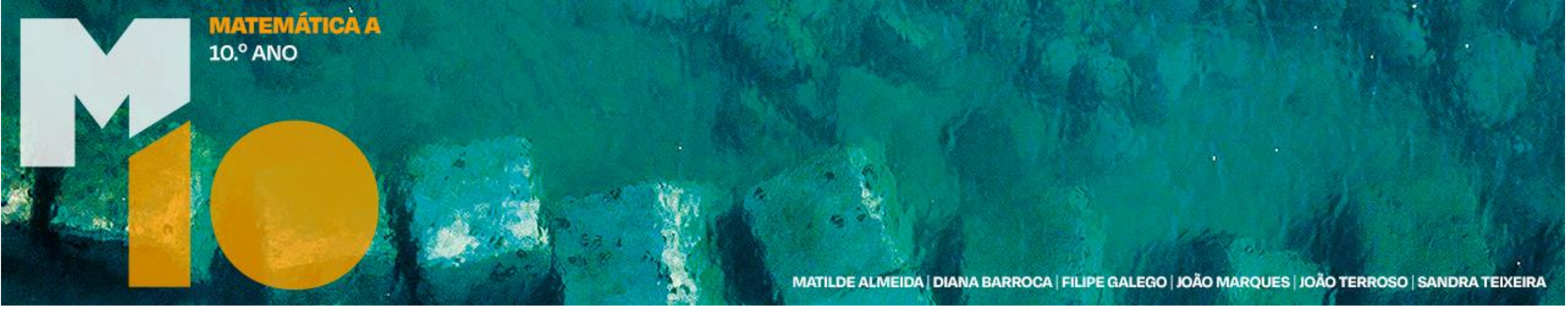


Tema 3 – Geometria sintética no plano

Recordar – Página 7

1.

1.1. Os ângulos SRQ e DRH são verticalmente opostos, logo, têm a mesma amplitude.

R.: $S\hat{R}Q = 57°$

1.2. BQR e SRQ são ângulos alternos internos definidos num par de retas paralelas (as retas SR e BQ contêm lados opostos de um paralelogramo, logo, são paralelas) e, portanto, têm a mesma amplitude.

R.: $B\hat{Q}R = 57°$

1.3. $R\hat{Q}P = 180° - B\hat{Q}R = 180° - 57° = 123°$
R.: $R\hat{Q}P = 123°$

1.4. PSR e HRS são ângulos alternos internos definidos num par de retas paralelas (as retas PS e QR contêm lados opostos de um paralelogramo, logo, são paralelas) e, portanto, têm a mesma amplitude.

$P\hat{S}R = H\hat{R}S = 180° - 57° = 123°$

R.: $123°$

1.5. SPA e PSR são ângulos alternos internos definidos num par de retas paralelas (as retas SR e PQ contêm lados opostos de um paralelogramo, logo, são paralelas) e, portanto, têm a mesma amplitude. Assim, $S\hat{P}A = 123°$.

$A\hat{P}E = 180° - S\hat{P}A = 180° - 123° = 57°$

R.: $A\hat{P}E = 57°$

1.6. $E\hat{P}Q = 180° - A\hat{P}E = 180° - 123° = 57°$

R.: $E\hat{P}Q = 57°$

2.

2.1. Na figura, o ângulo verticalmente oposto ao ângulo que está sombreado e que mede $41°$ e o ângulo suplementar ao ângulo sombreado que mede $149°$ e que, portanto, mede $180° - 149° = 31°$, são alternos internos definidos entre as retas r e s e que, por terem amplitudes diferentes, permitem concluir que as retas r e s não são paralelas.

2.2. $180° - 132° = 48°$, se as retas r e s fossem paralelas, os ângulos alternos internos definidos nas mesmas por uma secante teriam a mesma amplitude, o que não se verifica, logo, as retas r e s não são paralelas.

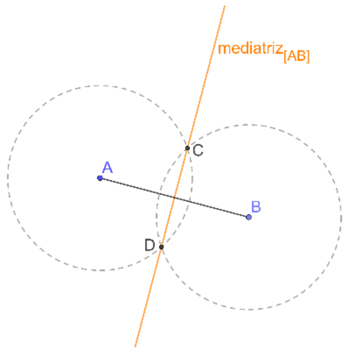
3.

1. Construir um segmento de reta [AB] com 5 cm de comprimento.

2. Traçar duas circunferências com o mesmo raio, maior do que metade de 5 cm, e centro em A e B, respetivamente.

3. Marcar os pontos C e D de interseção das duas circunferências.

4. Traçar a reta CD, mediatriz do segmento de reta [AB].



4.

4.1.

1. Traçar uma semirreta de origem num ponto V' e que passa por um ponto P.

2. Marcar o ponto C, interseção da circunferência de centro em V e raio $\overline{VA}$ com $\dot{V}B$.

3. Traçar uma circunferência de centro em V' e raio de comprimento $\overline{VA}$.

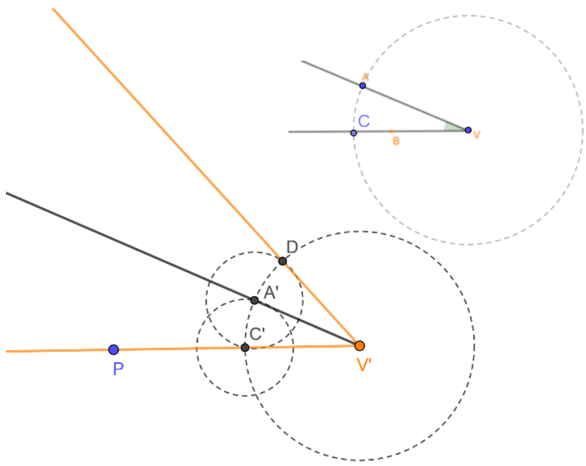
4. Marcar o ponto C', interseção da circunferência de centro em V' e raio $\overline{VA}$ com a semirreta $\dot{V}'P$.

5. Marcar o ponto A', interseção da circunferência traçada no passo 3 com a circunferência de centro C' e raio $\overline{AC}$.

6. Marcar o ponto D, interseção da circunferência traçada no passo 3 com a circunferência de centro A e raio $\overline{AC}$.

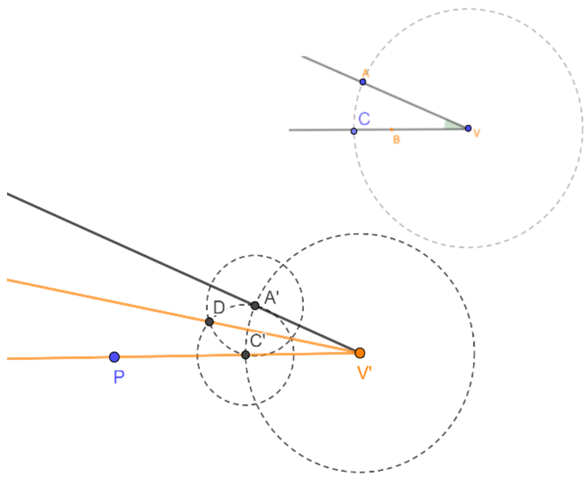
7.Traçar a semirreta $\dot{V}'D$.

O ângulo $DV'C'$ é o ângulo pedido.



4.2.

1. Traçar uma semirreta de origem num ponto V' e que passa por um ponto P.
2. Marcar o ponto C, interseção da circunferência de centro em V e raio $\overline{VA}$, com $\dot{V}B$.
3. Traçar uma circunferência de centro em V' e raio de comprimento $\overline{VA}$.
4. Marcar o ponto C', interseção da circunferência de centro em V' e raio $\overline{VA}$.
5. Marcar o ponto A', interseção da circunferência traçada no passo 3 com a circunferência de centro C' e raio $\overline{AC}$.
6. Marcar o ponto D, interseção das circunferências de raio $\overline{A'C'}$ e centros A' e C'.
7. Traçar a semirreta $\dot{V}'D$.
O ângulo $DV'C'$ é o ângulo pedido.



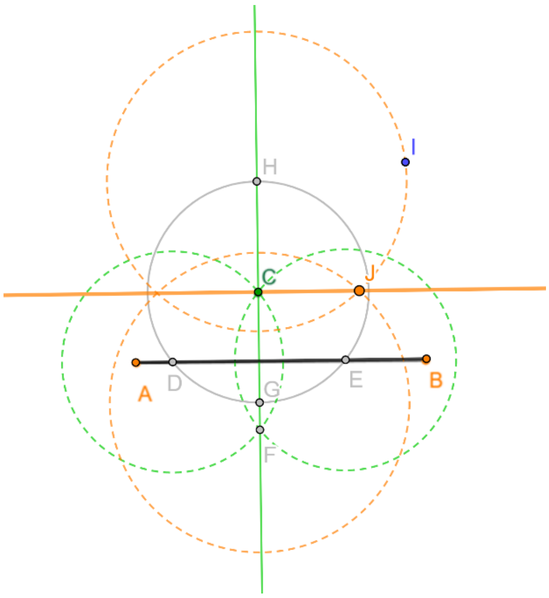
5.

Construção da reta perpendicular a $[AB]$ que passa no ponto C

1. Construir uma circunferência de centro em C que intersete o segmento de reta $[AB]$ em dois pontos, D e E.

2. Construir as circunferências de raio $[CD]$ e centros D e E, designar o ponto de interseção diferente de C por F.

3. Construir a reta CF.



Construção da reta perpendicular à reta CF que passa no ponto C – reta paralela a $[AB]$ que passa por C.

4. Marcar os pontos G e H, interseção da circunferência construída no passo 1 com a reta CF.

5. Traçar duas circunferências congruentes de raio de comprimento maior do que $\overline{CH}$ e centro nos pontos G e H, designar por J um dos pontos de interseção das circunferências.

6. Traçar a reta CJ.

A reta CJ é a reta pedida.

6.

6.1. Circunferência de diâmetro $[AB]$.

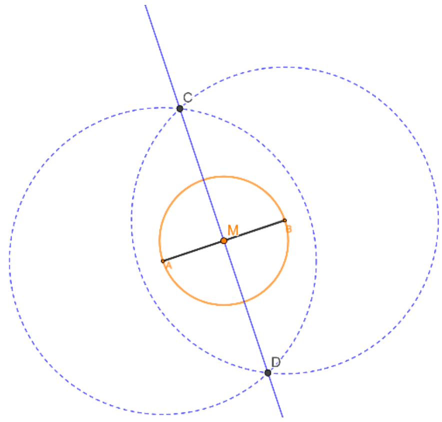
1. Traçar duas circunferências congruentes de raio maior do que a metade de $\overline{AB}$ e centros A e B.

2. Marcar os pontos C e D, pontos de interseção das duas circunferências.

3. Traçar a reta CD.

4. Marcar o ponto M, interseção da reta CD com o segmento de reta $[AB]$.

5. Traçar a circunferência de centro M e raio $[AM]$.



6.2. Quadrado de lado [AB].

1. Traçar a reta AB.

2. Traçar uma circunferência de centro A e raio [AB], marcar o ponto P, interseção da circunferência com a reta AB diferente do ponto B.

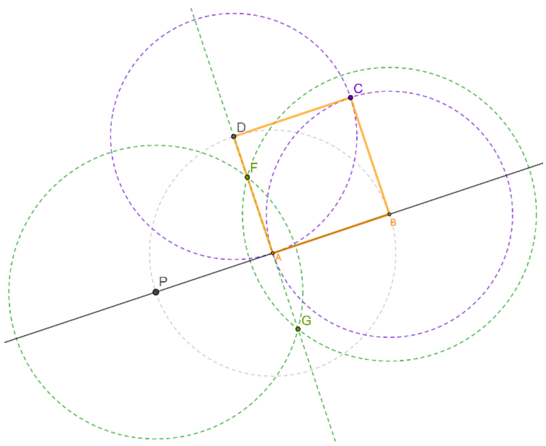
3. Traçar circunferências congruentes de raio maior do que $\overline{AP}$ e centros P e B, designar os pontos de interseção das circunferências por F e G.

4. Traçar a reta FG.

5. Traçar a circunferência de centro A e raio $[AB]$, marcar o ponto D, um dos pontos de interseção da circunferência com a reta FG.

6. Traçar as circunferências de raio $[AB]$ e centros D e B, marcar o ponto C de interseção das duas circunferências.

7. Construir o quadrado $[ABCD]$, traçando os segmentos $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$.



MATILDE ALMEIDA | DIANA BARROCA | FILIPE GALEGO | JOÃO MARQUES | JOÃO TERROSO | SANDRA TEIXEIRA

Recordar – Página 9

7.

7.1. Tendo em conta que $3^2 + 4^2 = 5^2$ e que os triângulos são retângulos, conclui-se, pelo teorema de Pitágoras, que os triângulos têm, de um para o outro, lados de igual comprimento.

Assim, pelo critério LLL de congruência de triângulos, conclui-se que os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são congruentes.

7.2. Os lados $[AC]$ e $[AD]$ têm o mesmo comprimento e o lado $[AB]$ é comum aos dois triângulos.

Os ângulos internos de vértice em A têm a mesma amplitude. Assim, pelo critério LAL de congruência de triângulos, conclui-se que os triângulos $[ABC]$ e $[ABD]$ são congruentes.

8.

8.1. Os ângulos internos de vértice A dos dois triângulos são verticalmente opostos, logo, têm a mesma amplitude. O ângulo interno de vértice B do triângulo [ABC] e o ângulo interno de vértice E do triângulo [ADE] são ângulos alternos internos definidos num par de retas paralelas (BC e DE) por uma reta secante (BE), logo são congruentes. Assim, pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

8.2. A razão entre os comprimentos dos lados do triângulo [ADE] e os comprimentos dos lados do triângulo [ABC] é $\frac{3}{2}$, logo, a razão entre a área do triângulo [ADE] e a área do triângulo [ABC] é $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{9}{4}$.

9. $O\hat{T}P = 90°$, pois uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

$T\hat{P}O = T\hat{P}B = 38°$, pois a semirreta $\dot{P}B$ contém o ponto O.
A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, logo,

$$P\hat{O}T = 180° - \left(O\hat{T}P + T\hat{P}O\right) = 180° - (90° + 38°) = 52° = \widehat{BT}.$$

O ângulo PAT é um ângulo inscrito na circunferência, logo, a sua amplitude é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, ou seja, metade da amplitude do arco BT.
Assim,

$$P\hat{A}T = \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{B\hat{O}T}{2} = \frac{P\hat{O}T}{2} = \frac{52°}{2} = 26°$$

As cordas [AT] e [BC] são paralelas, logo, os arcos compreendidos entre estas cordas têm a mesma amplitude e, portanto, os ângulos inscritos cujos lados compreendem esses arcos também têm a mesma amplitude.
Assim,

$$A\hat{B}C = B\hat{A}T = 26°.$$

Como os ângulos CBP e ABC são suplementares, visto que a reta AP contém o ponto B, conclui-se que

$$C\hat{B}P = 180° - A\hat{B}C = 180° - 26°, \text{ ou seja, } C\hat{B}P = 154°.$$

R.: $P\hat{A}T = 26°$, $C\hat{B}P = 154°$.

10.

10.1. O ângulo BCA está inscrito numa semicircunferência, logo, é reto e, portanto, o triângulo [ABC] é retângulo em C.

Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 13^2 - 5^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{144} \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm 12$$

$\overline{BC} = 12$, pois $\overline{BC} > 0$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = 30$$

R.: 30 cm^2

10.2. O arco AC está compreendido entre os lados do ângulo inscrito BAD, logo, a sua amplitude é o dobro da amplitude do ângulo BAD.

Assim, $\widehat{BD} = 2 \times 40° = 80°$.

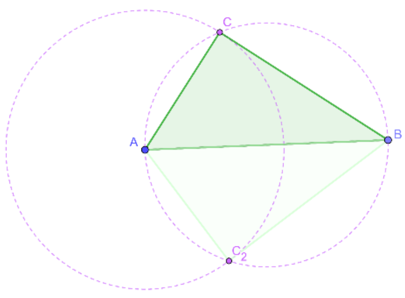
$$comp._{circunf} = 13\pi$$

$$comp._{arco\ BD} = \frac{80° \times 13\pi}{360°} \approx 9{,}1$$

R.: $9{,}1$ cm

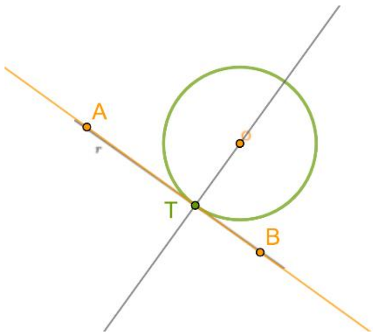
11.

1. Traçar o segmento $[AB]$ com 7 cm de comprimento.
2. Traçar a circunferência de centro em A e raio 4 cm.
3. Traçar a circunferência de diâmetro $[AB]$ (determinar o ponto médio, O, de $[AB]$ e traçar a circunferência de centro O e raio $[OB]$).
4. Marcar o ponto C, um dos pontos de interseção das duas circunferências contruídas (o ponto C é o vértice cujo ângulo interno é reto).
5. Traçar os segmentos $[AC]$ e $[BC]$.



12.

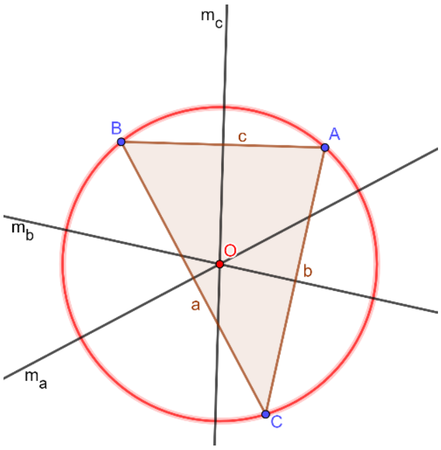
1. Traçar a perpendicular à reta r que passa no ponto O (ver procedimento em questões anteriores).
2. Marcar o ponto T, interseção da reta r com a circunferência.
3. Traçar a circunferência de centro O e raio $[OT]$.



3.1. Pontos notáveis do triângulo: circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro

Tarefa 1 – Página 10

1., 2., 3., 4. e **5.**



5. O centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados, logo, os três vértices estão à mesma distância desse ponto e, portanto, pertencem à mesma circunferência com centro no ponto de interseção das mediatrizes.

6. Não, basta traçar duas, pois um ponto que pertença à mediatriz de [AB] é equidistante de A e de B e um ponto que pertença à mediatriz de [BC] é equidistante de B e de C e, portanto, é equidistante de A e de C, concluindo-se que pertence à mediatriz de [AC].

7.

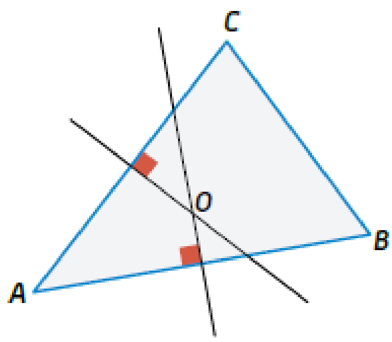
7.1. No caso de o triângulo ser acutângulo, o circuncentro localiza-se no interior do triângulo.

7.2. No caso de o triângulo ser retângulo, o circuncentro pertence ao maior lado, a hipotenusa, mais especificamente, é o ponto médio da hipotenusa.

7.3. No caso de o triângulo ser obtusângulo, o circuncentro localiza-se no exterior do triângulo.

Tarefa 2 – Página 10

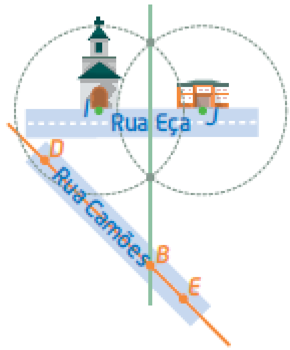
1. O ponto O é equidistante de A e de B, pois pertence à mediatriz de $[AB]$.
2. O ponto O é equidistante de A e de C, pois pertence à mediatriz de $[AC]$.
3. De 1, sabemos que $\overline{AO} = \overline{BO}$ e de 2 sabemos que $\overline{AO} = \overline{CO}$ e, portanto, $\overline{BO} = \overline{CO}$, ou seja, O é equidistante de B e de C.
4. O ponto O é equidistante de B e de C, logo, O pertence à mediatriz de $[BC]$.
5. Os pontos A, B e C são equidistantes de O, então pertencem ao lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância de O igual ao comprimento dos segmentos de reta que unem O a qualquer um dos pontos A, B, e C, ou seja, A, B e C pertencem a uma mesma circunferência de centro O (circuncentro).



Aplicar – Página 11

1.

Contruir a mediatriz de $[\boldsymbol{IJ}]$



1. Traçar duas circunferências de centro I e J com o mesmo raio que terá de ter comprimento maior do que metade de comprimento de $\overline{IJ}$.

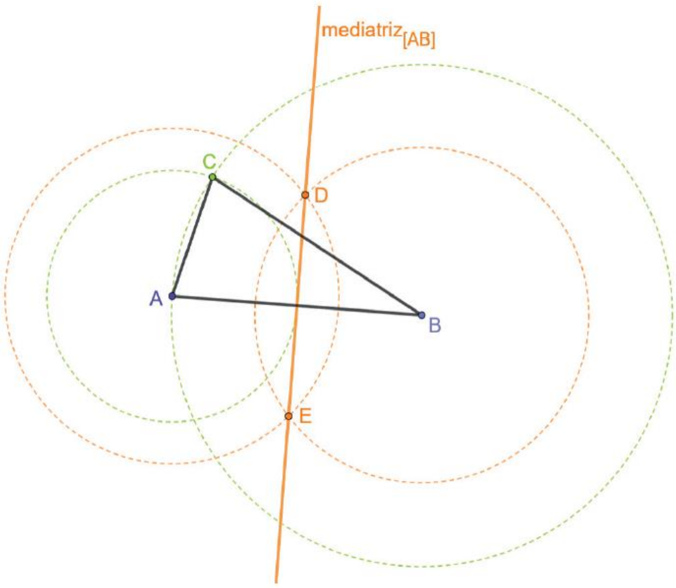
2. Traçar a reta que contém os pontos de interseção das duas circunferências traçadas no passo 1, mediatriz de $[IJ]$.

Determinar o ponto $\boldsymbol{B}$

3. Marcar o ponto de interseção da mediatriz de $[IJ]$ com a Rua Camões, nomeá-lo por B, onde deverá localizar-se o bebedouro.

2. $\overline{AC} = (15 - 6 - 6)\text{ cm} = 3\text{ cm}$

Construção do triângulo $[\boldsymbol{ABC}]$



1. Traçar o segmento de reta $[AB]$ com 6 cm de comprimento.

2. Traçar as circunferências de centros A e B com, respetivamente, 3 cm e 6 cm de raio.

3. O vértice C do triângulo $[ABC]$ é qualquer um dos pontos de interseção das duas circunferências.

4. Traçar os segmentos de reta $[BC]$ e $[AC]$.

Construção da mediatriz de $[\boldsymbol{AB}]$

5. Traçar duas circunferências de centros A e B com o mesmo raio que terá de ter comprimento maior do que metade de $\overline{AB}$.

6. Traçar a reta que contém os pontos de interseção das duas circunferências traçadas no passo 5, mediatriz de $[AB]$.

Aplicar – Página 12

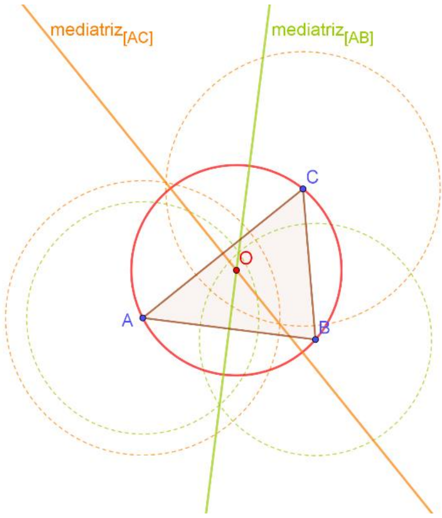
3.

1. Construir um triângulo [ABC].

2. Traçar as mediatrizes de dois dos lados do triângulo, por exemplo, [AB] e [AC].

3. Marcar o ponto O de interseção das duas mediatrizes traçadas no passo 2.

4. Construir a circunferência de centro O e que passa num dos vértices. Esta circunferência vai conter os outros dois vértices e é a circunferência que circunscreve o triângulo [ABC].



4.

Construção do triângulo

1. Construir o segmento de reta [AB] com 5 cm de comprimento.

2. Construir a circunferência de centro em A com 7 cm de raio (o ponto C pertence a esta circunferência uma vez que o lado [AC] mede 7 cm).

3. Construir a mediatriz do lado [AB] (o circuncentro, O, pertence a esta reta).

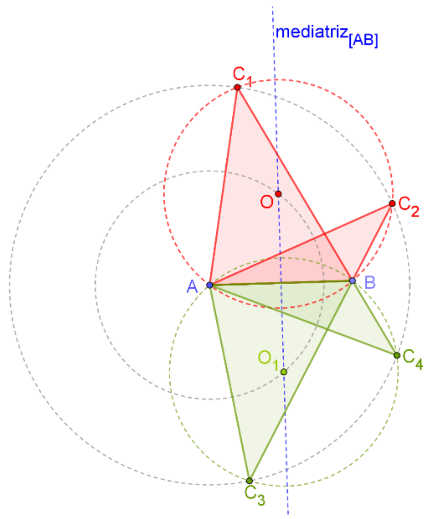
4. Construir a circunferência de centro em A com 4 cm de raio (o ponto O pertence a esta circunferência uma vez que A dista 4 cm de O).

5. Marcar o ponto O, interseção da mediatriz de [AB] com a circunferência construída no passo 4. Uma vez que temos dois pontos de interseção, há duas possibilidades para a localização do circuncentro, logo, escolhemos uma delas.

6. Construir a circunferência circunscrita, circunferência de centro O que contém A (o ponto C vai pertencer a esta circunferência).

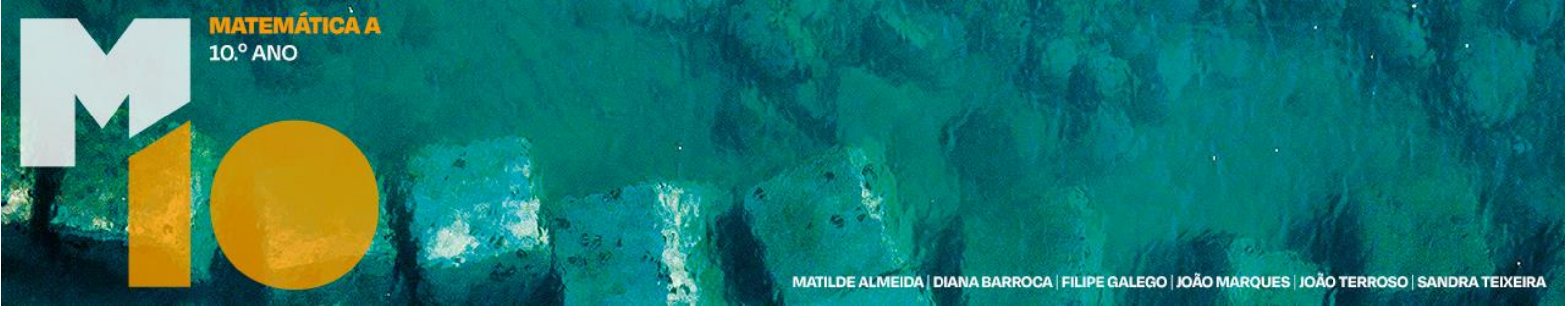
7. Marcar o ponto C, interseção da circunferência que circunscreve o triângulo com a circunferência construída no passo

8. Uma vez que temos dois pontos de interseção, há duas possibilidades para a localização do vértice C para a localização do circuncentro escolhida, escolhemos uma delas).



9. Traçar os segmentos de reta [BC] e [AC].

R.: Com as condições dadas, existem duas possibilidades de localização do circuncentro e, para cada uma dessas localizações, existem duas possibilidades de localização do vértice C. Assim, conclui-se que existem 4 localizações possíveis, no plano, para o ponto C, fixado o segmento de reta [AB], nesse plano.



Aplicar – Página 13

5. Basta que haja mais do que um café que seja equidistante das duas casas e que uma das amigas tenha ido um e a outra amiga a outro. Eventualmente, quando combinaram, as amigas não repararam que havia mais do que um café nessas condições e a Ana conhecia um deles e a Teresa conhecia o outro.

6. O ponto equidistante dos pontos A, B e C é o ponto de interseção das mediatrizes do triângulo [ABC]. Assim, basta construir duas das mediatrizes do triângulo [ABC] e determinar a interseção das mesmas.

Aplicar – Página 14

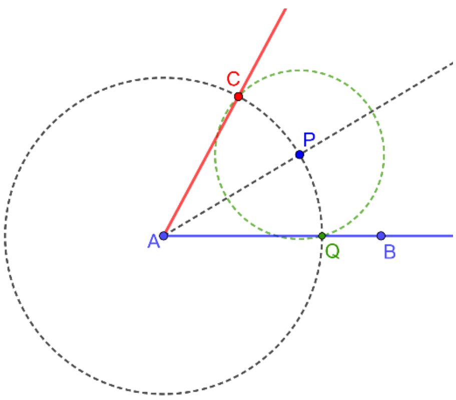
7. A semirreta $\dot{P}B$ é a bissetriz do ângulo QPR, logo, $Q\hat{P}B = \frac{1}{2}Q\hat{P}R$.
É dado que $R\hat{Q}P = 30°$ e que $Q\hat{P}B = P\hat{R}Q$.
Como a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que:
$P\hat{R}Q + Q\hat{P}R + R\hat{Q}P = 180° \Leftrightarrow \frac{1}{2}Q\hat{P}R + Q\hat{P}R + 30° = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}Q\hat{P}R + \frac{2}{2}Q\hat{P}R = 180° - 30° \Leftrightarrow \frac{3}{2}Q\hat{P}R = 150° \Leftrightarrow$

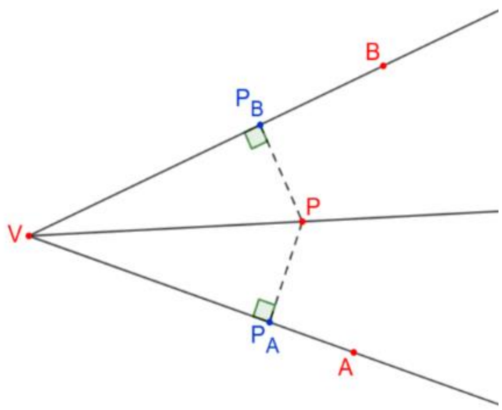
$\Leftrightarrow Q\hat{P}R = 150° \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow Q\hat{P}R = 100°$

R.: $Q\hat{P}R = 100°$

8.
Se o ponto P está à mesma distância das semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$, então pertence à bissetriz do ângulos BAC e, portanto, para construir $\dot{A}C$ tem de se construir o ângulo de lado $\dot{A}B$ que contém o ponto B e que tem o dobro da amplitude do ângulo BAP.



9.
- Sejam P_A e P_B as projeções ortogonais do ponto P em $\dot{V}A$ e $\dot{V}B$, respetivamente.



Vamos começar por provar que, se um ponto de um ângulo pertence à sua bissetriz, então está à mesma distância dos seus lados.

Suponhamos que o ponto P pertence à bissetriz do ângulo AVB.

Como P pertence à bissetriz do ângulo AVB, os ângulos PVB e AVP têm a mesma amplitude, e, portanto, os ângulos internos dos triângulos $[PVP_A]$ e $[PVP_B]$ de vértice V têm a mesma amplitude. Como os ângulos internos dos triângulos em P_A e P_B são retos e, portanto, têm a mesma amplitude, conclui-se que os ângulos internos de vértice em P também têm a mesma amplitude.
Assim, tendo em conta que o lado [VP] é comum aos dois triângulos e os ângulos internos adjacentes a este lado são iguais de um triângulo para o outro, conclui-se, pelo critério ALA de congruência de triângulos, que os triângulos $[PVP_A]$ e $[PVP_B]$ são congruentes.
Como os triângulos $[PVP_A]$ e $[PVP_B]$ são congruentes, os ângulos internos de vértice P têm a mesma amplitude e os ângulos internos de vértices P_A e P_B também têm a mesma amplitude, concluímos que os lados $[PP_A]$ e $[PP_B]$ têm o mesmo comprimento, ou seja, $\overline{PP_A} = \overline{PP_B}$.

- Vamos agora provar que, se um ponto de um ângulo está à mesma distância dos seus lados, então pertence à sua bissetriz.

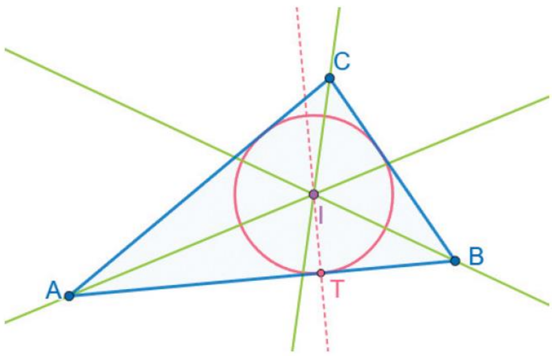
Suponhamos que $\overline{PP_A} = \overline{PP_B}$.

Os triângulos $[PVP_A]$ e $[PVP_B]$ são triângulos retângulos com a hipotenusa comum, o lado $[VP]$ e com dois catetos, de um triângulo para o outros, iguais. Logo, pelo teorema de Pitágoras, sabemos que os outros catetos são, de um triângulo para o outro iguais. Assim, pelo cirtério LLL de congruência de triângulos, conclui-se que os triângulos $[PVP_A]$ e $[PVP_B]$ são congruentes.
Como os triângulos $[PVP_A]$ e $[PVP_B]$ são congruentes e $\overline{PP_A} = \overline{PP_B}$, os ângulos formados pelo lado comum, $[VP]$, e pelos lados $[VP_A]$ e $[VP_B]$ têm a mesma amplitude. Assim, conclui-se que os ângulos AVP e PVB têm a mesma amplitude e, portanto, o ponto P pertence à bissetriz do ângulo AVB.

10. Deve-se construir a bissetriz dos ângulos formados pelas retas que correspondem às ruas Ricardo e Patrícia. O ponto onde deverá ser colocada a estação de recolha de lixo corresponde ao ponto de interseção da bissetriz contruída com a reta que corresponde à Avenida Lourenço.

Tarefa 3 – Página 15

1., 2., 3., 4., 5.



5. O incentro é o ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo. Logo, as projeções ortogonais do incentro nos lados do triângulo estão à mesma distância do incentro e, portanto, pertencem à mesma circunferência de centro no ponto I. Assim, como os segmentos de reta que unem o incentro às suas projeções ortogonais nos lados do triângulo são perpendiculares ao lado do triângulo que contém a correspondente projeção ortogonal do incentro, conclui-se que a circunferência de centro no incentro, que é tangente a um dos lados, é também tangente aos outros dois lados.

6. Não, basta traçar duas bissetrizes.
Consideremos um triângulo $[ABC]$ e o ponto P que pertence às bissetrizes dos ângulos internos de vértices A e B. O ponto P está à mesma distância dos lados $[AB]$ e $[AC]$ e à mesma distância dos lados $[AB]$ e $[BC]$.
Logo, está à mesma distância dos lados $[AC]$ e $[BC]$ e, portanto, pertence à bissetriz do ângulo interno de vértice C.

Tarefa 4

1. Como M e N são as projeções ortogonais do ponto I nos lados $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente, os ângulos internos de vértices M e N dos triângulos $[MAI]$ e $[NAI]$ são retos.

Como I pertence à bissetriz do ângulo CAB e os pontos M e N pertencem, respetivamente, às semirretas $\dot{A}C$ e $\dot{A}B$, conclui-se que os ângulos internos de vértice A dos triângulos $[MAI]$ e $[NAI]$ têm a mesma amplitude.

Como,

$$I\widehat{M}A = I\widehat{N}A \text{ e } M\hat{A}I = I\hat{A}N, \text{ então } A\hat{I}M = N\hat{I}A.$$

O lado $[AI]$ é comum aos triângulos $[MAI]$ e $[NAI]$.

Assim, pelo critério ALA de congruência de triângulos, conclui-se que os triângulos $[MAI]$ e $[NAI]$ são congruentes.

2. Aplicar o critério ALA de congruência de triângulos, numa demonstração análoga à da alínea 1.
Os triângulos $[MAI]$ e $[NAI]$ são congruentes, logo, os lados correspondentes $[MI]$ e $[NI]$ têm o mesmo comprimento.

3. Os triângulos $[NBI]$ e $[LBI]$ são congruentes, logo, os lados correspondentes $[NI]$ e $[LI]$ têm o mesmo comprimento.

Assim, conclui-se que os segmentos de reta $[LI]$, $[MI]$ e $[NI]$ têm o mesmo comprimento, ou seja,

$$\overline{LI} = \overline{MI} = \overline{NI}.$$

4. $[IC]$ é comum aos dois triângulos e $\overline{LI} = \overline{MI}$, logo, como os triângulos são retângulos, sabemos, pelo teorema de Pitágoras, que o cateto em falta tem de ter o mesmo comprimento nos dois triângulos, ou seja, $\overline{CL} = \overline{CM}$.

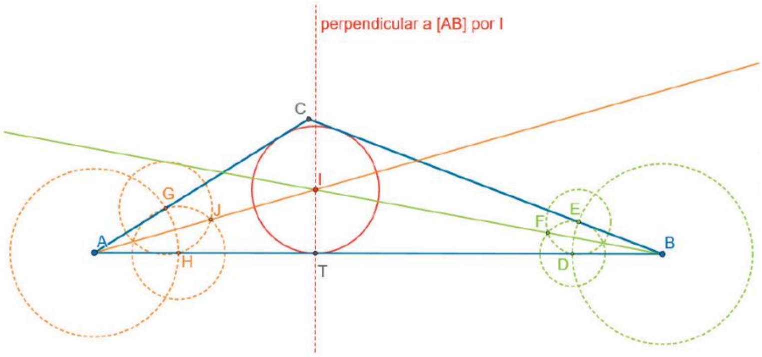
Assim, pelo critério LLL de congruência de triângulos, conclui-se que os triângulos $[LCI]$ e $[MCI]$ são congruentes.

5. Como os triângulos $[LCI]$ e $[MCI]$ são congruentes, os ângulos correspondentes LCI e MCI têm a mesma amplitude. Logo, $\dot{I}C$ é a bissetriz do ângulo LCM, e, portanto, I é um ponto comum às três bissetrizes do triângulo, ou seja, é o incentro do triângulo. A circunferência de centro I e raio $\overline{LI} = \overline{MI} = \overline{NI}$ é tangente aos três lados do triângulo, visto que, por construção, cada um dos segmentos de reta $[LI]$, $[MI]$ e $[NI]$ é perpendicular a um dos lados do triângulo.

Aplicar – Página 16

11.

1. Contruir um triângulo com cujos lados meçam 4 cm, 6 cm e 9 cm.
2. Traçar as bissetrizes de dois ângulos internos do triângulo.
3. Marcar o ponto I de interseção das duas bissetrizes traçadas no passo 2.
4. Traçar a perpendicular a um dos lados do triângulo passando pelo ponto I.
5. Marcar o ponto T de interseção do lado e respetiva perpendicular por I, referidos no passo 4.
6. Construir a circunferência de centro I que passa pelo ponto T, a circunferência inscrita no triângulo.



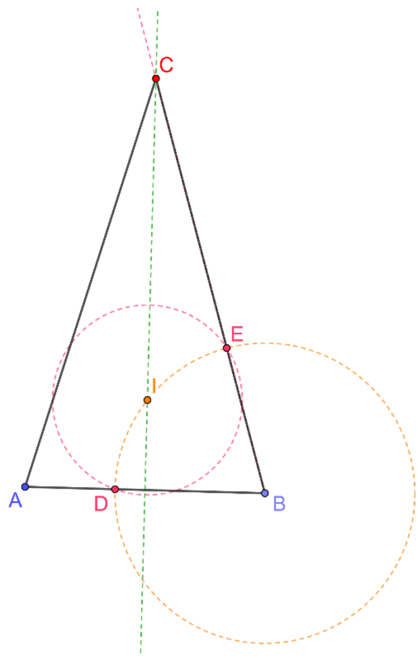
Nota: Construção com a construção das bissetrizes sem usar a ferramenta do *GeoGebra* para esse efeito.

Aplicar – Página 17

12.

12.1.

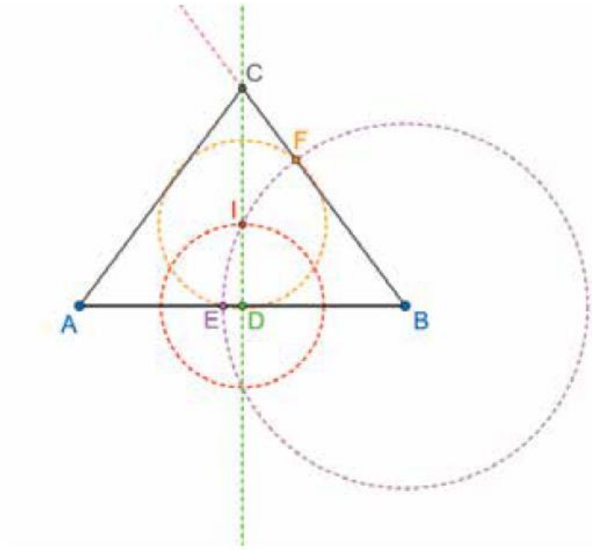
1. Traçar um segmento de reta $[AB]$ com 8 cm de comprimento.
2. Traçar a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ (o incentro do triângulo pertence a esta reta, uma vez que o triângulo é isósceles, pois $\overline{AC} = \overline{BC}$, e, portanto, a bissetriz do ângulo interno de vértice C coincide com a mediatriz de $[AB]$).
3. Traçar a circunferência de centro B e 5 cm de raio.
4. Marcar o ponto I, incentro do triângulo, interseção da mediatriz de $[AB]$ com a circunferência do passo 3.
5. Marcar o ponto D, interseção da circunferência do passo 3 com o segmento de reta $[AB]$.
6. Traçar a circunferência de centro I que passa no ponto D.
7. Marcar o ponto E, interseção das duas circunferências construídas, diferente do ponto D.
8. Traçar a semirreta $\dot{B}E$.
9. Marcar o ponto C, interseção da semirreta $\dot{B}E$ com a mediatriz de $[AB]$.
10. Traçar os segmentos $[AC]$ e $[BC]$.



Nota: O passo 5 a 8 correspondem à duplicação do ângulo IBA.

12.2.

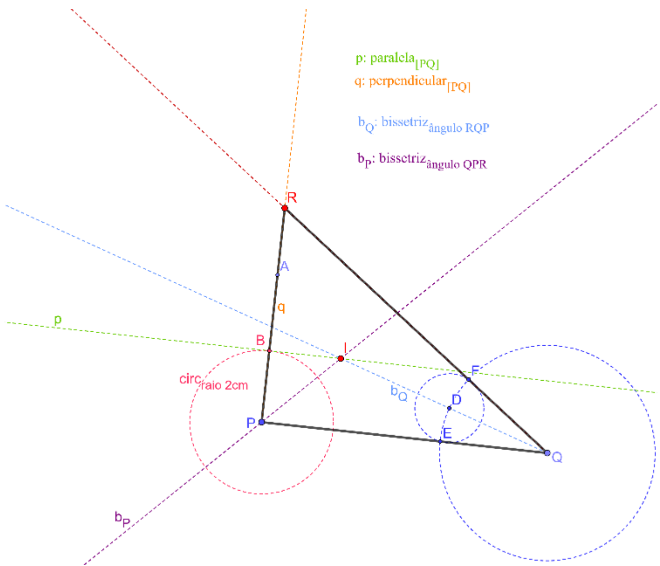
1. Traçar um segmento de reta $[AB]$ com 8 cm de comprimento.
2. Traçar a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ (o incentro do triângulo pertence a esta reta, uma vez que o triângulo é isósceles, com $\overline{AC} = \overline{BC}$, e, portanto, a bissetriz do ângulo interno de vértice C coincide com a mediatriz de $[AB]$).
3. Marcar o ponto D, interseção da mediatriz de $[AB]$ com o lado $[AB]$.
4. Traçar a circunferência de centro D e 2 cm de raio.
5. Marcar o ponto I, incentro do triângulo, interseção da circunferência do passo 4 com a mediatriz de $[AB]$.
6. Construir a circunferência de centro B que passa no ponto I.
7. Marcar o ponto E, interseção da circunferência do passo 6 com o lado $[AB]$.
8. Traçar a circunferência de centro I que passa no ponto E.
9. Marcar o ponto F, interseção das circunferências de centro B e I traçadas, diferente do ponto E.
10. Traçar a semirreta $\dot{B}F$.
11. Marcar o ponto C, interseção da semirreta $\dot{B}F$ com a mediatriz de $[AB]$.
12. Traçar os segmentos de reta $[AC]$ e $[BC]$.



Nota: Os passos 6 a 10 correspondem à duplicação do ângulo IBA.

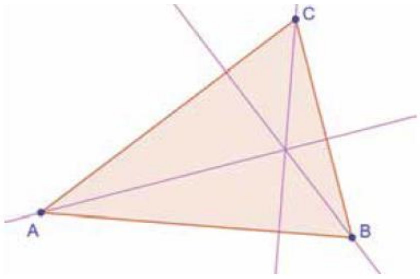
13.

1. Traçar o segmento de reta [PQ] com 8 cm de comprimento.
2. Traçar uma semirreta $\dot{P}$A de origem no ponto P e perpendicular ao segmento de reta [PQ].
3. Traçar a circunferência de centro P e raio com 2 cm de comprimento.
4. Marcar o ponto B, interseção da semirreta $\dot{P}$A com a circunferência.
5. Traçar uma perpendicular à semirreta $\dot{P}$A pelo ponto B (no *GeoGebra* podemos traçar uma reta paralela ao segmento de reta [PQ] que passe pelo ponto B – é de notar que o conjunto dos pontos que distam 2 cm da reta PQ corresponde às duas retas paralelas à reta PQ e que dela distam 2 cm).
6. Traçar a bissetriz do ângulo QPB.
7. Marcar o ponto I, incentro do triângulo [PQR], que resulta da interseção da bissetriz do ângulo QPB com a reta paralela a [PQ] que passa por B.
8. Traçar a semirreta $\dot{Q}$F de tal modo que o ângulo FQP contenha o ponto I e tenha o dobro do ângulo IQP.
9. Marcar o ponto R, interseção das semirretas $\dot{Q}$F e $\dot{P}$A.



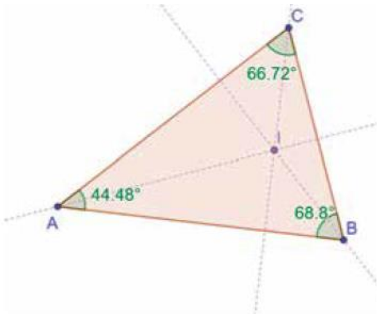
Tarefa 5 – Página 18

1., **2.**, **3.**

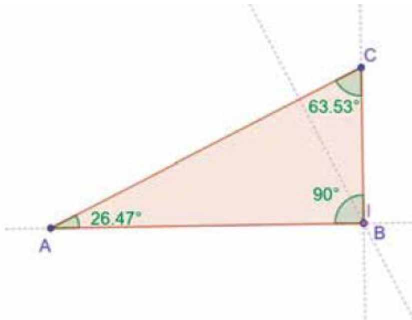


4.

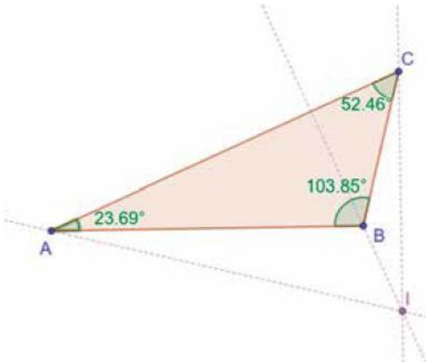
4.1. Interior ao triângulo.



4.2. Coincidente com o vértice que pertence aos dois catetos.



4.3. Exterior ao triângulo.

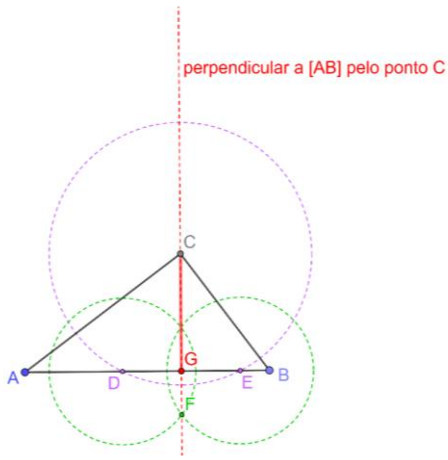


Aplicar – Página 18

14.

Sem perda de generalização da construção, vamos escolher para base o lado [AB].

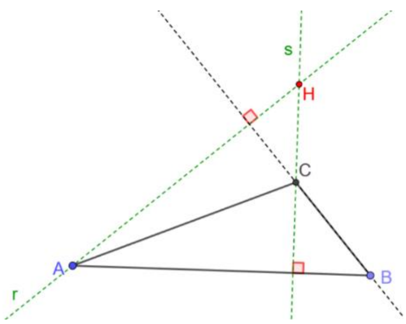
1. Construir o triângulo [ABC].
2. Traçar a reta perpendicular a [AB] que passa no vértice C.
3. Marcar o ponto G, interseção do lado [AB] com a reta construída no passo anterior.
4. Traçar o segmento de reta [CG], uma das 3 alturas do triângulo [ABC].



Aplicar – Página 19

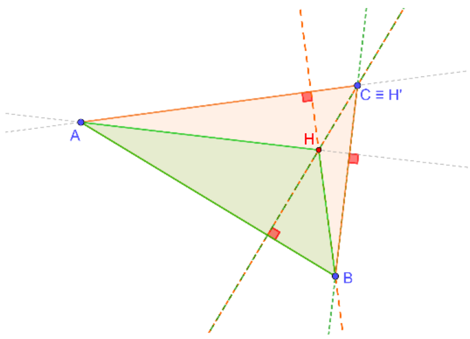
15.

1. Construir o triângulo $[ABC]$.
2. Traçar a reta r, perpendicular à reta BC, que passa por A.
3. Traçar a reta s, perpendicular à reta AB, que passa por C.
4. Marcar o ponto H (ortocentro do triângulo), interseção das retas r e s.



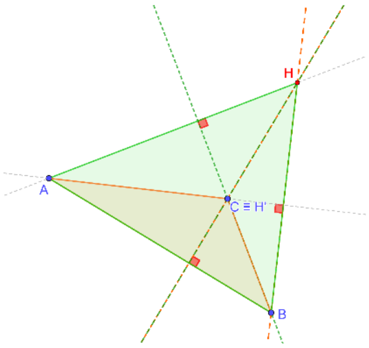
16.

16.1.



Triângulo [ABC] acutângulo

16.2.



Triângulo [ABC] obtusângulo

16.3.

Seja H o ortocentro do triângulo [ABC]. Seja qual for o triângulo [ABC], o ortocentro, H', do triângulo [ABH] coincide com o vértice C do triângulo [ABC].

Conclusão: se num conjunto de 4 pontos um deles é o ortocentro do triângulo do qual os outros 3 são vértices, então qualquer um dos 4 pontos é o ortocentro do triângulo do qual os outros 3 são vértices.

17.

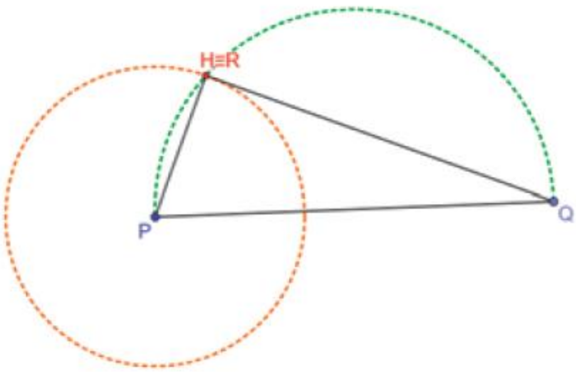
1. Traçar um segmento de reta [PQ] com 8 cm de comprimento.

2. Traçar uma semicircunferência de diâmetro [PQ] (o ângulo interno do triângulo [PQR] de vértice R é reto, logo, o ângulo PRQ é um ângulo inscrito numa semicircunferência de diâmetro [PQ] e, portanto, o vértice R está contido nessa semicircunferência).

3. Traçar a circunferência de centro P e raio com 3 cm de comprimento (num triângulo retângulo, o ortocentro coincide com o vértice oposto à hipotenusa).

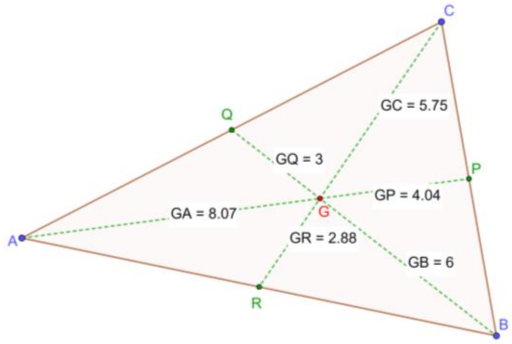
4. Marcar o ponto R, interseção da circunferência e da semicircunferência traçadas.

5. Traçar os segmentos de reta [PR] e [QR].



Tarefa 6 – Página 20

1., **2.**, **3.** e **4.**



5.

A distância do baricentro a um dos vértices é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

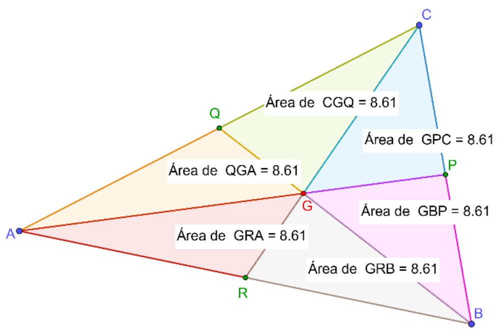
6.

6.1. A relação mantém-se para as outras medianas.

6.2. A relação mantém-se qualquer que seja o triângulo.

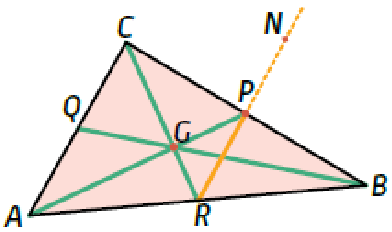
7.

Os seis triângulos têm a mesma área. A relação mantém-se qualquer que seja o triângulo inicial.



Tarefa 7 – Página 20

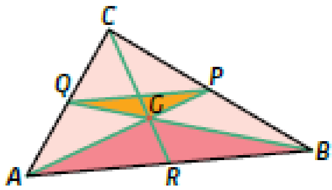
1. Os triângulos $[ABC]$ e $[RBP]$ têm em comum o ângulo ABC e os comprimentos dos lados adjacentes a este ângulo são diretamente proporcionais, uma vez que, sendo R o ponto médio de $[AB]$, $\overline{AB} = 2\overline{RB}$ e que, sendo P o ponto médio de $[BC]$, $\overline{BC} = 2\overline{BP}$. Assim, conclui-se, pelo critério LAL de semelhança de triângulos, que os triângulos são semelhantes.



2. Seja N um ponto da semirreta $\dot{R}P$ que não pertence ao triângulo $[ABC]$. O ângulo CPN é verticalmente oposto ao ângulo BPR, pelo que têm a mesma amplitude. O ângulo CPN é alterno interno com PCA (definidos pelas retas RP e AC quando intercetadas pela reta BC). Como $B\hat{P}R = B\hat{C}A$ (os triângulos são semelhantes), então $C\hat{P}N = P\hat{C}A$ e, portanto, RP e AC são paralelas.

Sendo a razão de semelhança igual a 2 (alínea **1.**), conclui-se que $\overline{AC} = 2\overline{RP}$.

3. Os ângulos PGR e AGC são verticalmente opostos, logo, têm a mesma amplitude. Os ângulos GRP e ACR são ângulos alternos internos definidos num par de retas paralelas por uma secante, logo, têm a mesma amplitude.



Assim, conclui-se, pelo critério AA de semelhança de triângulos, que os triângulos $[RPG]$ e $[ACG]$ são semelhantes.

$\overline{AC} = 2\overline{RP}$, logo, a razão de semelhança é igual a 2.

4. Como a razão da semelhança que transforma o triângulo $[RPG]$ no triângulo $[ACG]$ é 2 e $[AG]$ e $[GP]$ são lados correspondentes, conclui-se que $\overline{AG} = 2 \times \overline{GP}$.

5.

$\overline{AP} = \overline{AG} + \overline{GP} = \overline{AG} + \frac{1}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2}\overline{AG}$

$\overline{AP} = \frac{3}{2}\overline{AG} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overline{AP} = \overline{AG}$

De forma análoga à demonstração das alíneas anteriores, se pode provar que a distância do baricentro a um vértice é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto a esse vértice e, portanto, a distância do baricentro a um vértice é $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana que contém esse vértice.

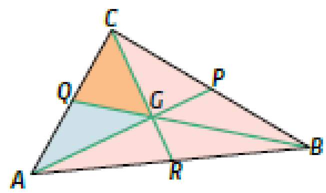
Tarefa 8 – Página 20

Vamos considerar um triângulo qualquer [ABC].
Seja M o ponto médio do segmento de reta [BC]. Considerando os segmentos de reta congruentes [BM] e [MC] para bases dos triângulos [ABM] e [MAC], respetivamente, temos que a altura referente a essas bases é igual (distância do vértice A ao segmento de reta [BC]) e, portanto, os triângulos têm a mesma área, ou seja, são equivalentes.

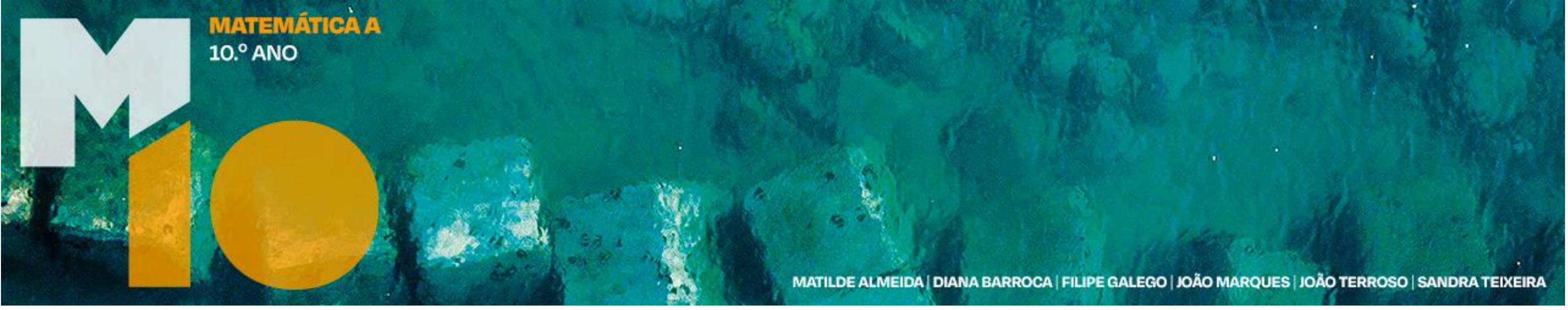
Tarefa 9 – Página 20

1.

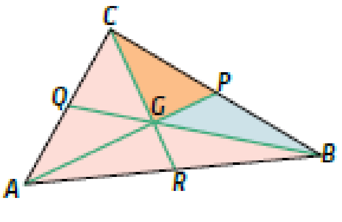
1.1. Queremos mostrar que os triângulos $[AQG]$ e $[QCG]$ são equivalentes.
Q é o ponto médio do segmento de $[AC]$, logo, considerando os segmentos de reta congruentes $[AQ]$ e $[CQ]$ para bases dos triângulos $[AQG]$ e $[QCG]$, respetivamente, temos que a altura referente a essas bases é igual (distância do vértice G ao segmento de reta $[AC]$) e, portanto, os triângulos têm a mesma área.



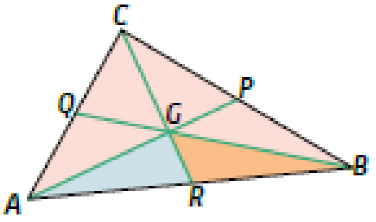
Os triângulos $[AQG]$ e $[QCG]$, que resultam da decomposição do triângulo $[AGC]$ pela mediana que contém o vértice G, têm a mesma área.



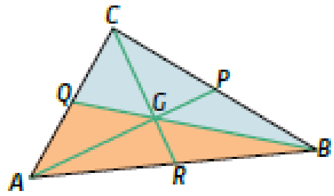
1.2. Prova análoga à da alínea 1.1.



1.3. Prova análoga à da alínea 1.1.

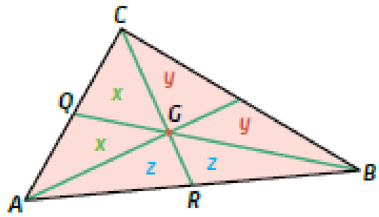


1.4. Prova análoga à da alínea 1.1.



2. Sejam:

- x a área dos triângulos [AQG] e [QCG] (alínea 1.1.);
- y a área dos triângulos [CPG] e [PBG] (alínea 1.2.);
- z a área dos triângulos [BRG] e [RAG] (alínea 1.3.).



Queremos mostrar que $y = z$.

Pela alínea 1.4., sabemos que $A_{[AQB]} = A_{[QCB]}$.

$A_{[AQB]} = A_{[QCB]} \Leftrightarrow x + 2z = x + 2y \Leftrightarrow 2z = 2y \Leftrightarrow z = y \Leftrightarrow A_{[BRG]} = A_{[PBG]}$

3. Prova análoga à da alínea 1.1.

4. Prova análoga à da alínea 2, usando os resultados já mostrados.

5. Pelos resultados mostrados nas alíneas anteriores, os seis triângulos têm a mesma área, ou seja, são equivalentes.

Aplicar – Página 21

18.

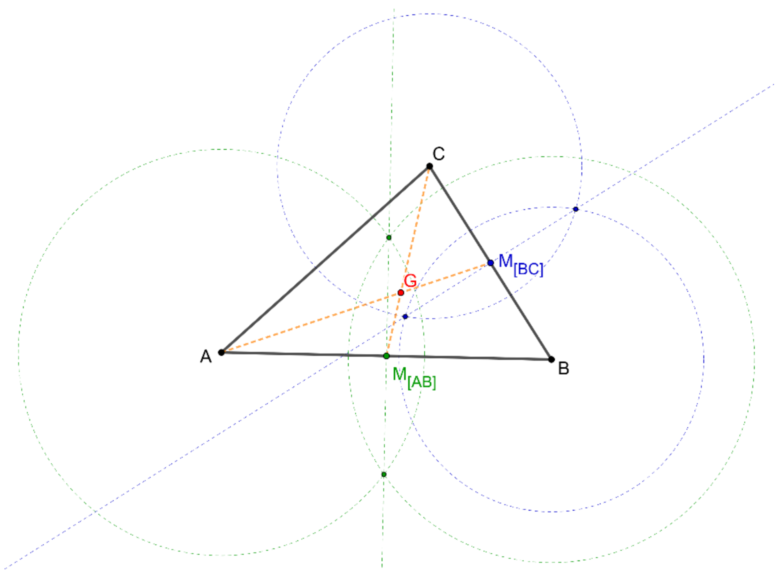
$\frac{33}{3} = 11$, logo, os lados do triângulo medem 9 cm, 11 cm e 13 cm.

1. Construir o triângulo [ABC] ($\overline{AB} = 13$ cm; $\overline{AC} = 11$ cm; $\overline{CB} = 9$ cm).

2. Traçar os pontos médios de dois lados (traçar as mediatrizes dos lados escolhidos, unindo, para cada lado, os pontos de interseção de duas circunferências congruentes de centro nos extremos do lado, e determinar os pontos médios, pontos de interseção das mediatrizes com o lado respetivo).

3. Traçar as duas medianas, unindo os pontos médios determinados ao vértices oposto ao lado a que pertencem.

4. Marcar o baricentro G, interseção das duas medianas.



Aplicar – Página 22

19. Para encontrar o ponto de suspensão do triângulo, localizamos o seu baricentro.

20. $A_{[ABC]} = 3 \times A_{[ABG]} = 3 \times 7 = 21$
R.: 21 cm^2

Aplicar – Página 23

21. Sabemos que $\overline{GC} = \frac{2}{3} \times \overline{CD}$ e $\overline{GD} = \frac{1}{3} \times \overline{CD}$, ou seja, $\overline{GC} = 2 \times \overline{GD}$.
Assim, $\overline{GC} = 2 \times 5 = 10$
R.: $\overline{CG} = 10 \text{ cm}$

Aplicar – Página 24

22.

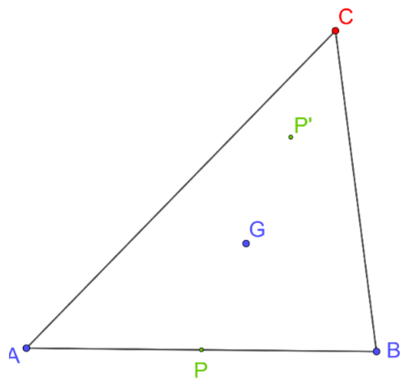
1. Traçar um segmento de reta [AB].
2. Marcar um ponto G que não pertença à reta AB.
3. Marcar o ponto médio do segmento de reta [AB] e renomeá-lo P.

(usar a ferramenta Ponto Médio ou Centro)

4. Marcar o ponto P’, meia volta de centro G do ponto P.

(usar a ferramenta Reflexão em relação a um Ponto)

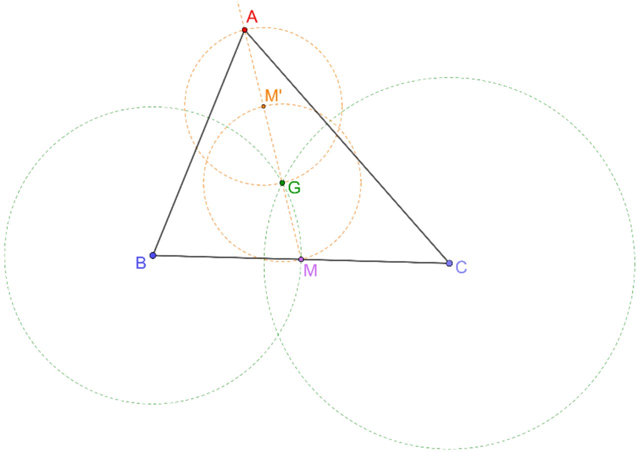
5. Marcar o ponto C, meia volta de centro P’ do ponto G.
6. Traçar os segmentos de reta [AC] e [BC].



23.

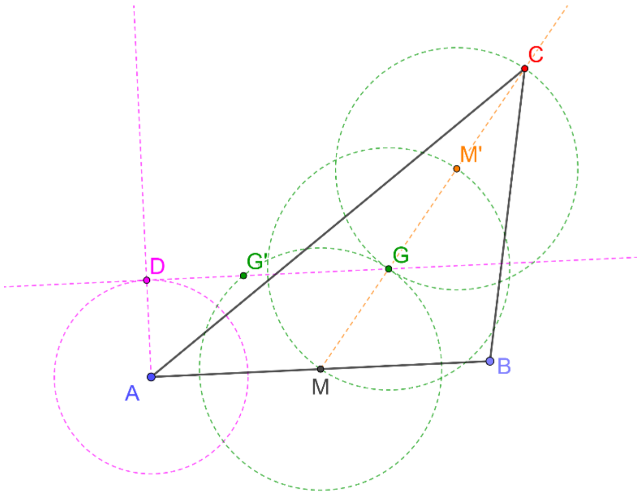
23.1.

1. Traçar o segmento de reta [BC] com 8 cm de comprimento.
2. Traçar as circunferências de centro em B e C com raios de comprimento 4 cm e 5 cm, respetivamente.
3. Marcar o ponto G (baricentro), um dos pontos de interseção das duas circunferências traçadas.
4. Marcar o ponto M, ponto médio do lado [BC], interseção do segmentos de reta [BC] com a circunferência de centro no ponto B e raio 4 cm.
5. Traçar a semirreta $\dot{M}G$.
6. Traçar a circunferência de centro G e raio [MG].
7. Marcar o ponto M’, ponto diferente de M, que resulta da interseção da semirreta $\dot{M}G$ com a circunferência traçada no passo anterior.
8. Traçar a circunfência de centro M’ e raio [MG].
9. Marcar o ponto A, ponto diferente de G, que resulta da interseção da semirreta $\dot{M}G$ com a circunferência traçada no passo anterior.
10. Traçar os segmentos de reta [AB] e [AC].



23.2.

1. Traçar o segmento de reta [AB] com 7 cm de comprimento.
2. Traçar uma reta paralela ao lado [AB] que diste deste 2 cm.
3. Marcar o ponto médio do lado [AB], M.
4. Traçar a circunferência de centro M e raio metade de 5 cm.
5. Marcar o ponto G, um dos pontos de interseção da circunferência do passo 3 com a reta do passo 1.
6. Traçar a semirreta $\dot{M}G$.
7. Traçar a circunferência de centro G e raio [GM].
8. Marcar o ponto M', ponto de interseção da circunferência do passo 7 com a semirreta $\dot{M}G$, diferente de M.
9. Construir a circunferência de centro M' e raio [GM].
10. Marcar o ponto C, ponto de interseção da circunferência do passo 9 com a semirreta $\dot{M}G$, diferente de G.
12. Construir o triângulo [ABC].



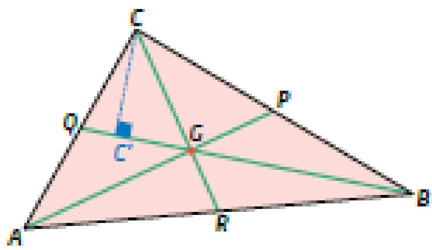
24. Consideremos no triângulo [CQG] a altura [CC'] relativa à base [QG].

Temos que $A_{[CQG]} = \frac{1}{2} \times \overline{QG} \times \overline{CC'}$.

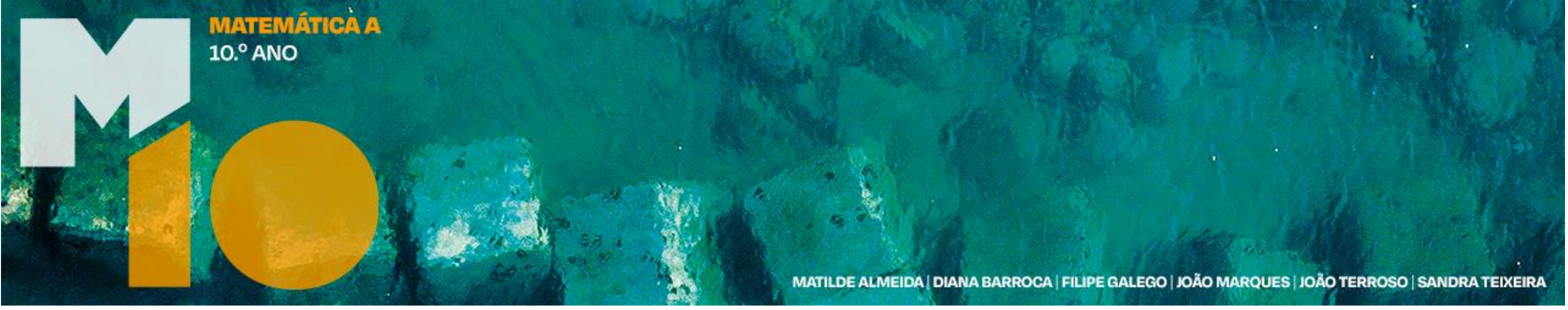
Notemos que [CC'] é, também, a altura do triângulo [CQB] relativa à base [QB] e que, sendo G o baricentro do triângulo [ABC] e [QB] uma das suas medianas, $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{QB}$ e, portanto, $\overline{QB} = 3\overline{QG}$.

Assim, $A_{[CQB]} = \frac{1}{2} \times \overline{QB} \times \overline{CC'} = \frac{1}{2} \times 3\overline{QG} \times \overline{CC'} = 3\left[\frac{1}{2} \times \overline{QG} \times \overline{CC'}\right] = 3A_{[CQG]}$

$A_{[ABC]} = 2 \times A_{[CQB]} = 2 \times 3A_{[CQG]} = 6A_{[CQG]}$



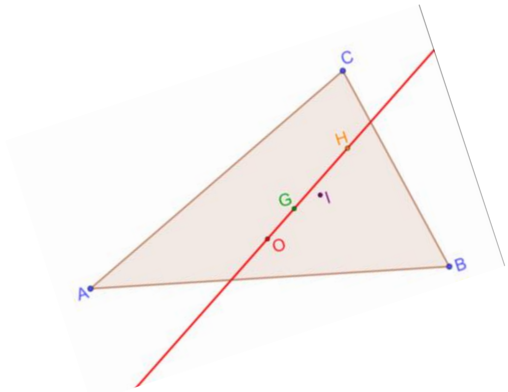
Conclui-se, assim, que $A_{[CQG]} = \frac{1}{6}A_{[ABC]}$. De forma análoga, se prova que cada um dos seis triângulos que resulta da decomposição do triângulo [ABC] pela suas medianas tem um sexto da área do triângulo [ABC] e, portanto, esses seis triângulos são equivalentes.



3.2. Reta de Euler

Tarefa 10 – Página 25

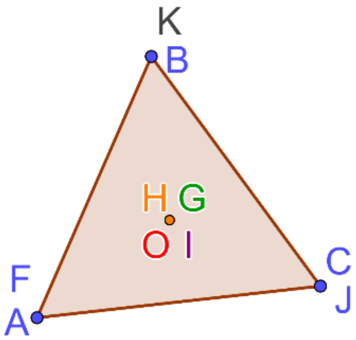
1., 2., 3., 4.



3. 3 dos 4 pontos notáveis clássicos do triângulo são colineares: ortocentro, baricentro e circuncentro.

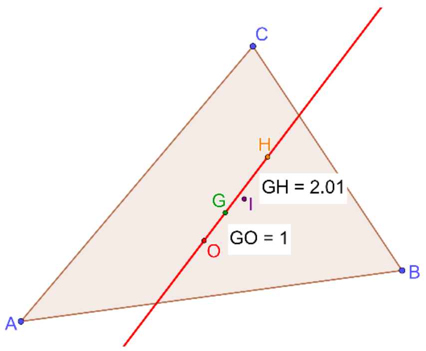
5. Não é possível traçar a reta de Euler em triângulos equiláteros, visto que os pontos notáveis coincidem.

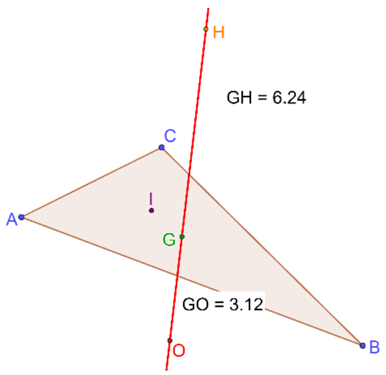
Nota: Para garantir que o triângulo [ABC] é um triângulo equilátero, podemos, para aproveitar a construção que já temos, contruir um triângulo equilátero com a ferramenta polígono regular e fazer coincidir os vértices A, B e C do triângulo inicial com os vértices do novo triângulo (para tal basta, no campo definição de cada ponto A, B e C, escrever o nome do ponto que queremos fazer coincidir).



6.

A distância entre o baricentro e o ortocentro é o dobro da distância entre o baricentro e o circuncentro.

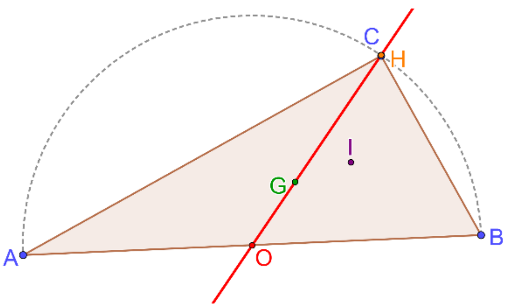




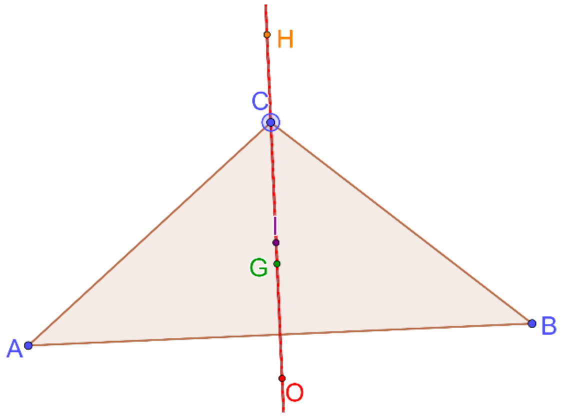
7.

7.1. Num triângulo retângulo, os 4 pontos notáveis não são necessariamente colineares.

Nota: Para garantir que o triângulo é retângulo, podemos traçar a circunferência com diâmetro coincidente com um dos lados do triângulo e fazer o vértice oposto a esse lado pertencer a essa circunferência.

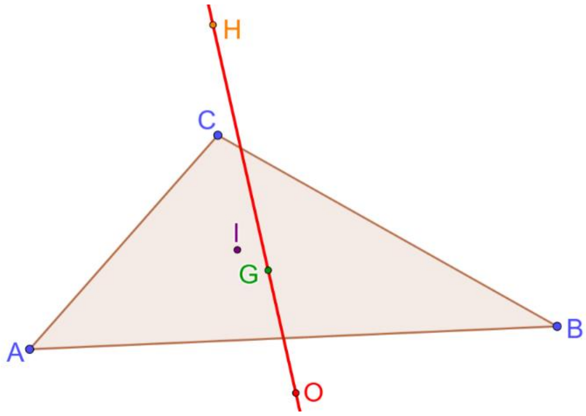


7.2. Num triângulo isósceles, os 4 pontos notáveis são colineares.



Nota: Para garantir que o triângulo é isósceles, podemos traçar a mediatriz de um lado e fazer o vértice oposto pertencer a essa mediatriz.

7.3. Num triângulo escaleno, os 4 pontos notáveis não são colineares.



Tarefa 11 – página 25

1.

$\overline{AG} = 2\overline{GM}$ visto que G é o baricentro do triângulo [ABC].

$\overline{GP} = 2\overline{GO}$ por construção do ponto P.

Os ângulos PGA e OGM têm a mesma amplitude, pois são verticalmente opostos.

Assim, pelo critério LAL de semelhança de triângulos, conclui-se que os triângulos são semelhantes. E, como $\overline{AG}:\overline{GM} = 2$, conclui-se que o triângulo [AGP] é uma ampliação de razão 2 do triângulo [MGO].

2.

Como os triângulos [AGP] e [MGO] são semelhantes, os ângulos correspondentes PAG e OMG são iguais e, como são ângulos alternos internos formados pela reta AM que interseta as retas AP e OM, conclui-se que as retas AP e OM são paralelas.

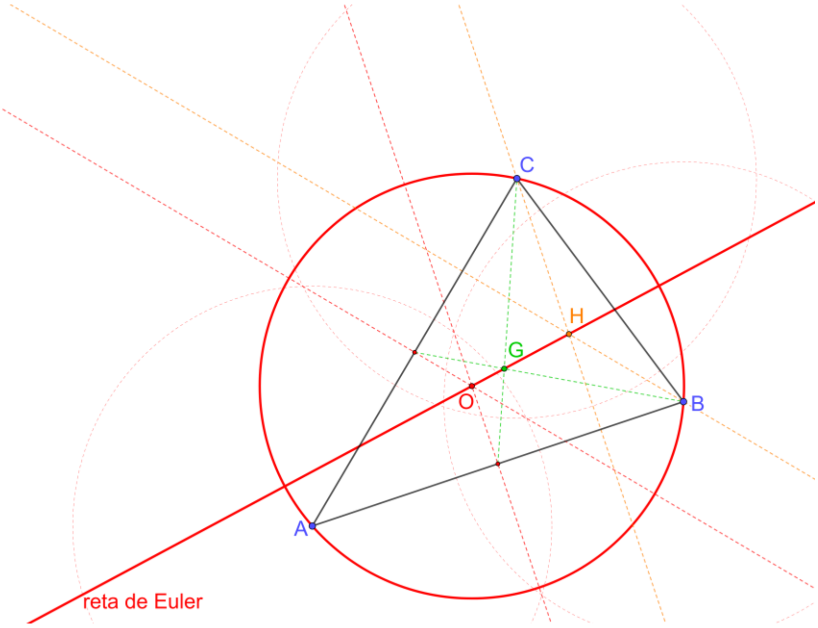
3.

A reta OM é perpendicular a [BC], pois é a sua mediatriz, e, como OM é paralela a AP, então AP é perpendicular a [BC] e, portanto, contém a altura do triângulo [ABC] relativa ao vértice A.

4. Provámos que AP contém uma altura do triângulo e, de forma análoga, se prova que BP e CP contêm as restantes alturas do triângulo. Assim, como P pertence às três alturas do triângulo, conclui-se que P é o ortocentro do triângulo.

Aplicar – Página 26

25.



26. $\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{HG} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

R.: 5 cm

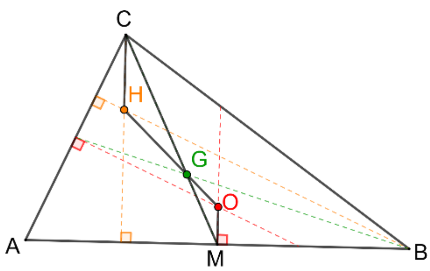
28. Vamos considerar um triângulo [ABC], o seu ortocentro H, o seu baricentro G, o seu circuncentro O e o ponto médio M do segmento de reta [AB].

Os ângulos CGH e MGO são verticalmente opostos, logo, têm a mesma amplitude.

$\overline{HG} = 2\overline{GO}$ (distâncias na reta de Euler) e $\overline{GC} = 2\overline{GM}$ (relação entre os comprimentos dos segmentos de reta obtidos com a decomposição de uma mediana pelo baricentro).

Pelo critério LAL de semelhança de triângulos, conclui-se que os triângulos [GMO] e [GCH] são semelhantes.

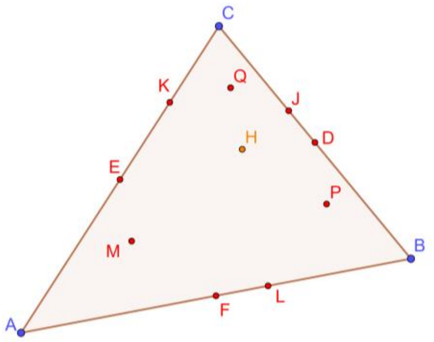
Como $\overline{HG} = 2\overline{GO}$, os lados do triângulo [GCH] têm o dobro do comprimento dos lados correspondentes do triângulo [GMO] e, portanto, $\overline{CH} = 2\overline{OM}$.



3.3. Circunferência dos nove pontos

Tarefa 12 – Página 27

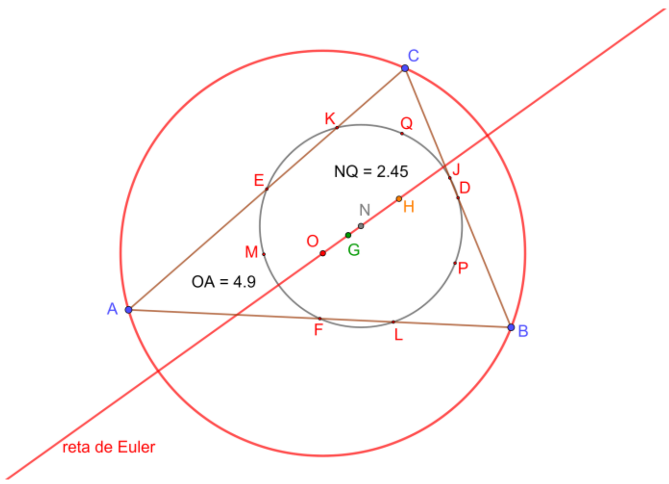
1.



2. Os 9 pontos pertencem à mesma circunferência.

Tarefa 13 – página 27

1., 2., 3., 4.



2.

Nota: Para marcar o centro da circunferência dos noves pontos, consideramos a interseção das mediatrizes de duas cordas.

O centro N da circunferência dos nove pontos pertence à reta de Euler e é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o ortocentro (H) e o circuncentro (O).

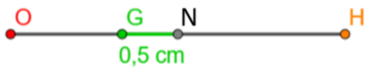
4. A razão é 2 (o raio da circunferência circunscrita tem o dobro do comprimento do raio da circunferência dos nove pontos). Esta razão mantém-se para diferentes triângulos.

5.

5.1. Triângulos acutângulos. **5.2.** Triângulos retângulos. **5.3.** Triângulos obtusângulos.

Aplicar – Página 28

29. Sejam O, H, G e N, respetivamente, o circuncentro, o ortocentro, o baricentro e o centro da circunferência de 9 ponto de um triângulo.



$\overline{OH} = ?$

$\overline{ON} - \overline{OG} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overline{OH} - \frac{1}{3}\overline{OH} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{3}{6}\overline{OH} - \frac{2}{6}\overline{OH} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\overline{OH} = 0{,}5 \Leftrightarrow \overline{OH} = 3$

R.: 3 cm

29. Queremos mostrar que $\overline{NG} = \frac{1}{6}\overline{OH}$

$$\overline{NG} = \overline{ON} - \overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{OH} - \frac{1}{3}\overline{OH} = \frac{3}{6}\overline{OH} - \frac{2}{6}\overline{OH} = \frac{1}{6}\overline{OH}$$

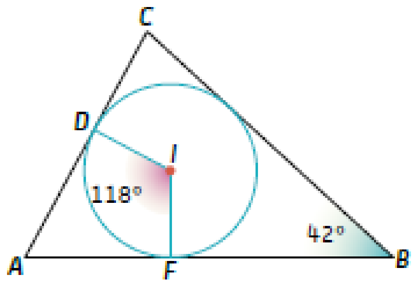
Aplicar +

Itens de seleção – Página 30

1. (A) **2.** (B)

3. (B)

Os triângulos [AFI] e [AID] são triângulos retângulos e, sendo I um ponto da bissetriz do ângulo FAD diferente de A, sabemos que os ângulos FAI e IAD têm a mesma amplitude e, portanto, os ângulos AIF e DIA também têm a mesma amplitude.



Assim,

$A\hat{I}F = \frac{118°}{2} = 59°$

$F\hat{A}I = 180° - \left(A\hat{I}F + I\hat{F}A\right) = 180° - (59° + 90°) = 31°$

$F\hat{A}D = 2F\hat{A}I = 2 \times 31° = 62°$

$B\hat{A}D = F\hat{A}D = 62°$

$D\hat{C}B = A\hat{C}B = 180° - \left(B\hat{A}C + C\hat{B}A\right) = 180° - (62° + 42°) = 180° - 104° = 76°$

4.

4.1. (A)

$B\hat{E}C = 180° - \left(C\hat{B}E + E\hat{C}B\right) = 180° - (54° + 36°) = 180° - 90° = 90°$, logo, [CE] é perpendicular à reta que contém o lado [AD] e, portanto, [CE] é uma altura do triângulo [ADC].

4.2. (A)

Num triângulo obtusângulo, o ortocentro e o circuncentro localizam-se no exterior do triângulo. Seja qual for o triângulo, o baricentro e o incentro localizam-se no seu interior.

4.3. (C)

4.4. (A)

5. (B)

Seja G o baricentro do triângulo [ABC] e M o ponto médio do lado [BC].

Queremos determinar o comprimento de [AM].

$\overline{AM} = \overline{AG} + \overline{GM} = \overline{AG} + \frac{\overline{AG}}{2} = 12\ cm + \frac{12}{2}\ cm = 18\ cm$

6. (B)

$\overline{GH} = 2\overline{OG}$

$\overline{OH} = \overline{GH} + \overline{OG} = \overline{GH} + \frac{\overline{GH}}{2} = 3 + 1{,}5 = 4{,}5$ cm

7. (A)

- Seja [ABC] um triângulo isósceles não equilátero tal que $\overline{AC} = \overline{BC}$ e M o ponto médio do lado [AB].
  Como o triângulo é isósceles, a reta CM é a mediatriz do lado [AB] e, portanto, contém o circuncentro do triângulo.
  Como o triângulo [ABC] não é equilátero, o baricentro não coincide com o circuncentro e, portanto, a reta CM é a reta de Euler.
  Assim, conclui-se que, num triângulo isósceles, a reta de Euler contém uma mediana do triângulo (a mediana que contém o vértice comum aos lados que têm o mesmo comprimento).

- Seja [ABC] um triângulo retângulo em C e M o ponto médio do lado [AB].
  O ortocentro coincide com o ponto C e pertence à reta de Euler.
  O baricentro pertence a qualquer uma das medianas, logo, em particular, pertence ao segmento [CM] e à reta de Euler.
  Como o triângulo [ABC] não é equilátero, o baricentro não coincide com o ortocentro e, portanto, a reta CM é a reta de Euler.
  Assim, conclui-se que, num triângulo retângulo, a reta de Euler contém uma mediana do triângulo (a mediana que contém o vértice oposto à hipotenusa).

8. (B)

- A afirmação A é verdadeira, pois $\overline{GH} = 2\overline{OG}$.
- $\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{OH}$ e $\overline{OX} = \frac{1}{2}\overline{OH}$, logo, $\overline{GX} = \overline{OX} - \overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{OH} - \frac{1}{3}\overline{OH} = \frac{1}{6}\overline{OH}$.
  Como $\frac{1}{6}\overline{OH} < \frac{1}{3}\overline{OH}$, conclui-se que $\overline{GX} < \overline{OG}$ e, portanto, a afirmação B é falsa.
- A afirmação C é verdadeira, pois o raio da circunferência circunscrita tem o dobro do comprimento do raio da circunferência dos 9 pontos.
- A afirmação D é verdadeira, pois o centro da circunferência dos 9 pontos é o ponto médio do segmento de reta [OH] e, portanto, pertence à sua mediatriz.

9. (C)

Sejam O, G, N e H, respetivamente, o circuncentro, o baricentro, o centro da circunferência dos 9 pontos e o ortocentro do triângulo.

$\overline{HN} = \frac{1}{2}\overline{HO} = \frac{1}{2}(\overline{HG} + \overline{GO}) = \frac{1}{2}(2\overline{GO} + \overline{GO}) = \frac{3}{2}\overline{GO} = \frac{3}{2} \times 8\ cm = 12$ cm

10. (A)

Comprimento de uma circunferência de raio r : $2\pi r$

$$2\pi r = 20\pi \Leftrightarrow r = \frac{20\pi}{2\pi} \Leftrightarrow r = 10.$$

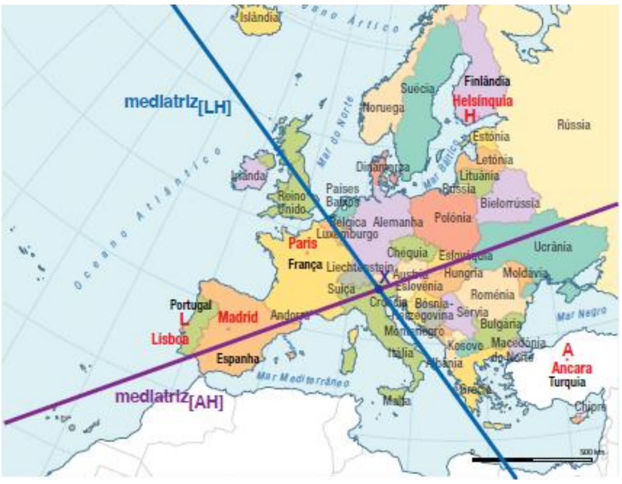
Logo, o raio da circunferência circunscrita tem 10 cm de comprimento.

Como o raio da circunferência circunscrita tem o dobro do comprimento do raio da circunferência dos 9 pontos, conclui-se que este último é 5 cm.

Itens de construção – Página 32

11.

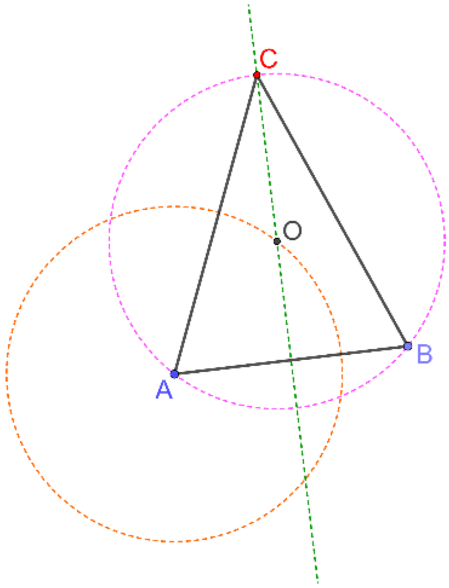
11.1. Sejam L, A e H os pontos que correspondem, no mapa, à localização de Lisboa, Ancara e Helsínquia, respetivamente. Marcar o ponto X, interseção das mediatrizes de dois dos segmentos de reta que unem os pontos L, A e H, por exemplo, $[LH]$ e $[AH]$.



11.2. Sejam L, M, P e B os pontos que correspondem, no mapa, à localização de Lisboa, Madrid, Paris e Berlim, respetivamente. Traçar a mediatriz do segmento de reta $[BL]$ e a circunferência de centro P e raio $[LM]$. Sombrear os pontos do interior da circunferência que pertencem ao semiplano limitado pela mediatriz traçada e que contém o ponto B.

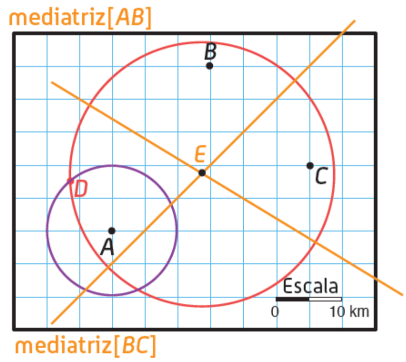
12.

1. Traçar o segmento de reta $[AB]$ com 7 cm de comprimento.
2. Traçar a circunferência de centro A e raio 5 cm.
3. Construir a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
4. Marcar o ponto O, circuncentro do triângulo $[ABC]$, que resulta da interseção da mediatriz com a circunferência traçada no passo 2.
5. Construir a circunferência de centro O e que contém os pontos A (e B).
6. Marcar o ponto C, interseção da circunferência do passo 5 com a mediatriz de $[AB]$ (o triângulo é isósceles, com $\overline{AC} = \overline{BC}$, logo, o ponto C pertence à mediatriz do lado oposto).
7. Traçar os segmentos de reta $[AC]$ e $[BC]$.



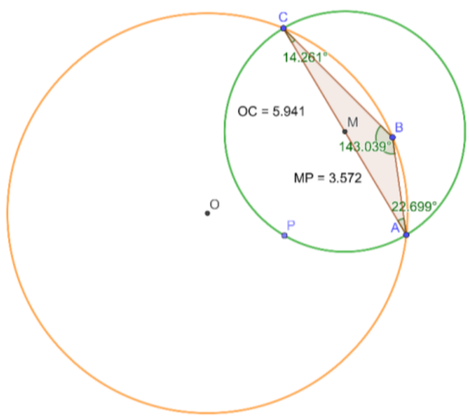
13.

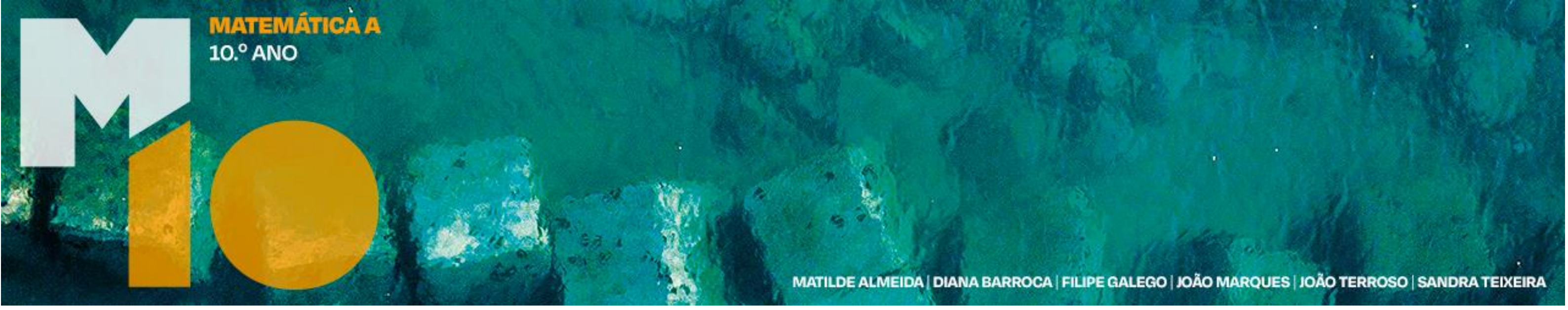
1. Traçar mediatrizes de dois dos segmentos de reta de extremos A, B ou C, e marcar o ponto E, epicentro do terramoto, que está à mesma distância dos três pontos.
2. Traçar a circunferência de centro A e raio correspondente ao segmento de reta do mapa que se sabe corresponder a 10 km na realidade (ver escala).
3. Traçar a circunferência de centro E e raio correspondente ao dobro do segmento de reta do mapa que se sabe corresponder a 10 km na realidade (ver escala).
4. Marcar o ponto D, interseção das duas circunferências e que está mais perto de B do que de C.



14.

A afirmação é falsa. Basta considerar um triângulo obtusângulo e a circunferência que tem o lado maior do triângulo como diâmetro.





15.

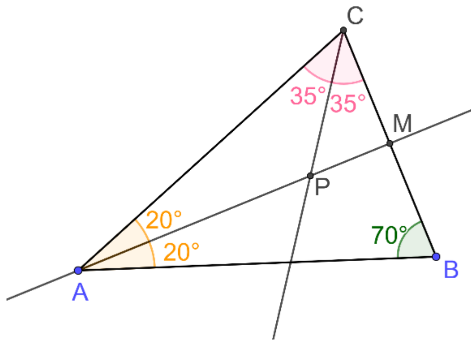
$A\hat{C}B = 180° - (40° + 70°) = 70°$, logo, o triângulo $[ABC]$ é isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, e, portanto, a mediatriz do lado $[BC]$ é também bissetriz do ângulo BAC.

Assim, $P\hat{A}C = \frac{40°}{2} = 20°$.

Sejam P o ponto de interseção da mediatriz do lado $[BC]$ com a bissetriz do ângulo BAC e M o ponto médio do lado $[BC]$.

Como $\dot{C}P$ é bissetriz do ângulo ACB, $A\hat{C}P = \frac{A\hat{C}B}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$.

$C\hat{P}A = 180° - (35° + 20°) = 125°$



Como os ângulos MPC e CPA são suplementares, $M\hat{P}C = 180° - 125° = 55°$.

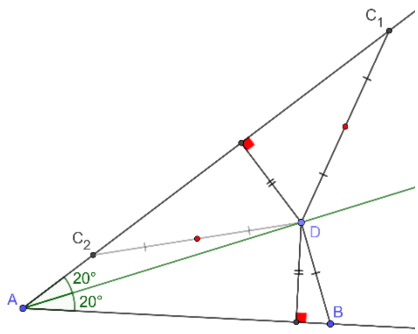
R.: $125°$ e $55°$

16.

16.1. O ponto D está à mesma distância das semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$, logo, pertence à bissetriz do ângulo BAC e, portanto,

$$D\hat{A}C = \frac{B\hat{A}C}{2} = \frac{40°}{2} = 20°.$$

16.2. Se a reta AD fosse a mediatriz do segmento de reta $[BC]$, o ponto D seria equidistante dos pontos B e C o que contradiz as condições dadas, quando refere que a distância de D a B é o dobro da distância de D a C. Logo, AD não é a mediatriz do segmento de reta $[BD]$.



17. Queremos mostrar que $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

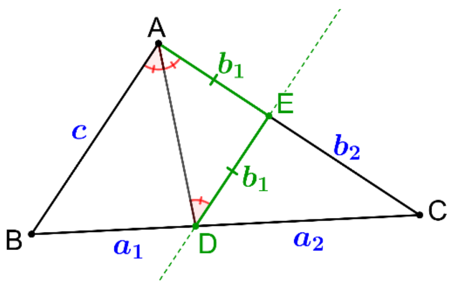
Vamos traçar, sem perda de generalidade, a reta r paralela a $[AB]$ que passa pelo ponto D.

Sejam E o ponto de interseção da reta r, paralela a BA, com o lado $[AC]$ e a_1, a_2, b_1, b_2 e c tais que:

$a_1 = \overline{BD}$, $a_2 = \overline{DC}$, $b_1 = \overline{AE}$, $b_2 = \overline{EC}$, $c = \overline{AB}$.

Os ângulos EDA e BAD são congruentes, pois são ângulos alternos internos definidos por uma secante (reta AD), num par de retas paralelas (AB e ED). Como EAD e DAB são iguais, conclui-se que os ângulos EDA e DAE são congruentes e, portanto, o triângulo $[ADE]$ é isósceles, com $\overline{EA} = \overline{ED}$.

Assim, $\overline{ED} = b_1$.



Seja P um ponto da semirreta $\dot{D}E$ que não pertence ao segmento de reta $[DE]$. Os ângulos PEA e CAB são congruentes, pois são ângulos alternos internos definidos por uma secante (reta AC) num par de retas paralelas (AB e ED). Os ângulos PEA e DEC são congruentes, pois são verticalmente opostos. Assim, conclui-se que os ângulos BAC e DEC são congruentes.

Os triângulos $[ABC]$ e $[EDC]$ têm em comum o ângulo de vértice C e os ângulos BAC e DEC congruentes, logo, pelo critério AA de semelhança de triângulos, conclui-se que os triângulos $[ABC]$ e $[EDC]$ são semelhantes.

Então:

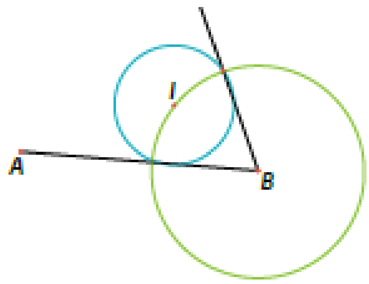
$$\frac{b_1+b_2}{b_2}=\frac{a_1+a_2}{a_2} \quad \text{e} \quad \frac{c}{b_1+b_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{b_1+b_2}{b_2}=\frac{a_1+a_2}{a_2} \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2}+1=\frac{a_1}{a_2}+1 \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1}{a_2}$$

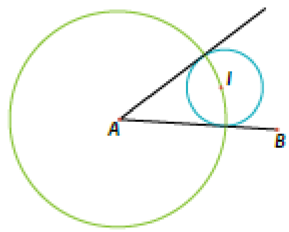
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{c}{b_1+b_2} \quad \text{e, portanto,} \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

18.

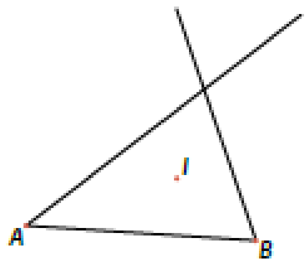
1. Traçar a circunferência de centro B e que passa no ponto I.
2. Traçar a circunferência de centro no ponto I e que passa na interseção do segmento de reta [AB] com a circunferência traçada no passo 1.
3. Traçar a semirreta que tem origem em B e passa pelo ponto de interseção das duas circunferências e não pertence ao segmento de reta [AB].



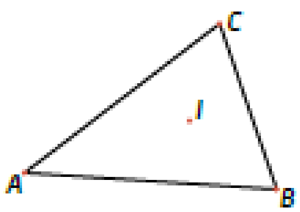
4. Repetir os passos 1, 2 e 3 para o ponto A, tendo como objetivo construir a semirreta $\dot{A}C$.

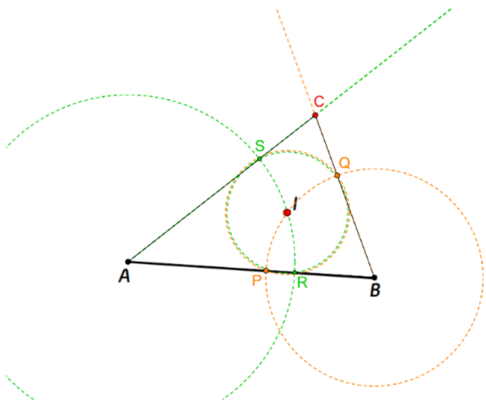


5. Marcar o ponto C, ponto interseção das semirretas $\dot{B}C$ e $\dot{A}C$.



6. Construir o triângulo [ABC].





19.

19.1.

a) Como D é um ponto do lado [AB], tal que a reta DQ é paralela à reta AC, então [ADQP] é um paralelogramo e $\overline{DQ} = \overline{AP}$.

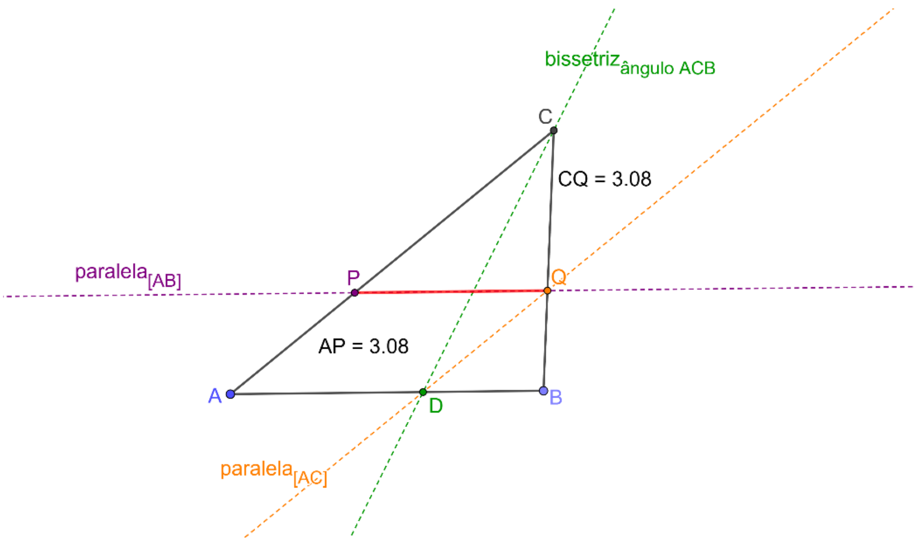
b) Como $\overline{DQ} = \overline{AP}$ e $\overline{AP} = \overline{CQ}$, então $\overline{DQ} = \overline{CQ}$ e o triângulo [CQD] é isósceles. Como, num triângulo, a lados iguais se opõem ângulos iguais, $Q\hat{D}C = D\hat{C}Q$.

c) Os ângulos QDC e ACD são alternos internos definidos pelas retas paralelas CA e QD. Logo, $Q\widehat{D}C = A\hat{C}D$. Então, $D\hat{C}Q = A\hat{C}D$

d) Pela alínea anterior, conclui-se que $\dot{C}D$ é a bissetriz do ângulo ACB.

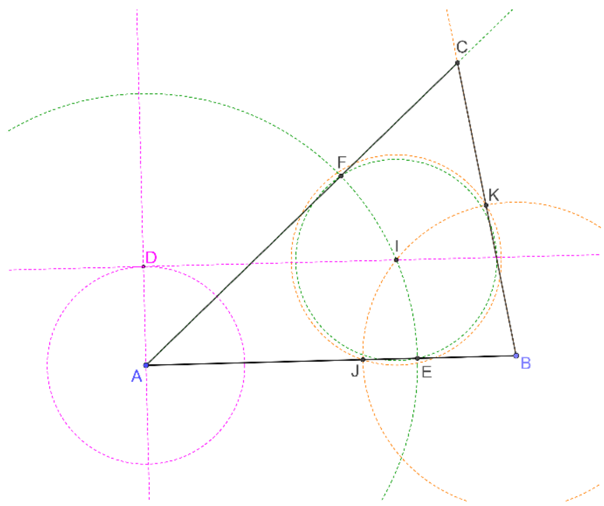
19.2.

1. Construir a bissetriz do interno do triângulo de vértice C.
2. Marcar o ponto D, interseção do lado [AB] com a bissetriz traçada.
3. Pelo ponto D, construir uma reta paralela ao lado [AC].
4. Marcar o ponto Q, interseção da reta paralela ao lado [AC] com o lado [BC].
5. Pelo ponto Q, construir uma reta paralela ao lado [AB].
6. Marcar o ponto P, interseção da reta paralela ao lado [AB] com o lado [AC].
7. Traçar o segmento de reta [PQ].



20.

1. Traçar o segmento de reta [AB] com 15 cm de comprimento.
2. Construir a reta paralela à reta AB que dista dela 4 cm.
3. Traçar a circunferência de centro A com 11 cm de raio.
4. Marcar o ponto I, incentro do triângulo [ABC], que resulta da interseção da reta com a circunferência do passo 3.
5. Construir as semirretas $\dot{A}C$ e $\dot{B}C$ de forma que os ângulos BAC e CBA tenham o dobro das amplitudes dos ângulos BAI e IBA, respetivamente, e contenham o ponto I.
6. Marcar o ponto C, interseção das semirretas $\dot{A}C$ e $\dot{B}C$.



21.

21.1. Como I é o incentro do triângulo $[ABC]$, está à mesma distância dos três lados do triângulo. Assim, a distância do ponto I ao lado $[BC]$ é igual à distância do ponto I ao lado [BC], ou seja, 3 cm.

R.: 3 cm

21.2. Como I é o incentro do triângulo $[ABC]$, pertence às bissetrizes dos ângulos internos e, portanto, $B\hat{A}C = 2\,I\hat{A}C = 2 \times 41° = 82°$ e $C\hat{B}A = 2\,C\hat{B}I = 2 \times 19° = 38°$.

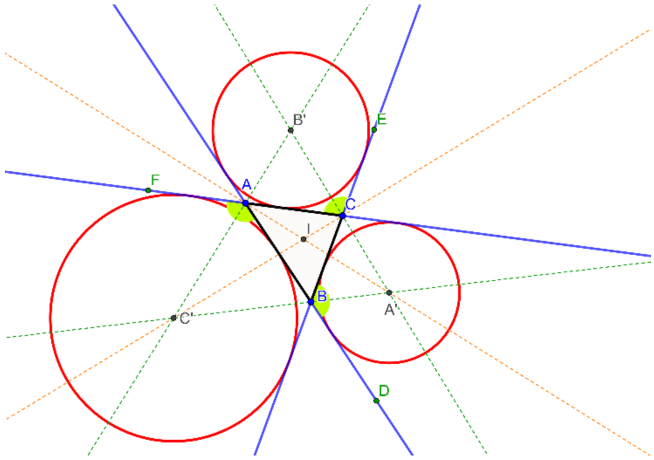
$A\hat{C}B = 180° - \left(B\hat{A}C + C\hat{B}A\right) = 180° - (82° + 38°) = 180° - 120° = 60°$

R.: $A\hat{C}B = 60°$

22.

As circunferências de centro nos ex-incentros do triângulo [ABC] são tangentes às duas retas suporte dos lados opostos ao lado a que elas são tangentes.

O incentro do triângulo [ABC] é o incentro do triângulo [A'B'C'].



23. $A_{sombreada} = A_{[ABC]} + A_{círculo}$

Vamos calcular o valor de x. Para isso, aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo [ABC].

$(x+2)^2 + 12^2 = (x+10)^2 \Leftrightarrow$

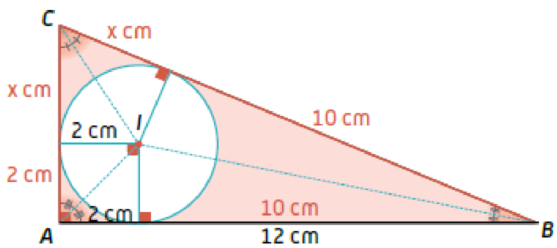
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 144 = x^2 + 20x + 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 4x - 20x = 100 - 4 - 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -16x = -48 \Leftrightarrow x = \dfrac{-48}{-16} \Leftrightarrow x = 3$

$A_{sombreada} = \dfrac{12 \times (2+3)}{2} - \pi \times 2^2 = 30 - 4\pi$

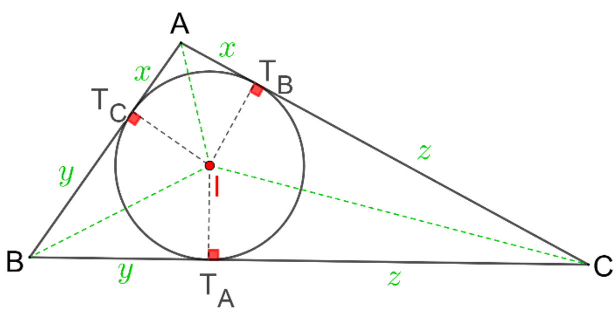
$A_{sombreada} \approx 17{,}4\ \text{cm}^2$



24. Seja I o incentro do triângulo $[ABC]$.

Sejam a, b e c os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B e C, respetivamente.

Os ângulos internos de vértice T_B e T_C são retos. Os ângulos internos de vértice A são iguais visto que $\dot{A}I$ é bissetriz do ângulo BAC. Como a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conclui-se que os ângulos internos de vértice I também têm a mesma amplitude.



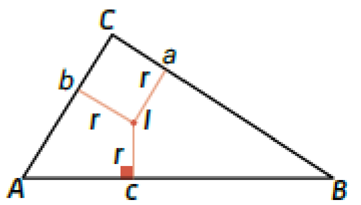
Como o lado $[AI]$ é comum aos dois triângulos, $T_C\hat{A}I = I\hat{A}T_B$ e $A\hat{I}T_C = T_B\hat{I}A$, conclui-se, pelo critério ALA de congruência de triângulos, que os triângulos são congruentes.
$\overline{AT_B} = \overline{AT_C}$, pois $[AT_B]$ e $[AT_C]$ são lados correspondentes de triângulos congruentes. Analogamente, se prova que que $\overline{BT_A} = \overline{BT_C}$ e $\overline{CT_A} = \overline{CT_B}$.
Sejam x, y e z tais que $x = \overline{AT_B} = \overline{AT_C}$, $y = \overline{BT_A} = \overline{BT_C}$ e $z = \overline{CT_A} = \overline{CT_B}$.

- $p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{b+c-a}{2} = \frac{(x+z)+(x+y)-(y+z)}{2} = \frac{x+z+x+y-y-z}{2} = \frac{2x}{2} = x = \overline{AT_B} = \overline{AT_C}$
- $p - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a+c-b}{2} = \frac{(y+z)+(x+y)-(x+z)}{2} = \frac{y+z+x+y-x-z}{2} = \frac{2y}{2} = y = \overline{BT_A} = \overline{BT_C}$
- $p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a+b-c}{2} = \frac{(y+z)+(x+z)-(x+y)}{2} = \frac{y+z+x+z-x-y}{2} = \frac{2z}{2} = z = \overline{CT_A} = \overline{CT_B}$

25.

25.1. Consideremos um triângulo $[ABC]$ de incentro I e perímetro p tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

$$A_{[ABC]} = A_{[ABI]} + A_{[BCI]} + A_{[ACI]} = \frac{\overline{AB} \times r}{2} + \frac{\overline{BC} \times r}{2} + \frac{\overline{AC} \times r}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2} \times r = \frac{p}{2} \times r$$



25.2. $A_{[ABC]} = \frac{13+5+12}{2} \times 2 = \frac{13+5+12}{2} \times 2 = 30$

R.: 30 cm^2

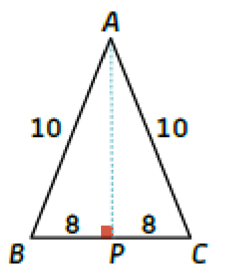
25.3. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A, logo, pelo Teorema de Pitágoras,

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Perímetro$_{[ABC]} = 3 + 4 + 5 = 12$

R.: 12 cm

25.4. O triângulo $[ABC]$ é isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, logo, decompondo o triângulo pela altura $[AP]$, P é o pé da perpendicular, obtemos dois triângulos retângulos congruentes $[ABP]$ e $[ACP]$ cuja hipotenusa mede 10 cm e um dos catetos mede 8 cm.
Assim, pelo teorema de Pitágoras,



$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AP}}{2} = \frac{16 \times 6}{2} = 48$$

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AP} + \overline{AC} + \overline{AB}}{2} \times r \Leftrightarrow 48 = \frac{10 + 10 + 16}{2} \times r \Leftrightarrow 48 = \frac{36}{2} \times r \Leftrightarrow 48 = 18 \times r \Leftrightarrow \frac{48}{18} = r \Leftrightarrow \frac{8}{3} = r$$

$$\text{Perímetro}_{circ.inscrita} = 2\pi r = 2\pi \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi$$

R.: $\frac{16}{3}\pi$ cm

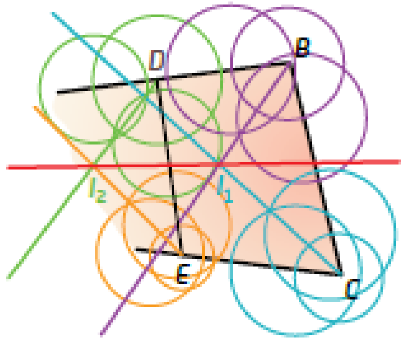
26.

1. Marcar o incentro I_1 do triângulo $[ABC]$, traçando as bissetrizes dos ângulos internos de vértices B e C.

2. Traçar um segmento de reta $[DE]$, tal que D e E pertençam, respetivamente, aos lados $[AB]$ e $[AC]$.

3. Marcar o incentro I_2 do triângulo $[ADE]$, traçando as bissetrizes dos ângulos internos de vértices D e E.

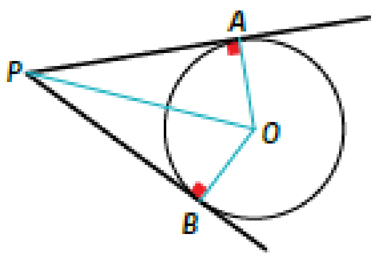
4. Traçar a reta I_1I_2.



A bissetriz está contida na reta I_1I_2, pois os incentros dos triângulos que têm vértice A e dois dos lados contidos nas semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ têm de estar contidos na bissetriz do ângulo CAB.

27.

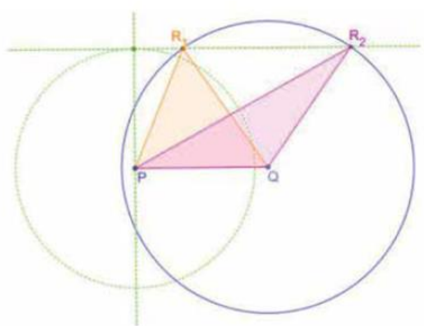
Começar por fazer um esboço do produto final.
Sejam A e B os pontos de tangência. Os ângulos PAO e OBP são retos e, portanto, A e B pertencem à circunferência de diâmetro [PO].
Assim, para determinar os pontos A e B, basta traçar a circunferência de diâmetro [PO] e determinar os pontos A e B de interseção das duas circunferências.
As retas pedidas são as retas PA e PB.



28.

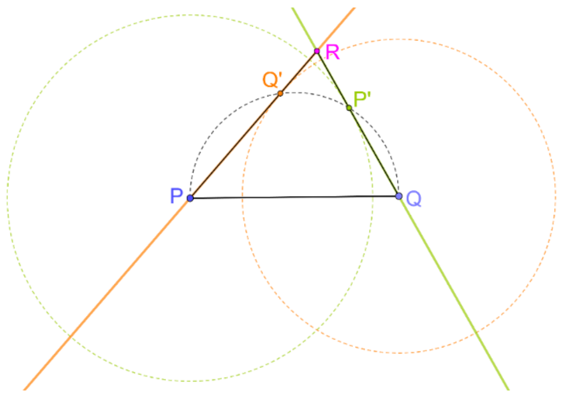
28.1.

1. Traçar o segmento de reta $[PQ]$ com 5 cm de comprimento.
2. Construir a circunferência de centro no ponto Q com 5,5 cm de raio.
3. Construir uma reta s paralela ao segmento $[PQ]$ que dele diste 4,5 cm (traçar a reta r perpendicular a PQ pelo ponto P, construir a circunferência de centro P com 4,5 cm de raio, traçar a reta s perpendicular à reta r por um dos pontos de interseção da reta r com a circunferência).
4. Marcar o ponto R, interseção da reta s com a circunferência de centro Q traçada no passo 2 (temos duas possibilidades, ver figura).
5. Construir o triângulo $[PQR]$.



28.2.

1. Traçar o segmento de reta $[PQ]$ com 8 cm de comprimento.
2. Construir uma das semicircunferências de diâmetro $[PQ]$.
3. Marcar o ponto P', pé da altura que contém o ponto P, fazendo a interseção da semicircunferência com a circunferência de centro P com raio de 7 cm.
4. Marcar o ponto Q', pé da altura que contém o ponto Q, fazendo a interseção da semicircunferência com a circunferência de centro Q com raio de 6 cm.
5. Traçar as retas PQ' e QP'.
6. Marcar o ponto R de interseção das retas PQ' e QP'.
7. Traçar o triângulo $[PQR]$.



28.3. Notar que o ortocentro de um triângulo retângulo é o vértice do triângulo que é vértice do ângulo interno que é reto.

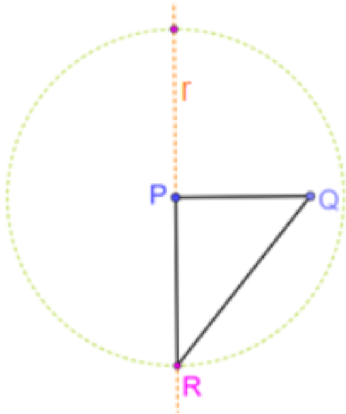
1. Traçar o segmento de reta $[PQ]$ com 4 cm de comprimento.

2. Construir a reta r perpendicular ao segmento de reta $[PQ]$ que passa pelo ponto P.

3. Traçar a circunferência de centro no ponto P com 5 cm de raio.

4. Marcar o ponto R, um dos pontos de interseção da circunferência com a reta r.

5. Traçar o triângulo [PQR].



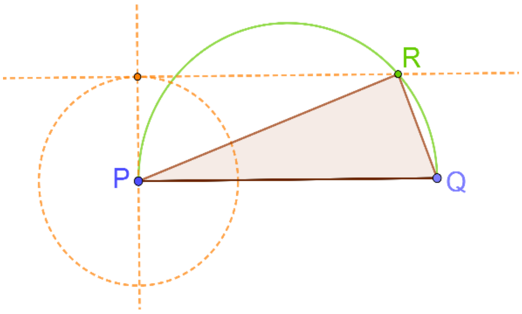
28.4.

1. Traçar o segmento de reta $[PQ]$ com 9 cm de comprimento.
2. Construir uma das semicircunferências de diâmetro $[PQ]$.

3. Construir uma reta s paralela ao segmento de reta $[PQ]$ que dele diste 3 cm (traçar a reta r perpendicular a PQ pelo ponto P, construir a circunferência de centro P com 3 cm de raio, traçar a reta s perpendicular à reta r por um dos pontos de interseção da reta r com a circunferência).

4. Marcar o ponto R, interseção da reta s com a semicircunferência traçada no passo 2 (temos duas possibilidades, no entanto, os triângulos que se podem obter são congruentes, ver figura).

5. Construir o triângulo $[PQR]$.



29.

29.1. $5{,}2^2 = 27{,}04$ e $4{,}8^2 + 2^2 = 27{,}04$, logo, $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ e, portanto, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo $[ABD]$ é retângulo. Como ao maior lado opõe-se o maior ângulo interno, sabemos que o ângulo ADB é reto e, portanto, a reta BD é perpendicular à reta AD e, em particular, é perpendicular ao lado $[AC]$ do triângulo $[ABC]$. Assim, conclui-se que o ortocentro do triângulo $[ABC]$ pertence à reta BD.

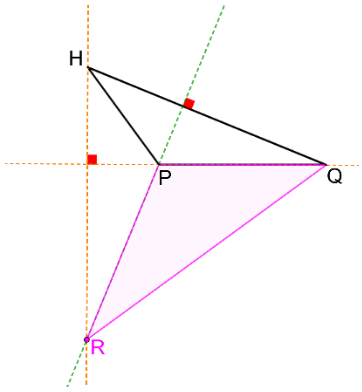
29.2. Na alínea anterior, provamos que BD é perpendicular a AC, logo, o triângulo $[BCD]$ é retângulo em D e, pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que $\overline{DC}^2 = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$.

Assim, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 4{,}8 + 1{,}5 = 6{,}3$.
$\overline{AC}^2 = 6{,}3^2 = 39{,}69$
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 5{,}2^2 + 2{,}5^2 = 33{,}29$

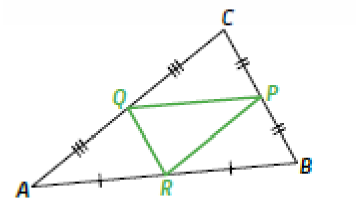
Como $[AC]$ é o maior lado do triângulo [ABC] e $\overline{AC}^2 \neq \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, pelo teorema de Pitágoras, concluímos que o triângulo $[ABC]$ não é retângulo.

Como $\overline{AC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, sabemos que o ângulo interno de vértice B é obtuso e, portanto, o circuncentro não pertence ao triângulo.

30.
1. Traçar a reta perpendicular à reta PQ e que passa no ponto H.
2. Traçar a reta perpendicular à reta HQ e que passa no ponto P (a reta HQ contém a altura relativa ao vértice Q e, portanto, é perpendicular à reta que contém o lado oposto ao vértice Q, ou seja, é perpendicular à reta PR).
3. Marcar o ponto R, interseção das duas retas traçadas.
4. Construir o triângulo $[PQR]$.

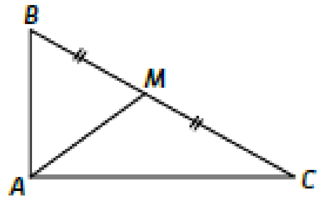


31. Os triângulos $[RBP]$ e $[ABC]$ são semelhantes pelo critério LAL de semelhança de triângulos (têm em comum o ângulo interno de vértice B e os lados $[PB]$ e $[RB]$ têm metade do comprimento dos lados $[CB]$ e $[AB]$, respetivamente).
Analogamente se prova que os triângulos $[PCQ]$ e $[QAR]$ são reduções de razão $\frac{1}{2}$ do triângulo $[ABC]$. Por fim, pelo critério LLL de congruência de triângulos, conclui-se que o triângulo $[PQR]$ é congruente aos triângulos $[RBP]$, $[PCQ]$ e $[QAR]$.



32. Qualquer triângulo retângulo pode ser inscrito numa semicircunferência com diâmetro igual à hipotenusa. O ponto médio da hipotenusa é o centro da circunferência e o segmento de reta que une o centro ao vértice oposto à hipotenusa, que é a mediana que contém esse vértice, também é um raio da circunferência e, portanto, mede metade do comprimento do diâmetro, ou seja, metade do comprimento da hipotenusa.

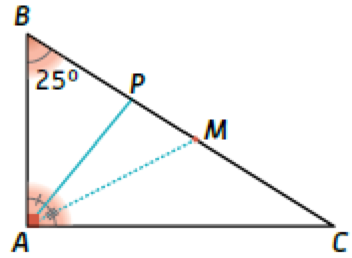
33. Seja M o ponto médio do segmento $[BC]$ e P o ponto de interseção da bissetriz do ângulo interno de vértice A com o segmento de reta $[BC]$.



33.1. Num triângulo retângulo, a mediana que une o vértice oposto à hipotenusa ao seu ponto médio tem metade do comprimento da hipotenusa (ver demonstração do exercício anterior).

Logo $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

R.: 5 cm



33.2. Num triângulo retângulo, a mediana que une o vértice oposto à hipotenusa ao seu ponto médio tem metade do comprimento da hipotenusa. Assim, o triângulo $[ABM]$ é isósceles, com $\overline{AM} = \overline{BM}$, e, portanto, $B\hat{A}M = M\hat{B}A = 25°$.

Como $\dot{A}P$ é bissetriz do ângulo BAC, $B\hat{A}P = \frac{90°}{2} = 45°$.

Assim, $M\hat{A}P = B\hat{A}P - B\hat{A}M = 45° - 25° = 20°$.

R.: 20°

34.

Sejam G o baricentro do triângulo $[ABC]$ e os segmentos de reta $[AM_A]$, $[BM_B]$ e $[CM_C]$ as suas medianas.

$$\overline{AM_A} = \overline{AG} + \overline{GM_A} = \overline{AG} + \frac{\overline{AG}}{2} = 6\ cm + 3\ cm = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{BM_B} = \overline{BG} + \overline{GM_B} = \overline{BG} + \frac{\overline{BG}}{2} = 6\ cm + 3\ cm = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{CM_C} = \overline{CG} + \overline{GM_C} = 2\overline{GM_C} + \overline{GM_C} = 8\ cm + 4\ cm = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AM_A} + \overline{BM_B} + \overline{CM_C} = 9\ cm + 9\ cm + 12\ cm = 30 \text{ cm}$$

R.: 30 cm

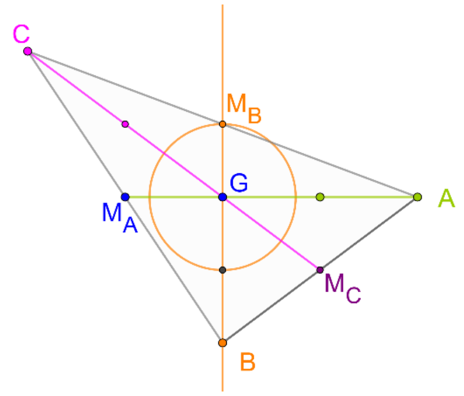
35. Vamos contruir um triângulo $[ABC]$ tal que as suas medianas $[AM_A]$ e $[BM_B]$ são perpendiculares, no baricentro, G, e medem, respetivamente, 6 cm e 4,5 cm.

Faz-se a construção tendo em conta que as medianas são perpendiculares e se intersetam no baricentro G do triângulo e que o baricentro divide as medianas em dois segmentos tais que o segmento que contém o vértice tem o dobro do comprimento do segmento que contém o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Construção:

1. Traçar o segmento de reta $[AM_A]$ com 6 cm de comprimento.
2. Marcar o ponto G do segmento de reta $[AM_A]$ e que dista 2 cm do ponto A.
3. Traçar a reta perpendicular ao segmento de reta $[AM_A]$ pelo ponto G.
4. Traçar a circunferência de centro no ponto G com 1,5 cm de raio.
5. Marcar o ponto M_B, um dos pontos de interseção da circunferência traçada no passo 4 com a reta traçada no passo 3.
6. Marcar o ponto B, ponto da semirreta $\dot{M}_B G$ que dista 3 cm do ponto G.
7. Traçar o segmento de reta $[AB]$.
8. Marcar o ponto M_C, ponto médio do segmento de reta $[AB]$.
9. Marcar o ponto C, ponto da semirreta $\dot{M}_C G$ tal que $\overline{CG} = 2\overline{GM_C}$.

10. Traçar os segmentos de reta $[AC]$ e $[BC]$.



Nota: No *GeoGebra* pode ser vantajoso recorrer à ferramenta que permite fazer a reflexão de um ponto em torno de outro ponto, ou seja, a rotação $180°$ de um ponto em torno de outro ponto.

36. Seja G o baricentro do triângulo $[ABC]$ e M_C o ponto médio do lado $[AB]$. Fazer a construção, começando por determinar o ponto G, tendo em conta que:

- $\overline{AG} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$
- $\overline{BG} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$
- $\overline{GC} = 2 \times \overline{M_C G}$

Construção:

1. Traçar o segmento de reta [AB] com 8 cm de comprimento.

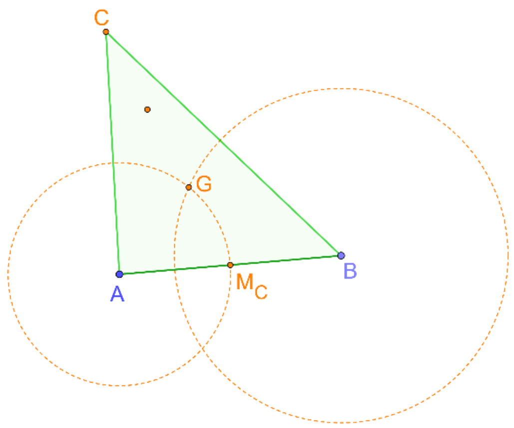
2. Traçar as circunferências de centros A e B com raios, respetivamente, com 4 cm e 6 cm.

3. Marcar o ponto G, um dos pontos de interseção das circunferências marcadas no item anterior.

4. Marcar o ponto M_C, ponto médio do lado [AB].

5. Marcar o ponto C, imagem do ponto G pela homotetia de razão 3 e centro M_C.

6. Traçar o triângulo [ABC].



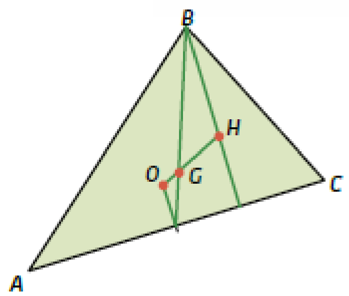
37.

$\overline{OG} = 7 \, ; \overline{OH} = ?$

$\overline{GH} = 2 \times \overline{OG} = 2 \times 7 = 14$

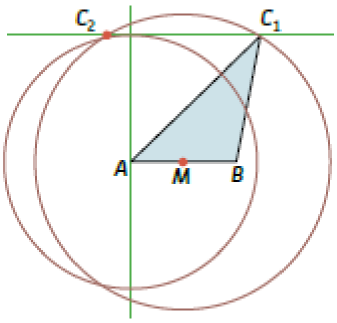
$\overline{OH} = \overline{OG} + \overline{GH} = 7 + 14 = 21$.

R.: 21 cm



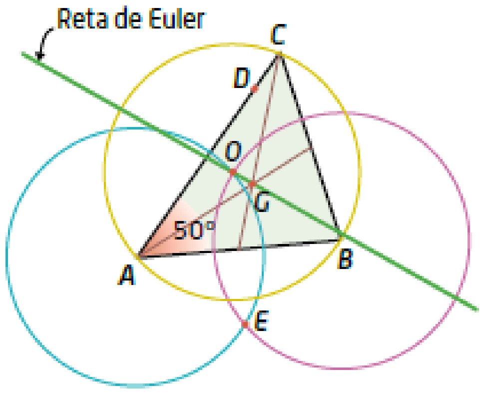
38.

1. Traçar o segmento de reta $[AB]$ com 5 cm de comprimento.
2. Construir uma reta s paralela ao segmento de reta $[AB]$ que dele diste 6 cm (traçar a reta r perpendicular a AB pelo ponto A, construir a circunferência de centro A com 6 cm de raio, traçar a reta s perpendicular à reta r por um dos pontos de interseção da reta r com a circunferência).
3. Marcar o ponto médio de [AB], M.
4. Traçar a circunferência de centro no ponto M com 7 cm de raio.
5. Marcar o ponto C, um dos pontos de interseção da reta s com a circunferência construída no passo anterior.
6. Construir o triângulo $[ABC]$.



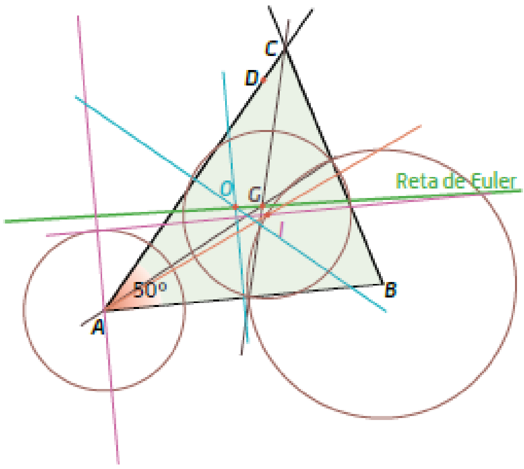
39.

1. Traçar o segmento de reta $[AB]$ com 8 cm de comprimento.
2. Construir a semirreta $\dot{A}D$ tal que $B\hat{A}D = 50°$.
3. Traçar as circunferências de raio 5 cm e centros nos pontos A e B.
4. Marcar o circuncentro O do triângulo $[ABC]$, interseção das duas circunferências traçadas no passo anterior.
5. Traçar a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ – a circunferência de centro O que passa pelos pontos A e B.
6. Marcar o ponto C, interseção da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ com a semirreta $\dot{A}D$.
7. Construir o triângulo [ABC].
8. Traçar duas das medianas do triângulo e determinar a sua interseção, o baricentro G do triângulo $[ABC]$.
9. Traçar a reta de Euler, a reta que passa pelos pontos O e G.



40.

1. Traçar o segmento de reta $[AB]$ com 7 cm de comprimento.
2. Traçar a semirreta $\dot{A}D$, tal que $B\hat{A}D = 50°$.
3. Construir a bissetriz do ângulo BAD.
4. Construir a reta s paralela ao lado $[AB]$ e que dela dista 2 cm.
5. Marcar o incentro I do triângulo $[ABC]$, interseção da reta s com a bissetriz construída.
6. Construir a semirreta $\dot{B}E$ tal que $E\hat{B}A = 2I\hat{B}A$ e I pertence ao ângulo EBA.
7. Marcar o ponto C, interseção das duas semirretas.
8. Para construir a reta de Euler são necessários dois dos outros 3 pontos notáveis clássicos. Marcar o ponto O fazendo a interseção de duas mediatrizes e marcar o ponto G fazendo a interseção das medianas. Traçar a reta de Euler, reta OG.



41.

41.1. O raio da circunferência dos 9 pontos de um triângulo tem metade do comprimento do raio da circunferência que o circunscreve.

Assim, sendo N o centro da circunferência dos 9 pontos do triângulo $[ABC]$, como o ponto A' pertence a essa circunferência temos que

$$raio_{circ.9\,ptos} = \overline{NA'} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{15\ cm}{2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

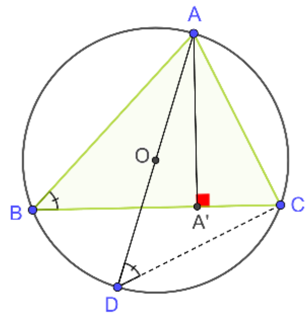
R.: $7{,}5$ cm

41.2. Os ângulos CBA e CDA são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência, logo, têm a mesma amplitude.

O ângulo ACD é um ângulo inscrito numa semicircunferência, logo, é reto.

O ângulo $AA'B$ é reto por construção ($AA' \perp BB'$).

Como $A\hat{A}'B = A\hat{C}D$ e $C\hat{B}A = C\hat{D}A$, conclui-se, pelo critério AA de semelhança de triângulos, que os triângulos $[AA'B]$ e $[ACD]$ são semelhantes e, portanto, $B\hat{A}A' = C\hat{A}D = O\hat{A}C$.



42. Consideremos um triângulo $[ABC]$ retângulo e isósceles de tal modo que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

O raio do círculo dos 9 pontos de um triângulo tem metade do comprimento do raio da circunferência circunscrita.

O triângulo $[ABC]$ é retângulo, logo a sua hipotenusa, $[AB]$, é um diâmetro da circunferência circunscrita.

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2\overline{AC}^2} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2 \times 2 \times \text{Área}_{[ABC]}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2 \times 2 \times 16} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8$$

$$\text{raio}_{\text{circ.9pts}} = \frac{8}{2} : 2 = 2$$

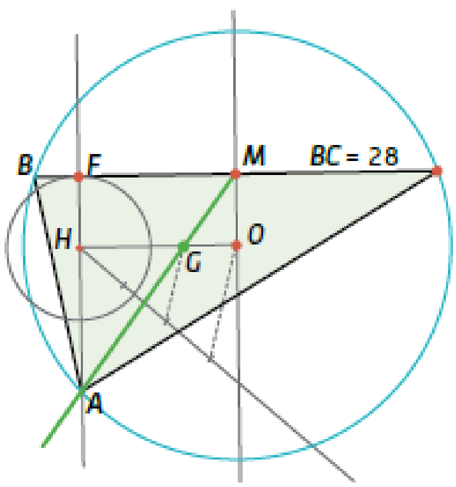
$$\text{Área}_{\text{circ.9pts}} = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

R.: 4π cm^2

43.

43.1.

1. Construir o retângulo $[HOMF]$ com os comprimentos dados.
2. Determina o baricentro G do triângulo $[ABC]$ tendo em conta que pertence ao segmento de reta $[OH]$ e que a sua distância ao ortocentro H é o dobro da distância ao circuncentro O.
3. Determinar o vértice A, intersetando a semirreta $\dot{M}G$ com a reta FH.
4. Traçar a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ – circunferência de centro O que passa pelo ponto A.
5. Marcar os vértices B e C, intersetando a circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ com a reta FM.



43.2 Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{MG} = \sqrt{\overline{MO}^2 + \overline{OG}^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{121}{9}} = \sqrt{\frac{346}{3}}$$

$$\overline{AM} = 3 \times \sqrt{\frac{346}{3}} = \sqrt{1038}$$

Os triângulos [AGH] e [AMF] são semelhantes, pelo critério AA de semelhança de triângulos, uma vez que têm em comum o ângulo interno de vértice A e os ângulos internos de vértice H e F são retos.

Assim, como $\overline{AG} = 2\overline{GM}$, temos que $\overline{AH} = 2\overline{HF} = 2 \times 5 = 10$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AO} = \sqrt{\overline{HO}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{11^2 + 10^2} = \sqrt{221}$

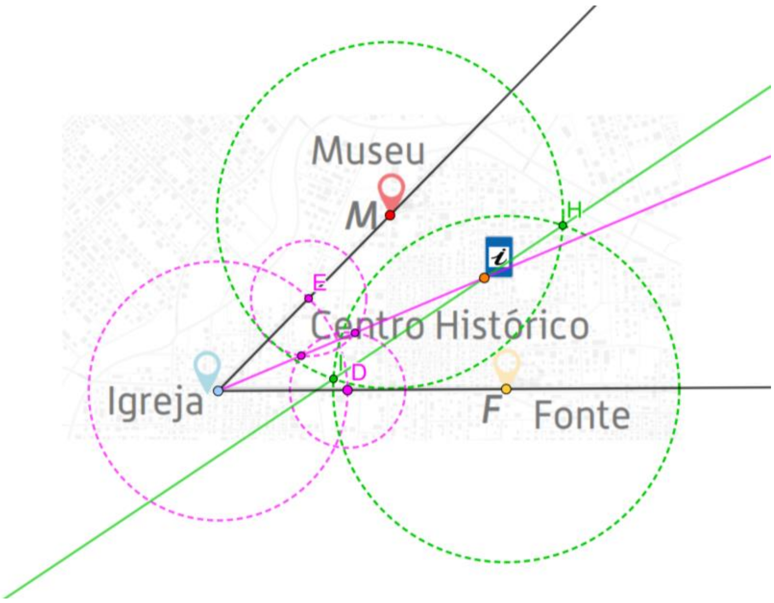
Assim, como $\overline{CO} = \overline{AO} = \sqrt{221}$ e o triângulo [COM] é retângulo em M, temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{\sqrt{221}^2 - 5^2} = \sqrt{221 - 25} = \sqrt{196} = 14$$

$$\overline{BC} = 2 \times \overline{MC} = 2 \times 14 = 28$$

Avaliar – Página 40

1. Intersetar a mediatriz do segmento de reta $[MF]$ com a bissetriz do ângulo FIM.



2.

2.1. $[ID]$ e $[IE]$ são perpendiculares aos lados $[BC]$ e $[AB]$, respetivamente, pois são raios da circunferência e D e E são os pontos de tangência da circunferência a esses lados.

$[ID]$ e $[IE]$ são raios da mesma circunferência, logo, têm o mesmo comprimento.

O lado $[IB]$ é comum aos triângulos $[IEB]$ e $[IBD]$.

Como os triângulos são retângulos, o teorema de Pitágoras permite-nos garantir que os lados $[EB]$ e $[DB]$ têm o mesmo comprimento, logo, $\overline{BD} = 15$ cm.

R.: 15 cm

2.2. Em 2.1., já vimos que $[ID]$ é perpendicular a $[BC]$ e, portanto, o triângulo $[IDC]$ é retângulo.

Assim,

$$I\hat{C}D = 90° - 48° = 42°.$$

I é o incentro do triângulo $[ABC]$. Logo, $\dot{A}I$ é a bissetriz do ângulo ACB e, portanto, os ângulos ACI e ICB têm a mesma amplitude e, portanto,

$$A\hat{C}B = 2 \times I\hat{C}B = 2 \times I\hat{C}D = 2 \times 42° = 84°.$$

R.: $84°$

2.3. Em 2.1., já vimos que $[IE]$ é perpendicular a $[AB]$ e, portanto, o triângulo $[IEB]$ é retângulo em E.

Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos que

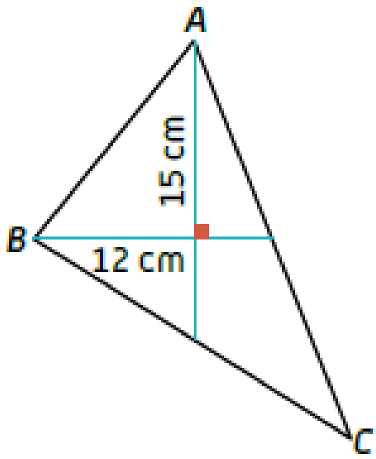
$$\overline{IE} = \sqrt{\overline{IB}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$$

R.: 8 cm

3.

3.1.

Sejam A, B e C os vértices do triângulo e A', B', C' os pontos médios dos lados opostos a A, B e C, respetivamente. G é o baricentro do triângulo. Consideremos $[AA']$ a mediana que mede 15 cm e $[BB']$ a mediana que mede 12 cm.



$\overline{GA'} = 5 \text{ cm}$ e $\overline{GA} = 10 \text{ cm}$

$\overline{GB'} = 4 \text{ cm}$ e $\overline{GB} = 8 \text{ cm}$

$A_{[AGB']} = 4 \times \frac{10}{2} = 20.$

$A_{[ABC]} = 6A_{[AGB']} = 6 \times 20 = 120$

R.: 120 cm^2

3.2. Pelo teorema de Pitágoras, temos que

$\overline{AB'} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$

$\overline{AB} = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164}$;

$\overline{A'B} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

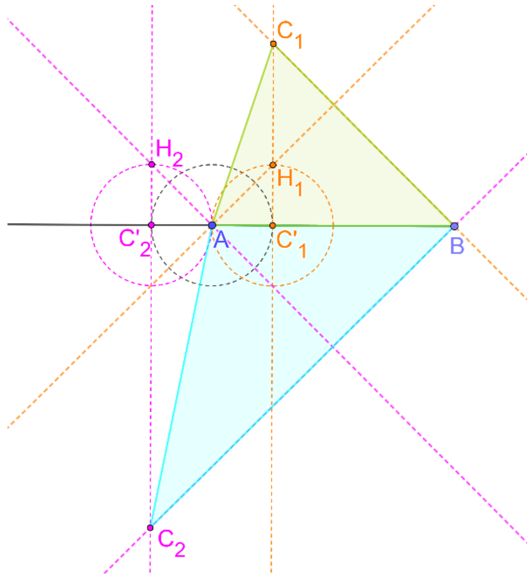
Perímetro$_{[ABC]} = \overline{AB} + 2\overline{AB'} + 2\overline{A'B} = \sqrt{164} + 2\sqrt{116} + 2\sqrt{89} \approx 53$

R.: 53 cm

4.

1. Traçar o segmento de reta $[AB]$ com 8 cm de comprimento.
2. Traçar a circunferência de centro A com 2 cm de raio.
3. Marcar o ponto $C_1{}'$, interseção da circunferência construída no passo anterior com o segmento de reta $[AB]$.

Nota: Poder-se-á optar pela interseção da circunferência com a reta AB e considerar o ponto que não pertence ao segmento de reta $[AB]$, nesse caso obtém-se um triângulo diferente que cumpre igualmente as condições dadas – ver construção a roxo e triângulo azul na figura).



4. Traçar a reta r perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ pelo ponto $C_1{}'$.
5. Construir a circunferência de centro em $C_1{}'$ com 2 cm de raio.
6. Marcar o ortocentro H_1 do triângulo $[ABC_1]$, que resulta da interseção da circunferência construída no passo anterior com a reta r.
7. Traçar a reta AH_1.
8. Traçar a reta s perpendicular à reta AH_1 que passa pelo ponto B.
8. Marcar o ponto C_1, interseção da reta r com a reta s.
9. Construir o triângulo $[ABC_1]$.

5. (B)

6. A circunferência que contém os vértices de um triângulo é a circunferência que o circunscreve (o centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes). A circunferência que contém os pontos médios é a circunferência dos nove pontos do triângulo. Como o raio da circunferência circunscrita tem o dobro do comprimento da circunferência dos nove pontos, conclui-se que a razão entre a área do círculo limitado pela primeira circunferência e a área do círculo limitado pela segunda circunferência é o quadrado de 2, ou seja, 4.
Assim, a razão entre a área do círculo limitado pela circunferência que contém os vértices do triângulo e a área do círculo limitado pela circunferência que contém os pontos médios do lado do triângulo é 4.

7. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ os círculos limitados pelas circunferências circunscritas, respetivamente, ao triângulo $[ABC]$ e ao triângulo $[DEF]$.

$\mathcal{C}_2$ é o círculo dos 9 pontos do triângulo [ABC], uma vez que D, E e F são os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, logo, $\text{Área}_{\mathcal{C}_1} = 4 \times \text{Área}_{\mathcal{C}_2}$.

$\text{Área}_{\mathcal{C}_1} - \text{Área}_{\mathcal{C}_2} = 75\pi \Leftrightarrow 4\text{Área}_{\mathcal{C}_2} - \text{Área}_{\mathcal{C}_2} = 75\pi \Leftrightarrow 3\text{Área}_{\mathcal{C}_2} = 75\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Área}_{\mathcal{C}_2} = \dfrac{75\pi}{3} \Leftrightarrow \text{Área}_{\mathcal{C}_2} = 25\pi \Leftrightarrow \pi \times \text{raio}_{\mathcal{C}_2}{}^2 = 25\pi \Leftrightarrow \text{raio}_{\mathcal{C}_2}{}^2 = \dfrac{25\pi}{\pi} \Leftrightarrow \text{raio}_{\mathcal{C}_2}{}^2 = 25$

Como $\text{raio}_{\mathcal{C}_2} > 0$, $\text{raio}_{\mathcal{C}_2} = 5$.

$\text{Perímetro}_{\mathcal{C}_1} = 2\pi \times \text{raio}_{\mathcal{C}_1} = 2\pi \times 2 \times 5 = 20\pi \approx 63$

R.: 63 cm