lista perdedora), o número de votos desta lista não seria suficiente para que obtivesse mais votos do que a lista A~~.~~ Por esta razão, a Ana ter contestado a afirmação do Filipe.

7.3. A percentagem de alunos votantes na lista A é dada por:

- $n.^{\underline{o}}\ de\ votantes = 622 + 438 + 18 + 35 = 1113$
- $percentagem\ de\ votantes = \frac{622}{1113} \approx 55{,}9\%$

8.

8.1. Para tentar perceber a afirmação de Manuel Silva, estudemos a percentagem de abstenção nesta eleição.
Vejamos que:

- $n.^{\underline{o}}\ de\ abstencionistas = 1350 - (56 + 20 + 143 + 180 + 250) = 701$
- $percentagem\ de\ abstenção = \frac{701}{1350} \approx 51{,}9\%$

Tendo em conta este número, podemos concluir que, de facto, a participação dos foi reduzida nesta eleição.

8.2. Tem-se que:

$$votos\ validamente\ expressos = 143 + 180 + 250 = 573$$

Logo, a percentagem de votos validamente expressos de cada candidato é dada por:

- $percentagem\ Manuel\ Silva = \frac{143}{573} \approx 25{,}0\%$
- $percentagem\ António\ Gil = \frac{180}{573} \approx 31{,}4\%$
- $percentagem\ Maria\ de\ Lurdes = \frac{250}{573} \approx 43{,}6\%$

8.3.

a) Tal como verificado na alínea 2.2., nenhum dos candidatos foi declarado vencedor por maioria absoluta, pois nenhum atingiu mais de 50% dos votos validamente expressos.

b) No caso em que os votos brancos tivessem votado na candidata Maria de Lurdes, tínhamos que:

- $votos\ validamente\ expressos = 573 + 56 = 629$
- $percentagem\ António\ Gil = \frac{250+56}{629} \approx 48{,}6\%$

Podemos, então, concluir que a candidata Maria de Lurdes não tem razão na sua afirmação. Apesar de aumentar o número total de votos, a percentagem de votos validamente expressos não é suficiente para esta candidata vencer por maioria absoluta.

9.

9.1. O número de votos validamente expressos na eleição presidencial de 2021 é dado por:

$$v.v.e. = 2\,534\,745 + 541\,556 + 496\,773 + 180\,518 + 164\,741 + 134\,484 + 122\,774 = 4\,175\,591$$

9.2. Em termos de percentagem de abstenção, temos que:

- $n.º\ de\ abstencionistas = 10\,864\,327 - (47\,055 + 40\,026 + 4\,175\,591) = 6\,601\,655$
- $percentagem\ de\ abstenção = \frac{6\,601\,655}{10\,864\,327} \approx 60{,}8\%$

Podemos concluir que mais de 50% dos eleitores portugueses inscritos não foram votar nestas eleições. Este número é preocupante, pois, mais de 50% da população eleitoral portuguesa não participou nesta importante escolha política de 2021.

9.3.

- $percentagem\ votos\ validamente\ expressos\ Marcelo\ Rebelo\ de\ Sousa = \frac{2\,534\,745}{4\,175\,591} \approx 60{,}7\%$
- $percentagem\ Marcelo\ Rebelo\ de\ Sousa\ relativamente\ ao\ número\ de\ inscritos = \frac{2\,534\,745}{10\,864\,327} \approx 23{,}3\%$

A abstenção elevada deu origem a esta grande diferença entre as percentagens. Apesar de mais de metade dos votos validamente expressos terem sido em Marcelo Rebelo de Sousa, esta percentagem corresponde a menos de $\frac{1}{4}$ dos eleitores inscritos.

9.4. O candidato vencedor desta eleição foi Marcelo Rebelo de Sousa. Para que houvesse um segundo sufrágio, então o vencedor não poderia ter atingido mais de 50% dos votos validamente expressos. Como o referido candidato obteve cerca de 60,7% dos votos validamente expressos, então podemos concluir que não foi necessário haver segundo sufrágio, pois o candidato Marcelo Rebelo de Sousa atingiu a maioria absoluta nesta eleição.

9.5. Comecemos por determinar as percentagens obtidas por cada um dos candidatos nas eleições de 2021.

$$percentagem\ Ana\ Gomes = \frac{541\,556}{4\,175\,591} \approx 13{,}0\%$$

$$percentagem\ André\ Ventura = \frac{496\,773}{4\,175\,591} \approx 12{,}0\%$$

$$percentagem\ João\ Ferreira = \frac{180\,518}{4\,175\,591} \approx 4{,}3\%$$

$$percentagem\ Marisa\ Matias = \frac{164\,741}{4\,175\,591} \approx 3{,}9\%$$

$$percentagem\ Tiago\ Mayan = \frac{134\,484}{4\,175\,591} \approx 3{,}2\%$$

Assim, organizando os dados reais e da sondagem numa tabela, podemos observar o seguinte:

Candidato	Percentagem de Votos Validamente Expressos Obtida	Percentagem de Votos Validamente Expressos apontada pela Sondagem
Marcelo Rebelo de Sousa	60,7%	61,4%
Ana Gomes	13,0%	15,4%
André Ventura	12,0%	8,0%
João Ferreira	4,3%	7,5%
Marisa Matias	3,9%	5,6%
Tiago Mayan	3,2%	1,1%

Analisando as percentagens, podemos concluir que em termos da ordem relativa entre candidatos, a sondagem acertou nas suas previsões. No entanto, em termos percentuais, existem diferenças entre a previsão e o resultado, sendo registadas maiores diferenças nos candidatos perdedores.

10.

10.1. O número de votos validamente expressos nesta eleição são:

$$votos\ validamente\ expressos = 6 + 2 + 5 + 4 = 17$$

O número mínimo de votos validamente expressos para a maioria absoluta é:

$$n.^{\underline{o}}\ mínimo\ maioria\ absoluta = \frac{17+1}{2} = 9$$

Comecemos por efetuar o levantamento das primeiras preferências dos boletins de votos recolhidos:

- $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Giowrite = 6 + 2 = 8$
- $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ \ C\ e\ I = 4$
- $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Slovy = 5$

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, então ter-se-á de proceder a uma segunda volta com as duas marcas mais votadas, ou seja, *Giowrite* e a *Slovy*.

Tendo em conta que as preferências não se alteram, temos que:

1.ª Preferência	*Giowrite*	*Slovy*
2.ª Preferência	*Slovy*	*Giowrite*
N.º de votos	$6 + 2 = 8$	$5 + 4 = 9$

Logo, a *Slovy* é considerada a marca com melhor material de escrita de *lettering*.

10.2. Havendo a reformulação dos boletins de voto, em que os seis votantes do boletim de preferências da esquerda decidem trocar a ordem do seu boletim para *C e I*, *Giowrite* e *Slovy*, obtemos os seguintes resultados:

- $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Giowrite = 2 + 6 = 8$
- $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ \ C\ e\ I = 6 + 4 = 10$
- $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Slovy = 5$

Neste caso, a marca com melhor material escolar ficaria determinada e seria a *C e I*, sem ser necessário ir a uma segunda volta. *C e I* atingiria a maioria absoluta, logo na primeira volta de votação.

11.

11.1. Apurando número de primeiras preferências entre as instituições indicadas, temos que:

- $n.^{\text{o}}\ primeiras\ preferências\ UL = 10$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ UP = 15$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ UM = 21$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ UA = 14$

UM é a instituição com maior número de primeiras preferências.

11.2. Apurando o número de últimas preferências entre as instituições, temos:

- $n.^{\text{o}}\ últimas\ preferências\ UL = 15$
- $n.^{\text{o}}\ de\ últimas\ preferências\ UP = 10 + 21 = 31$
- $n.^{\text{o}}\ de\ últimas\ preferências\ UM = 14$
- $n.^{\text{o}}\ de\ últimas\ preferências\ UA = 0$

Assim, UP apresenta o maior número de últimas preferências entre os alunos.
A percentagem de alunos que votaram nesta instituição é:

$$percentagem\ últimas\ preferências\ UP = \frac{31}{10 + 15 + 21 + 14} \approx 51{,}7\%$$

11.3. Apurando as pontuações de cada uma das instituições, obtemos:

$UL \rightarrow 4 \times 10 + 3 \times 14 + 2 \times 21 + 1 \times 15 = 139\ pontos$
$UP \rightarrow 4 \times 15 + 3 \times 0 + 2 \times 14 + 1 \times (10 + 21) = 119\ pontos$
$UM \rightarrow 4 \times 21 + 3 \times (10 + 15) + 2 \times 0 + 1 \times 14 = 173\ pontos$
$UA \rightarrow 4 \times 14 + 3 \times 21 + 2 \times (10 + 15) + 1 \times 0 = 169\ pontos$

Aplicando o Método de Bora, UM seria a instituição a registar o maior número de pontos.

12.

12.1.

a) Temos que:

- $n.^{\text{o}}\ primeiras\ preferências\ LipStick\ Sweet = 12$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ True\ Stick = 45$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lolla = 31$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lisbon = 12 + 34 = 46$
- $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Maybe\ Stick = 50$

Logo, por maioria simples, o melhor batom do mercado seria o MaybeStick.

b) Os leitores que colocaram o Maybe Stick em última preferência poderiam evitar a vitória deste batom, caso tivessem alterado a sua ordem de preferências.

Dando exemplo de algumas possibilidades:

- Os 45 leitores poderiam ter trocada a sua 1.ª preferência com a 2.º preferência. Neste caso:
  - $n.^{\text{o}}\ primeiras\ preferências\ LipStick\ Sweet = 12$
  - $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ True\ Stick = 0$
  - $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lolla = 31 + 45 = 76$
  - $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lisbon = 12 + 34 = 46$
  - $n.^{\text{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Maybe\ Stick = 50$

Logo, o Batom Lolla passaria a ser o vencedor.

- Outra possibilidade poderia ser os 12 leitores trocarem a sua 3.ª preferência pela sua 1.º preferência.
  Assim:
  $n.^{\underline{o}}\ primeiras\ preferências\ LipStick\ Sweet = 0$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ True\ Stick = 12 + 45 = 57$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lolla = 31$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lisbon = 12 + 34 = 46$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Maybe\ Stick = 50$

Neste caso, seria True Stick a vencer.

- Uma outra possibilidade era os 34 leitores trocarem a sua 2.ª preferência com a sua 1.ª preferência.
  Ou seja:
  $n.^{\underline{o}}\ primeiras\ preferências\ LipStick\ Sweet = 12$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ True\ Stick = 45 + 34 = 79$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lolla = 31$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Batom\ Lisbon = 12$
  $n.^{\underline{o}}\ de\ primeiras\ preferências\ Maybe\ Stick = 50$

Neste casso, venceria também o True Stick.

12.2.

a) Neste caso, sim. Isto porque o número mínimo de primeiras preferências que um batom deveria ter para ter maioria absoluta seria:
$n.^{\underline{o}}\ de\ leitores\ votantes = 12 + 45 + 31 + 12 + 34 + 50 = 184$
$$n.^{\underline{o}}\ mínimo\ de\ votos\ para\ maioria\ absoluta = \frac{184}{2} + 1 = 93$$

Como nenhum dos batons registou, no mínimo, 93 primeiras preferências dos leitores, então haveria necessidade de proceder a um segundo sufrágio.

b) Os dois batons com maior número de primeiras preferências são *Maybe Stick* e *Batom Lisbon*. Logo, estes são os que passariam para uma nova votação.

c) No caso de uma segunda volta com a ordem relativa de preferências a manterem-se, então registamos que:

1.ª Preferência	Batom Lisbon	Maybe Stick
2.ª Preferência	Maybe Stick	Batom Lisbon
N.º de votos	$45 + 12 + 34 = 91$	$12 + 31 + 50 = 93$

Maybe Stick seria então declarado vencedor.

12.3. Fazendo o apuramento das pontuações de cada um dos batons, vem que:

- $pontuação\ LipStick\ Sweet = 5 \times 12 + 4 \times 12 + 3 \times (45 + 34) + 2 \times 0 + 1 \times (31 + 50) = 426$
- $pontuação\ Batom\ Lolla = 5 \times 31 + 4 \times (12 + 45 + 50) + 3 \times 0 + 2 \times (12 + 34) + 1 \times 0 = 675$
- $pontuação\ True\ Stick = 5 \times 45 + 4 \times 34 + 3 \times (12 + 12) + 2 \times (31 + 50) + 1 \times 0 = 595$
- $pontuação\ Maybe\ Stick = 5 \times 50 + 4 \times 31 + 3 \times 0 + 2 \times 12 + 1 \times (45 + 12 + 34) = 489$
- $pontuação\ Batom\ Lisbon = 5 \times (12 + 34) + 4 \times 0 + 3 \times (31 + 50) + 2 \times 45 + 1 \times 12 = 575$

O vencedor da eleição foi o *Batom Lolla*.

12.4. Resposta de opinião pessoal e comentário livre.

13.

13.1. Comecemos por determinar os pontos obtidos por cada um dos atletas no conjunto de votações destes alunos:

- $Pontuação\ Omanyala = 4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 0 + 1 \times 3 = 17$
- $Pontuação\ Kerley = 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 0 = 22$
- $Pontuação\ Lyles = 4 \times 0 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 15$
- $Pontuação\ Seville = 4 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 16$

O atleta vencedor será Kerley.

13.2.

a) Tendo em conta que Kerley foi afastado da prova, quem deveria substituí-lo como preferido para vencer a prova deste grupo seria Omanyala, pois foi o que obteve a segunda melhor pontuação entre os quatro atletas.

b) Refazendo os cálculos das pontuações, temos que:

- $pontuação\ Omanyala = 3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 13$
- $pontuação\ Lyles = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 15$
- $pontuação\ Seville = 3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 14$

O preferido para vencer a final da prova passaria a ser Lyles.

c) De facto, apesar de Lyles ter ficado inicialmente em último lugar na votação inicial que incluía os quatro atletas, com a retirada de Kerley da votação, Lyles passou a vencer como preferido, deixando Omanyala e Seville como perdedores (na votação inicial estes atletas estavam à frente de Lyles).

14.

14.1. No caso de a eleição ser disputada apenas entre A e B, então:

1.ª Preferência	A	B
2.ª Preferência	B	A
N.º de votos	$1 + 1 = 2$	1

Podemos concluir que A venceria B.

14.2. No caso de a eleição ser disputada entre B e C, então:

1.ª Preferência	B	C
2.ª Preferência	C	B
N.º de votos	$1 + 1 = 2$	1

Ou seja, B venceria a C.

14.3. Tendo por base as alíneas anteriores, é expectável que A vença a C. Considerando a disputa exclusiva entre A e C, verificamos:

1.ª Preferência	A	C
2.ª Preferência	C	A
N.º de votos	1	$1 + 1 = 2$

Assim, C venceria a A.

14.4. Apurando as pontuações de cada candidato, temos que:

- $pontuação\ A = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 6$
- $pontuação\ B = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 6$
- $pontuação\ C = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 6$

Neste caso, ninguém foi declarado vencedor, pois existe um empate técnico.

15. Comecemos por aplicar as indicações previstas pelo método A. Comecemos com o par Castanho e Amarelo.

Assim:

1.ª Preferência	Castanho	Amarelo
2.ª Preferência	Amarelo	Castanho
N.º de votos	$150 + 100 = 250$	180

Vence o Castanho.

Agora procedemos à comparação de Castanho com Vermelho:

1.ª Preferência	Castanho	Vermelho
2.ª Preferência	Vermelho	Castanho
N.º de votos	$150 + 100 = 250$	180

Ganha a cor Castanho. Como o Castanho vence nas duas comparações, podemos declarar Castanho como vencedor pelo método A.

Apliquemos agora o que prevê o método B.

Assim:

- $pontuação\ Castanho = 3 \times (150 + 100) + 2 \times 0 + 1 \times 180 = 930$
- $pontuação\ Amarelo = 3 \times 180 + 2 \times 150 + 1 \times 100 = 940$
- $pontuação\ Vermelho = 3 \times 0 + 2 \times (180 + 100) + 1 \times 150 = 710$

Com a aplicação do método B, Amarelo é considerada a cor vencedora.

A cor considerada vencedora é diferente nos dois métodos. Concluímos, então, que o Manuel tem razão quando afirma que a falta de indicação do método de apuramento do vencedor inviabiliza o processo da escolha da cor.

16.

16.1.

a) Tem-se que:

- $n.^{\text{º}}\ de\ primeiras\ preferências\ A = 6 + 3 = 9$
- $n.^{\text{º}}\ de\ primeiras\ preferências\ B = 12$
- $n.^{\text{º}}\ de\ primeiras\ preferências\ C = 0$
- $n.^{\text{º}}\ de\ primeiras\ preferências\ D = 0$

O jogo vencedor é o jogo B.

b) Neste caso, poderemos concluir que a vitória do jogo B será satisfatória, pois existem 9 amigos a colocar este jogo como última preferência.

16.2. Como sugerido, comecemos com o confronto do jogo A com o jogo B.

Neste caso:

1.ª Preferência	A	B
2.ª Preferência	B	A
N.º de votos	$6 + 3 = 9$	12

Vence o jogo B e o jogo A é retirado.

Passemos ao confronto entre o jogo B e o jogo C.
Concluímos que:

1.ª Preferência	C	B
2.ª Preferência	B	C
N.º de votos	$6+3=9$	12

Vence novamente o jogo B e o jogo C é retirado.

Estudemos o confronto entre o jogo B e o jogo D.
Assim:

1.ª Preferência	D	B
2.ª Preferência	B	D
N.º de votos	$6+3=9$	12

O jogo D é retirado e, mais uma vez, ganha o jogo B.

Esgotados todos os confrontos entre o jogo B e os restantes, então B é considerado vencedor. Ou seja, este método leva à eleição de um jogo vencedor.

Avaliar - Páginas 35 a 38

1. Tendo em conta, as informações presentes na tabela, temos que:

- $pontuação\ P = 4\times 200 + 3\times 400 + 2\times 600 + 1\times 0 = 3\,200\ pontos$
- $pontuação\ S = 4\times a + 3\times b + 2\times 400 + 1\times(c+200) = 4a + 3b + c + 1000$

S pode ter duas possibilidades: ou surge em 1.ª preferência na lista 3; ou surge em 2.º preferência na lista 3; ou surge em 4.ª preferência na lista 3. Assim, temos as seguintes possibilidades:

- S surge em 1.ª preferência na lista 3, que neste caso:

$$a = 600 \quad b = 0 \quad c = 0$$

$$pontuação\ S = 4\times 600 + 3\times 0 + 2\times 400 + 1\times(0+200) = 2\,400 + 1000 = 3\,400$$

O que não poderá acontecer, pois a pontuação de S é inferior à de P.

- S surge em 2.º preferência na lista 3, o que nos leva a conduzir que:

$$a = 0 \quad b = 600 \quad c = 0$$

$$pontuação\ S = 4\times 0 + 3\times 600 + 2\times 400 + 1\times(0+200) = 1\,800 + 1000 = 2\,800$$

Logo, Q surgirá como 1.º preferência ou 4.ª preferência. No caso de surgir em 1.º preferência, então Q totaliza $4\times 600 = 2\,400\ pontos$ na lista 3, o que contraria o enunciado. No caso de aparecer em 4.ª preferência, então Q totaliza $1\times 600 = 600\ pontos$, o que obriga a que ocupe a 3.ª preferência na lista 2 e a 4.ª preferência na lista 2 (única forma de totalizar 1 400 pontos). Logo, R só poderá ocupar a 1.º preferência na lista 3.

- S surge em 4.º preferência na lista 3, o que nos leva á seguinte pontuação:

$$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 600$$

$$pontuação\ S = 4\times 0 + 3\times 0 + 2\times 400 + 1\times(600+200) = 800 + 800 = 1\,600$$

Assim, Q terá de ficar na 2.º preferência ou na 1.º preferência. No entanto, em ambos os casos, a sua pontuação ultrapassa os 1 400 pontos previstos no enunciado.

Concluímos então que a ordenação na lista 3 dos jogadores será $R > S > P > Q$.

2.

2.1.

a) No 1.º turno, temos que:

$votos\ validamente\ expressos =$
$= 57\,259\,504 + 3\,599\,287 + 81\,129 + 51\,072\,345 + 53\,519 + 600\,955 + 559\,708 + 4\,915\,423 +$
$+45\,620 + 25\,625 + 16\,604 = 118\,229\,719$

Logo, o número de votos validamente expressos é 118 229 719.

b) O candidato mais votado no 1.º turno foi Lula da Silva, sendo que a percentagem de votos validamente expressos neste candidato é dada por:

$$percentagem\ Lula\ da\ Silva = \frac{57\,259\,504}{118\,229\,719} \approx 48{,}4\%$$

Opção (B)

c) Nenhum dos candidatos a Presidente foi eleito a 3 de outubro, pois o candidato mais votado (Lula da Silva) não atingiu mais de metade dos votos validamente expressos.

2.2.

a) Fazendo a contagem dos votos validamente expressos neste segundo turno, vem que:

$$votos\ validamente\ expressos = 60\,345\,999 + 58\,206\,354 = 118\,552\,353$$

Logo, as percentagens de votos validamente expressos registadas foram:

$$percentagem\ Lula\ da\ Silva = \frac{60\,345\,999}{118\,552\,353} \approx 50{,}9\ \%$$
$$percentagem\ Jair\ Bolsonaro = \frac{58\,206\,354}{118\,552\,353} \approx 49{,}1\%$$

b) Para verificar se os eleitores apoiantes de Simone Tebet respeitaram a sua decisão, procedemos à adição dos votos de Lula da Silva e de Simone Tebet no 1.º turno.
Ou seja:

$$n.º\ de\ votos\ Lula\ da\ Silva\ e\ Simone\ Tebet = 57\,259\,504 + 4\,915\,423 = 62\,174\,927$$

Assim, este valor aproxima-se do n.º de votos de Lula da Silva no 2.º turno, pelo que existe a possibilidade dos eleitores apoiantes de Simone Tebet terem acedido ao seu pedido.

c) Apesar do comentador estar a falar das percentagens, em termos absolutos a diferença entre o número de votos dos candidatos Lula da Silva e Jair Bolsonaro foi considerável, pois:

$$diferença\ de\ votos = 60\,345\,999 - 58\,206\,354 = 2\,139\,645$$

Assim, podemos verificar que a vitória de Lula sobre Jair Bolsonaro ainda foi considerável. Daí a dúvida do João.

3.

3.1. Temos que:

- $votos\ validamente\ expressos = 11 + 5 + 4 + 2 = 22$
- $n.º\ mínimo\ maioria\ absoluta = \frac{22}{2} + 1 = 12$

Logo, a coligação A e B seria uma coligação vencedora (por exemplo).

3.2. O partido D tem algum poder de decisão, apesar do seu número reduzido de votos. Como A não tem a maioria absoluta dos votos na Assembleia, necessita sempre de realizar uma coligação com algum dos restantes partidos na votação de determinada medida. Assim, D é um partido que se coligado com A poderá ter poder de decisão, pois garantirá maioria absoluta nesse caso.

4.

4.1. Temos que:
- $votos\ validamente\ expressos = 7 + 5 + 4 + 3 + 2 = 21$
- $n.º\ minimo\ de\ votos\ maioria\ absoluta = \frac{21+1}{2} = 11$

Apurando o número de primeiras preferências de cada sabor, temos:
- $n.º\ de\ primeiras\ preferências\ Noz = 7$
- $n.º\ de\ primeiras\ preferências\ Morango = 5 + 3 = 8$
- $n.º\ de\ primeiras\ preferências\ Cenoura = 4 + 2 = 6$
- $n.º\ de\ primeiras\ preferências\ Chocolate = 0$

Logo, o vencedor não teria sido decidido, tendo em conta que nenhum dos sabores a eleição atingiu o número mínimo de votos para alcançar a maioria absoluta.

4.2. Tendo em conta os resultados apurados inicialmente, passaria para uma segunda volta os sabores de Noz e Morango. Assim, mantendo as preferências relativas entre os dois sabores, numa segunda volta obteríamos:

1.ª Preferência	Noz	Morango
2.ª Preferência	Morango	Noz
N.º de votos	$7 + 2 = 9$	$5 + 4 + 3 = 12$

Logo, o vencedor seria Morango.

4.3. Fazendo o cálculo das pontuações de cada sabor na aplicação do Método de Borda, obtemos:
- $pontuação\ Noz = 4 \times 7 + 3 \times 5 + 2 \times (3 + 2) + 1 \times 4 = 57$
- $pontuação\ Cenoura = 4 \times (4 + 2) + 3 \times 7 + 2 \times 5 + 1 \times 3 = 58$
- $pontuação\ Morango = 4 \times 3 + 3 \times 0 + 2 \times (7 + 4) + 1 \times 2 = 56$
- $pontuação\ Chocolate = 4 \times 0 + 3 \times (4 + 3 + 2) + 2 \times 0 + 1 \times (7 + 5) = 39$

O sabor vencedor será o sabor de cenoura.

4.4. Se elevarmos a dois os pontos a atribuir, temos:
- $pontuação\ Noz = 16 \times 7 + 9 \times 5 + 4 \times (3 + 2) + 1 \times 4 = 181$
- $pontuação\ Cenoura = 16 \times (4 + 2) + 9 \times 7 + 4 \times 5 + 1 \times 3 = 182$
- $pontuação\ Morango = 16 \times (5 + 3) + 9 \times 0 + 4 \times (7 + 4) + 1 \times 2 = 174$
- $pontuação\ Chocolate = 16 \times 0 + 9 \times (4 + 3 + 2) + 4 \times 0 + 1 \times (7 + 5) = 93$

Neste caso, o vencedor continua a manter-se.

2. Modelos matemáticos na partilha

Recordar - Página 41

1.

1.1. Neste caso, a constante de proporcionalidade é:

$$\frac{90}{12} = 7,5$$

A constante de proporcionalidade corresponde ao número de quilómetros percorridos pelo automóvel da Rita por cada litro de gasolina gasto.

1.2. Com 60 litros de gasolina, o automóvel percorre:

$$distância\ percorrida = 7{,}5 \times 60 = 450\ km$$

1.3. A quantidade de gasolina é dada por:

$$quantidade\ = \frac{495}{7{,}5} = 66\ litros$$

1.4. Considerando k a distância percorrida pelo automóvel da Rita e l a quantidade de gasolina, em litros, gasta a percorrê-la, então:

$$k = 7{,}5l$$

2. Termos que $5:4$ significa que a quantia total de dinheiro será decomposta em 9 partes, sendo que 5 dessas partes pertencem ao departamento de recursos humanos e 4 dessas partes pertencem ao departamento de marketing.
Ora,

$$\frac{7200}{9} = 800$$

Logo:

$$marketing = 4 \times 800 = 3\,200\ € \quad recursos\ humanos = 5 \times 800 = 4\,000\ €$$

O departamento de marketing irá receber 3200 euros e o departamento de recursos humanos irá receber 4 000 euros.

3. Observando a tabela, temos que:

$$constante\ de\ proporcionalidade\ direta = k = \frac{400}{8} = 50$$

Considerando r o comprimento real das observações e i o comprimento da imagem ampliada, tem-se que:

$$i = 50r$$

Logo, se $r = 2$, então

$$i = 50 \times 2 = 100\ mm$$

Se $i = 500$, então

$$500 = 50r \Leftrightarrow \frac{500}{50} = r \Leftrightarrow 10 = r$$

Ou seja, completando a tabela do enunciado, temos:

Comprimento real (mm)	2	8	**10**
Comprimento da imagem ampliada (mm)	**100**	400	500

Tarefa 1 – Página 42

1. Portugal está dividido em 22 círculos eleitorais, tal como ilustra o mapa (18 círculos coincidem com os distritos administrativos, um círculo para cada uma das regiões autónomas da Madeira e dos Açores, um círculo corresponde à Europa e outro círculo eleitoral correspondente ao exterior da Europa).
São eleitos 230 deputados.

2.

Eleições Legislativas de 2022

N.º de Eleitores Total: 10 820 337

Círculo Eleitoral	N.º de Eleitores Registados
Viana do Castelo	236 042
Braga	776 539
Vila Real	213 093
Bragança	137 572
Porto	1 592 590
Aveiro	642 602
Viseu	340 342
Guarda	145 852
Coimbra	374 935
Castelo Branco	166 269
Leiria	413 083
Santarém	378 006
Portalegre	94 374
Lisboa	1 919 958
Évora	134 828
Setúbal	745 593
Beja	120 888
Faro	380 371
Região Autónoma da Madeira	256 431
Região Autónoma dos Açores	229 022
Europa	926 376
Fora da Europa	595 571

Fonte: https://www.eleicoes.mai.gov.pt/legislativas2022/resultados/globais

3. Consultando os resultados publicados em:
https://www.eleicoes.mai.gov.pt/legislativas2022/resultados/globais
tem-se que:

Círculo Eleitoral	N.º de Deputados a Eleger
Viana do Castelo	6
Braga	19
Vila Real	5
Bragança	3
Porto	40
Aveiro	16
Viseu	8
Guarda	3
Coimbra	9
Castelo Branco	4
Leiria	10
Santarém	9

Círculo Eleitoral	N.º de Deputados a Eleger
Portalegre	2
Lisboa	48
Évora	3
Setúbal	18
Beja	3
Faro	9
Região Autónoma da Madeira	6
Região Autónoma dos Açores	5
Europa	2
Fora da Europa	2
Total	230

Construímos uma tabela que discrimine a percentagem de eleitores em cada região, numa folha de cálculo.

Círculo Eleitoral	N.º de Eleitores Registados	Percentagem de Eleitores
Viana do Castelo	236 042	2,18
Braga	776 539	7,18
Vila Real	213 093	1,97
Bragança	137 572	1,27
Porto	1 592 590	14,72
Aveiro	642 602	5,94
Viseu	340 342	3,15
Guarda	145 852	1,35
Coimbra	374 935	3,47
Castelo Branco	166 269	1,54
Leiria	413 083	3,82
Santarém	378 006	3,49
Portalegre	94 374	0,87
Lisboa	1 919 958	17,74
Évora	134 828	1,25
Setúbal	745 593	6,89
Beja	120 888	1,12
Faro	380 371	3,52
Região Autónoma da Madeira	256 431	2,37
Região Autónoma dos Açores	229 022	2,12
Europa	926 376	8,56
Fora da Europa	595 571	5,50
Total	**10 820 337**	**100,00**

Calculando o número de deputados que corresponde a cada região, de forma proporcional, temos que:

Círculo Eleitoral	N.º de Eleitores Registados	Percentagem de Eleitores	N.º de Deputados Atribuídos	N.º de Deputados Proporcional aos Eleitores
Viana do Castelo	236 042	2,18	6	5
Braga	776 539	7,18	19	17
Vila Real	213 093	1,97	5	5
Bragança	137 572	1,27	3	3
Porto	1 592 590	14,72	40	34
Aveiro	642 602	5,94	16	14
Viseu	340 342	3,15	8	7
Guarda	145 852	1,35	3	3
Coimbra	374 935	3,47	9	8
Castelo Branco	166 269	1,54	4	4
Leiria	413 083	3,82	10	9
Santarém	378 006	3,49	9	8
Portalegre	94 374	0,87	2	2
Lisboa	1 919 958	17,74	48	41
Évora	134 828	1,25	3	3
Setúbal	745 593	6,89	18	16
Beja	120 888	1,12	3	3
Faro	380 371	3,52	9	8
Região Autónoma da Madeira	256 431	2,37	6	5
Região Autónoma dos Açores	229 022	2,12	5	5
Europa	926 376	8,56	2	20
Fora da Europa	595 571	5,50	2	13
Total	**10 820 337**	**100,00**	**230**	**230**

Analisando os resultados da última coluna, podemos verificar que a distribuição de mandatos dos deputados pelos círculos eleitorais não é feita de forma diretamente proporcional.

Nota: De ressalvar que aos círculos eleitorais da Europa e Fora da Europa são atribuídos um número total de mandatos entre 2 a 4, dependendo do número de eleitores inscritos nos cadernos eleitorais destes círculos (Lei n.º 14/79, de 16 de maio, artigo 13.º, n.º 2).

Tarefa 2 – Página 43

1. Recorrendo a uma folha de cálculo, comecemos por construir uma tabela com os dados descritos.

Como apenas teremos de distribuir 6 mandatos, podemos optar por determinar apenas os quocientes das 6 forças políticas mais votadas, pois, num cenário extremo, cada uma dessas forças políticas receberá um mandato correspondentes aos seis maiores quocientes.

Por outro lado, podemos usar as potencialidades da folha de cálculo para determinar os quocientes as divisões do número de votos de cada partido pelos divisores sucessivos 1,2,3,4, ... tal como previsto no Método de Hondt.

Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	IL	B.E.	PCP-PEV	PAN	L	PTP	R.I.R.	ADN	MPT	PPM	MAS	E
N.º de Votos	50 634	40 004	9 721	7 727	4 241	4 109	2 591	2 094	913	699	554	550	462	260	244	234
Divisores																
1	50634,0	40004,0	9721,0	7727,0	4241,0	4109,0	2591,0	2094,0	913,0	699,0	554,0	550,0	462,0	260,0	244,0	234,0
2	25317,0	20002,0	4860,5	3863,5	2120,5	2054,5	1295,5	1047,0	456,5	349,5	277,0	275,0	231,0	130,0	122,0	117,0
3	16878,0	13334,7	3240,3	2575,7	1413,7	1369,7	863,7	698,0	304,3	233,0	184,7	183,3	154,0	86,7	81,3	78,0
4	12658,5	10001,0	2430,3	1931,8	1060,3	1027,3	647,8	523,5	228,3	174,8	138,5	137,5	115,5	65,0	61,0	58,5
5	10126,8	8000,8	1944,2	1545,4	848,2	821,8	518,2	418,8	182,6	139,8	110,8	110,0	92,4	52,0	48,8	46,8
6	8439,0	6667,3	1620,2	1287,8	706,8	684,8	431,8	349,0	152,2	116,5	92,3	91,7	77,0	43,3	40,7	39,0
7	7233,4	5714,9	1388,7	1103,9	605,9	587,0	370,1	299,1	130,4	99,9	79,1	78,6	66,0	37,1	34,9	33,4
8	6329,3	5000,5	1215,1	965,9	530,1	513,6	323,9	261,8	114,1	87,4	69,3	68,8	57,8	32,5	30,5	29,3

Segundo o Método de Hondt, de seguida, deveremos ordenar os quocientes obtidos anteriormente por ordem decrescente da sua grandeza, sendo atribuídos os mandatos aos partidos a que correspondem esses quocientes. No entanto, a folha de cálculo também realiza essa tarefa, se o utilizador usar a função "ordem". Podemos então confirmar que a distribuição de mandatos pelas diferentes forças políticas em eleição fica do modo seguinte.

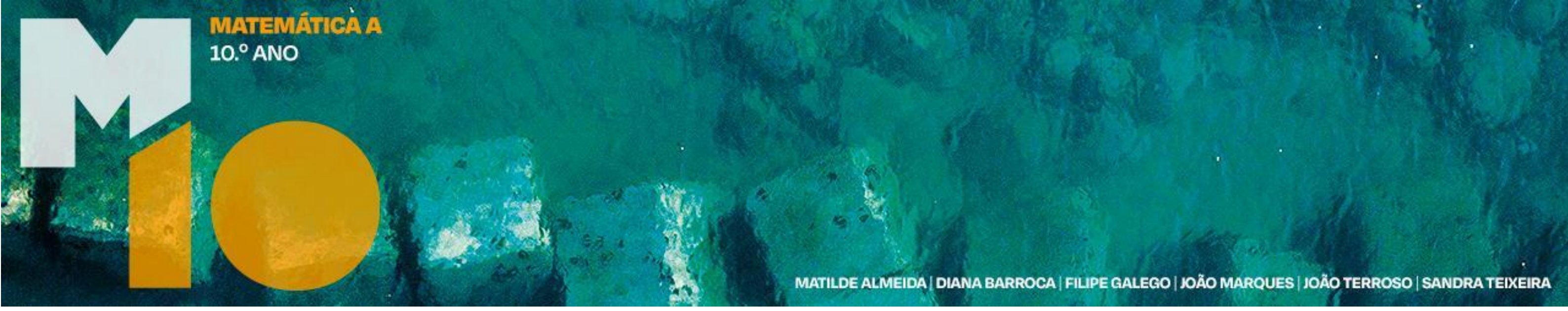
Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	IL	B.E.	PCP-PEV	PAN	L	PTP	R.I.R.	ADN	MPT	PPM	MAS	E
N.º de Votos	50 634	40 004	9 721	7 727	4 241	4 109	2 591	2 094	913	699	554	550	462	260	244	234
Divisores																
1	1	2	10	13	20	21	24	28	45	50	56	57	62	75	76	77
2	3	4	19	22	27	29	37	42	63	67	72	73	79	91	92	93
3	5	6	23	25	34	36	46	51	70	78	81	82	85	104	105	108
4	7	9	26	31	41	43	53	59	80	84	88	89	95	113	114	115
5	8	12	30	33	47	48	60	65	83	87	97	98	100	117	118	119
6	11	15	32	38	49	52	64	68	86	94	101	102	109	120	121	122
7	14	17	35	40	54	55	66	71	90	99	106	107	112	123	124	125
8	16	18	39	44	58	61	69	74	96	103	110	111	116	126	127	128

- PPD/PSD.CDS-PP obtém 3 mandatos.
- PS obtém 3 mandatos.

2. No caso de os quocientes serem obtidos a partir dos divisores ímpares, geramos os seguintes resultados na folha de cálculo.

Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	IL	B.E.	PCP-PEV	PAN	L	PTP	R.I.R.	ADN	MPT	PPM	MAS	E
N.º de Votos	50 634	40 004	9 721	7 727	4 241	4 109	2 591	2 094	913	699	554	550	462	260	244	234
Divisores																
1	50634,0	40004,0	9721,0	7727,0	4241,0	4109,0	2591,0	2094,0	913,0	699,0	554,0	550,0	462,0	260,0	244,0	234,0
3	16878,0	13334,7	3240,3	2575,7	1413,7	1369,7	863,7	698,0	304,3	233,0	184,7	183,3	154,0	86,7	81,3	78,0
5	10126,8	8000,8	1944,2	1545,4	848,2	821,8	518,2	418,8	182,6	139,8	110,8	110,0	92,4	52,0	48,8	46,8
7	7233,4	5714,9	1388,7	1103,9	605,9	587,0	370,1	299,1	130,4	99,9	79,1	78,6	66,0	37,1	34,9	33,4
9	5626,0	4444,9	1080,1	858,6	471,2	456,6	287,9	232,7	101,4	77,7	61,6	61,1	51,3	28,9	27,1	26,0
11	4603,1	3636,7	883,7	702,5	385,5	373,5	235,5	190,4	83,0	63,5	50,4	50,0	42,0	23,6	22,2	21,3
13	3894,9	3077,2	747,8	594,4	326,2	316,1	199,3	161,1	70,2	53,8	42,6	42,3	35,5	20,0	18,8	18,0
15	3375,6	2666,9	648,1	515,1	282,7	273,9	172,7	139,6	60,9	46,6	36,9	36,7	30,8	17,3	16,3	15,6

Partido	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	IL	B.E.	PCP-PEV	PAN	L	PTP	R.I.R.	ADN	MPT	PPM	MAS	E
N.º de Votos	50 634	40 004	9 721	7 727	4 241	4 109	2 591	2 094	913	699	554	550	462	260	244	234
Divisores																
1	1	2	6	8	14	15	22	24	32	40	46	47	51	64	65	67
3	3	4	19	23	27	29	34	41	59	68	72	73	77	86	88	91
5	5	7	25	26	36	37	48	53	74	78	81	82	85	100	104	105
7	9	10	28	30	43	45	56	60	80	84	89	90	94	110	114	115
9	11	13	31	35	50	52	61	69	83	92	96	97	101	117	118	119
11	12	17	33	39	54	55	66	71	87	95	102	103	109	120	121	122
13	16	20	38	44	57	58	70	76	93	99	107	108	113	123	124	125
15	18	21	42	49	62	63	75	79	98	106	111	112	116	126	127	128



De forma quase imediata, conseguimos observar que a distribuição de mandatos iria gerar uma situação diferente da prevista por lei, pois:

- PPD/PSD.CDS-PP mantinha a atribuição de 3 mandatos.
- PS diminuiria a sua força política em 1 mandato, obtendo 2.
- JPP passaria a integrar a Assembleia da República com 1 representante político.

Aplicar – Página 46

1.

(A) Calculando os sucessivos quocientes, obtemos o seguinte:

	Lista			
	A	B	C	D
Divisores \ **N.º de Votos**	531	450	234	305
1	531,00	450,00	234,00	305,00
2	265,50	225,00	117,00	152,50
3	177,00	150,00	78,00	101,67
4	132,75	112,50	58,50	76,25

Ordenando os respetivos quocientes, ficamos com o seguinte:

	Lista			
	A	B	C	D
Divisores \ **N.º de Votos**	531	450	234	305
1	531,00 (1)	450,00 (2)	234,00 (5)	305,00 (3)
2	265,50 (4)	225,00 (6)	117,00	152,50
3	177,00	150,00	78,00	101,67
4	132,75	112,50	58,50	76,25

Podemos então concluir que serão atribuídos 2 mandatos às listas A e B e 1 mandato às listas C e D.

(B) Comecemos por determinar os respetivos quocientes, dividindo o número de votos de cada lista por 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente.

	Lista		
	E	F	G
Divisores \ **N.º de Votos**	34	35	30
1	34,00	35,00	30,00
2	17,00	17,50	15,00
3	11,33	11,67	10,00
4	8,50	8,75	7,50

Logo, podemos ordenar os quocientes.

	Lista		
	E	F	G
N.º de Votos / **Divisores**	34	35	30
1	34,00 (2)	35,00 (1)	30,00 (3)
2	17,00	17,50 (4)	15,00
3	11,33	11,67	10,00
4	8,50	8,75	7,50

Assim, conseguimos concluir que serão atribuídos 2 mandatos à lista F e 1 mandato às listas E e G.

Podemos observar que as duas listas mais votadas na situação A têm uma diferença de 81 votos, tal distribuição leva à atribuição de 2 mandatos a ambas as forças políticas.
Já na situação B, a diferença de votos entre as listas E e F (as mais votadas nesta situação) é de apenas 1. No entanto, por causa desse voto, a lista F recebe o dobro de mandatos em relação à E.
Estas duas distribuições de mandatos mostram a variedade de cenários que este tipo de métodos de distribuição poderá conduzir.

Aplicar – Página 47

2.

2.1. Iniciemos a aplicação do Método de Sainte-Laguë, determinando os quocientes entre o número de votos de cada lista por 1, 3, 5, e assim sucessivamente.

	Lista		
	A	B	C
N.º de Votos / **Divisores**	45	67	70
1	45,00	67,00	70,00
2	15,00	22,33	23,33
3	9,00	13,40	14,00
4	6,43	9,57	10,00

Logo, ordenamos esses quocientes, por ordem decrescente.

	Lista		
	A	B	C
N.º de Votos / **Divisores**	45	67	70
1	45,00 (3)	67,00 (2)	70,00 (1)
2	15,00	22,33 (5)	23,33 (4)
3	9,00	13,40	14,00
4	6,43	9,57	10,00

Podemos então concluir que as Listas B e C irão receber 2 mandatos e a Lista A receberá 1 mandato.

2.2. Determinando os quocientes de cada uma das listas, vem que:

	Lista	
	D	E
Divisores \ **N.º de Votos**	95	67
1	95,00	67,00
3	31,67	22,33
5	19,00	13,40
7	13,57	9,57
9	10,56	7,44

Procedendo à ordenação dos quocientes, podemos verificar que:

	Lista	
	D	E
Divisores \ **N.º de Votos**	95	67
1	95,00 (1)	67,00 (2)
3	31,67 (3)	22,33 (4)
5	19,00 (5)	13,40
7	13,57 (6)	9,57
9	10,56	7,44

Concluímos que a Lista D irá receber 4 mandatos e a Lista E irá receber 2 mandatos.

Aplicar – Página 48

3.

3.1. Comecemos por determinar a percentagem de alunos de cada uma das escolas.

- $n.^{\text{o}}\ de\ alunos = 1456 + 2034 + 789 + 2045 + 1756 + 980 + 4065 = 13\,125$
- $percentagem_{B.} = \frac{1456}{13\,125} \approx 11{,}093\%$
- $percentagem_{A.S.} = \frac{2034}{13\,125} \approx 15{,}497\%$
- $percentagem_{A.V.} = \frac{789}{13\,125} \approx 6{,}011\%$
- $percentagem_{A.C.} = \frac{2045}{13\,125} \approx 15{,}581\%$
- $percentagem_{S.A.} = \frac{1756}{13\,125} \approx 13{,}379\%$
- $percentagem_{C.} = \frac{980}{13\,125} \approx 7{,}467\%$
- $percentagem_{S.A.C.} = \frac{4065}{13\,125} \approx 30{,}971\%$

Logo, o número de computadores a atribuir a cada Agrupamento será:

- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{B.} = \frac{1456}{13\,125} \times 34 \approx 4$
- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{A.S.} = \frac{2034}{13\,125} \times 34 \approx 5$
- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{A.V.} = \frac{789}{13\,125} \times 34 \approx 2$
- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{A.C.} = \frac{2045}{13\,125} \times 34 \approx 5$
- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{S.A.} = \frac{1756}{13\,125} \times 34 \approx 5$
- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{C.} = \frac{980}{13\,125} \times 34 \approx 3$
- $n.^{\text{o}}\ de\ computadores_{S.A.C.} = \frac{4065}{13\,125} \times 34 \approx 11$

Tem-se então que: $n.^{\text{o}}\ de\ computadores\ atribuídos = 4 + 5 + 2 + 5 + 5 + 3 + 11 = 35$
Haveria a atribuição de mais um computador do que o número de computadores existentes disponíveis para distribuição.

3.2. Aplicando o Método de Hondt na distribuição dos computadores, comecemos por determinar os quocientes.

	Escola						
	Barreiro	Alfredo da Silva	Álvaro Velho	Augusto Cabrita	Santo André	Casquilhos	Santo António da Charneca
Divisores \ **N.º de Alunos**	1456	2034	789	2045	1756	980	4065
1	1456,00	2034,00	789,00	2045,00	1756,00	980,00	4065,00
2	728,00	1017,00	394,50	1022,50	878,00	490,00	2032,50
3	485,33	678,00	263,00	681,67	585,33	326,67	1355,00
4	364,00	508,50	197,25	511,25	439,00	245,00	1016,25
5	291,20	406,80	157,80	409,00	351,20	196,00	813,00
6	242,67	339,00	131,50	340,83	292,67	163,33	677,50
7	208,00	290,57	112,71	292,14	250,86	140,00	580,71
8	182,00	254,25	98,63	255,63	219,50	122,50	508,13
9	161,78	226,00	87,67	227,22	195,11	108,89	451,67
10	145,60	203,40	78,90	204,50	175,60	98,00	406,50
11	132,36	184,91	71,73	185,91	159,64	89,09	369,55
12	121,33	169,50	65,75	170,42	146,33	81,67	338,75

Ordenamos, por ordem decrescente, esses quocientes.

	Escola						
	Barreiro	Alfredo da Silva	Álvaro Velho	Augusto Cabrita	Santo André	Casquilhos	Santo António da Charneca
Divisores \ **N.º de Alunos**	1456	2034	789	2045	1756	980	4065
1	1456,00 (6)	2034,00 (3)	789,00 (14)	2045,00 (2)	1756,00 (5)	980,00 (11)	4065,00 (1)
2	728,00 (15)	1017,00 (9)	394,50 (31)	1022,50 (8)	878,00 (12)	490,00 (24)	2032,50 (4)
3	485,33 (25)	678,00 (17)	263,00	681,67 (16)	585,33 (19)	326,67	1355,00 (7)
4	364,00 (33)	508,50 (22)	197,25	511,25 (21)	439,00 (27)	245,00	1016,25 (10)
5	291,20	406,80 (29)	157,80	409,00 (28)	351,20 (34)	196,00	813,00 (13)
6	242,67	339,00	131,50	340,83	292,67	163,33	677,50 (18)
7	208,00	290,57	112,71	292,14	250,86	140,00	580,71 (20)
8	182,00	254,25	98,63	255,63	219,50	122,50	508,13 (23)

Logo, a distribuição final dos 34 computadores será feita da seguinte forma:

- O Agrupamento de Escolas do Barreiro receberá 4 computadores;
- O Agrupamento de Escolas Alfredo da Silva receberá 5 computadores;
- O Agrupamento de Escolas Álvaro Velho receberá 2 computadores;
- O Agrupamento de Escolas Augusto Cabrita receberá 5 computadores;
- O Agrupamento de Escolas de Santo André receberá 5 computadores;
- O Agrupamento de Escolas dos Casquilhos receberá 2 computadores;
- O Agrupamento de Escolas de Santo António da Charneca receberá 11 computadores.

3.3. Vamos aplicar o Método de Sainte-Laguë aos dados fornecidos, determinado os quocientes resultantes das divisões dos números alunos de cada escola por 1, 3, 5, e assim sucessivamente.

	Escola						
	Barreiro	Alfredo da Silva	Álvaro Velho	Augusto Cabrita	Santo André	Casquilhos	Santo António da Charneca
N.º de Alunos / Divisores	1456	2034	789	2045	1756	980	4065
1	1456,00	2034,00	789,00	2045,00	1756,00	980,00	4065,00
3	485,33	678,00	263,00	681,67	585,33	326,67	1355,00
5	291,20	406,80	157,80	409,00	351,20	196,00	813,00
7	208,00	290,57	112,71	292,14	250,86	140,00	580,71
9	161,78	226,00	87,67	227,22	195,11	108,89	451,67
11	132,36	184,91	71,73	185,91	159,64	89,09	369,55
13	112,00	156,46	60,69	157,31	135,08	75,38	312,69
15	97,07	135,60	52,60	136,33	117,07	65,33	271,00
17	85,65	119,65	46,41	120,29	103,29	57,65	239,12
19	76,63	107,05	41,53	107,63	92,42	51,58	213,95
21	69,33	96,86	37,57	97,38	83,62	46,67	193,57

Atribuindo uma ordem a cada um dos quocientes de forma decrescente, tem-se o seguinte.

	Escola						
	Barreiro	Alfredo da Silva	Álvaro Velho	Augusto Cabrita	Santo André	Casquilhos	Santo António da Charneca
N.º de Alunos / Divisores	1456	2034	789	2045	1756	980	4065
1	1456,00 (5)	2034,00 (3)	789,00 (9)	2045,00 (2)	1756,00 (4)	980,00 (7)	4065,00 (1)
3	485,33 (14)	678,00 (11)	263,00 (26)	681,67 (10)	585,33 (12)	326,67 (20)	1355,00 (6)
5	291,20 (23)	406,80 (17)	157,80	409,00 (16)	351,20 (19)	196,00 (33)	813,00 (8)
7	208,00 (32)	290,57 (24)	112,71	292,14 (22)	250,86 (27)	140,00	580,71 (13)
9	161,78	226,00 (30)	87,67	227,22 (29)	195,11 (34)	108,89	451,67 (15)
11	132,36	184,91	71,73	185,91	159,64	89,09	369,55 (18)
13	112,00	156,46	60,69	157,31	135,08	75,38	312,69 (21)
15	97,07	135,60	52,60	136,33	117,07	65,33	271,00 (25)
17	85,65	119,65	46,41	120,29	103,29	57,65	239,12 (28)
19	76,63	107,05	41,53	107,63	92,42	51,58	213,95 (31)
21	69,33	96,86	37,57	97,38	83,62	46,67	193,57

Usando o Método de Sainte-Laguë, a distribuição final dos 34 computadores seria:

- O Agrupamento de Escolas do Barreiro receberá 4 computadores;
- O Agrupamento de Escolas Alfredo da Silva receberá 5 computadores;

- O Agrupamento de Escolas Álvaro Velho receberá 2 computadores;
- O Agrupamento de Escolas Augusto Cabrita receberá 5 computadores;
- O Agrupamento de Escolas de Santo André receberá 5 computadores;
- O Agrupamento de Escolas dos Casquilhos receberá 3 computadores;
- O Agrupamento de Escolas de Santo António da Charneca receberá 10 computadores.

De facto, o Agrupamento de Escolas dos Casquilhos acabaria por ser beneficiado com a utilização do Método de Sainte-Laguë, pois receberia mais 1 computador do que na distribuição prevista pelo Método de Hondt. Dos restantes agrupamentos, o Agrupamento de Escolas de Santo António da Charneca sairia prejudicada com a aplicação do Método de Sainte-Laguë, passando a receber 10 computadores em vez de 11.

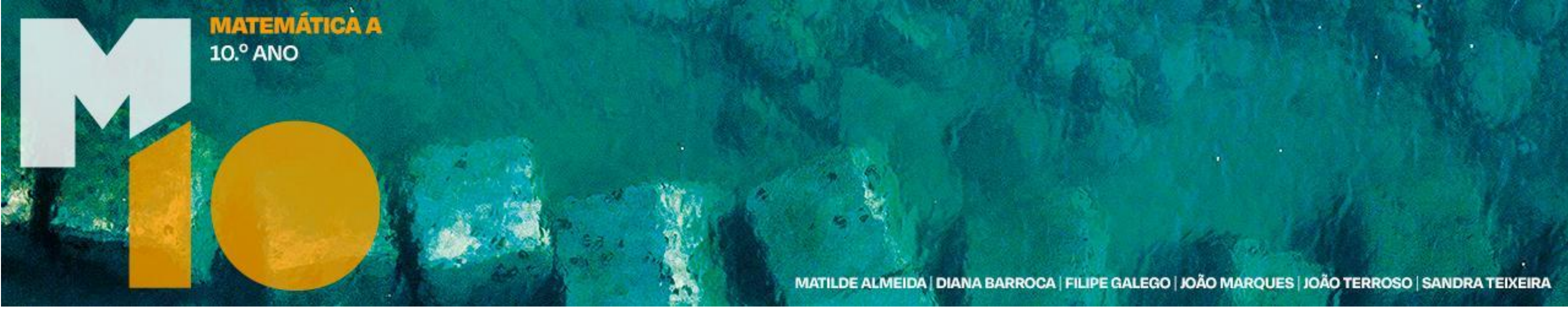
3.4. Usando como referência os quocientes resultantes da aplicação do Método de Hondt, temos que:

	Escola						
	Barreiro	Alfredo da Silva	Álvaro Velho	Augusto Cabrita	Santo André	Casquilhos	Santo António da Charneca
N.º de Alunos / Divisores	1456	2034	789	2045	1756	980	4065
1	1456,00	2034,00	789,00	2045,00	1756,00	980,00	4065,00
2	728,00	1017,00	394,50	1022,50	878,00	490,00	2032,50
3	485,33	678,00	263,00	681,67	585,33	326,67	1355,00
4	364,00	508,50	197,25	511,25	439,00	245,00	1016,25
5	291,20	406,80	157,80	409,00	351,20	196,00	813,00
6	242,67	339,00	131,50	340,83	292,67	163,33	677,50
7	208,00	290,57	112,71	292,14	250,86	140,00	580,71
8	182,00	254,25	98,63	255,63	219,50	122,50	508,13
9	161,78	226,00	87,67	227,22	195,11	108,89	451,67
10	145,60	203,40	78,90	204,50	175,60	98,00	406,50
11	132,36	184,91	71,73	185,91	159,64	89,09	369,55
12	121,33	169,50	65,75	170,42	146,33	81,67	338,75
13	112,00	156,46	60,69	157,31	135,08	75,38	312,69
14	104,00	145,29	56,36	146,07	125,43	70,00	290,36
15	97,07	135,60	52,60	136,33	117,07	65,33	271,00
16	91,00	127,13	49,31	127,81	109,75	61,25	254,06

Depois de ordenados, já concluímos que:

	Escola						
	Barreiro	Alfredo da Silva	Álvaro Velho	Augusto Cabrita	Santo André	Casquilhos	Santo António da Charneca
N.º de Alunos / Divisores	1456	2034	789	2045	1756	980	4065
1	1456,00 (6)	2034,00 (3)	789,00 (14)	2045,00 (2)	1756,00 (5)	980,00 (11)	4065,00 (1)
2	728,00 (15)	1017,00 (9)	394,50 (31)	1022,50 (8)	878,00 (12)	490,00 (24)	2032,50 (4)
3	485,33 (25)	678,00 (17)	**263,00 (46)**	681,67 (16)	585,33 (19)	326,67 (38)	1355,00 (7)
4	364,00 (33)	508,50 (22)	197,25	511,25 (21)	439,00 (27)	245,00	1016,25 (10)
5	291,20 (42)	406,80 (29)	157,80	409,00 (28)	351,20 (34)	196,00	813,00 (13)
6	242,67	339,00 (36)	131,50	340,83 (35)	292,67 (40)	163,33	677,50 (18)
7	208,00	290,57 (43)	112,71	292,14 (41)	250,86	140,00	580,71 (20)
8	182,00	254,25	98,63	255,63	219,50	122,50	508,13 (23)
9	161,78	226,00	87,67	227,22	195,11	108,89	451,67 (26)
10	145,60	203,40	78,90	204,50	175,60	98,00	406,50 (30)
11	132,36	184,91	71,73	185,91	159,64	89,09	369,55 (32)
12	121,33	169,50	65,75	170,42	146,33	81,67	338,75 (37)
13	112,00	156,46	60,69	157,31	135,08	75,38	312,69 (39)
14	104,00	145,29	56,36	146,07	125,43	70,00	290,36 (44)
15	97,07	135,60	52,60	136,33	117,07	65,33	271,00 (45)
16	91,00	127,13	49,31	127,81	109,75	61,25	254,06

Podemos então concluir que para ser atribuído mais um computador ao Agrupamento de Escolas Álvaro Velho seriam necessários 46 computadores.



Aplicar + Páginas 50 a 54

Itens de seleção

1.

1.1. Calculando dos quocientes previstos pelo Método de Hondt, obtemos o seguinte.

	Partido			
	A	B	C	D
N.º de Votos / **Divisores**	730	1302	2304	1879
1	730,00	1302,00	2304,00	1879,00
2	365,00	651,00	1152,00	939,50
3	243,33	434,00	768,00	626,33
4	182,50	325,50	576,00	469,75
5	146,00	260,40	460,80	375,80
6	121,67	217,00	384,00	313,17
7	104,29	186,00	329,14	268,43

Procedendo à ordenação decrescente desses quocientes, podemos observar o seguinte.

	Partido			
	A	B	C	D
N.º de Votos / **Divisores**	730	1302	2304	1879
1	730,00 (7)	1302,00 (3)	2304,00 (1)	1879,00 (2)
2	365,00	651,00 (8)	1152,00 (4)	939,50 (5)
3	243,33	434,00	768,00 (6)	626,33 (9)
4	182,50	325,50	**576,00 (10)**	469,75
5	146,00	260,40	460,80	375,80
6	121,67	217,00	384,00	313,17
7	104,29	186,00	329,14	268,43

O décimo mandato é atribuído ao partido C.

Opção (C)

1.2. Ordenando, por ordem decrescente, os quocientes determinados, podemos concluir que seria necessário atribuir 16 mandatos para que o partido A obtivesse 2 mandatos na eleição.

	Partido			
	A	B	C	D
Divisores \ **N.º de Votos**	730	1302	2304	1879
1	730,00 (7)	1302,00 (3)	2304,00 (1)	1879,00 (2)
2	365,00 (16)	651,00 (8)	1152,00 (4)	939,50 (5)
3	243,33	434,00 (13)	768,00 (6)	626,33 (9)
4	182,50	325,50	576,00 (10)	469,75 (11)
5	146,00	260,40	460,80 (12)	375,80 (15)
6	121,67	217,00	384,00 (14)	313,17
7	104,29	186,00	329,14	268,43

Opção (A)

1.3. Aplicando o Método de Sainte-Laguë, os quocientes são os seguintes.

	Partido			
	A	B	C	D
Divisores \ **N.º de Votos**	730	1302	2304	1879
1	730,00	1302,00	2304,00	1879,00
3	243,33	434,00	768,00	626,33
5	146,00	260,40	460,80	375,80
7	104,29	186,00	329,14	268,43
9	81,11	144,67	256,00	208,78

Colocando os mandatos por ordem decrescente dos quocientes de cada força política, temos o seguinte.

	Partido			
	A	B	C	D
Divisores \ **N.º de Votos**	730	1302	2304	1879
1	730,00 (5)	1302,00 (3)	2304,00 (1)	1879,00 (2)
3	243,33	434,00 (8)	768,00 (4)	626,33 (6)
5	146,00	260,40	460,80 (7)	375,80 (9)
7	104,29	186,00	329,14 (10)	268,43
9	81,11	144,67	256,00	208,78

Assim, fazendo a comparação da distribuição de mandatos usando o Método de Hondt e o Método de Sainte-Laguë, a distribuição dos mandatos pelos partidos manter-se-ia igual.

Opção (D).

2.

2.1. Tendo em conta que ao aplicar-se o Método de Hondt, os primeiros quocientes são determinados pela divisão do número de votos por 1, então a lista com maior número de votos elege automaticamente o seu cabeça de lista como Presidente da Assembleia Associativa. Logo, o partido com maior número de votos é A, pelo que Bruno é eleito para o cargo de Presidente.
Opção (A)

2.2. Comecemos por determinar os quocientes previstos pela Método de Sainte-Laguë.

	Partido		
	A	B	C
Divisores \ **N.º de Votos**	132	69	98
1	132,00	69,00	98,00
3	44,00	23,00	32,67
5	26,40	13,80	19,60
7	18,86	9,86	14,00
9	14,67	7,67	10,89

Logo, a atribuição de mandatos irá ser baseada nos 6 maiores quocientes.

	Partido		
	A	B	C
Divisores \ **N.º de Votos**	132	69	98
1	132,00 (1)	69,00 (3)	98,00 (2)
3	44,00 (4)	23,00	32,67 (5)
5	26,40 (6)	13,80	19,60
7	18,86	9,86	14,00
9	14,67	7,67	10,89

Consultando os nomes e as ordens das listas de cada uma das forças políticas em eleição, temos que os candidatos eleitos (por ordem) são os seguintes.
Bruno (1.ª nomeação Lista A) – Presidente
Margarida (1.ª nomeação Lista C) – Vice-Presidente
Ana (1.ª nomeação Lista B) – Tesoureira
Joel (2.ª nomeação Lista A), Leonardo (2.ª nomeação Lista C) e Filipa (3.ª nomeação Lista A) – Vogais

Opção (B)

Itens de construção

3. Calculemos os quocientes obtidos pela divisão do número de votos de cada partido por 1, 2, 3, e assim sucessivamente.

	Partido			
	A	B	C	D
N.º de Votos / **Divisores**	340	254	328	276
1	340,00	254,00	328,00	276,00
2	170,00	127,00	164,00	138,00
3	113,33	84,67	109,33	92,00
4	85,00	63,50	82,00	69,00

A distribuição de mandatos irá ser feita atribuindo lugares aos 8 maiores quocientes, quando ordenados de modo crescente.

	Partido			
	A	B	C	D
N.º de Votos / **Divisores**	340	254	328	276
1	340,00 (1)	254,00 (4)	328,00 (2)	276,00 (3)
2	170,00 (5)	127,00 (8)	164,00 (6)	138,00 (7)
3	113,33	84,67	109,33	92,00
4	85,00	63,50	82,00	69,00

Concluímos que a distribuição final de mandatos pelos partidos em eleição será de dois para cada um dos partidos.

4. Usando o previsto no Método de Sainte-Laguë, comecemos por calcular o quociente do número de votos de cada força política por 1, 3, 5, e assim sucessivamente.

	Partido				
	PPP	POV	PER	POS	PCS
N.º de Votos / **Divisores**	450	425	403	500	475
1	450,00	425,00	403,00	500,00	475,00
3	150,00	141,67	134,33	166,67	158,33
5	90,00	85,00	80,60	100,00	95,00
7	64,29	60,71	57,57	71,43	67,86

Tendo conta os 12 maiores quocientes, tem-se que:

	Partido				
	PPP	POV	PER	POS	PCS
N.º de Votos / **Divisores**	450	425	403	500	475
1	450,00 (3)	425,00 (4)	403,00 (5)	500,00 (1)	475,00 (2)
3	150,00 (8)	141,67 (9)	134,33 (10)	166,67 (6)	158,33 (7)
5	90,00	85,00	80,60	100,00 (11)	95,00 (12)
7	64,29	60,71	57,57	71,43	67,86

Ou seja, os partidos PPP, POV e PER recebem dois mandatos cada um e as forças políticas POS e PCS recebem três mandatos cada uma.

5.

5.1. Tendo em conta que o método para decidir a distribuição dos equipamentos informáticos foi o Método de Hondt, então determinamos os quocientes resultantes da divisão do número de alunos de cada escola por 1, 2, 3, e assim sucessivamente.

	Escola				
	E.B. Alfredo Almeida	E.S. Marta Moreira	E.P. Assobios do Vento	E.P. Fogareiro	E.B. Alfredo Almeida
Divisores \ **N.º de Alunos**	3189	2898	590	496	3189
1	3189,00	2898,00	590,00	496,00	3189,00
2	1594,50	1449,00	295,00	248,00	1594,50
3	1063,00	966,00	196,67	165,33	1063,00
4	797,25	724,50	147,50	124,00	797,25
5	637,80	579,60	118,00	99,20	637,80
6	531,50	483,00	98,33	82,67	531,50

Procedemos à ordenação desses quocientes, por ordem crescente.

	Escola				
	E.B. Alfredo Almeida	E.S. Marta Moreira	E.P. Assobios do Vento	E.P. Fogareiro	E.B. Alfredo Almeida
Divisores \ **N.º de Alunos**	3189	2898	590	496	3189
1	3189,00 (1)	2898,00 (2)	590,00 (10)	496,00	3189,00
2	1594,50 (3)	1449,00 (4)	295,00	248,00	1594,50
3	1063,00 (5)	966,00 (6)	196,67	165,33	1063,00
4	797,25 (7)	724,50 (8)	147,50	124,00	797,25
5	637,80 (9)	579,60	118,00	99,20	637,80
6	531,50	483,00	98,33	82,67	531,50

A distribuição final dos equipamentos informáticos será: Escola Básica Alfredo Almeida, 5 equipamentos; Escola Secundária Marta Moreira, 4 equipamentos; Escola Primária Assobios do Vento, 1 equipamento; Escola Primária do Fogareiro, 0 equipamentos.

5.2.

a) A aplicação do Método de Hondt fez com que nenhum equipamento fosse atribuído a essa escola, o que poderá ter levado ao descontentamento da sua Direção. No caso de se usar no Método de Sainte-Laguë, os quocientes obtidos serão alterados para os seguintes.

	Escola			
	E.B. Alfredo Almeida	E.S. Marta Moreira	E.P. Assobios do Vento	E.P. Fogareiro
Divisores \ **N.º de Alunos**	3189	2898	590	496
1	3189,00	2898,00	590,00	496,00
3	1063,00	966,00	196,67	165,33
5	637,80	579,60	118,00	99,20
7	455,57	414,00	84,29	70,86
9	354,33	322,00	65,56	55,11
11	289,91	263,45	53,64	45,09

Ordenamos esses quocientes, por ordem decrescente.

	Escola			
	E.B. Alfredo Almeida	E.S. Marta Moreira	E.P. Assobios do Vento	E.P. Fogareiro
N.º de Alunos / **Divisores**	3189	2898	590	496
1	3189,00 (1)	2898,00 (2)	590,00 (6)	496,00 (8)
3	1063,00 (3)	966,00 (4)	196,67	165,33
5	637,80 (5)	579,60 (7)	118,00	99,20
7	455,57 (9)	414,00 (10)	84,29	70,86
9	354,33	322,00	65,56	55,11
11	289,91	263,45	53,64	45,09

Conseguimos então perceber que a sugestão feita pela Escola Primária do Fogareiro conduziria à atribuição de um equipamento informático a esta escola, sendo que a Escola Básica Alfredo Almeida iria ficar com menos um para si.

b) Comecemos por determinar a percentagem de alunos de cada uma das escolas desta autarquia.

- $n.º\ total\ de\ alunos = 3\,189 + 2\,898 + 590 + 496 = 7\,173$
- $percentagem_{EBAA} = \frac{3\,189}{7\,173} \times 100 \approx 44{,}5\%$ $\quad percentagem_{ESMM} = \frac{2\,898}{7\,173} \times 100 \approx 40{,}4\%$
- $percentagem_{EPAV} = \frac{590}{7\,173} \times 100 \approx 8{,}2\%$ $\quad percentagem_{EPF} = \frac{496}{7\,173} \times 100 \approx 6{,}9\%$

Logo, tendo em conta as percentagens de alunos, o número de equipamentos a atribuir seria:

- $n.º\ de\ equipamentos_{EBAA} = 0{,}445 \times 10 \approx 4$ $\quad n.º\ de\ equipamentos_{ESMM} = 0{,}404 \times 10 \approx 4$
- $n.º\ de\ equipamentos_{EPAV} = 0{,}082 \times 10 \approx 1$ $\quad n.º\ de\ equipamentos_{ESMM} = 0{,}069 \times 10 \approx 1$

Usando como critério a proporcionalidade direta de alunos de cada escola, podemos concluir que a distribuição dos equipamentos informáticos se mantém igual à distribuição prevista pelo Método de Sainte-Laguë. Como todas as escolas recebem pelo menos um equipamento informático, podemos aceitar que esta distribuição será mais consensual.

6.

6.1. O número de votantes nestas eleições é o seguinte.

$n.º\ de\ votantes =$

$= 1\,081 + 712 + 20\,812 + 19\,562 + 827 + 2\,320 + 495 + 1\,376 + 1\,189 + 130 + 144 + 265 + 2\,961 + 215 + 1\,306 = 53\,395$

6.2. O n.º de abstencionistas é dado por:

- $n.º\ de\ abestencionistas = 128\,251 - 53\,395 = 74\,856$

Logo, a percentagem de abstenção corresponde a:

- $percentagem\ de\ abstenção = \frac{74\,856}{128\,251} \approx 58{,}4\%$

6.3. O número de votos validamente expressos foi o seguinte.

- $n.º\ de\ votos\ validamente\ expressos = 53\,395 - (1\,081 + 712) = 51\,602$

A força política vencedora desta eleição foi o PS. A percentagem de votos validamente expressos registado por este partido foi: $percentagem_{PS} = \frac{20\,812}{51\,602} \approx 40{,}3\%$

Tendo em conta que esta força política obteve uma percentagem de votos validamente expressos inferior a 50%, então a sua vitória não foi por maioria absoluta.

6.4. Tendo em conta que a Lei Eleitoral Portuguesa prevê a aplicação do Método de Hondt para a distribuição dos 20 mandatos, comecemos por determinar os quocientes registados por cada força política.

	Força Política												
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP/PEV	PAN	PPM	MPT	PCTP/MRPP	L	CH	A	IL
VVE / Divisores	20 812	19 562	827	2320	495	1376	1189	130	144	265	2961	215	1306
1	20812,0	19562,0	827,0	2320,0	495,0	1376,0	1189,0	130,0	144,0	265,0	2961,0	215,0	1306,0
2	10406,0	9781,0	413,5	1160,0	247,5	688,0	594,5	65,0	72,0	132,5	1480,5	107,5	653,0
3	6937,3	6520,7	275,7	773,3	165,0	458,7	396,3	43,3	48,0	88,3	987,0	71,7	435,3
4	5203,0	4890,5	206,8	580,0	123,8	344,0	297,3	32,5	36,0	66,3	740,3	53,8	326,5
5	4162,4	3912,4	165,4	464,0	99,0	275,2	237,8	26,0	28,8	53,0	592,2	43,0	261,2
6	3468,7	3260,3	137,8	386,7	82,5	229,3	198,2	21,7	24,0	44,2	493,5	35,8	217,7
7	2973,1	2794,6	118,1	331,4	70,7	196,6	169,9	18,6	20,6	37,9	423,0	30,7	186,6
8	2601,5	2445,3	103,4	290,0	61,9	172,0	148,6	16,3	18,0	33,1	370,1	26,9	163,3
9	2312,4	2173,6	91,9	257,8	55,0	152,9	132,1	14,4	16,0	29,4	329,0	23,9	145,1
10	2081,2	1956,2	82,7	232,0	49,5	137,6	118,9	13,0	14,4	26,5	296,1	21,5	130,6

Ordenamos esses quocientes, por ordem decrescente.

	Força Política												
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP/PEV	PAN	PPM	MPT	PCTP/MRPP	L	CH	A	IL
VVE / Divisores	20 812	19 562	827	2320	495	1376	1189	130	144	265	2961	215	1306
1	20 812	19 562	827	2320	495	1376	1189	130	144	265	2961	215,0	1306,0
2	20812,0 (1)	19562,0 (2)	827,0	2320,0 (18)	495,0	1376,0	1189,0	130,0	144,0	265,0	2961,0 (14)	107,5	653,0
3	10406,0 (3)	9781,0 (4)	413,5	1160,0	247,5	688,0	594,5	65,0	72,0	132,5	1480,5	71,7	435,3
4	6937,3 (5)	6520,7 (6)	275,7	773,3	165,0	458,7	396,3	43,3	48,0	88,3	987,0	53,8	326,5
5	5203,0 (7)	4890,5 (8)	206,8	580,0	123,8	344,0	297,3	32,5	36,0	66,3	740,3	43,0	261,2
6	4162,4 (9)	3912,4 (10)	165,4	464,0	99,0	275,2	237,8	26,0	28,8	53,0	592,2	35,8	217,7
7	3468,7 (11)	3260,3 (12)	137,8	386,7	82,5	229,3	198,2	21,7	24,0	44,2	493,5	30,7	186,6
8	2973,1 (13)	2794,6 (15)	118,1	331,4	70,7	196,6	169,9	18,6	20,6	37,9	423,0	26,9	163,3
9	2601,5 (16)	2445,3 (17)	103,4	290,0	61,9	172,0	148,6	16,3	18,0	33,1	370,1	23,9	145,1
10	2312,4 (19)	2173,6 (20)	91,9	257,8	55,0	152,9	132,1	14,4	16,0	29,4	329,0	21,5	130,6

Logo, podemos concluir que foram atribuídos 9 mandatos ao PS e ao PPD/PSD e 1 mandato ao BE e CH.

6.5. Façamos a simulação da distribuição de mandatos na hipótese de utilizar-se o Método de Sainte-Laguë. Determinemos os quocientes previstos pelo método.

	Força Política												
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP/PEV	PAN	PPM	MPT	PCTP/MRPP	L	CH	A	IL
Divisores \ VVE	20 812	19 562	827	2320	495	1376	1189	130	144	265	2961	215	1306
1	20812,0	19562,0	827,0	2320,0	495,0	1376,0	1189,0	130,0	144,0	265,0	2961,0	215,0	1306,0
3	6937,3	6520,7	275,7	773,3	165,0	458,7	396,3	43,3	48,0	88,3	987,0	71,7	435,3
5	4162,4	3912,4	165,4	464,0	99,0	275,2	237,8	26,0	28,8	53,0	592,2	43,0	261,2
7	2973,1	2794,6	118,1	331,4	70,7	196,6	169,9	18,6	20,6	37,9	423,0	30,7	186,6
9	2312,4	2173,6	91,9	257,8	55,0	152,9	132,1	14,4	16,0	29,4	329,0	23,9	145,1
11	1892,0	1778,4	75,2	210,9	45,0	125,1	108,1	11,8	13,1	24,1	269,2	19,5	118,7
13	1600,9	1504,8	63,6	178,5	38,1	105,8	91,5	10,0	11,1	20,4	227,8	16,5	100,5
15	1387,5	1304,1	55,1	154,7	33,0	91,7	79,3	8,7	9,6	17,7	197,4	14,3	87,1
17	1224,2	1150,7	48,6	136,5	29,1	80,9	69,9	7,6	8,5	15,6	174,2	12,6	76,8
19	1095,4	1029,6	43,5	122,1	26,1	72,4	62,6	6,8	7,6	13,9	155,8	11,3	68,7

Faz-se a distribuição dos mandatos pelos partidos que registam os 20 maiores quocientes, após a sua ordenação por ordem crescente.

	Força Política												
	PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP/PEV	PAN	PPM	MPT	PCTP/MRPP	L	CH	A	IL
Divisores \ VVE	20 812	19 562	827	2320	495	1376	1189	130	144	265	2961	215	1306
1	20812,0 (1)	19562,0 (2)	827,0	2320,0 (10)	495,0	1376,0 (18)	1189,0	130,0	144,0	265,0	2961,0 (8)	215,0	1306,0 (19)
3	6937,3 (3)	6520,7 (4)	275,7	773,3	165,0	458,7	396,3	43,3	48,0	88,3	987,0	71,7	435,3
5	4162,4 (5)	3912,4 (6)	165,4	464,0	99,0	275,2	237,8	26,0	28,8	53,0	592,2	43,0	261,2
7	2973,1 (7)	2794,6 (9)	118,1	331,4	70,7	196,6	169,9	18,6	20,6	37,9	423,0	30,7	186,6
9	2312,4 (11)	2173,6 (12)	91,9	257,8	55,0	152,9	132,1	14,4	16,0	29,4	329,0	23,9	145,1
11	1892,0 (13)	1778,4 (14)	75,2	210,9	45,0	125,1	108,1	11,8	13,1	24,1	269,2	19,5	118,7
13	1600,9 (15)	1504,8 (16)	63,6	178,5	38,1	105,8	91,5	10,0	11,1	20,4	227,8	16,5	100,5
15	1387,5 (17)	1304,1 (20)	55,1	154,7	33,0	91,7	79,3	8,7	9,6	17,7	197,4	14,3	87,1
17	1224,2	1150,7	48,6	136,5	29,1	80,9	69,9	7,6	8,5	15,6	174,2	12,6	76,8
19	1095,4	1029,6	43,5	122,1	26,1	72,4	62,6	6,8	7,6	13,9	155,8	11,3	68,7

Usando o Método de Sainte-Laguë, a distribuição de mandatos seria diferente, pois: PS e PPD/PSD teriam 8 mandatos (perdendo 1 em comparação com o Método de Hondt); BE e CH manteriam a atribuição de 1 mandato cada; PAN e IL passariam a eleger 1 deputado. A Assembleia Regional dos Açores seria mais heterogénea em termos de forças políticas com representatividade.

7.

7.1. Aplicando o Método de Hondt para determinar a forma de distribuição do dinheiro, tem-se que os quocientes registados são os seguintes.

	Região						
	Norte	Centro	AM Lisboa	Alentejo	Algarve	RA Açores	RA Madeira
N.º de Idosos / **Divisores**	114 778	99 561	90 660	33 375	15 799	4778	6413
1	114778,0	99561,0	90660,0	33375,0	15799,0	4778,0	6413,0
2	57389,0	49780,5	45330,0	16687,5	7899,5	2389,0	3206,5
3	38259,3	33187,0	30220,0	11125,0	5266,3	1592,7	2137,7
4	28694,5	24890,3	22665,0	8343,8	3949,8	1194,5	1603,3
5	22955,6	19912,2	18132,0	6675,0	3159,8	955,6	1282,6
6	19129,7	16593,5	15110,0	5562,5	2633,2	796,3	1068,8

As regiões com os 15 maiores quocientes registados correspondem àquelas que irão receber as tranches de 1 000 000 €.

	Região						
	Norte	Centro	AM Lisboa	Alentejo	Algarve	RA Açores	RA Madeira
N.º de Idosos / **Divisores**	114 778	99 561	90 660	33 375	15 799	4778	6413
1	114 778,0 (1)	99 561,0 (2)	90 660,0 (3)	33 375,0 (8)	15799,0	4778,0	6413,0
2	57 389,0 (4)	49 780,5 (5)	45 330,0 (6)	16 687,5	7899,5	2389,0	3206,5
3	38 259,3 (7)	33 187,0 (9)	30 220,0 (10)	11 125,0	5266,3	1592,7	2137,7
4	28 694,5 (11)	24 890,3 (12)	22 665,0 (14)	8343,8	3949,8	1194,5	1603,3
5	22 955,6 (13)	19 912,2 (15)	18 132,0	6675,0	3159,8	955,6	1282,6
6	19129,7	16593,5	15110,0	5562,5	2633,2	796,3	1068,8

Podemos então concluir que as regiões Norte e Centro irão receber 5 000 000 € cada uma, a Área Metropolitana de Lisboa irá receber 4 000 000 € e o Alentejo irá receber 1 000 000 €. As restantes regiões não irão receber qualquer quantia.

7.2. Considerando os divisores ímpares, tal como previsto pelo Método de Sainte-Laguë, temos o seguinte.

	Região						
	Norte	Centro	AM Lisboa	Alentejo	Algarve	RA Açores	RA Madeira
N.º de Idosos / **Divisores**	114 778	99 561	90 660	33 375	15 799	4778	6413
1	114 778,0	99 561,0	90 660,0	33 375,0	15 799,0	4778,0	6413,0
3	38 259,3	33 187,0	30 220,0	11 125,0	5266,3	1592,7	2137,7
5	22 955,6	19 912,2	18 132,0	6675,0	3159,8	955,6	1282,6
7	16 396,9	14 223,0	12 951,4	4767,9	2257,0	682,6	916,1
9	12 753,1	11 062,3	10 073,3	3708,3	1755,4	530,9	712,6
11	10 434,4	9051,0	8241,8	3034,1	1436,3	434,4	583,0

Fazendo a atribuição das tranches às regiões que registam os 15 maiores quocientes, então:

	Região						
	Norte	Centro	AM Lisboa	Alentejo	Algarve	RA Açores	RA Madeira
N.º de Idosos / Divisores	114 778	99 561	90 660	33 375	15 799	4778	6413
1	114 778,0 (1)	99 561,0 (2)	90 660,0 (3)	33 375,0 (5)	15 799,0 (12)	4778,0	6413,0
3	38 259,3 (4)	33 187,0 (6)	30 220,0 (7)	11 125,0	5266,3	1592,7	2137,7
5	22 955,6 (8)	19 912,2 (9)	18 132,0 (10)	6675,0	3159,8	955,6	1282,6
7	16 396,9 (11)	14 223,0 (13)	12 951,4 (14)	4767,9	2257,0	682,6	916,1
9	12 753,1 (15)	11062,3	10 073,3	3708,3	1755,4	530,9	712,6
11	10 434,4	9051,0	8241,8	3034,1	1436,3	434,4	583,0

No caso da aplicação do Método de Sainte-Laguë, podemos concluir que a região Centro perderia 1 000 000 € que iriam ser fornecidos à região do Algarve, mantendo-se os 5 000 000 € da região Norte, os 4 000 000 € da Região Metropolitana de Lisboa e 1 000 000 € do Alentejo. O Método de Sainte-Laguë permitiria a distribuição do dinheiro por um maior número de regiões.

8.

8.1. A Lei Eleitoral Portuguesa prevê que a distribuição de mandatos pelas regiões territoriais seja feita através do Método de distribuição proporcional de Hondt.

Comecemos por calcular os quocientes obtidos pela divisão do número de votos de cada um dos partidos políticos por 1, 2, 3, e assim sucessivamente das 6 forças políticas mais votadas.

	Força Política					
	PPD/PSD.CDS-PP	PS	BE	PCP-PEV	PDR	PCTP-MRPP
VVE / Divisores	58 509	38 309	10 225	6726	2400	1113
1	58 509,0	38 309,0	10 225,0	6726,0	2400,0	1113,0
2	29 254,5	19 154,5	5112,5	3363,0	1200,0	556,5
3	19 503,0	12 769,7	3408,3	2242,0	800,0	371,0
4	14 627,3	9577,3	2556,3	1681,5	600,0	278,3
5	11 701,8	7661,8	2045,0	1345,2	480,0	222,6
6	9751,5	6384,8	1704,2	1121,0	400,0	185,5

Os mandatos serão então atribuídos às forças políticas com os 6 maiores quocientes registados.

	Força Política					
	PPD/PSD.CDS-PP	PS	BE	PCP-PEV	PDR	PCTP-MRPP
VVE / Divisores	58 509	38 309	10 225	6726	2400	1113
1	58 509,0 (1)	38 309,0 (2)	10 225,0	6726,0	2400,0	1113,0
2	29 254,5 (3)	19 154,5 (5)	5112,5	3363,0	1200,0	556,5
3	19 503,0 (4)	12 769,7	3408,3	2242,0	800,0	371,0
4	14 627,3 (6)	9577,3	2556,3	1681,5	600,0	278,3
5	11 701,8	7661,8	2045,0	1345,2	480,0	222,6
6	9751,5	6384,8	1704,2	1121,0	400,0	185,5

Logo, podemos concluir que foram atribuídos 4 mandatos ao PPD/PSD.CDS-PP e 2 mandatos ao PS.

8.2. Simulando a distribuição de mandatos pelo Método de Sainte-Laguë, comecemos por calcular os quocientes obtidos pela divisão do número de votos das 6 forças políticas mais votadas por 1, 3, 5, e assim sucessivamente.

	Força Política					
	PPD/PSD.CDS-PP	PS	BE	PCP-PEV	PDR	PCTP-MRPP
Divisores \ **VVE**	58 509	38 309	10 225	6726	2400	1113
1	58 509,0	38 309,0	10 225,0	6726,0	2400,0	1113,0
3	19503,0	12769,7	3408,3	2242,0	800,0	371,0
5	11701,8	7661,8	2045,0	1345,2	480,0	222,6
7	8358,4	5472,7	1460,7	960,9	342,9	159,0

Atribuindo os mandatos às forças políticas que registaram os 6 maiores quocientes, obtém-se o seguinte.

	Força Política					
	PPD/PSD.CDS-PP	PS	BE	PCP-PEV	PDR	PCTP-MRPP
Divisores \ **VVE**	58 509	38 309	10 225	6726	2400	1113
1	58 509,0 (1)	38 309,0 (2)	10 225,0 (6)	6726,0	2400,0	1113,0
3	19 503,0 (3)	12 769,7 (4)	3408,3	2242,0	800,0	371,0
5	11 701,8 (5)	7661,8	2045,0	1345,2	480,0	222,6
7	8358,4	5472,7	1460,7	960,9	342,9	159,0

No caso de aplicação do Método de Sainte-Laguë, a força política PPD/PSD.CDS-PP teria menos um lugar que seria atribuído ao BE e este passaria a ter assento parlamentar. Os restantes partidos manteriam a distribuição de mandatos.

8.3.

a) Comecemos por determinar o n.º total de votos validamente expressos:

$$n.^{\text{o}}\ de\ votos\ validamente\ expressos =$$
$$= 58\,509 + 38\,309 + 10\,225 + 6\,726 + 2\,400 + 1\,113 + 1\,086 + 1\,037 + 959 + 559 + 535 + 453 + 445 + 390 + 213 + 160 =$$
$$= 123\,119$$

De seguida, determinamos a quota padrão de cada partido, bem como a quota inferior e a quota superior.

Força Política	N.º de Votos Validamente Expressos	Quota Padrão	Quota Inferior	Quota Superior
PPD/PSD.CDS-PP	58 509	$\frac{58\,509}{123\,119} \times 6 \approx 2{,}851$	2	3
PS	38 309	$\frac{38\,309}{123\,119} \times 6 \approx 1{,}867$	1	2

Força Política	N.º de Votos Validamente Expressos	Quota Padrão	Quota Inferior	Quota Superior
BE	10 225	$\frac{10\,225}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}498$	0	1
PCP-PEV	6726	$\frac{6726}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}328$	0	1
PDR	2400	$\frac{2400}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}117$	0	1
PCTP-MRPP	1113	$\frac{1113}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}054$	0	1
PAN	1086	$\frac{1086}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}053$	0	1
NC	1037	$\frac{1037}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}051$	0	1
PTP-MAS	959	$\frac{959}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}047$	0	1
PNR	559	$\frac{559}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}027$	0	1
PPM	535	$\frac{535}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}026$	0	1
L/TDA	453	$\frac{453}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}022$	0	1
MPT	445	$\frac{445}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}022$	0	1
PPV/CDD	390	$\frac{390}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}019$	0	1
PURP	213	$\frac{213}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}010$	0	1
JPP	160	$\frac{160}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}008$	0	1

b) Usando a indicação dada pelo método na 3.ª etapa, os lugares atribuídos a cada força política serão os seguintes.

Força Política	Mandatos atribuídos
PPD/PSD.CDS-PP	2
PS	1
BE	0
PCP-PEV	0
PDR	0
PCTP-MRPP	0
PAN	0
NC	0
PTP-MAS	0
PNR	0
PPM	0
L/TDA	0
MPT	0
PPV/CDD	0
PURP	0
JPP	0

Tendo em conta estes resultados, já foram atribuídos 3 mandatos, faltando ser atribuídos mais 3.

c) Atribuímos os restantes 3 mandatos às forças políticas com as 3 maiores partes decimais.

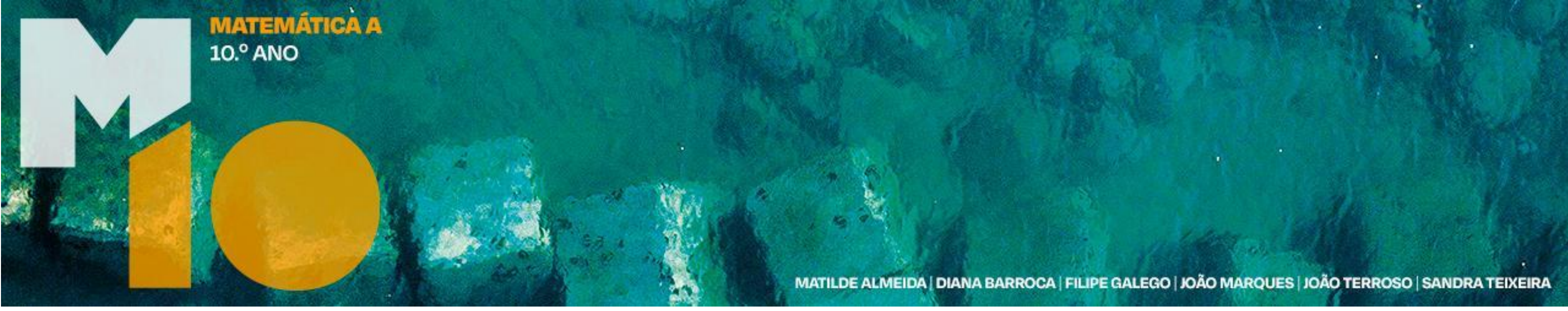
Força Política	Quota Padrão	Mandatos Atribuídos
PPD/PSD.CDS-PP	$\frac{58\,509}{123\,119} \times 6 \approx 2{,}851$	2+1
PS	$\frac{38\,309}{123\,119} \times 6 \approx 1{,}867$	1+1
BE	$\frac{10\,225}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}498$	0+1
PCP-PEV	$\frac{6726}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}328$	0
PDR	$\frac{2400}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}117$	0
PCTP-MRPP	$\frac{1113}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}054$	0
PAN	$\frac{1086}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}053$	0
NC	$\frac{1037}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}051$	0
PTP-MAS	$\frac{959}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}047$	0
PNR	$\frac{559}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}027$	0
PPM	$\frac{535}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}026$	0
L/TDA	$\frac{453}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}022$	0
MPT	$\frac{445}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}022$	0
PPV/CDD	$\frac{390}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}019$	0
PURP	$\frac{213}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}010$	0
JPP	$\frac{160}{123\,119} \times 6 \approx 0{,}008$	0

Concluímos que o Método de Hamilton prevê a atribuição dos seguintes mandatos: PPD/PSD.CDS-PP recebe 3; PS recebe 2; BE recebe 1.

8.4. Podemos observar que o Método de Hondt concentra os mandatos nas duas forças políticas mais significativas (4 mandatos para o PPD/PSD.CDS-PP e 2 mandatos para o PS).

No entanto, os Métodos de Sainte-Laguë e de Hamilton, preveem uma distribuição de mandatos mais pluripartidária, sendo 3 mandatos para o PPD/PSD.CDS-PP, 2 mandatos para o PS e 1 mandato para o BE. Estes dois últimos favorecem as forças políticas menos representativas.

Os três métodos permitem uma distribuição de mandatos legítima. No entanto, o Método de Hondt gera uma distribuição mais uniforme dos mandatos, pelo que o poder político se concentra mais nas forças políticas mais votadas. Os outros dois Métodos permitem uma distribuição mais plural nos ideais políticos, pelo que o debate político se prevê mais intenso nas decisões políticas mais importantes.



Avaliar – Página 55 e 56

1.

1.1. Tendo em conta os dados representados na tabela, temos que:

$$n.^{\underline{o}}\ de\ médicos = 13 + 33 + 25 + 5 + 5 + 6 = 87$$

1.2. Existem 33 membros da equipa médica da área de medicina geral, sendo que a percentagem destes médicos na equipa hospitalar é a seguinte.

$$percentagem\ medicina\ geral = \frac{33}{87} \approx 37{,}9\%$$

1.3. Comecemos por determinar os quocientes previstos calcular pelo Método de Sainte-Laguë dividindo o número de médicos de cada especialidade por 1, 3, 5, e assim sucessivamente.

	Especialidade					
	Cardiologia	Medicina Geral	Pediatria	Infeciologia	Oftalmologia	Ortopedia
N.º de Médicos / Divisores	13	33	25	5	5	6
1	13,00	33,00	25,00	5,00	5,00	6,00
3	4,33	11,00	8,33	1,67	1,67	2,00
5	2,60	6,60	5,00	1,00	1,00	1,20
7	1,86	4,71	3,57	0,71	0,71	0,86
9	1,44	3,67	2,78	0,56	0,56	0,67
11	1,18	3,00	2,27	0,45	0,45	0,55
13	1,00	2,54	1,92	0,38	0,38	0,46

Assim, as especialidades que registam os 15 maiores quocientes são aquelas que abrirão vaga para eleger um médico para a delegação.

	Especialidade					
	Cardiologia	Medicina Geral	Pediatria	Infeciologia	Oftalmologia	Ortopedia
N.º de Médicos / Divisores	13	33	25	5	5	6
1	13,00 (3)	33,00 (1)	25,00 (2)	5,00 (8)	5,00 (9)	6,00 (7)
3	4,33 (12)	11,00 (4)	8,33 (5)	1,67	1,67	2,00
5	2,60	6,60 (6)	5,00 (10)	1,00	1,00	1,20
7	1,86	4,71 (11)	3,57 (14)	0,71	0,71	0,86
9	1,44	3,67 (13)	2,78	0,56	0,56	0,67
11	1,18	3,00 (15)	2,27	0,45	0,45	0,55
13	1,00	2,54	1,92	0,38	0,38	0,46

Concluímos que: cardiologia irá ser representada por dois médicos; medicina geral irá ser representada por 6 médicos; pediatria irá ser representada por 4 médicos; infeciologia, oftalmologia e ortopedia irá ser representada por 1 médico.

1.4.

- $n.^{\text{o}}\ de\ médicos = 87$
- $percentagem_{Medicina\ Geral} \approx 37{,}9\%$
- $lugares\ atribuidos\ Medicina\ Geral\ por\ Prop.Direta = 0{,}379 \times 15 \approx 6$

A afirmação deste responsável é falsa. No caso de uma distribuição de lugares diretamente proporcional ao número de médicos de cada especialidade, a Medicina Geral iria receber na mesma 6 lugares da delegação.

2.

2.1. Tendo em conta as percentagens registadas no gráfico circular, tem-se que:

- $vve_{Lista\ A} = 0{,}2 \times 1\,280 = 256$
- $vve_{Lista\ B} = 0{,}25 \times 1\,280 = 320$
- $vve_{Lista\ C} = 0{,}05 \times 1\,280 = 64$
- $vve_{Lista\ D} = 0{,}1 \times 1\,280 = 128$
- $vve_{Lista\ E} = 0{,}4 \times 1\,280 = 512$

Opção (C)

2.2. A Lei Eleitoral Portuguesa prevê a distribuição de mandatos pelo Método de Hondt. Comecemos por determinar os quocientes previstos pelo método.

	Lista				
	A	B	C	D	E
N.º de Votos / Divisores	256	320	64	128	512
1	256,00	320,00	64,00	128,00	512,00
2	128,00	160,00	32,00	64,00	256,00
3	85,33	106,67	21,33	42,67	170,67
4	64,00	80,00	16,00	32,00	128,00
5	51,20	64,00	12,80	25,60	102,40
6	42,67	53,33	10,67	21,33	85,33

De seguida, atribuímos os lugares às listas com os 12 maiores quocientes registados.

	Lista				
	A	B	C	D	E
N.º de Votos / Divisores	256	320	64	128	512
1	256,00 (3)	320,00 (2)	64,00	128,00 (7)	512,00 (1)
2	128,00 (8)	160,00 (6)	32,00	64,00	256,00 (4)
3	85,33 (12)*	106,67 (10)	21,33	42,67	170,67 (5)
4	64,00	80,00	16,00	32,00	128,00 (9)
5	51,20	64,00	12,80	25,60	102,40 (11)
6	42,67	53,33	10,67	21,33	85,33

*No caso de empate no último quociente, é atribuído um mandato à lista com menor representatividade nos votos registados.

Concluímos que as Listas A e B elegem 3 alunos cada uma; a Lista D elege 1 aluno; a Lista E elege 5 alunos; a Lista C não elege qualquer aluno.

2.3. Apesar da alteração no número de alunos eleitos, os quocientes que resultam da aplicação do Método de Hondt mantêm-se.
Atribuímos os mandatos às listas com os 7 maiores quocientes.

	Lista				
	A	B	C	D	E
N.º de Votos / **Divisores**	256	320	64	128	512
1	256,00 (3)	320,00 (2)	64,00	128,00 (7)*	512,00 (1)
2	128,00	160,00 (6)	32,00	64,00	256,00 (4)
3	85,33	106,67	21,33	42,67	170,67 (5)
4	64,00	80,00	16,00	32,00	128,00
5	51,20	64,00	12,80	25,60	102,40
6	42,67	53,33	10,67	21,33	85,33

*No caso de empate no último quociente, é atribuído um mandato à lista com menor representatividade nos votos registados.

A distribuição de lugares será a seguinte: a Lista A elege 1 aluno; a Lista B elege 2 alunos; a Lista D elege 1 aluno; a Lista E elege 3 alunos; a Lista C mantém a não eleição de alunos.
Tendo em conta estas alterações registadas, podemos concluir que as Listas A, B e E ficariam prejudicadas pois reduziriam a sua representatividade. Já a Lista D e C manteriam os seus resultados.

3.

3.1. O cálculo do n.º de abstencionistas é dado por:

$n.^{\text{º}}\ de\ abstencionistas =$
$= 141\,160 - (2\,225 + 1\,550 + 28\,799 + 17\,437 + 11\,959 + 4\,785 + 948 + 340) = 73\,117$

A percentagem de abstenção é a seguinte.

$$percentagem\ de\ absten\text{çã}o = \frac{73\,117}{141\,160} \approx 51{,}80\%$$

3.2. O número de votos validamente expressos registado foi o seguinte.

$$votos\ validamente\ expressos = 28\,799 + 17\,437 + 11\,959 + 4\,785 + 948 + 340 = 64\,268$$

3.3. Comecemos por verificar a distribuição de mandatos no caso de aplicação do Método de Hondt com o n.º de votos do partido D sem os 15 votos não contados e com os 15 votos não contados.

- Partido D sem os 15 votos não contados

Os quocientes registados são os seguintes.

	Lista					
	A	B	C	D	E	F
N.º de Votos / **Divisores**	28 799	17 437	11 959	4785	948	340
1	28 799,00	17 437,00	11 959,00	4785,00	948,00	340,00
2	14 399,50	8718,50	5979,50	2392,50	474,00	170,00
3	9599,67	5812,33	3986,33	1595,00	316,00	113,33
4	7199,75	4359,25	2989,75	1196,25	237,00	85,00
5	5759,80	3487,40	2391,80	957,00	189,60	68,00
6	4799,83	2906,17	1993,17	797,50	158,00	56,67
7	4114,14	2491,00	1708,43	683,57	135,43	48,57

A distribuição dos 11 mandatos irá ser a seguinte.

	Lista					
	A	B	C	D	E	F
N.º de Votos / Divisores	28 799	17 437	11 959	4785	948	340
1	28 799,00 (1)	17 437,00 (2)	11 959,00 (4)	4785,00	948,00	340,00
2	14 399,50 (3)	8718,50 (6)	5979,50 (8)	2392,50	474,00	170,00
3	9599,67 (5)	5812,33 (9)	3986,33	1595,00	316,00	113,33
4	7199,75 (7)	4359,25	2989,75	1196,25	237,00	85,00
5	5759,80 (10)	3487,40	2391,80	957,00	189,60	68,00
6	4799,83 (11)	2906,17	1993,17	797,50	158,00	56,67
7	4114,14	2491,00	1708,43	683,57	135,43	48,57

Assim, o Partido A elege 6 mandatos, o Partido B elege 3 mandatos, a Lista C elege 2 mandatos e as restantes listas não elegem qualquer mandato.

- Partido D com os 15 votos não contados

$$votos\ Partido\ D = 4\,785 + 15 = 4\,800$$

Os quocientes registados são os seguintes.

	Lista					
	A	B	C	D	E	F
N.º de Votos / Divisores	28 799	17 437	11 959	4800	948	340
1	28 799,00	17 437,00	11 959,00	4800,00	948,00	340,00
2	14 399,50	8718,50	5979,50	2400,00	474,00	170,00
3	9599,67	5812,33	3986,33	1600,00	316,00	113,33
4	7199,75	4359,25	2989,75	1200,00	237,00	85,00
5	5759,80	3487,40	2391,80	960,00	189,60	68,00
6	4799,83	2906,17	1993,17	800,00	158,00	56,67

A atribuição dos 11 mandatos irá então ser a seguinte.

	Lista					
	A	B	C	D	E	F
N.º de Votos / Divisores	28 799	17 437	11 959	4800	948	340
1	28 799,00 (1)	17 437,00 (2)	11 959,00 (4)	4800,00 (11)	948,00	340,00
2	14 399,50 (3)	8718,50 (6)	5979,50 (8)	2400,00	474,00	170,00
3	9599,67 (5)	5812,33 (9)	3986,33	1600,00	316,00	113,33
4	7199,75 (7)	4359,25	2989,75	1200,00	237,00	85,00
5	5759,80 (10)	3487,40	2391,80	960,00	189,60	68,00

6	4799,83	2906,17	1993,17	800,00	158,00	56,67

Neste caso, podemos concluir que a Lista A perde um dos seus mandatos, elegendo 5 mandatos, a Lista B mantém os seus 3 mandatos, a Lista C também mantém os seus 2 mandatos e a Lista D passa a ter representatividade na Câmara Municipal com a eleição de 1 vereador. Ao requerer a recontagem destes 15 votos, o partido D retira um dos mandatos ao partido A, fazendo com que este perca a maioria absoluta (tem-se que a maioria absoluta nesta autarquia é dada por $\frac{11+1}{2} = 6$ mandatos, no mínimo). Assim, tal exigirá que o partido A tenha de negociar e dialogar com as restantes forças políticas, promovendo o debate de ideias entre todos.

3. Modelos matemáticos em finanças

Recordar – Páginas 58 e 59

1.

1.1.

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{10} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^4 : \left(-\frac{1}{5}\right)^{22} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2\times10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5\times4} : \left(-\frac{1}{5}\right)^{22} = \left(\frac{2}{5}\right)^{20} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} : \left(\frac{1}{5}\right)^{22} =$$

$$= \left(\frac{2}{10}\right)^{20} : \left(\frac{1}{5}\right)^{22} = \left(\frac{1}{5}\right)^{20} : \left(\frac{1}{5}\right)^{22} = \left(\frac{1}{5}\right)^{20-22} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$$

1.2.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{9}{7}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{3}{7} : \frac{9}{7}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{9}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{21}{63}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{3}{21}\right)^5 = \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{16\,807}$$

1.3.

$$\frac{10^2 - 8^2}{\left(\frac{4}{7}\right)^0} = \frac{100 - 64}{1} = \frac{36}{1} = 36$$

2. Usando as regras operatórias com potências e as suas propriedades, temos que:

$$(-8)^{10} \times 8^{-6} : 2^4 = 8^{10} \times \left(\frac{1}{8}\right)^6 : 2^4 = (2^3)^{10} \times \frac{1^6}{(2^3)^6} : 2^4 = 2^{30} \times \frac{1}{2^{18}} : 2^4 = \frac{2^{30}}{2^{18}} : 2^4 =$$

$$= 2^{30-18} : 2^4 = 2^{12} : 2^4 = 2^{12-4} = 2^8$$

Concluímos que o valor numérico da expressão, em forma de potência de base 2, é 2^8.

3.

3.1. Tendo em conta as informações em cada afirmação, temos que:

A. $36\% = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$ **B.** $\frac{27}{100}$ **C.** $\frac{1}{5}$

3.2. Tendo em conta a razão apontada na afirmação C., é espectável que $\frac{1}{5}$ dos arquitetos participantes recebeu o equivalente a um salário mínimo nacional.

Ou seja:

$$n.^{\text{o}}\ de\ arquitetos = \frac{1}{5} \times 140 = \frac{140}{5} = 28$$

Era expectável que 28 arquitetos participantes recebessem o equivalente a um salário mínimo nacional.

4.

4.1. Na segunda linha, o utilizador define a taxa de IVA a aplicar-se ao produto. Na terceira linha de código, o utilizador insere qual ao preço do produto que este pretende adquirir. Na quarta linha, o programa determina o preço final a pagar pelo produto aquando da sua aquisição e na última linha o programa dá a resposta ao utilizador.

4.2. Fazendo a alteração no programa dado, temos que:

```
IVA=0.06 #A taxa de IVA de bens de primeira necessidade é de 6%
p=0.69 #Indica o preço sem IVA, em euros, do produto
pf=p+p*IVA
print("O preço final a pagar será de", pf,"euros.")
```

```
O preço final a pagar será de 0.7313999999999999  euros.
```

O preço final de uma alface é de 0,73 €.

4.3. No caso de se realizar a alteração na quarta linha de código, podemos escrever o programa da forma seguinte.

```
IVA=0.23 #Indica a taxa de IVA do produto
p=32 #Indica o preço sem IVA, em euros, do produto
pf=p+p*IVA
print("O preço final a pagar, com uma taxa de IVA de",IVA*100,"%, será de", pf,"euros.")
```

4.4. Fazendo a verificação dos resultados que obtivemos em **4.2.**, temos que:

```
O preço final a pagar será de  39.36  euros, com uma taxa de IVA associada de  23 %.
```

4.5. Fazendo uma pesquisa nos meios à disposição, temos que o comando *round* permite apresentar determinado valor numérico calculado em *Python* com um número de casas decimais apropriado. Assim, podemos alterar o nosso programa de modo a determinar o preço do produto com IVA com 2 casas decimais, ou seja:

```
IVA=0.06 #A taxa de IVA de bens essenciais é de 6%
p=0.69 #Indica o preço sem IVA, em euros, do produto
pf=round(p+p*IVA,2)
print("O preço final a pagar, com uma taxa de IVA de",IVA*100,"%, será de",pf,"euros.")
```

```
O preço final a pagar será de  0.73  euros.
```

Tarefa 1 – Página 60

1. Tendo em conta que o pai Rui irá descontar 27% do seu salário, mensalmente, então:

$$salário\ líquido\ pai = (1 - 0{,}27) \times 1700 = 1241€$$

2. Para determinar o salário bruto da mãe Catarina, temos de ter em atenção que esta desconta 15% do seu rendimento, sendo que recebe efetivamente $100\% - 15\% = 85\%$ do salário bruto. Representando por x o salário bruto:

$$0{,}85x = 839 \Leftrightarrow x = \frac{839}{0{,}85} \Leftrightarrow x \approx 987{,}06\ €$$

Logo, o salário bruto da mãe Catarina é de, aproximadamente, 987,06 €.

3. O rendimento líquido mensal recebido pelo casal Moedas perfaz um total de:

$$rendimento\ familiar = 1\,241 + 839 = 2\,080€$$

Logo, o total do rendimento familiar coincide com a quantia gasta pela família nas suas despesas mensais. Apesar de não ser a melhor situação possível, o casal poderá não estar descansado em relação à sua situação financeira.

Para poupar, a família poderá fazer o seguinte: reduzir nos gastos não essenciais, nomeadamente, em situações de desperdício energético ou de água; fazer um estudo de mercado e de ofertas de mercado no que diz respeito às compras familiares, nomeadamente, procura de promoções ou da venda de produtos de consumo familiar mais baratos; entre outras ações possíveis.

Tarefa 2 – Página 61

1.

1.1. O salário bruto anual da Maria é 19 000€.
Assim:

$$salário\ mensal\ bruto = \frac{19\,000}{14} \approx 1\,357{,}14\ €$$

A Maria recebe, aproximadamente, 1357,14 euros de salário bruto mensal.

1.2. Tendo em conta que o salário bruto mensal da Maria é de, aproximadamente, 1 357,14€, então:

$$Valor\ hora\ = \frac{1357{,}14 \times\ 12}{52\ \ \times 40} \approx 7{,}83\ €$$

Por cada hora de trabalho, a Maria recebe, aproximadamente, 7,83 €.

2.

2.1. Tendo em conta que o salário mensal bruto da Maria é de 1 357,14 € e que a Maria deverá descontar 11% para a Segurança Social, então:

$$Desconto\ para\ a\ Segurança\ Social = 1\,357{,}14 \times 0{,}11 \approx 149{,}29\ €$$

A Maria desconta 149,29 euros por mês para a Segurança Social.

2.2. Fazendo o preenchimento dos campos vazios do recibo de Vencimento, temos que:

Vencimento Base: $1\,357{,}14\ €$ **Vencimento por hora:** $7{,}83\ €$

- **Abonos**
  - **Vencimento Base:** $1\,357{,}14\ €$
  - **Total de Abonos:** $1\,357{,}14 + 132 = 1\,489{,}14\ €$
- **Descontos**
  - **Segurança Social:** $149{,}29\ €$ (já calculado em 2.2.)
  - **IRS:** Neste caso, a Maria aufere até $1\,380{,}00\ €$ e não tem dependentes, pelo que deverá reter 15,1% do seu rendimento bruto mensal.

Ou seja: $IRS = 1357{,}14 \times 0{,}151 \approx 204{,}93\ €$

Total de Descontos: $149{,}29 + 204{,}93 = 354{,}22\ €$ **Total a Receber:** $1\,489{,}14 - 354{,}22 = 1134{,}92\ €$

Aplicar – Página 65

1.

1.1.

O rendimento recebido pelo José por hora é:

$$rendimento\ por\ hora = \frac{1400 \times 12}{52 \times 40} \approx 8{,}08\ €$$

O José recebe por hora, aproximadamente, 8,08 euros.

1.2. O total de abonos auferidos pelo José em fevereiro foram:

$$abonos = 1400 + 154{,}80 + 250 = 1804{,}80\ €$$

O José recebe mensalmente 1804,80 euros de abonos.

1.3. O salário mensal bruto do José é 1400 €, então o José irá reter 16,2% do seu rendimento mensal em fonte de IRS. Logo, no total, o rendimento do José irá ser taxado com:

$$16{,}2\% + 11\% = 27{,}2\%$$

Ou seja:

$$descontos = 1\ 400 \times 0{,}272 = 380{,}80\ €$$

O José irá efetuar um desconto total de 380,80 €.

1.4. Tendo em conta os cálculos realizados nas alíneas anteriores, concluímos que:

$$Salário\ líquido = 1\ 804{,}80 - 380{,}80 = 1424{,}00\ €$$

2.

2.1. No total, o João recebe de subsídio de alimentação a quantia de:

$$subsidio\ de\ alimentação = 5{,}20 \times 21 = 109{,}20\ €$$

O rendimento mensal bruto do João enquadra-se no escalão até 1 609 €, sendo que não tem dependentes. Assim, a taxa de retenção na fonte de IRS é de 17,2%. Para a Segurança Social, o João irá descontar 11% do seu rendimento bruto. Logo:

$$percentagem\ de\ desconto = 17{,}2\% + 11\% = 28{,}2\%$$

Ou seja:

- $abonos = 1\ 600 + 109{,}20 = 1709{,}20\ €$
- $descontos = 1\ 600 \times 0{,}282 = 451{,}20\ €$

O salário líquido do João, no mês considerado, foi de:

$$salário\ liquido = 1\ 709{,}20 - 451{,}20 = 1258{,}00\ €$$

O João recebeu um salário líquido no valor de 1258 euros.

2.2. Determinando a taxa de esforço do João tendo por base o seu rendimento mensal líquido, temos que:

$$taxa\ de\ esforço = \frac{349}{1\ 258} \times 100 \approx 27{,}74\ \%$$

Tendo em conta que a taxa de esforço do João é de, aproximadamente, 27,74 % e que para atribuição de crédito as instituições preveem uma taxa de esforço máxima de 60%, o banco irá aceitar o pedido de crédito do João.

3. Comecemos por determinar o vencimento líquido do João.
Tem-se que a sua contribuição para a Segurança Social é de 11%. Como rendimento bruto mensal enquadra-se no escalão até 1609 €, consultando a tabela de retenção na fonte de IRS, conclui-se que o João irá reter 17,2% do seu rendimento. Assim:

- $abonos = 1\,500€$
- $descontos = 1\,500 \times (0{,}11 + 0{,}172) = 423\ €$
- $salário\ líquido = 1\,500 - 423 = 1\,077{,}00\ €$

Fazendo o desconto das despesas fixas do João, tem-se que:

$$rendimento\ sobrante = 1\,077 - 500 - 300 = 277\ €$$

Logo, para que o João possa atingir uma quantia de poupança suficiente, o número previsto de meses necessários para angaria dinheiro serão:

$$n.º\ de\ meses = \frac{649}{277} \approx 2{,}34$$

Logo, serão necessários 3 meses para que o João consiga ter dinheiro suficiente para adquirir o equipamento pretendido.

4.
4.1. A Emília recebe no total:

$$abonos = 1\,730{,}16 + 4{,}77 \times 22 = 1\,835{,}10\ €$$

Os soma dos abonos recebidos pela Emília dá um total de 1835,10 euros.

4.2. Sendo a Emília trabalhadora por conta de outrem, não casada, com 2 dependentes e com uma remuneração mensal enquadrada no escalão até 1 762 €, a taxa de retenção na fonte de IRS é de 14,8%. Além disso, a Emília desconta 11% do seu rendimento bruto para a Segurança Social e 3,5% para a ADSE. Ou seja:

- $percentagem\ de\ descontos = 14{,}8\% + 11\% + 3{,}5\% = 29{,}3\%$
- $descontos = 1\,730{,}16 \times 0{,}293 \approx 506{,}94\ €$

A Emília totaliza 506,94 euros de descontos mensais do seu salário.

4.3. Tendo em conta os abonos e descontos feitos pela Emília, podemos concluir que:

$$salário\ líquido = 1\,835{,}10 - 506{,}94 = 1\,328{,}16\ €$$

O salário líquido da Emília é de 1328,16 euros.

Tarefa 3 – Página 66

O rendimento coletável de 19 600 € enquadra-se no 4.º escalão de IRS.
Os valores do 3.º escalão, cujo limite superior é 15 992 €, cabem nos 19 600 €. Assim, aplicamos a taxa média do 3.º escalão (19,579%) aos 15 216 €.

$$15\,992\ € \times 19{,}579\% \approx 3131{,}07€$$

O valor restante é igual a $19\,600\ € \ - 15\,992\ € = 3\,608\ €$. Aplica-se a este valor aplica-se a taxa normal do 4.º escalão.

$$3\,608€ \times 28{,}5\% = 1028{,}28€$$

O valor da coleta é, então, igual a $3131{,}07€ + 1028{,}28€ = 4159{,}35€$.
O valor da coleta a pagar pelo António é de 4159,35 €.

Tarefa 4 – Página 70

1. Na célula E3, a folha de cálculo está a determinar a quantia total, em euros, da coleta parcial que é realizada aquando da aplicação de imposto aos rendimentos de uma pessoa singular no 1.º escalão. Fazendo o respetivo cálculo, temos que:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	**Escalão**	**Mais de...**	**Até...**	**Taxa Normal**	**Coleta Parcial do Escalão**
2	1.º	0,00	7479,00	14,50%	1 084,46 €

2. Usando as potencialidades da folha de cálculo e da ferramenta de arrastar da mesma, temos que:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	**Escalão**	**Mais de...**	**Até...**	**Taxa Normal**	**Coleta Parcial do Escalão**
2	1.º	0,00	7479,00	14,50%	1 084,46 €
3	2.º	7479,00	11284,00	21,00%	799,05 €
4	3.º	11284,00	15992,00	26,50%	1 247,62 €
5	4.º	15 992	20700,00	28,50%	1 341,78 €
6	5.º	20700	26355,00	35,00%	1 979,25 €
7	6.º	26355	38632,00	37,00%	4 542,49 €
8	7.º	38632	50483,00	43,50%	5 155,19 €
9	8.º	50483	78834,00	45,00%	12 757,95 €
10	9.º	78834,00		48,00%	37 840,32 €

3. Usando a folha de cálculo para determinar os valores pretendidos, temos que:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	**Escalão**	**Mais de...**	**Até...**	**Taxa Normal**	**Coleta Parcial do Escalão**	**(E)**
2	1.º	0,00	7479,00	14,50%	1 084,46 €	0,145
3	2.º	7479,00	11284,00	21,00%	799,05 €	0,16692
4	3.º	11284,00	15992,00	26,50%	1 247,62 €	0,19579
5	4.º	15 992	20700,00	28,50%	1 341,78 €	0,21608
6	5.º	20700	26355,00	35,00%	1 979,25 €	0,24482
7	6.º	26355	38632,00	37,00%	4 542,49 €	0,28460
8	7.º	38632	50483,00	43,50%	5 155,19 €	0,31991
9	8.º	50483	78834,00	45,00%	12 757,95 €	0,36669
10	9.º	78834,00		48,00%	37 840,32 €	

Observando os valores obtidos podemos perceber que esta coluna determina as taxas médias dos diferentes escalões previstos na tabela de IRS. Logo, podemos nomear esta coluna como "Taxa Média".

4. Os valores das células G2, G3 e G4 correspondem às taxas médias dos três primeiros escalões da tabela de IRS. Esses valores são $\boldsymbol{G2 = 0,145}$, $\boldsymbol{G3 = 0,16692}$ e $\boldsymbol{G4 = 0,19579}$.

Aplicar – Página 70

5.

5.1. Tendo em conta a tabela dos escalões do IRS, o rendimento coletável do João é de $26\,720$ €. Assim, enquadra-se no 6.º escalão. Assim, temos de aplicar a taxa média do escalão anterior ($24{,}482\%$) ao limite desse escalão para obter a primeira parcela da coleta.
Ou seja:

$$a = 26\,355 \times 0{,}24482 \approx 6\,452{,}23 \text{ €}$$

O rendimento restante não tributado é no valor de $26\,720 - 26\,355 = 365$ €. Aqui será então aplicada a taxa normal do 6.º escalão (37%).
Ou seja:

$$b = 365 \times 0{,}37 = 135{,}05 \text{ €}$$

O total do imposto a aplicar é de:

$$coleta = 6\,452{,}23 + 135{,}05 = 6\,587{,}28 \text{ €}$$

Deste total de imposto, teremos de descontar a quantia total de retenção em fonte de IRS do João e as deduções à coleta.
Ou seja:

$$total\ a\ pagar = 6\,587{,}28 - (5\,317{,}34 + 812) = 457{,}94 \text{ €}$$

O João terá de pagar de IRS o valor de 457,94 €.

5.2. Comecemos por determinar o rendimento coletável do casal, aplicando o quociente familiar:

$$rendimento\ colet\acute{a}vel = \frac{(15\,132 + 17\,150) - (4275 + 4104)}{2} = 11\,951{,}50 \text{ €}$$

Temos que o casal se enquadra no 3.º escalão da tabela de IRS. Assim, sendo temos que:

$a = 11\,284 \times 0{,}16692 \approx 1883{,}53$ € $b = (11\,951{,}50 - 11\,284) \times 0{,}265 \approx 176{,}89$€

Logo:

- $coleta = (1883{,}53 + 176{,}89) \times 2 = 4120{,}84$€

Fazendo agora o desconto das deduções à coleta do casal, podemos concluir que:

- $quantia\ a\ pagar = 4120{,}84 - (1650 + 1815 + 612) = 43{,}84$€

A Filipa e o Tiago terão de pagar 43,84 € de imposto anual.

6. O rendimento coletável do Miguel é:

- $Rendimento\ colet\acute{a}vel = 18\,696 - 4104 = 14\,592$ €

O rendimento coletável do Miguel enquadra-se no 3.º escalão do IRS. Logo, procedemos ao cálculo das parcelas que compõe a coleta do Miguel:

- $a = 11\,284 \times 0{,}16692 \approx 1883{,}53$ €
- $b = (14\,592 - 11\,284) \times 0{,}2650 = 876{,}62$ €
- $coleta = a + b = 1883{,}53 + 876{,}62 = 2760{,}15$ €

Fazendo o respetivo desconto da quantia retida em fonte de IRS e das deduções à coleta declaradas pelo Miguel, vem que:

$$quantia\ a\ receber = 2760{,}15 - 2823{,}09 = 62{,}94 \text{ €}$$

Podemos então concluir que o Miguel irá receber de reembolso do IRS 62,94 €, pelo que poderá pagar parcialmente as suas férias no Algarve.

Tarefa 5 – Página 71

1. Temos que o dinheiro do Miguel irá ser capitalizado 4 vezes a uma taxa de juro de $1{,}70\%$ ao ano. Assim, o capital acumulado pelo Miguel nesta oferta irá ser:

$$capital\ acumulado = 1023 + 4 \times 1023 \times 0{,}017 \approx 1092{,}56\ €$$

2. Estudando agora a proposta do banco "*MoneyBank*", temos que a cada ano a taxa de juro é aplicada sobre o rendimento disponível até ao momento. Ou seja:

- $capital\ acumulado_1 = 1023 + 1023 \times 0{,}017 \approx 1\,040{,}39\ €$
- $capital\ acumulado_2 = 1040{,}39 + 1040{,}39 \times 0{,}017 \approx 1\,058{,}08\ €$
- $capital\ acumulado_3 = 1058{,}08 + 1058{,}08 \times 0{,}017 \approx 1\,076{,}07\ €$
- $capital\ acumulado_4 = 1\,076{,}07 + 1\,076{,}07 \times 0{,}017 \approx 1094,36\ €$

3. Se estivesse no lugar do Miguel optaria pela proposta do "*MoneyBank*", pois para além de ser possível retirar o dinheiro da conta sempre que possível (o que poderá acontecer em casos de emergência financeira), o capital final acumulado é superior relativamente à proposta do "*RendBank*".

Tarefa 6 – Página 74

1. Na célula D9, a contabilista da Sara está a determinar a quantia em dinheiro dada pelos juros semestrais simples do depósito da Sara.
Nas fórmulas, a utilização do símbolo de $ permite ao utilizador fixar uma determinada célula (coluna ou linha ou coluna e linha) para aplicação de uma determinada fórmula. Caso não usasse o símbolo $, a folha de cálculo iria aplicar a taxa de juro ao capital acumulado até ao semestre anterior, o que não corresponderia à modalidade oferecida pela oferta A.

2. Reproduzindo a folha de cálculo da contabilista da Sara no que diz respeito à oferta A, temos que:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Capital a Investir	5 250					
3								
4		Oferta A						
5		Taxa de Juro	3%	Modalidade de Juros Simples Semestrais				
6								
7		Capitalização n.º	Meses	Juros	Capital Acumulado até ao momento			
8		0	0	0	5 250,00			
9		1	6	157,5	5 407,50			
10		2	12	157,5	5 565,00			
11		3	18	157,5	5 722,50			
12		4	24	157,5	5 880,00			
13		5	30	157,5	6 037,50			
14		6	36	157,5	6 195,00			
15		7	42	157,5	6 352,50			
16		8	48	157,5	6 510,00			
17		9	54	157,5	6 667,50			
18		10	60	157,5	6 825,00			
19		11	66	157,5	6 982,50			
20		12	72	157,5	7 140,00			
21		13	78	157,5	7 297,50			
22		14	84	157,5	7 455,00			
23		15	90	157,5	7 612,50			
24		16	96	157,5	7 770,00			
25		17	102	157,5	7 927,50			
26		18	108	157,5	8 085,00			
27		19	114	157,5	8 242,50			
28		20	120	157,5	8 400,00			

Podemos então concluir que a Sara irá acumular um total de 8400 € se optar pela oferta A.

3. Para calcular a célula H11 à custa da célula I10, a contabilista deverá ter escrito a seguinte fórmula na folha de cálculo: $M9 * 0{,}03$.

4. Para o estudo da Oferta B, a contabilista da Sara deverá ter realizado os seguintes cálculos:

Capital a Investir	5 250		
Oferta B			
Taxa de Juro	3%	Modalidade de Juros Composto Anual	
Capitalização n.º	Ano	Juros	Capital Acumulado até ao momento
0	0	0,00	5 250,00
1	1	157,50	5 407,50
2	2	162,23	5 569,73
3	3	167,09	5 736,82
4	4	172,10	5 908,92
5	5	177,27	6 086,19
6	6	182,59	6 268,77
7	7	188,06	6 456,84
8	8	193,71	6 650,54
9	9	199,52	6 850,06
10	10	205,50	7 055,56

Podemos então concluir que se a Sara optar pela oferta B, ao fim de 10 anos, irá acumular um total de 7055,56 €.

5. Temos de ter em atenção que a oferta C pressupõe a aplicação de uma taxa de juro anual de 2%, sendo que a capitalização é feita semestralmente. Logo, a taxa de juro semestral é de 1%.
Usando então uma folha de cálculo, temos que:

Capital a Investir	5 250		
Oferta C			
Taxa de Juro Anual	2%	Modalidade de Juros Compostos Semestrais	
Capitalização n.º	Meses	Juros	Capital Acumulado até ao momento
0	0	0,00	5 250,00
1	6	52,50	5 302,50
2	12	53,03	5 355,53
3	18	53,56	5 409,08
4	24	54,09	5 463,17
5	30	54,63	5 517,80
6	36	55,18	5 572,98
7	42	55,73	5 628,71
8	48	56,29	5 685,00
9	54	56,85	5 741,85
10	60	57,42	5 799,27
11	66	57,99	5 857,26
12	72	58,57	5 915,83
13	78	59,16	5 974,99
14	84	59,75	6 034,74
15	90	60,35	6 095,09
16	96	60,95	6 156,04
17	102	61,56	6 217,60
18	108	62,18	6 279,77
19	114	62,80	6 342,57
20	120	63,43	6 406,00

No caso de optar pela oferta C, ao fim de 10 anos, a Sara irá acumular um total de 6406 € na sua poupança.

6. Fazendo um paralelismo entre as ofertas e os capitais acumulados anualmente, temos que:

Ano	Capital Acumulado Oferta A	Capital Acumulado Oferta B	Capital Acumulado Oferta C
0	5 250,00	5 250,00	5 250,00
1	5 565,00	5 407,50	5 355,53
2	5 880,00	5 569,73	5 463,17
3	6 195,00	5 736,82	5 572,98
4	6 510,00	5 908,92	5 685,00
5	6 825,00	6 086,19	5 799,27
6	7 140,00	6 268,77	5 915,83
7	7 455,00	6 456,84	6 034,74
8	7 770,00	6 650,54	6 156,04
9	8 085,00	6 850,06	6 279,77
10	8 400,00	7 055,56	6 406,00

Olhando para os capitais acumulados das 3 ofertas, podemos verificar que a oferta A é a mais vantajosa para a Sara, pois anualmente apresenta um capital acumulado superior aos capitais acumulados oferecidos por B e C.

Aplicar – Página 75

7.

7.1.

a) No caso de os períodos de capitalização serem anuais, temos que:

- $taxa\ de\ juro = 1{,}6\% = 0{,}016 \quad Capital\ Inicial = 10\,000$
- $n.^{\text{o}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 1 \quad n.^{\text{o}}\ de\ anos = 2$
- $CF = 10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{1}\right)^{1\times 2} = 10\,322{,}56\ €$

b) Aqui queremos períodos de capitalização quadrimestrais, pelo que:

- $taxa\ de\ juro = 1{,}6\% = 0{,}016 \quad Capital\ Inicial = 10\,000$
- $n.^{\text{o}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 3 \quad n.^{\text{o}}\ de\ anos = 2$
- $CF = 10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{3}\right)^{3\times 2} \approx 10\,324{,}30\ €$

7.2. Tendo em conta as condições do banco, temos que:

- $taxa\ de\ juro = 1{,}6\% = 0{,}016 \quad Capital\ Inicial = 10\,000$
- $n.^{\text{o}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 2$
- $CF = 10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{2}\right)^{2n}$

Pretendemos saber então quantos anos serão necessários para que o capital final atinja os 15 000 euros.
Ou seja:

N.º de anos	Capital Final
1	$10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{2}\right)^{2} = 10\,160{,}64$
2	$10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{2}\right)^{2\times 2} \approx 10\,323{,}86$
…	….
25	$10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{2}\right)^{2\times 25} \approx 14\,894{,}52$
26	$10\,000 \times \left(1 + \frac{0{,}016}{2}\right)^{2\times 26} \approx 15\,133{,}79$

Podemos então concluir que o José terá de deixar o seu dinheiro a rentabilizar na conta poupança durante pelo menos 26 anos para atingir o seu objetivo.

8.

8.1. Tendo em conta a taxa de juro anual de 5% e a modalidade de juros simples que está a ser aplicada, então a quantia a receber de juros é:

$$juros = 500 \times 0{,}05 = 25\ €$$

O João irá receber 25 euros anualmente em juros pelo seu depósito.

8.2. No final dos 7 anos, o credor irá acumular um capital final de:

- $taxa\ de\ juro = 5\% = 0{,}05 \qquad n.º\ de\ anos = 7$
- $CF = 500 + 500 \times 0{,}05 \times 7 = 675\ €$

O capital final recebido pelo João é de 675 euros.

9.

9.1. Comecemos por observar que o número de capitalizações é de 12, pois o ano encontra-se dividido em 12 meses nos quais a Maria irá pagar as suas prestações.

Iremos então estudar a situação recorrendo a uma folha de cálculo. Temos de ter em atenção que a Maria irá pagar mensalmente juros sobre o valor em dívida até ao momento e que este é descontado ao valor da prestação mensal que a Maria paga do valor do carro. Ou seja, podemos então construir a seguinte folha de cálculo:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									
2	Valor do Carro	15999			Taxa de juro anual	0,06		Taxa de juro mensal	=0,06/12
3									
4	Prestação n.º	Valor da Prestação	Valor do Juro	Valor a descontar na dívida	Valor em dívida				
5	0	0	0	0	15999				
6	1	256	=$J$2*F5	=C6-D6	=F5-E6				
7	2	256	=$J$2*F6	=C7-D7	=F6-E7				
8	3	256	=$J$2*F7	=C8-D8	=F7-E8				

Observamos que:

- o valor da prestação mensal na coluna C é fixa, sendo igual a 256 €.
- na coluna D, o valor de juro é calculado mensalmente sobre o valor da dívida até ao momento, sendo que corresponde a 0,5% ao mês.
- na coluna E, procede-se ao desconto do valor do juro a pagar na prestação mensal fixa da Maria.
- na coluna F, procedemos aos descontos sucessivos do valor da prestação mensal efetiva do valor do empréstimo do carro.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Valor do Carro	€ 15 999,00			Taxa de juro anual	0,06		Taxa de juro mensal	0,005
3										
4		Prestação n.º	Valor da Prestação	Valor do Juro	Valor a descontar na dívida	Valor em dívida				
5		0	0	0	0	15 999				
6		1	256	80,00	176,01	15 823,00				
7		2	256	79,11	176,89	15 646,11				
8		3	256	78,23	177,77	15 468,34				

Recorrendo à ferramenta arrastar da folha de cálculo, podemos observar que necessitamos de 76 prestações no total para liquidar com a dívida.

Ou seja, podemos concluir que a Maria irá necessitar de:

	A	B	C	D	E	F	G
76		71	256	6,45	249,55	1 041,40	
77		72	256	5,21	250,79	790,61	
78		73	256	3,95	252,05	538,56	
79		74	256	2,69	253,31	285,26	
80		75	256	1,43	254,57	30,68	
81		76	30,68	0,15	30,68	0,00	

$$tempo = \frac{76}{12} = 6 + \frac{4}{12} = 6\ anos\ e\ 4\ meses$$

A Maria irá pagar o empréstimo do carro em 6 anos e 4 meses.

9.2. Tendo em conta que o valor do antigo carro da Maria irá abater na dívida do novo, então temos que o total de empréstimo pedido pela Maria irá ser:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Valor do Carro	€ 10 999,00			Taxa de juro anual	0,06		Taxa de juro mensal	0,005
3										
4		Prestação n.º	Valor da Prestação	Valor do Juro	Valor a descontar na dívida	Valor em dívida				
5		0	0	0	0	10 999				
6		1	256	55,00	201,01	10 798,00				
7		2	256	53,99	202,01	10 595,98				
8		3	256	52,98	203,02	10 392,96				

$$valor\ crédito\ automóvel = 15\,999 - 5000 = 10\,999\ €$$

Recorrendo mais uma vez às potencialidades da folha de cálculo que construímos na alínea anterior e alterando o parâmetro do capital inicial em dívida, temos que:

	A	B	C	D	E	F
49		44	256	6,92	249,08	1 133,92
50		45	256	5,67	250,33	883,59
51		46	256	4,42	251,58	632,01
52		47	256	3,16	252,84	379,17
53		48	256	1,90	254,10	125,07
54		49	125,07	0,63	125,07	0,00

Neste caso, o tempo de pagamento irá ficar mais curto e passará a ser igual a:

$$tempo = \frac{49}{12} = 4 + \frac{1}{12} = 4\ anos\ e\ 1\ mês$$

Para determinar o valor que a Maria pagará em juros, podemos utilizar a ferramenta "Soma" da folha de cálculo, ao que obtemos que:

D55 fx =SOMA(D5:D54)

	A	B	C	D	E	F
51		46	256	4,42	251,58	632,01
52		47	256	3,16	252,84	379,17
53		48	256	1,90	254,10	125,07
54		49	125,07	0,63	125,07	0,00
55				1414,69		

A Maria pagará o seu empréstimo em 4 anos e 1 mês. No total, pagará 1414,69 € de juros no empréstimo do carro.

10. Temos que o número de períodos de capitalização será 2, pois em um semestre temos dois trimestres. Além disso:

- $taxa\ de\ juro = x \quad Capital\ Inicial = 1\,500$
- $n.º\ de\ períodos\ de\ capitalização = 2 \quad Capital\ Final = 1680$

Assim, conseguimos equacionar:

$$CF = CI + C \times n \times i \Leftrightarrow 1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i \Leftrightarrow 1680 - 1500 = 3000 \times i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 180 = 3000i \Leftrightarrow \frac{180}{3000} = i \Leftrightarrow i = 0{,}06 = \frac{6}{100} = 6\%$$

Logo, a taxa de juro trimestral foi de 6%.

Aplicar + Páginas 77 a 81

Itens de Seleção

1. Um ano de trabalho é dividido em 14 períodos salariais, sendo 12 salários correspondentes aos períodos mensais, 1 salário correspondente ao subsídio de férias e 1 salário correspondente ao subsídio de Natal. Logo:

$$salário\ bruto\ mensal = \frac{18\,600}{14} \approx 1328{,}57€$$

Opção (C)

2. O salário por hora de determinado trabalhador é determinado pela fórmula:

$$salário\ por\ hora = \frac{rendimento\ bruto\ mensal \times 12}{52 \times n.º\ de\ horas\ de\ trabalho\ semanal}$$

Logo:

$$salário\ por\ hora = 7{,}60\ € \qquad n.º\ de\ horas\ de\ trabalho\ semanal = 40$$

$$7{,}60 = \frac{rendimento\ bruto\ mensal \times 12}{52 \times 40} \Leftrightarrow 7{,}60 = \frac{rendimento\ bruto\ mensal \times 12}{2080} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7{,}60 \times 2080}{12} = rendimento\ bruto\ mensal \Leftrightarrow rendimento\ bruto\ mensal \approx 1317{,}33$$

Logo, temos que este trabalhador desconta 10,4% em retenção na fonte de IRS, ao qual acumula 11% de desconto para a Segurança Social. Assim:

$$percentagem\ total\ de\ desconto = 11 + 10{,}4 = 21{,}4\%$$

Opção (D)

3. Tendo em conta a quantia em dívida, o Leonardo irá pagar o seu IRS em 4 prestações mensais. Assim, o total pago pelo Leonardo irá ser dado pela soma em dívida à qual é adicionada juros. Ou seja:

$$pagamento\ mensal\ fixo = \frac{535{,}23}{4} \approx 133{,}81\ €$$

Logo, em cada prestação, o total a pagar pelo Leonardo é:

$$prestação\ mensal = 133{,}81 \times (1 + 0{,}05997) \approx 141{,}83\ €$$

Opção (B)

4. Sabemos que as condições aplicadas são as seguintes:

- $taxa\ de\ juro = 3{,}4\% = 0{,}034 \quad Capital\ Inicial = 10\ 534$
- $n.^{\underline{o}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 4$
- $CF = 10\ 534 \times (1 + 0{,}034)^4 \approx 12\ 041{,}36\ €$

Opção (A)

5.

5.1. Tendo em conta que um ano civil é dividido em 14 períodos salariais para um trabalhador, então:

$$salário\ bruto\ mensal = \frac{11\ 480}{14} = 820\ €$$

Opção (B)

5.2. Tendo em conta que o rendimento bruto mensal da Maria é de 820 € e que possui 1 dependente, então mensalmente a Maria retém 4,4% do seu rendimento bruto em fonte de IRS. Logo:

$$retenção\ na\ fonte = 820 \times 0{,}044 = 36{,}08\ €$$

Logo, ao longo do ano foi registado pela Maria um total de:

$$retenção\ anual\ na\ fonte\ de\ IRS = 36{,}08 \times 14 = 505{,}12$$

Opção (C)

Itens de Construção

6.

6.1. Tendo em conta que o ano está dividido em 14 períodos remuneratórios (12 meses de trabalho, subsídio de férias e subsídio de Natal), então temos que:

$$salário\ bruto\ mensal = \frac{20\ 000}{14} \approx 1428{,}57\ €$$

O Luís irá receber um salário bruto anual de 1428,57 euros.

6.2. Para determinar o salário bruto por hora do Luís, aplicamos a fórmula:

$$salário\ por\ hora = \frac{1428{,}57 \times 12}{52 \times 40} \approx 8{,}24\ €$$

O Luís irá auferir 8,24 euros no seu novo emprego.

6.3. No que diz respeito ao subsídio de alimentação, o Luís recebe:

$$subsidio\ de\ alimentação\ diário = 4{,}80\ €$$

No caso de um dia de deslocamento para a empresa, o Luís irá recebe:

- $deslocamento\ diário\ do\ Luís = 15 \times 2 = 30$
- $deslocamento\ diário\ pago = 30 - 16 = 14\ km$
- $subsidio\ de\ deslocamento = 14 \times 1{,}20 = 16{,}80\ €$

Tendo em conta que um mês tem a previsão de ter 4 semanas e que o Luís trabalha em 22 dias úteis, então:

- $Salário\ Bruto\ Mensal = 1428{,}57\ €$
- $subsidio\ de\ alimentação\ mensal = 4{,}80 \times 22 = 105{,}60\ €$
- $subsidio\ de\ deslocamento\ mensal = 16{,}80 \times 4 = 67{,}20\ €$
- $Rendimento\ Bruto = 1428{,}57 + 105{,}60 + 67{,}20 = 1601{,}37\ €$

O Luís irá auferir um rendimento bruto mensal de 1601,37 euros.

6.4. Neste caso, o Luís desconta mensalmente no seu recibo de vencimento 11% para a Segurança Social e, tendo em conta o seu salário bruto mensal e o facto de ter um dependente, 13,8% na retenção em fonte de IRS. Logo:

- $Retenção\ em\ fonte\ de\ IRS = 1428{,}57 \times 0{,}138 \approx 197{,}14\ €$
- $Contribuição\ Segurança\ Social = 1428{,}47 \times 0{,}11 \approx 157{,}14\ €$

Logo:

- $Total\ de\ descontos = 197{,}14 + 157{,}14 = 354{,}29\ €$

Prevê-se que mensalmente o Luís desconte 354,29 € no seu rendimento bruto mensal.

7.

7.1. Tendo em conta as ofertas de cada uma das situações de pagamento de salário, temos que:

	Vencimento Situação A (€)	**Vencimento Situação B (€)**
1.º Mês	1280,00 €	450 €
2.º Mês	1280,00 €	$450 + 450 \times 0{,}1 = 495\ €$
3.º Mês	1280,00 €	$495 + 495 \times 0{,}1 = 544{,}50\ €$
4.º Mês	1280,00 €	$544{,}50 + 544{,}50 \times 0{,}1 = 598{,}95\ €$

7.2. Tendo em conta as propostas, temos que no 12.º mês, o vencimento do Manuel será:

- **Situação A**
  - $vencimento_A\ mensal = 1280{,}00\ €$
  - $soma\ vencimentos\ A\ 12\ primeiros\ meses = 1128 \times 12 = 13\ 536{,}00€$

- **Situação B**
  - $1.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{1-1} = 800$
  - $2.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{2-1} = 840$
  - $3.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{3-1} = 882$
  - $4.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{4-1} = 926{,}10$
  - $5.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{5-1} \approx 972{,}41$
  - $6.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{6-1} \approx 1021{,}03$
  - $7.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{7-1} \approx 1072{,}08$
  - $8.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{8-1} \approx 1125{,}68$
  - $9.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{9-1} \approx 1181{,}96$
  - $10.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{10-1} \approx 1241{,}06$
  - $11.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{11-1} \approx 1303{,}12$
  - $12.º\ vencimento_C = 800 \times 1{,}05^{12-1} \approx 1368{,}27$

$soma\ vencimentos\ C\ 12\ primeiros\ meses = 800 + 840 + \cdots + 1303{,}12 + 1368{,}27 = 12\ 733{,}70\ €$

Passados os 12 primeiros meses e restando os 4 seguintes anos (num total de 48 vencimentos mensais), temos que:

- $soma\ restantes\ vencimentos\ A = 1280 \times 48 = 61\ 440{,}00\ €$
- $soma\ restantes\ vencimentos\ C = 1\ 368{,}27 \times 48 = 65\ 676{,}96\ €$

Logo, o total de dinheiro ganho pela Manuel em cada uma das propostas será:

- $rendimento\ total\ proposta\ A = 15\ 360 + 61\ 440 = 76\ 800{,}00\ €$
- $rendimento\ total\ proposta\ C = 12\ 733{,}70 + 65\ 676{,}96 = 78\ 410{,}66\ €$

Podemos então concluir que para o Manuel, em termos monetários, a proposta C será mais vantajosa.

7.3. Temos que:
- $Salário\ bruto\ mensal = 1280{,}00\ €$
- $Retenção\ na\ fonte\ em\ IRS = 0{,}17 \times 1280 = 217{,}60\ €$

Logo, concluímos que:
- $rendimento\ líquido = 1280 - 217{,}60 = 1062{,}40\ €$

8. Tendo em conta que os rendimentos anuais declarados por este contribuinte foram de 11 756 €, então este enquadra-se no 3.º escalão da tabela de IRS.
Assim, tem-se que:
- $a = 11\,284 \times 0{,}16692 \approx 1883{,}53\ €$ $b = (11\,756 - 11\,284) \times 0{,}265 = 125{,}08\ €$
- $coleta = 1883{,}53 + 125{,}08 = 2008{,}61\ €$

Realizando os respetivos descontos anuais (retenção na fonte de IRS e deduções à coleta), temos que:
- $total\ a\ pagar = 2008{,}61 - (769 + 1132{,}88) = 106{,}73\ €$

Concluímos então que este contribuinte terá de pagar 106,73 € aquando da entrega da sua declaração de IRS.

9.
9.1. Estudemos cada uma das propostas e o capital acumulado pela Maria em cada caso, ao fim de um ano.
- $Capital\ Inicial = 1000$
- $n.º\ de\ períodos\ de\ capitalização = 12$

Proposta A
- $taxa\ de\ juro\ mensal = 4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$
- $Capital\ Acumulado = 1000 + 1000 \times 0{,}04 \times 12 = 1480\ €$

Proposta B
- $taxa\ de\ juro\ mensal = 1{,}6\% = \frac{16}{1000} = 0{,}016$
- $Capital\ Acumulado = 1000 \times (1 + 0{,}016)^{12} \approx 1209{,}83\ €$

No final de 1 ano, na **Proposta A** a Maria prevê acumular 1480 € e na **Proposta A** a Maria prevê acumular 1209,83 €.

9.2. Fazendo uma análise das duas propostas, temos que:
- $Capital\ Inicial = 1000$
- $n.º\ de\ períodos\ de\ capitalização = 12 \times 9 = 108$

Proposta A
- $taxa\ de\ juro\ mensal = 4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$
- $Capital\ Acumulado = 1000 + 1000 \times 0{,}04 \times 108 = 5320\ €$

Proposta B
- $taxa\ de\ juro\ mensal = 1{,}6\% = \frac{16}{1000} = 0{,}016$
- $Capital\ Acumulado = 1000 \times (1 + 0{,}016)^{108} \approx 5552{,}91\ €$

Podemos concluir que a Maria deverá aceitar a proposta B, pois acumula uma quantia maior ao final de 9 anos.

A diferença registada entre as duas propostas ao final de 9 anos é de:
- $diferença = 5552{,}91 - 5320 = 232{,}91\ €$

A diferença de quantia entre o capital acumulado nas duas propostas é de 232,91 euros.

10. Analisemos cada uma das propostas, tendo em conta a situação descrita:

Modalidade A

- $valor\ em\ crédito = 1323 - 500 = 823$ €
- $taxa\ de\ juro = 0{,}3\% = 0{,}003 \quad Capital\ em\ dívida = 823$
- $n.º\ de\ períodos\ de\ capitalização = 30 \times 3 = 90$
- $Pagamento\ Final = 823 + 823 \times 0{,}003 \times 90 = 1045{,}21$
- $Custo\ Total = 500 + 1045{,}21 = 1545{,}21$ €

Modalidade B

- $prestação\ mensal\ fixa = \frac{1323}{4} = 330{,}75$
- $taxa\ de\ juro = 5\% = 0{,}05 \quad Capital\ em\ dívida = 1323$
- $n.º\ de\ período\ de\ capitalização = 4$
- $Custo\ Total = 1323 + 1323 \times 4 \times 0{,}05 = 1587{,}60$ €

Podemos então concluir que o Manuel deverá optar pela **Modalidade A**, tendo em conta que possui o menor custo para ele na sua totalidade.

11.

11.1. Seguindo os passos do algoritmo descrito, temos que:

- $rendimento\ global\ do\ casal = 20\,950$ €

Logo, o rendimento coletável deste casal é:

- $rendimento\ coletável = \frac{20\,950}{2} = 10\,475{,}00$ €

Este casal enquadra-se então no 3.º escalão prevista na tabela de IRS. Ou seja:

- $imposto\ do\ rendimento\ coletável = 10\,475 \times 0{,}235 \approx 2461{,}63$ €
- $coleta\ do\ casal = (2461{,}63 - 799{,}78) \times 2 = 3323{,}70$ €

Concluímos então que:

- $IRS = coleta - deduções = 3323{,}04 - 0 = 3323{,}70$ €

Este casal terá de pagar 3323,70 euros na entrega da sua declaração de IRS.

11.2. Comecemos por determinar o IRS do casal no caso do serviço ser prestado. Assim:

- $rendimento\ global\ do\ casal = 13\,000 + 1000 = 14\,000$ €
- $rendimento\ coletável = \frac{14\,000}{2} = 7000$ €

Neste caso, os rendimentos do casal enquadram-se no 3.º escalão da tabela de IRS. Ou seja:

- $imposto\ do\ rendimento\ coletável = 7000 \times 0{,}235 = 1645{,}00$ €
- $coleta\ do\ casal = (1\,645 - 799{,}78) \times 2 = 1690{,}44$ €
- $coleta\ com\ a\ prestação\ do\ serviço = coleta - deduções = 1\,690{,}44 - 0 = 1690{,}44$ €

No caso do serviço não ser prestado, então temos que:

- $rendimento\ global\ do\ casal = 13\,000$ €
- $rendimento\ coletável = \frac{13\,000}{2} = 6500$ €

Neste caso, os rendimentos do casal enquadram-se no 2.º escalão da tabela de IRS. Ou seja:

- $imposto\ do\ rendimento\ coletável = 6500 \times 0{,}13 = 845{,}00$ €
- $coleta\ do\ casal = (845 - 108{,}78) \times 2 = 1472{,}44$ €
- $coleta\ sem\ a\ prestação\ do\ serviço = coleta - deduções = 1472{,}44 - 0 = 1472{,}44$ €

Logo, podemos então concluir que os rendimentos disponíveis do casal nos dois casos são:

- $rendimento\ com\ a\ prestação\ do\ serviço = 14\,000 - 1690{,}44 = 12\,309{,}56\ €$
- $rendimento\ sem\ a\ prestação\ do\ serviço = 13\,000 - 1472{,}44 = 11\,527{,}56\ €$

Podemos então concluir que o Manuel não tem razão. Apesar de aumentar a taxa de IRS sobre os rendimentos do casal com a prestação de serviço, o rendimento final do casal acaba por ser superior ao rendimento na situação em que o casal não presta o serviço. Tal diferença relaciona-se com a parcela a abater prevista pelos escalões 2 e 3 da tabela do IRS: no escalão 3 a parcela a abater é superior à parcela a abater no escalão 2, o que faz com que o rendimento do casal fique beneficiado.

12. Sabemos que a ERR irá receber 62 000 € do prazo atual a 4 meses. Assim, a dívida n.º 1 é cobrada daqui a dois meses, pelo que a empresa irá ficar em débito nesta dívida durante dois meses até receber os 62 000 €. Assim, temos que:

$$Capital\ em\ Dívida\ n.º\ 1\ com\ juros = 10\,200 \times (1 + 0{,}02)^2 = 10\,612{,}08\ €$$

Ou seja, até receber os 62 000 €, a ERR irá ter registado a quantia total em dívida de:

$$Dívida\ Total = 10\,612{,}08 + 12\,600 + 12\,850 + 15\,400 + 18\,000 = 69\,462{,}08\ €$$

Podemos então concluir que, daqui a 4 meses, a ERR não conseguirá liquidar a sua dívida na totalidade, pois os 62 000 € que irá receber não irá cobrir os 69 462,08 € que a empresa deve na totalidade nessa altura.

Avaliar – Páginas 82 e 83

1. Tendo em conta as condições enunciadas, temos que:

- Vencimento por hora
  - $vencimento\ por\ hora = \frac{1128 \times 12}{52 \times 40} \approx 6{,}51\ €$
- Total de abonos
  - $total\ de\ abonos = 1128 + 110 = 1238\ €$
- Desconto para a Segurança Social
  - $desconto\ SS = 0{,}11 \times 1128 = 124{,}08\ €$
- Retenção em fonte de IRS
  - $retenção = 0{,}13 \times 1\,128 = 146{,}64\ €$
- Total de descontos
  - $Total\ de\ descontos = 124{,}08 + 146{,}64 = 270{,}72\ €$
- Total a receber
  - $total\ a\ receber = total\ de\ abonos - total\ de\ descontos = 1238 - 270{,}72 = 967{,}28\ €$

2. Temos que a Luísa se enquadra no 6.º escalão da tabela de IRS.
Assim, temos que:

- $a = 26\,355 \times 0{,}24482 \approx 6452{,}23\ €$
- $b = (30\,500 - 26\,355) \times 0{,}37 = 1533{,}65\ €$

Logo, a coleta correspondente será:

- $coleta = 6452{,}23 + 1533{,}65 = 7985{,}88\ €$

Assim, a percentagem do seu rendimento coletável é:

- $percentagem = \frac{7\,985{,}88}{30\,500} \times 100 \approx 26{,}2\ \%$

3.

3.1. Temos que:

- $taxa\ de\ juro = 2\% = 0{,}02 \quad Capital\ Inicial = 750$
- $n.^{\text{º}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 5$
- $CF = 750 + 750 \times 0{,}02 \times 5 = 825\ €$

3.2. Neste caso:

- $taxa\ de\ juro = 2\% = 0{,}02 \quad Capital\ Inicial = 750$
- $n.^{\text{º}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 1 \quad n.^{\text{º}}\ de\ anos = 5$
- $CF = 750 \times \left(1 + \frac{0{,}02}{1}\right)^{5\times 1} \approx 828{,}06\ €$

3.3. Podemos concluir que:

- $taxa\ de\ juro = 2\% = 0{,}02 \quad Capital\ Inicial = 750$
- $n.^{\text{º}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 2 \quad n.^{\text{º}}\ de\ anos = 5$
- $CF = 750 \times \left(1 + \frac{0{,}02}{2}\right)^{5\times 2} \approx 828{,}47\ €$

4.

4.1. Tendo em conta que o rendimento anual do Carlos foi de 13 396 €, então este enquadra-se no 3.º escalão da tabela de IRS.
Logo:

- $a = 11\,284 \times 0{,}16692 \approx 1883{,}53\ €$
- $b = (13\,396 - 11\,284) \times 0{,}265 = 559{,}68\ €$
- $coleta = a + b = 1883{,}53 + 559{,}68 = 2443{,}21\ €$

Descontando os rendimentos retido em fonte de IRS e deduções à coleta do Carlos, temos que:

- $quantia\ a\ pagar = 2443{,}21 - (1245{,}96 + 250) = 947{,}25\ €$

Aquando da entrega da sua declaração anual de IRS, o Carlos teve de pagar 947,25 €.

4.2. Tendo em conta a situação descrita, podemos perceber que o valor de coleta registada na declaração anual do Carlos mantem-se, correspondendo a 2443,21 €. No entanto, já no cálculo do IRS pode-se constatar que:

- $Deduções\ à\ coleta\ no\ caso\ de\ validação\ das\ faturas = 250 + 425 = 675\ €$
- $quantia\ a\ pagar = 2443{,}21 - (1245{,}96 + 675) = 522{,}25\ €$

Assim, podemos concluir que se o Carlos tivesse validado as suas faturas todas, iria pagar 522,25 € na sua declaração anual de IRS, o que corresponde a uma diferença de 425 euros.

De facto, a validação das faturas das despesas gerais por parte dos contribuintes revela ser um ato muito importante no ato da entrega da sua declaração anual, pois as contribuições associadas à faturação das despesas gerais poderão ter uma grande repercussão no cálculo final do IRS do contribuinte, podendo mesmo significar a poupança em dezenas de euros no ato da entrega da declaração do IRS.

5. Sabemos que:

- $taxa\ de\ juro = x \quad Capital\ Inicial = 9000$
- $n.^{\text{o}}\ de\ períodos\ de\ capitalização = 1 \quad n.^{\text{o}}\ de\ anos = 2$
- $Capital\ Final = 9000 + 460{,}46 = 9460{,}46$

Assim, temos que:

$$9000 \times \left(1 + \frac{x}{1}\right)^{1\times 2} = 9460{,}46 \Leftrightarrow 9000 \times (1+x)^2 = 9460{,}46 \Leftrightarrow (1+x)^2 = \frac{9460{,}46}{9000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + x = \sqrt{\frac{9460{,}46}{9000}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{9460{,}46}{9000}} - 1 \Leftrightarrow x \approx 2{,}5\%$$

A taxa de juro anual aplicada neste depósito foi de 2,5%, aproximadamente.

6. Tendo em conta as condições oferecidas pelo banco, o João irá ter de pagar um total de:

- $Valor\ a\ pagar = 1200 + 1200 \times 0{,}15 = 1380€$

O pagamento deverá ser feito em dois anos, o que corresponde a 24 prestações, prestações essas que serão constantes.
Logo:

- $valor\ da\ prestação\ mensal = \frac{1380}{24} = 57{,}50\ €$

A prestação mensal do crédito que o João poderá contrair é de 57,50 euros.

7. No dia em que a Sofia fez a compra, o valor de 1 *nepper* era de 0,50 euros. Logo:

$$Valor\ de\ euros\ gastso\ em\ nepper's = 304 \times 0{,}5 = 152\ €$$

O valor pago em taxa variável pela compra da Sofia foi de:

$$Valor, em\ euros, taxa\ variável = 0{,}008 \times 152 = 1{,}216\ €$$

Logo, o valor pago pela Sofia pela transação que realizou é dado por:

$$Valor\ total\ pago = 152 + 2 + 1{,}216 \approx 155{,}22\ €$$

O valor debitado no cartão bancário da Sofia foi de 152,22 euros, aproximadamente.