

Tema 5 – Geometria analítica no plano e no espaço

1. Geometria analítica no plano

Recordar - Página 7

1.

1.1. Opção (D)

1.2. Começemos por transformar as unidades, de quilómetros para centímetros.

$$300 \text{ m} = 30\,000 \text{ cm}$$

Assim, tendo em conta que as medidas estão construídas baseadas na escala de 1: 1500, tem-se que:

$$\frac{1}{1500} = \frac{x}{30\,000} \Leftrightarrow x = \frac{30\,000}{1500} \Leftrightarrow x = 20 \text{ cm}$$

R.: A distância no mapa é 20 cm.

2. Neste caso, a figura geométrica a considerar é um círculo com 7 cm de raio.

Assim:

$$A = \pi \times \text{raio}^2 = \pi \times 49 = 49\pi \approx 153,9 \text{ cm}^2$$

$$P = 2\pi \times \text{raio} = 2\pi \times 7 = 14\pi \approx 44,0 \text{ cm}$$

3.

3.1. Qualquer ponto que pertença à circunferência tem distância ao centro igual ao comprimento do raio da circunferência. Assim, a distância deste ponto P ao centro D é 3 cm.

3.2. Tem-se que $\widehat{ADB} = 120^\circ$. Logo, a amplitude do arco associado é $\widehat{AB} = 120^\circ$.

Assim:

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

3.3. Sabemos que $[AC]$ e $[CB]$ são congruentes. Logo, os ângulos internos do triângulo opostos a estas cordas também são congruentes. Além disso, da questão anterior $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

Ou seja:

$$\widehat{BAC} = \widehat{CBA} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

Concluimos então que $[ABC]$ é um triângulo equilátero e acutângulo.

3.4. Tendo em conta que $\widehat{ADB} = 120^\circ$, a área de um setor circular pode ser obtida tendo em conta a relação proporcional entre os ângulos ao centro da circunferência e as áreas por si delimitadas.

$$A_{total} = \pi \times \text{raio}^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

Ou seja:

$$\frac{9\pi}{360} = \frac{x}{120} \Leftrightarrow x = \frac{9\pi \times 120}{360} \Leftrightarrow x = 3\pi \text{ cm}^2$$

A área do círculo é $3\pi \text{ cm}^2$.

3.5. Bissetriz do ângulo ACB .

4. A área destinada às flores é dada pela diferença entre a área do quadrado e a área da parte relvada.

Ou seja:

$$A_{\text{quadrado}} = 16^2 = 256 \text{ m}^2 \quad A_{\text{hexágono}} = \frac{\text{perímetro}}{2} \times \text{apótema}$$

Para o cálculo do apótema, teremos que dividir o hexágono em seis triângulos equiláteros e determinar a sua altura, recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\text{altura}^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \text{altura}^2 + \frac{25}{4} = 25 \Leftrightarrow \text{altura}^2 = 25 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow \text{altura}^2 = \frac{100}{4} - \frac{25}{4} \Leftrightarrow \text{altura}^2 = \frac{75}{4}$$

$$\text{Então, altura} = \sqrt{\frac{75}{4}} \Leftrightarrow \text{altura} \approx 4,33 \text{ m}$$

Ou seja:

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{\text{perímetro}}{2} \times \text{apótema} = \frac{5 \times 6}{2} \times 4,33 = 15 \times 4,33 = 64,95 \text{ m}^2$$

Concluimos então que:

$$A_{\text{zona das flores}} = A_{\text{quadrado}} - A_{\text{hexágono}} = 256 - 64,95 \approx 191 \text{ m}^2$$

A área da zona florida do jardim é de, aproximadamente, 191 m^2 .

Recordar - Página 9

5.

5.1. Opção (A)

5.2. Sabemos que:

$$\overline{AD} = \overline{BE} - 4 \Leftrightarrow \overline{AD} = \overline{AD} + \overline{CE} - 4 \Leftrightarrow \overline{AD} - \overline{AD} + 4 = \overline{CE} \Leftrightarrow \overline{CE} = 4 \text{ cm}$$

$$A_{\text{trapézio}} = 15 \text{ cm}^2$$

Tem-se que $D\hat{E}C = C\hat{D}$.

Logo, $[CDE]$ é um triângulo retângulo isósceles, pois num triângulo, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes.

Podemos então concluir que:

$$A_{\text{trapézio}} = 15 \Leftrightarrow A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}} = 15 \Leftrightarrow A_{\text{retângulo}} = 15 - \frac{4 \times 4}{2} = 15 - 8 = 7 \text{ cm}^2$$

A área do retângulo $[ABCD]$ é 7 cm^2 .

5.3. O perímetro do trapézio é dado pela soma sucessiva dos comprimentos dos seus quatro lados.

Ora, tem-se que:

$$A_{\text{retângulo}} = \overline{AB} \times \overline{BC} \Leftrightarrow 7 = 4 \times \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{4}{7} \text{ cm}$$

Para determinar \overline{ED} , aplica-se o Teorema de Pitágoras.

$$\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{ED}^2 \Leftrightarrow 4^2 + 4^2 = \overline{ED}^2 \Leftrightarrow 16 + 16 = \overline{ED}^2 \Leftrightarrow 32 = \overline{ED}^2$$

Logo, $\Leftrightarrow \overline{ED} = \sqrt{32}$

Pelo que:

$$P_{\text{trapézio}} = 2 \times \frac{4}{7} + 2 \times 4 + \sqrt{32} \approx 14,8 \text{ cm}$$

O trapézio tem como medida do perímetro 14,8 cm, aproximadamente.

6.

6.1. Opção (C).

6.2. Opção (A).

Tarefa 1 – Página 10

1. Em (C, 1) localiza-se o Castelo de San Angelo.

2. A Fontana de Trevi localiza-se em (E, 2).

3. O meu amigo poderá estar a visitar Piazza Navona.

4.

4.1. O mapa está dividido em zonas muito grandes. Assim, a localização através desta divisão do mapa poderá não ser precisa.

4.2. Milena poderia dividir o mapa em zonas de menor dimensão ou até mesmo utilizar um modelo semelhante ao referencial cartesiano.

Aplicar – Página 12

1.

1.1.

$A(-2,4)$	$B(-4,1)$	$C(-2,0)$	$D(-1,-1)$	$E(1,2)$	$F(1,0)$
$G(0,-3)$	$H(2,-3)$	$I(3,3)$	$J(-2,2)$	$K(2,2)$	$L(3,-3)$

A abcissa do ponto M depende da distância do ponto A ao ponto O .

Logo:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CO}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 16 + 4 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 20$$

Ou seja, $\overline{OA} = \sqrt{20}$

Assim, o ponto M tem coordenadas $(-\sqrt{20}; -2)$.

1.2.

a) Pontos C e J , por exemplo.

b) Pontos E e M

1.3.

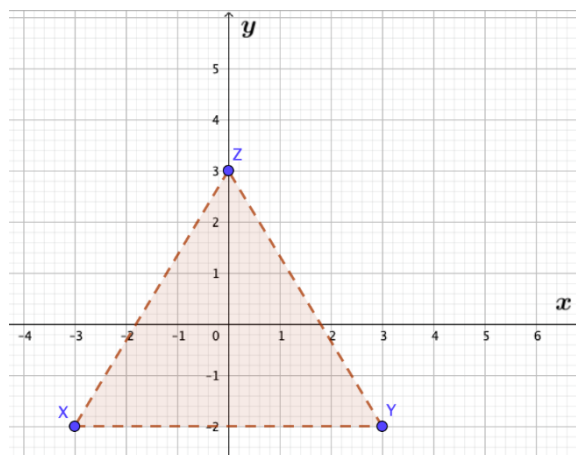
a) Pontos A, B, C, D, J e G

b) Pontos B, C, D, F e M

c) Pontos D, K e I

d) Pontos J e L

1.4. Fazendo a representação no referencial, obtém-se o seguinte.



Podemos observar que o triângulo $[XYZ]$ é um triângulo isósceles não equilátero, pois possui apenas dois lados com medidas de comprimento iguais.

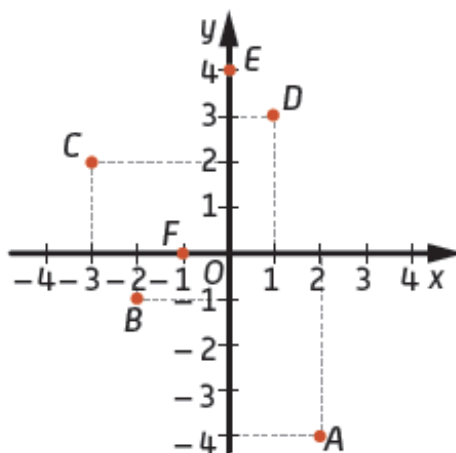
2.

2.1.

- 1.º Quadrante: Ponto D
- 2.º Quadrante: Ponto C
- 3.º Quadrante: Ponto B
- 4.º Quadrante: Ponto A

Os restantes pontos não pertencem a nenhum dos quadrantes.

2.2. Fazendo a representação dos pontos num referencial ortogonal e monométrico, obtemos o seguinte.



2.3.

a) Para que A e H tenham as mesmas coordenadas, então $x_A = x_H$ e $y_A = y_H$.

Ou seja:

$$x_H = x_A \Leftrightarrow 2p - 6 = 2 \Leftrightarrow 2p = 2 + 6 \Leftrightarrow 2p = 8 \Leftrightarrow p = \frac{8}{2} \Leftrightarrow p = 4$$

$$y_H = y_A \Leftrightarrow -3 + \frac{p}{2} - \frac{p+5}{3} = -4 \Leftrightarrow -18 + 3p - 2p - 10 = -24 \Leftrightarrow p = -24 + 10 + 18 \Leftrightarrow p = 4$$

Tendo em conta os resultados obtidos, podemos concluir que $p = 4$.

b) A abcissa do ponto H deverá ser igual à sua ordenada. Assim:

$$\begin{aligned} x_H = y_H &\Leftrightarrow 2p - 6 = -3 + \frac{p}{2} - \frac{p+5}{3} \Leftrightarrow 12p - 36 = -18 + 3p - 2p - 10 \Leftrightarrow 12p - 3p + 2p = -10 - 18 + 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 11p = 8 \Leftrightarrow p = \frac{8}{11} \end{aligned}$$

Logo, $p = \frac{8}{11}$.

c) Para que H pertença ao 4.º quadrante, então $x_H > 0$ e $y_H < 0$. Assim:

$$2p - 6 > 0 \Leftrightarrow 2p > 6 \Leftrightarrow p > \frac{6}{2} \Leftrightarrow p > 3$$

$$-3 + \frac{p}{2} - \frac{p+5}{3} < 0 \Leftrightarrow -18 + 3p - 2p - 10 < 0 \Leftrightarrow p < 28$$

Assim, podemos concluir que $p \in]3; 28[$.

Momento Python – Página 14

1. O Programa é definido considerando as coordenadas x e y de um ponto do plano (primeira e segunda linhas de código) escolhidas pelo utilizador.

Na quarta linha, o programa testa se a abcissa e a ordenada do ponto são positivas, sendo que se tal se verificar o programa escreve “O ponto pertence ao 1.º quadrante.”.

Caso não verifiquem essa propriedade, o programa testa se a abcissa é negativa e a ordenada é positiva e, caso isso se verifique, dá como informação que o ponto pertence ao 2.º quadrante.

Se tal não se verificar, passa para a oitava linha do código. Testa novamente se a abcissa e ordenada são negativas. Caso isso se verifique, informa o utilizador que o ponto pertence ao 3.º quadrante.

No caso de nenhuma das condições anteriores se verificar, o programa informa que o ponto pertence ao 4.º quadrante.

2. Depois de reproduzidas as linhas de código propostas, verificamos que:

- Para o ponto $A(-1; -2)$, o Python informa “O ponto pertence ao 3.º quadrante”.
- Para o ponto $B(4; -1)$, o Python informa “O ponto pertence ao 4.º quadrante.”
- Para o ponto $C(-5; 1)$, o programa informa “O ponto pertence ao 2.º quadrante”.

3. Por exemplo, para o ponto de coordenadas $(1; 1)$, o Python informa “O ponto pertence ao 1.º quadrante”.

4. Para o ponto $E(0,9)$, o programa informa “O ponto pertence ao 4.º quadrante.” o que não se verifica para este ponto.

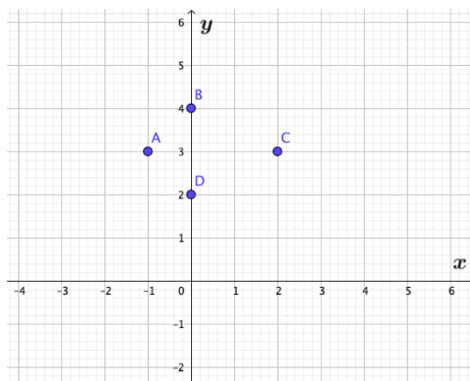
5. Uma possível melhoria do programa pode ser a seguinte.

```
x=float(input("Qual é a abcissa do ponto?"))
y=float(input("Qual é a ordenada do ponto?"))

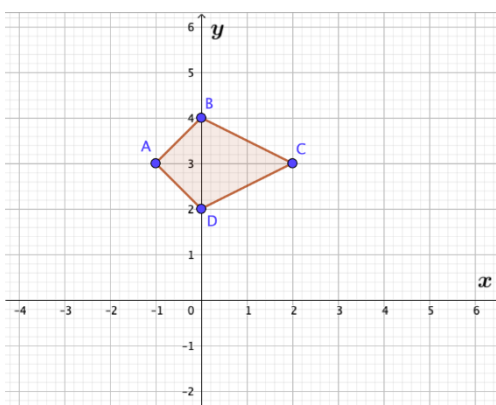
if x==0 and y==0:
    print("O ponto é a origem do referencial. Não pertence a nenhum quadrante.")
elif x==0 and y!=0:
    print("O ponto pertence ao eixo das ordenadas. Não pertence a nenhum quadrante.")
elif x!=0 and y==0:
    print("O ponto pertence ao eixo das abcissas. Não pertence a nenhum quadrante.")
elif x>0 and y>0:
    print("O ponto pertence ao 1.º quadrante.")
elif x<0 and y>0:
    print("O ponto pertence ao 2.º quadrante.")
elif x<0 and y<0:
    print("O ponto pertence ao 3.º quadrante.")
else:
    print("O ponto pertence ao 4.º quadrante.")
```

Momento *GeoGebra* – página 14

1. Usando a entrada do *GeoGebra*, obtemos a seguinte representação dos pontos indicados.



2. Unindo os pontos de modo a representar os lados do quadrilátero $[ABCD]$, obtemos a seguinte representação:



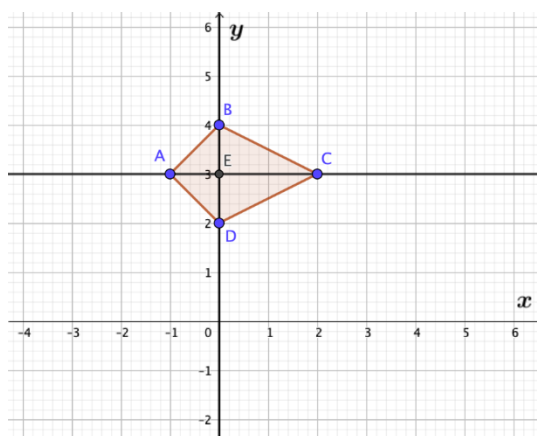
Podemos verificar que $[ABCD]$ é um papagaio.

3. Para determinar a área de $[ABCD]$ poderemos fazer o seguinte.

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ u. a.}$$

O papagaio tem 3 unidades de área.

4. Poderemos usar o *GeoGebra* para representar as retas que contêm as duas diagonais de $[ABCD]$.



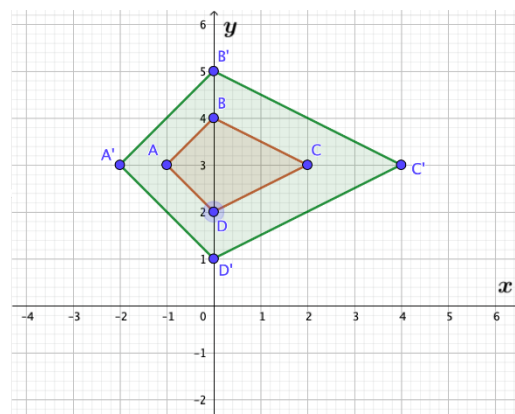
Poderemos verificar que E tem coordenadas $(0,3)$.

5.

Tendo em conta a razão de semelhança entre os polígonos, verificamos que a medida do comprimento das diagonais de $[ABCD]$ duplica o seu valor quando este se transforma em $[A'B'C'D']$. O ponto E mantém-se como ponto de interseção das diagonais. Podemos usar o *GeoGebra* para verificar que a representação de $[A'B'C'D']$ será a seguinte.

Ou seja:

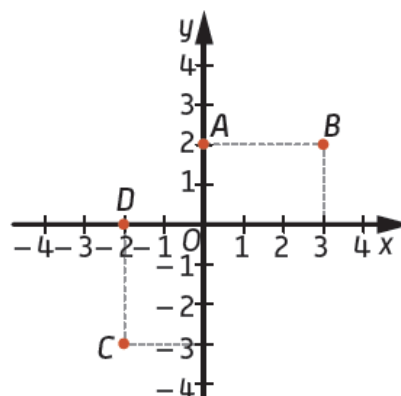
$$A'(-2,3) \quad B'(0,5) \quad C'(4,3) \quad D'(0,1)$$



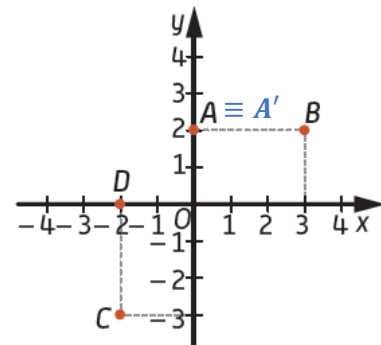
Tarefa 2 - Página 15

1.

Fazendo a representação dos pontos em referencial ortogonal monométrico xOy , obtemos:



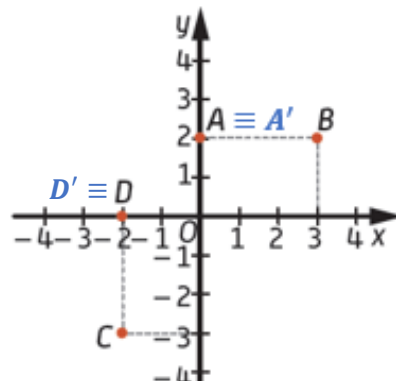
2. Ao realizar uma reflexão de A segundo o eixo dos yy , concluímos que as coordenadas de A coincidem com as de A' . Logo, $A'(0,2)$.



3.

Ao realizar uma reflexão de D segundo o eixo dos xx , concluímos que as coordenadas de D coincidem com as de D' .

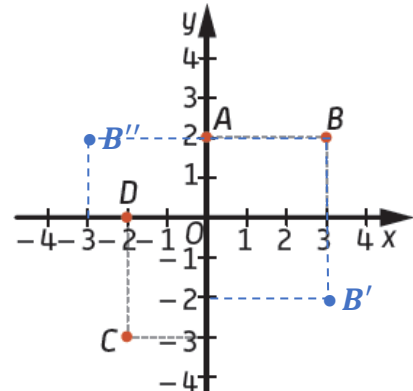
Logo, $D'(-2,0)$.



4. Neste caso, chegamos às seguintes representações.

Ou seja, $B'(3, -2)$ e $B''(-3, 2)$.

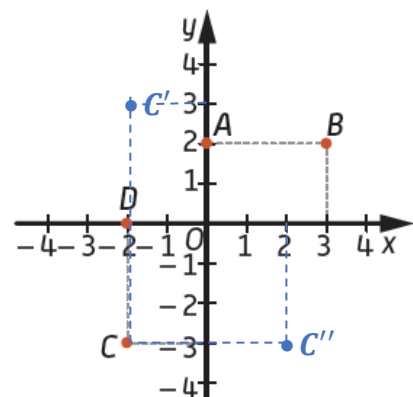
Concluímos então que a ordenada de B' é simétrica em relação à ordenada de B e a abcissa de B' é a abcissa de B . A abcissa de B'' é simétrica em relação à abcissa de B e a ordenada de B'' é a ordenada de B .



5. Neste caso, obtemos as seguintes representações dos pontos considerados.

Assim, $C'(-2, 3)$ e $C''(2, -3)$.

Concluímos então que a ordenada de C' é simétrica em relação à ordenada de C e a abcissa de C' é a abcissa de C . A abcissa de C'' é simétrica em relação à abcissa de C e a ordenada de C'' é a ordenada de C .



6. Quando efetuamos uma reflexão de um ponto segundo o eixo das abcissas, poderão acontecer duas situações.

- O ponto conserva as suas coordenadas, caso pertença ao próprio eixo.
- A ordenada do ponto transformado é simétrica da ordenada do ponto original, mantendo-se a abcissa.

Quando efetuamos uma reflexão de um ponto segundo o eixo das ordenadas, poderão acontecer duas situações.

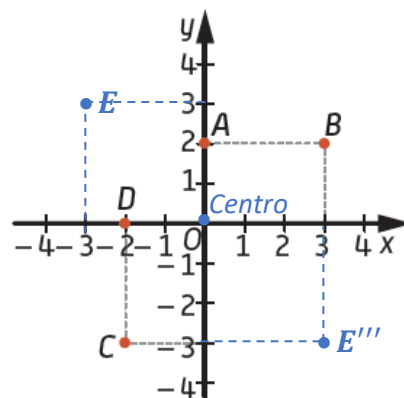
- O ponto conserva as suas coordenadas, caso pertença ao próprio eixo.
- A abcissa do ponto transformado é simétrica da abcissa do ponto original, mantendo-se a ordenada.

7.1. Usando as observações registadas na questão anterior, podemos concluir que:

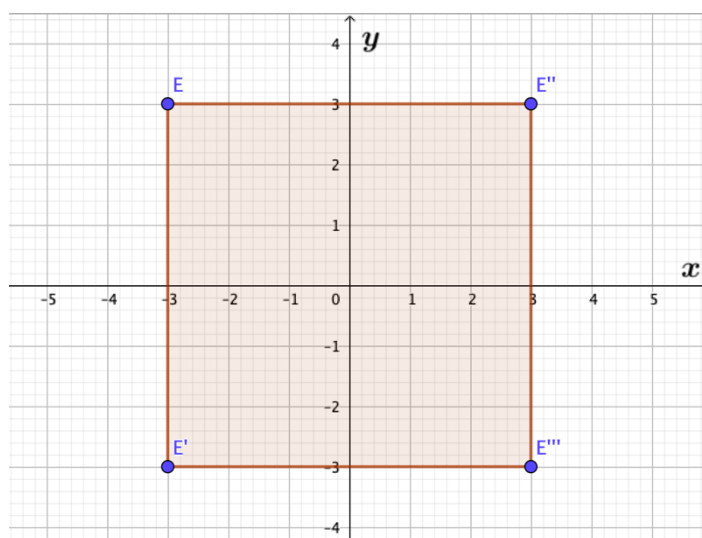
$$E'(-3, -3) \text{ e } E''(3, 3)$$

7.2.

No caso de realizarmos uma meia-volta de centro na origem de referencial do ponto E , este transformar-se-á no ponto E''' de coordenadas $(3, -3)$. Verificando usando as potencialidades do *Geogebra*:



7.3. Fazendo a representação do polígono, obtemos o quadrado seguinte.



O lado do quadrado tem 6 unidades de medida, pelo que:

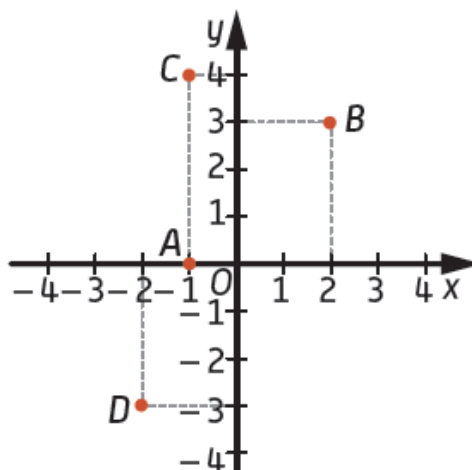
$$P = 4 \times 6 = 24 \text{ u. m.} \quad A = 6^2 = 36 \text{ u. a.}$$

O quadrado tem de perímetro 24 unidades de medida e de área 36 unidades de área.

Aplicar - Página 17

3.

3.1. Representando os pontos num referencial ortogonal monométrico xOy , obtemos o seguinte.



3.2. Como o ponto A pertence ao próprio eixo de reflexão (eixo das abcissas), podemos concluir que o seu transformado irá coincidir com ele próprio. Assim, $A' = A = (-1, 0)$.

3.3. No caso dos pontos considerados, ao realizar a reflexão destes pontos segundo o eixo dos yy , obtemos as seguintes coordenadas.

$$A''(1,0) \quad B''(-2,3) \quad C''(1,4) \quad D''(2,-3)$$

Tarefa 3 - Página 18

1. Por observação da reta numérica, podemos constatar que a abcissa do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é 2,5.
2. Por observação da reta numérica, podemos constatar que a abcissa do ponto médio de $[AC]$ é -1 .
3. Por observação da reta numérica, podemos constatar que a abcissa do ponto médio de $[BD]$ é 1,25.
4. Por observação da reta numérica, podemos constatar que a abcissa do ponto médio de $[CB]$ é 0,5.

Aplicar – página 18

4. Determinando a abcissa pedida, vem que:

$$x_M = \frac{-\frac{3}{5} + \frac{7}{2}}{2} = \frac{-\frac{6}{10} + \frac{35}{10}}{2} = \frac{\frac{29}{10}}{2} = \frac{29}{10} : 2 = \frac{29}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{29}{20}$$

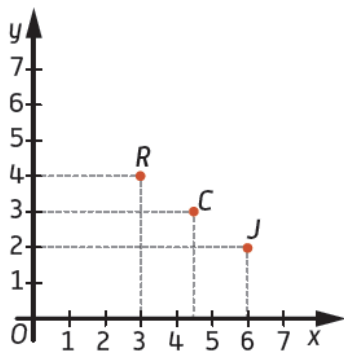
5. Neste caso, sabemos que:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{-1 + x_B}{2} \Leftrightarrow 6 = -1 + x_B \Leftrightarrow 6 + 1 = x_B \Leftrightarrow x_B = 7$$

Podemos então concluir que a abcissa b do ponto B assume o valor de 7.

Tarefa 4 - Página 19

1.



O ponto C que representa o café do encontro encontra-se entre os pontos R e J , pelo que corresponde ao ponto médio do segmento de reta $[RJ]$. Ou seja:

2. O ponto C irá estar à mesma distância do ponto R e do ponto J , pelo que:

$$x_C = \frac{x_R + x_J}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \quad y_C = \frac{y_R + y_J}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Ou seja, $C = (4,5; 3)$.

Aplicar - Página 20

6. O centro da circunferência corresponde ao ponto médio de um dos seus diâmetros. Assim, o centro desta circunferência irá corresponder ao ponto médio de $[AB]$.

$$C = M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{0 + (-5)}{2}; \frac{-3 + 0}{2} \right) = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2} \right)$$

7. Começemos por determinar as coordenadas do ponto D , ponto médio de $[BC]$.

$$D = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{3 + (-2)}{2}; \frac{-2 + (-2)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; -2 \right)$$

De seguida, obteremos as coordenadas do ponto E , ponto médio de $[AD]$.

$$E = \left(\frac{x_A + x_D}{2}; \frac{y_A + y_D}{2} \right) = \left(\frac{-1 + \frac{1}{2}}{2}; \frac{2 + (-2)}{2} \right) = \left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}; 0 \right) = \left(-\frac{1}{4}; 0 \right)$$

O ponto E tem coordenadas $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

Aplicar – página 21

8. Tendo como referência o exemplo dado ao lado, podemos concluir que:

$$\text{Baricentro} = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{3 + (-1) + 16}{3}, \frac{1 + 2 + (-27)}{3} \right) = (6, -8)$$

As coordenadas do baricentro (G) são (6, -8).

Tarefa 5 - Página 22

Para determinar o perímetro do quadrado [ABCD], teremos de descobrir o comprimento de um dos seus lados.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$\overline{AD}^2 = 2^2 + 7^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 4 + 49 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 53$$

Ou seja, $\overline{AD} = \sqrt{53}$

Logo:

$$P_{[ABCD]} = 4 \times \overline{AD} = 4\sqrt{53} \text{ u. m.}$$

O perímetro do quadrado [ABCD] é $4\sqrt{53}$ unidades de medida.

Aplicar – Página 22

9.

9.1. Ao observar o referencial, podemos concluir que:

$$A(-4,2) \quad B(-1,4) \quad C(1,1) \quad D(-2,-1)$$

9.2. Em ambas as circunferências (inscrita e circunscrita), o centro irá coincidir. As coordenadas do centro irão ser calculadas, determinando o ponto médio de uma das diagonais do quadrado. Ou seja:

$$\text{Centro} = M_{[AC]} = \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{-4 + 1}{2}; \frac{2 + 1}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$$

O centro das circunferências (inscrita e circunscrita) tem de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$.

9.3. Teremos de calcular o raio de cada uma das circunferências, para determinar a diferença entre ambas (área da coroa circular por elas definida).

A medida do raio da circunferência inscrita irá ser dada pela distância do centro da circunferência ao ponto médio de um dos lados do quadrado.

Ou seja:

$$\text{Centro} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right) \quad M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-4 + (-1)}{2}; \frac{2 + 4}{2} \right) = \left(-\frac{5}{2}; 3 \right)$$

$$\text{raio}_{\text{inscrita}} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2} \right) \right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3 \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Já a medida do raio da circunferência circunscrita irá ser obtido aplicando a distância do centro da circunferência a um dos seus vértices:

$$\text{Centro} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad B = (-1; 4)$$

$$\text{raio}_{\text{circunscrita}} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Ou seja:

$$A_{\text{coroa circular}} = A_{\text{c.circunscrita}} - A_{\text{c.inscrita}} = \pi \times \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{26}{4}\pi - \frac{13}{4}\pi = \frac{13}{4}\pi \approx 10,2 \text{ u. a.}$$

A área da coroa circular é 10,2 unidades de área, aproximadamente.

Aplicar – Página 23

10.

10.1. A distância entre os dois pontos é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Os pontos A e B estão a uma distância de $\sqrt{13}$ unidades de medida.

10.2. Neste caso, a distância entre os dois pontos é dada por:

$$d(C, D) = \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (-4 - (-9))^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 25} = \sqrt{\frac{109}{4}} = \frac{\sqrt{109}}{2}$$

Os pontos C e D estão a uma distância de $\frac{\sqrt{109}}{2}$ unidades de medida.

11.

11.1. Para mostrar que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, teremos de provar que a medida do comprimento dos seus três lados é igual. Ou seja:

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5 - 8)^2 + (3\sqrt{3} - 0)^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$$

$$d(C, A) = 8 - 2 = 6$$

Logo, concluímos que o triângulo é equilátero.

A área do triângulo é dada por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{MB}}{2}$$

em que M corresponde ao ponto médio de $[AC]$. Para determinar a altura do triângulo, basta determinar a distância do M ao vértice B :

$$M_{[AC]} = \left(\frac{8+2}{2}; \frac{0+0}{2} \right) = (5; 0)$$

$$d(M, B) = \sqrt{(5-5)^2 + (0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

Concluimos então que:

$$A_{[ABC]} = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ u. a.}$$

A área do triângulo $[ABC]$ é de $9\sqrt{3}$ unidades de área.

11.2. As coordenadas do baricentro do triângulo são dadas por:

$$\text{Baricentro} = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{2+5+8}{3}; \frac{0+3\sqrt{3}+0}{3} \right) = (5; \sqrt{3})$$

O baricentro tem coordenadas $(5; \sqrt{3})$.

12.

12.1. Para determinar as coordenadas dos restantes pontos, necessitamos de dividir o hexágono através de triângulos em que um dos vértices coincide com o centro do hexágono.

O apótema pode ser obtido aplicando um Teorema de Pitágoras:

$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 9 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{36-9}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{27}{4}$$

Logo,

$$h = \sqrt{\frac{27}{4}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3^2 \times 3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

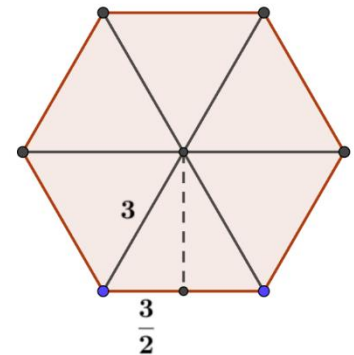
$$2 \times \text{apótema} = 2 \times h = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Logo, podemos concluir que:

$$A\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad B(0, 3\sqrt{3}) \quad C(3, 3\sqrt{3}) \quad D\left(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad E(3, 0) \quad F(0, 0)$$

12.2. O triângulo $[FCD]$ é escaleno, pois:

$$\overline{DC} = 3 \quad \overline{DF} = \overline{EC} = 3\sqrt{3} \quad \overline{FC} = 2 \times 3 = 6$$



12.3. O triângulo $[EFC]$ é retângulo. Logo:

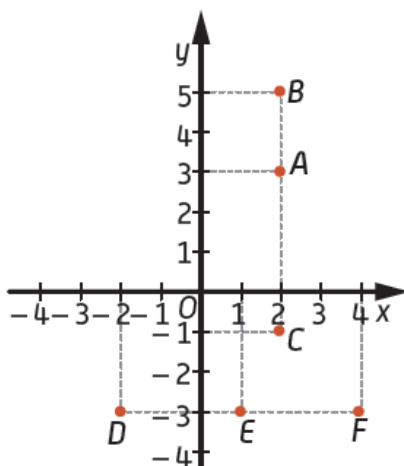
$$A_{[EFC]} = \frac{\overline{FE} \times \overline{EC}}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7,8 \text{ u. a.}$$

A área do triângulo $[EFC]$ é, aproximadamente, 7,8 unidades de área.

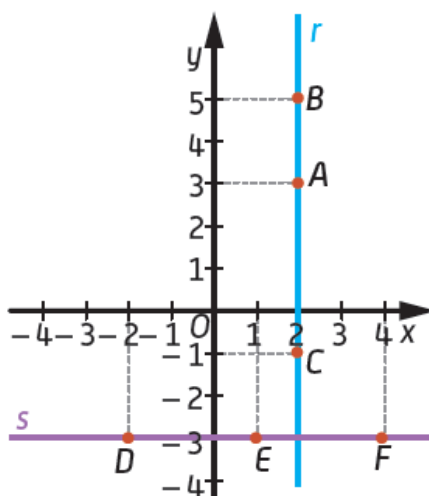
12.4. As coordenadas do centro da circunferência circunscrita ao hexágono coincidem com o ponto central do hexágono. As suas coordenadas são $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. O seu raio é dado pela distância deste centro a um dos vértices do hexágono, ou seja, 3 unidades.

Tarefa 6 – Página 24

1. Fazendo a representação do referencial o.m. xOy e identificando os pontos observamos que:



2. Unindo os pontos, obtemos as seguintes representações de r e s .



3. Todos os pontos da reta r têm como abcissa $x = 2$. Todos os pontos da reta s têm ordenada $y = -3$.

4.

4.1. A reta r é paralela ao eixo das ordenadas.

4.2. A reta s é paralela ao eixo das abcissas.

5.

5.1. $x = 2$

5.2. $y = -3$

Aplicar – Página 25

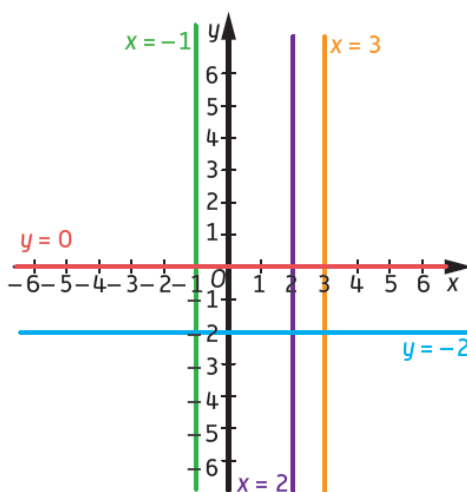
13. Observando o referencial, podemos concluir que:

$$x = 4 \rightarrow \text{reta } c \quad y = -2 \rightarrow \text{reta } d \quad x = -1 \rightarrow \text{reta } a \quad y = 1 \rightarrow \text{reta } b$$

Aplicar – Página 26

14.

14.1. Representando as retas consideradas num referencial ortogonal monométrico xOy , obtemos:

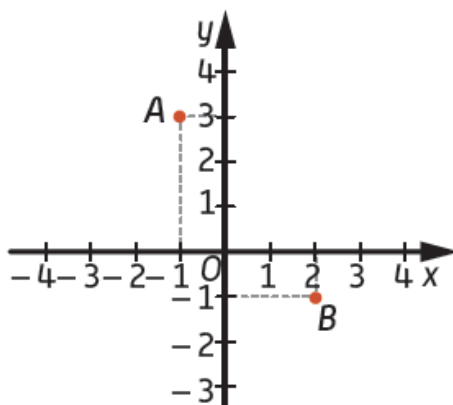


14.2. Tendo em conta as equações das retas, podemos, por exemplo, indicar os seguintes pontos:

- $x = -1 \rightarrow (-1,2) \quad (-1,0)$
- $x = 1 \rightarrow (1,-1) \quad (1,1)$
- $x = 2 \rightarrow (2,3) \quad (2,-4)$
- $y = 0 \rightarrow (\sqrt{3},0) \quad (2,0)$
- $y = -2 \rightarrow (0,-2) \quad (\pi,-2)$

15.

15.1. Fazendo a representação dos pontos em referencial cartesiano ortogonal monométrico xOy , obtemos:

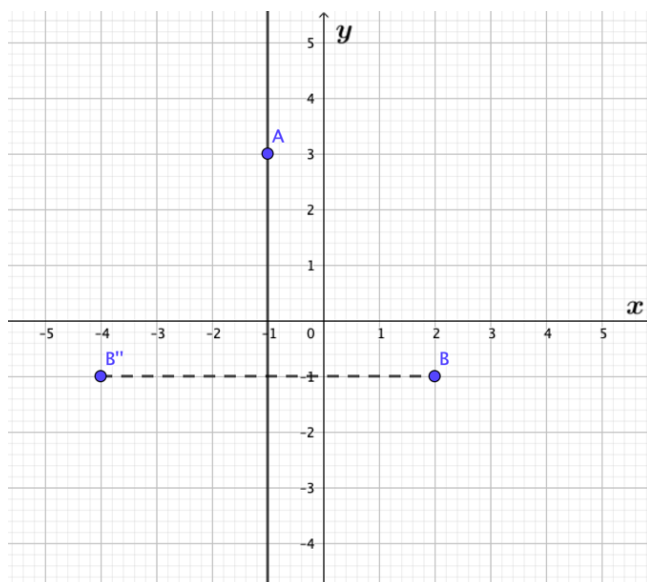


15.2. O transformado de um ponto segundo uma reflexão de eixo das abcissas ($y = 0$) irá sofrer alteração no valor numérico da sua ordenada (que passará a ser simétrica) e manter a sua abcissa. Assim, $A'(-1, -3)$ e $B'(2, 1)$.

15.3.

Neste caso, comecemos por representar a reta $x = -1$:

Como A pertence ao eixo de reflexão, então $A'' = A = (-1, 3)$. No entanto, com B tal não acontece, pelo que por observação $B''(-4, -1)$.



O polígono $[A''BB'']$ é um triângulo, cuja área é dada por:

$$A_{[A''BB'']} = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ u. a.}$$

O polígono $[A''BB'']$ tem 12 unidades de área.

16.

16.1. Como $k = 2$, então:

$$P = \left(2; -2 \times (2 - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(2; -2 \times 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(2; -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(2; \frac{-4 - \sqrt{2}}{2} \right)$$

Pretende-se a equação de uma reta paralela ao eixo das abcissas, expressão do tipo $y = k$ (k constante real).

Como P terá de pertencer a essa reta, podemos concluir que $y = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$ é a equação da reta pretendida.

16.2. Como P pertence à reta $x = \sqrt{2}$, concluímos que:

$$x_P = \sqrt{2} \Leftrightarrow k = \sqrt{2}$$

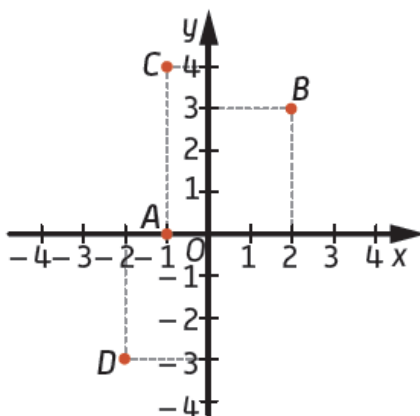
Daqui, podemos determinar a ordenada de P :

$$y_P = -2(\sqrt{2} - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-4\sqrt{2} + 4 - \sqrt{2}}{2} = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2}$$

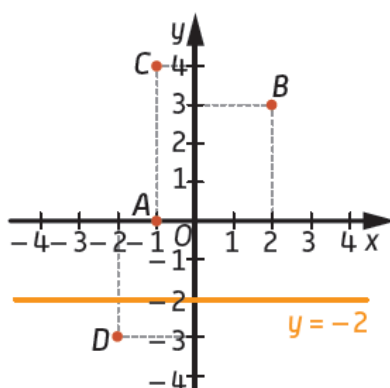
Ou seja, as coordenadas de P são $\left(\sqrt{2}, \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} \right)$.

Tarefa 7 – Página 27

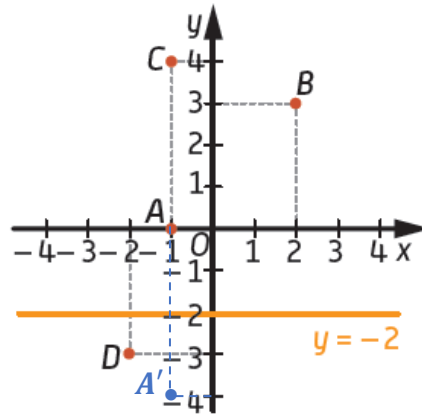
1. Utilizando um referencial cartesiano ortogonal monométrico xOy , podemos representar os pontos da seguinte forma:



2. No mesmo referencial, representemos a reta $y = -2$:

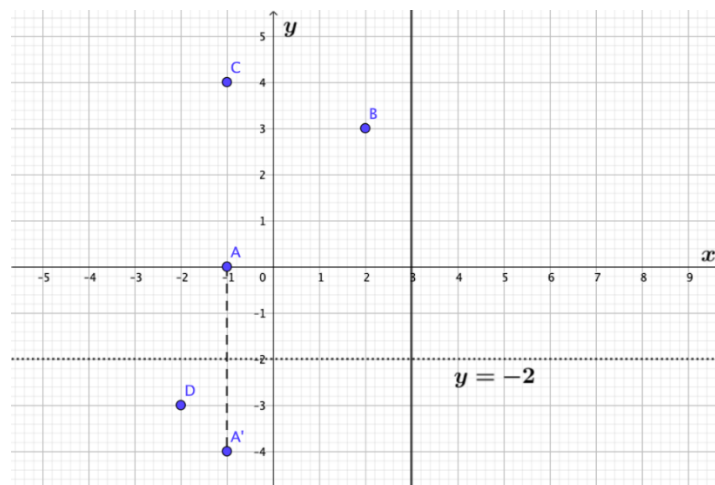


3. Usando as potencialidades do *GeoGebra*, observamos que:

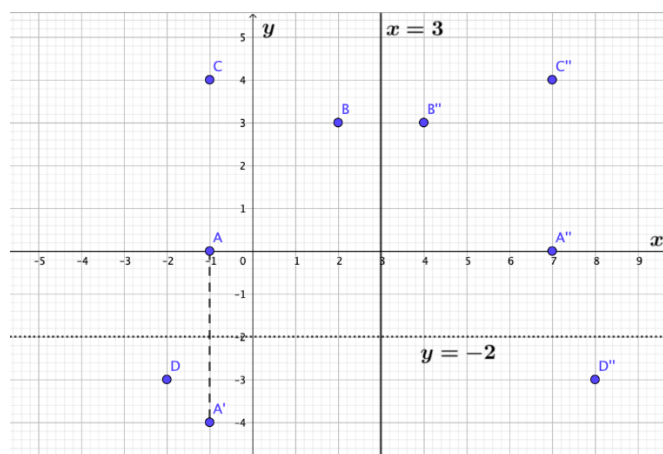


Ou seja, concluímos que $A'(-1, -4)$.

4. Começemos por representar a reta de equação $x = 3$:



Aplicando a reflexão axial aos pontos, segundo o eixo $x = 3$, concluímos que:



$$A''(7,0) \quad B''(4,3) \quad C''(7,4) \quad D''(8,-3)$$

5. Ao aplicar uma meia-volta de centro na origem do referencial ao ponto B , as suas coordenadas passarão a ser simétricas. Ou seja, $B'(-2, -3)$.

Aplicar – Página 27

17.

17.1. Começemos por descobrir dois pontos de cada uma das retas:

x	$y = -2x - 2$	$(x; y)$
0	$y = -2 \times 0 - 2 = -2$	$(0; -2)$
1	$y = -2 \times 1 - 2 = -4$	$(1; -4)$

x	$y = -2x - 2$	$(x; y)$
0	$y = -2 \times 0 - 2 = -2$	$(0; -2)$
1	$y = -2 \times 1 - 2 = -4$	$(1; -4)$

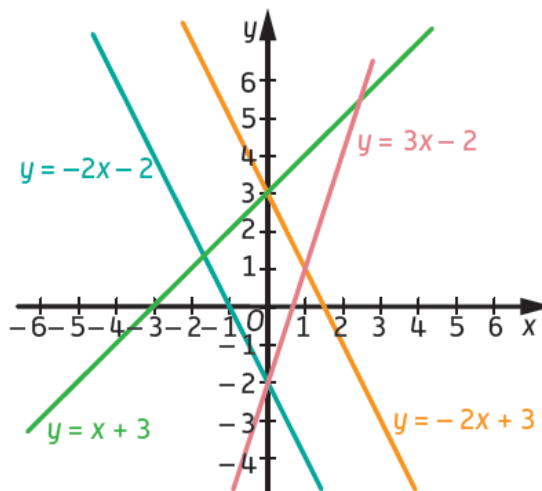
x	$y = -2x - 2$	$(x; y)$
0	$y = -2 \times 0 - 2 = -2$	$(0; -2)$
1	$y = -2 \times 1 - 2 = -4$	$(1; -4)$

x	$y = -2x - 2$	$(x; y)$
0	$y = -2 \times 0 - 2 = -2$	$(0; -2)$
1	$y = -2 \times 1 - 2 = -4$	$(1; -4)$

x	$y = x + 3$	$(x; y)$
0	$y = 0 + 3 = 3$	$(0; 3)$
1	$y = 1 + 3 = 4$	$(1; 4)$

x	$y = -2x + 3$	$(x; y)$
0	$y = -2 \times 0 + 3 = 3$	$(0; 3)$
1	$y = -2 \times 1 + 3 = 1$	$(1; 1)$

Assim, desenhando um referencial cartesiano monométrico, poderemos representar as retas:



17.2. A reta r é definida pela expressão algébrica $y = 3x - 2$. Daqui, concluímos que o seu declive é 3 e a sua ordenada na origem é -2 .

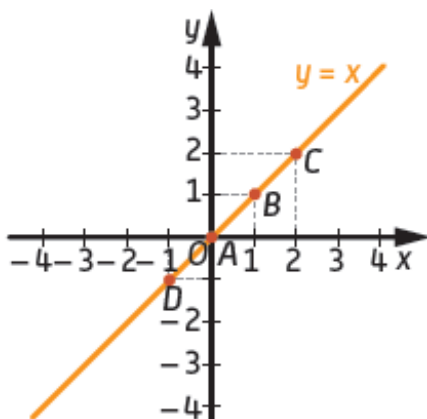
17.3.

a) As retas s e p são paralelas, pois os seus declives são iguais.

b) Por exemplo, as retas r e p são concorrentes. O seu ponto de interseção tem coordenadas $(1; 1)$.

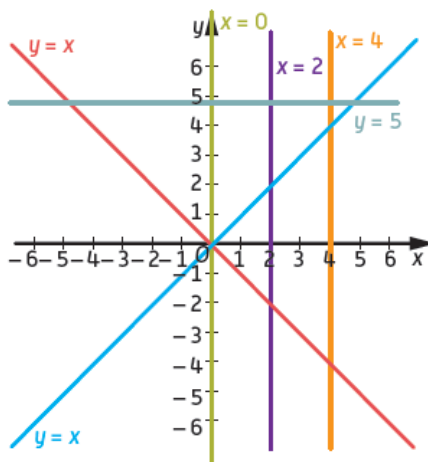
Tarefa 8 – Página 28

1. Pretendemos quatro pontos em que o valor numérico da abcissa coincide com o valor numérico da ordenada. Por exemplo, (1,1), (0,0), (-1, -1) e (2,2).
2. Representando os pontos indicados na questão anterior e unindo-os, obtemos a seguinte reta:



Aplicar – Página 28

18. Usando como base um referencial cartesiano ortogonal e monométrico xOy , as retas consideradas poderão ser representadas na seguinte forma:



19.

19.1. Por observação da figura e tendo em conta que $\overline{AD} = 3$, concluímos que:

$$A(-3,0) \quad C(3,0) \quad D(-3,3) \quad E(3,3) \quad F(-3,-3) \quad G(3,-3)$$

19.2. As retas DG e EF correspondem às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares, respetivamente. Logo, a equação da reta DG é $y = -x$ e a equação de EF é $y = x$.

19.3.

- a) A imagem de F é o ponto D . b) A imagem de D é o ponto E . c) A imagem de F é o ponto E .

19.4. A figura colorida é constituída por dois arcos congruentes correspondentes a metade de uma das circunferências pequenas (que juntos dão uma circunferência pequena) e dois arcos correspondentes a um quarto da circunferência grande (que juntos correspondem a meia circunferência grande).

Assim:

$$P_{\text{figura}} = P_{\text{circunferência pequena}} + \frac{P_{\text{circunferência grande}}}{2}$$

A medida do comprimento do raio da circunferência pequena é de 3 unidades de medida. Para determinar a medida do comprimento do raio da circunferência grande deveremos determinar a distância entre os pontos O e E , ou seja:

$$d(O, E) = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

Assim:

$$P_{\text{circunferência pequena}} = 2 \times \pi \times \text{raio} = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi$$

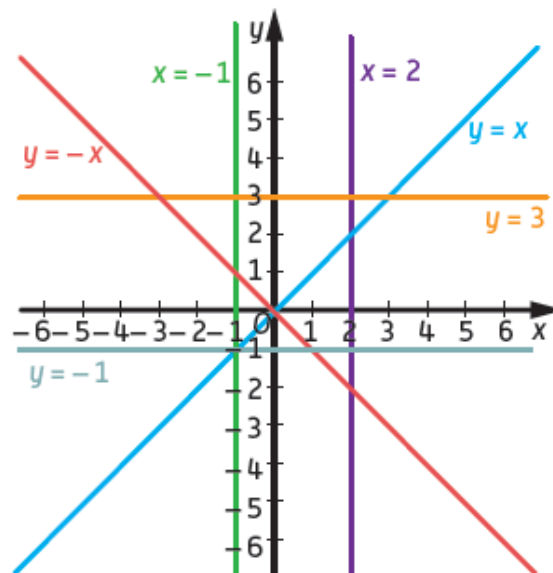
$$\frac{P_{\text{circunferência grande}}}{2} = \frac{2 \times \pi \times \text{raio}}{2} = \frac{2 \times \pi \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}\pi}{2} = 3\sqrt{2}\pi$$

$$P_{\text{figura}} = P_{\text{circunferência pequena}} + \frac{P_{\text{circunferência grande}}}{2} = 6\pi + 3\sqrt{2}\pi = \pi(6 + 3\sqrt{2}) \text{ u. m.}$$

O perímetro da figura é $\pi(6 + 3\sqrt{2})$ unidades de medida.

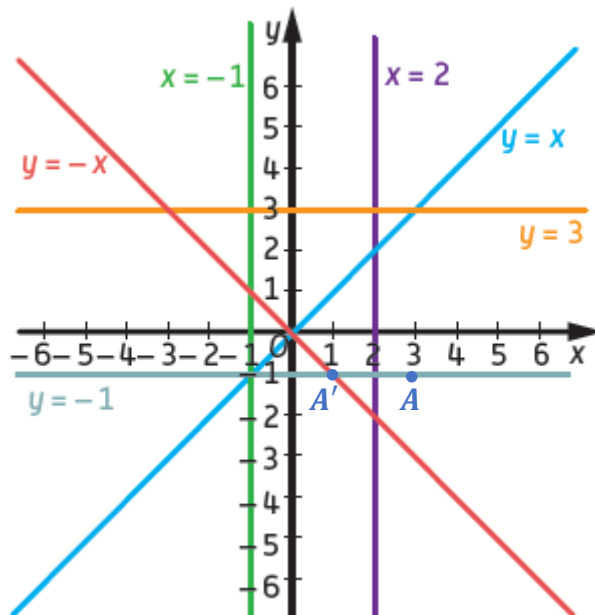
Tarefa 9 – Página 29

1. Podemos representar as retas a partir das suas equações.



2. As retas definidas pelas equações $y = x$ e $y = -x$ são transformadas uma da outra pela reflexão de eixo Oy .

3. O transformado de A pode ser representado por:



Assim, $A(3, -1)$ é transformado em $A'(1, -1)$.

4. O ponto de interseção das retas definidas pelas equações $y = x$ e $y = -x$ é a origem do referencial, ponto $O(0,0)$. Assim, ao aplicar uma meia-volta ao ponto $(2, -1)$ em torno da origem do referencial as suas coordenadas passam a ser simétricas. Ou seja, $(-2,1)$ é o transformado de $(2, -1)$ pela meia-volta de centro na origem do referencial.

Tarefa 10 – Página 29

1. Tendo em conta que as quatro retas são paralelas aos eixos coordenados, então:

$$r: x = 3 \quad s: x = 1 \quad t: y = 3 \quad u: y = 4$$

2.

(A) corresponde ao conjunto de pontos cuja abcissa é superior ou igual a 3.

(B) corresponde ao conjunto de pontos cuja abcissa é inferior ou igual a 1.

(C) constitui o conjunto de pontos cuja ordenada é inferior ou igual a 3.

(D) constitui o conjunto de pontos cuja ordenada é superior ou igual a 4.

Logo, uma condição que defina cada um dos conjuntos de pontos:

(A) $x \geq 3$

(B) $x < 1$

(C) $y \leq 3$

(D) $y > 4$

Aplicar – Página 30

20.

20.1. A condição que define o conjunto de pontos é $x = -3$.

20.2. Neste caso, a condição que define o conjunto de pontos é $x \leq 0$.

20.3. O conjunto de pontos representado é definido pela condição $x > -4$.

Aplicar – Página 31

21.

21.1. O conjunto de pontos representado fica definido pela equação $y = 3$.

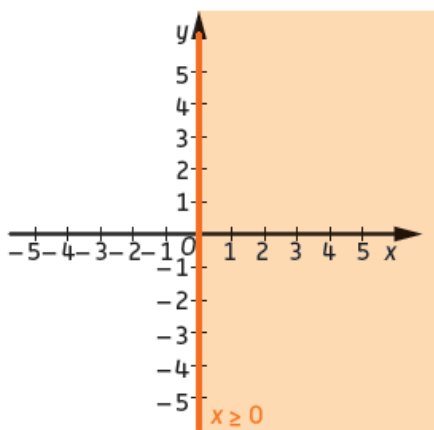
21.2. Este conjunto de pontos é definido pela condição $y \geq -1$.

21.3. Neste caso, o conjunto de pontos pode ser definido pela condição $y \leq 2$.

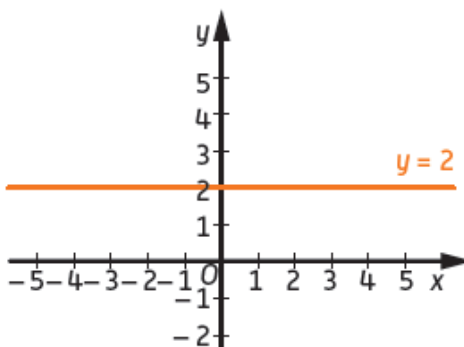
Aplicar – Página 32

22.

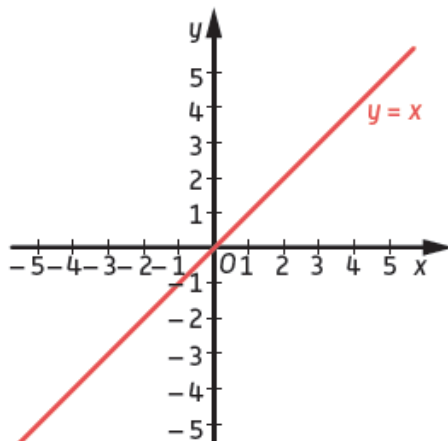
22.1. A representação do semiplano considerado, em referencial o.m. xOy , corresponde a:



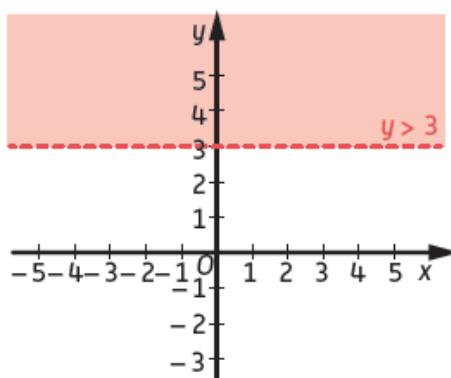
22.2. A representação do conjunto de pontos considerado, em referencial o.m. xOy , corresponde a:



22.3. A representação do conjunto de pontos considerado, em referencial o.m. xOy , corresponde a:



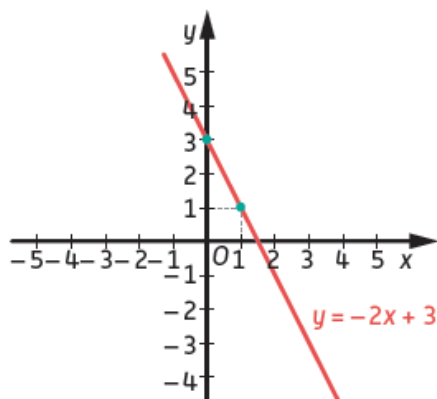
22.4. A representação do semiplano considerado, em referencial o.m. xOy , corresponde a:



22.5. Começemos por determinar dois pontos da reta:

x	$y = -2x + 3$	$(x; y)$
0	$y = -2 \times 0 + 3 = 3$	$(0; 3)$
1	$y = -2 \times 1 + 3 = 1$	$(1; 1)$

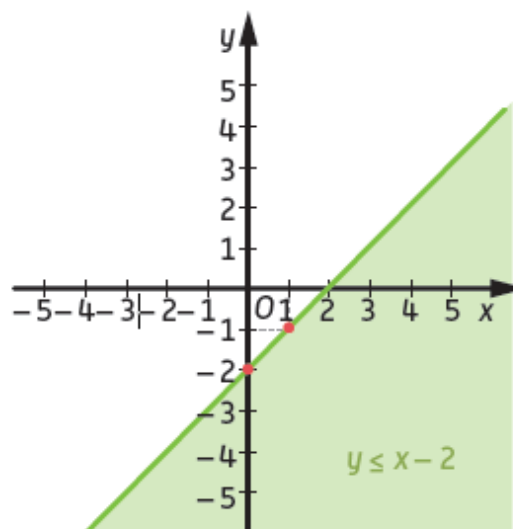
Representado os respetivos pontos, em referencial o.m. xOy , e unindo-os, obtemos a reta pretendida.



22.6.

Determinando as coordenadas de dois pontos da reta que é fronteira do domínio plano fechado, obtemos a seguinte representação:

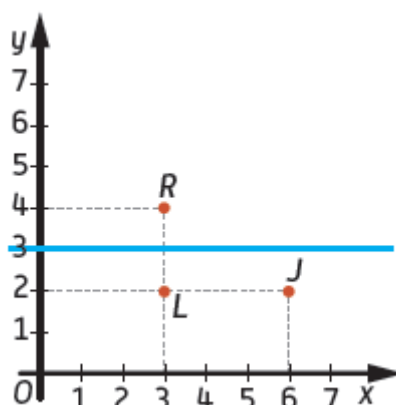
x	$y = x - 2$	$(x; y)$
0	$y = 0 - 2 = -2$	$(0; -2)$
1	$y = 1 - 2 = -1$	$(1; -1)$



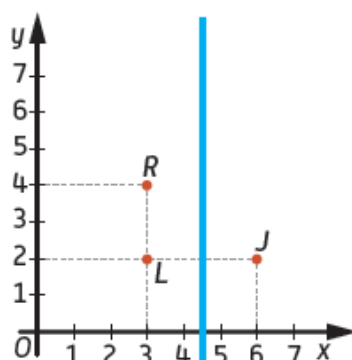
Tarefa 11 – Página 33

1.

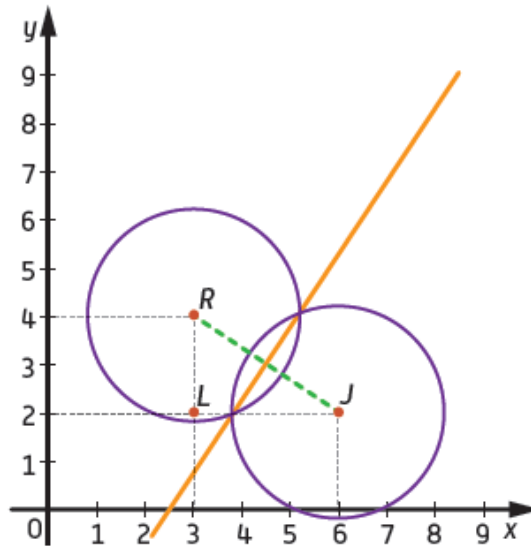
1.1. Por observação da figura, podemos concluir que a localidade da Berta poderá estar localizada em qualquer ponto da reta $y = 3$.



1.2. A localidade do Jorge, tal como observado na figura anterior, estará localizada na reta vertical que passa no ponto médio entre L e J , cuja equação é $x = \frac{9}{2}$:



1.3. Para determinar as possíveis localizações da localidade do Daniel, iremos recorrer à construção da mediatriz de $[RJ]$.



2. As equações que definem os conjuntos de pontos das alíneas 1.1. e 1.2. são $y = 3$ e $x = \frac{9}{2}$.

Sabemos que $R(3,4)$ e que $J(6,2)$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[RJ]$.

Então, $d(P, R) = d(P, J)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} &= \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -6x + 9 - 8y + 16 &= -12x + 36 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y &= -6x + 15 \Leftrightarrow y = \frac{6}{4}x - \frac{15}{4} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Concluimos então que a equação que define as possíveis localizações da casa do Carlos é $y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}$.

3. A localização do ponto do mapa que está à mesma distância das três localidades surge da interseção das três mediatrizes consideradas anteriormente.

$$\text{Ou seja: } \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 3 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

Que no caso, corresponde ao ponto de coordenadas $(\frac{9}{2}, 3)$, ou seja, o circuncentro do triângulo $[LRJ]$.

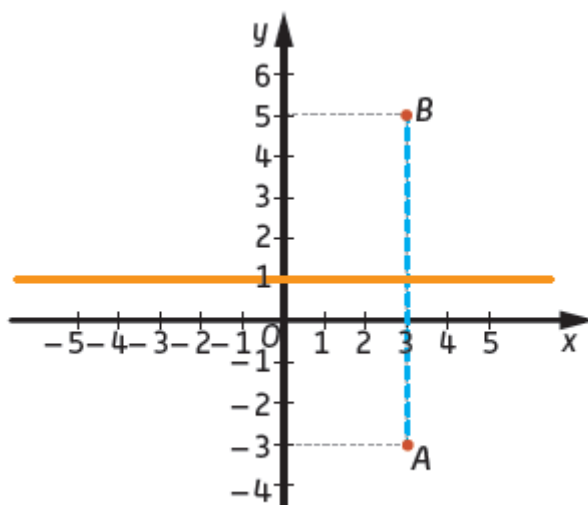
Aplicar - Página 34

23.

23.1. Podemos observar que os pontos A e B assumem o mesmo valor numérico na sua abcissa que é $x = 2$. Portanto, a reta que passa por ambos esses pontos é paralela ao eixo das ordenadas. A sua mediatriz passará entre ambos e será paralela ao eixo das abcissas. Ou seja, a equação da mediatriz de $[AB]$ é dada por

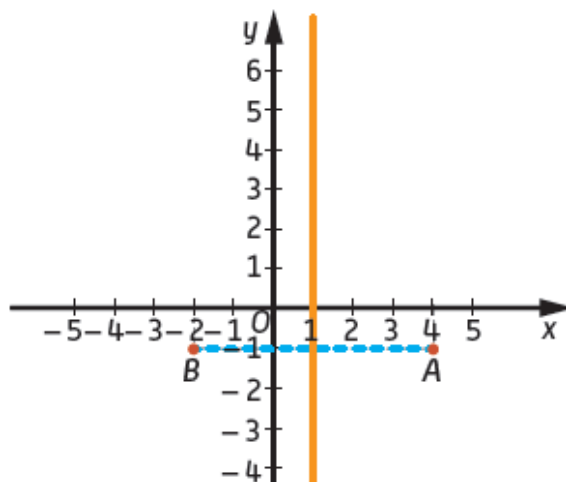
$$y = \frac{5 + (-3)}{2} \Leftrightarrow y = 1.$$

Representando essa mediatriz num referencial cartesiano o.m. xOy , obtemos a seguinte representação:



23.2. Nesta alínea, os pontos A e B partilham o mesmo valor numérico na sua ordenada, portanto a reta que passa por ambos os pontos é horizontal. Assim, a sua mediatriz irá ser uma reta vertical que passa entre ambos os pontos. Ou seja, uma condição que define essa mediatriz é $x = \frac{4 + (-2)}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

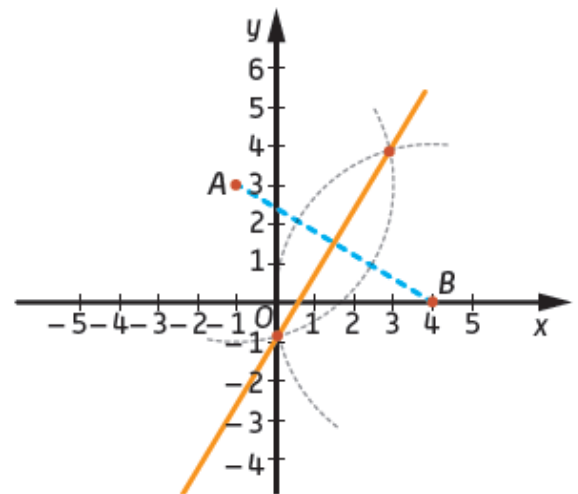
Fazendo a sua representação em referencial cartesiano o.m. xOy , obtemos:



23.3. Considerando um referencial cartesiano ortogonal monométrico xOy , sejam os pontos A e B nele representados:

A equação da mediatriz é:

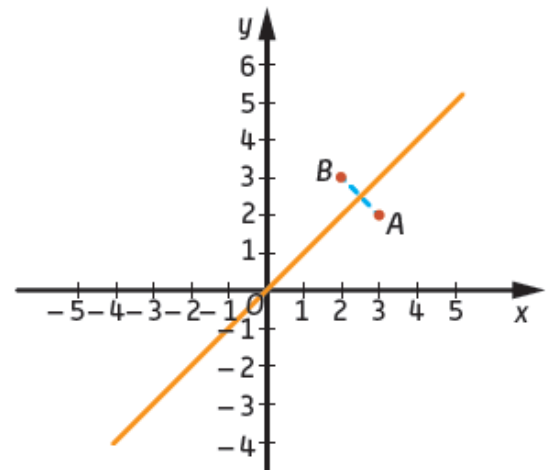
$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - 3)^2 &= (x - 4)^2 + (y - 0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + 1 - 6y + 9 &= -8x + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -6y &= -8x - 2x + 16 - 1 - 9 \Leftrightarrow -6y = -10x + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{10}{6}x - \frac{6}{6} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - 1 \end{aligned}$$



23.4. Representemos os pontos A e B e respetiva mediatriz num referencial cartesiano:

Podemos prever que a equação da mediatriz corresponde à equação que define a bissetriz dos quadrantes ímpares:

$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -6x - 4y &= -4x - 6y \Leftrightarrow -4y + 6y = -4x + 6x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y = 2x &\Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$



Aplicar – Página 35

24.

24.1.

a) Usando a fórmula da equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$, obtemos:

$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x + 4 - 4y + 4 = -6x + 9 - 2y + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y + 2y &= -6x - 4x + 9 + 1 - 4 - 4 \Leftrightarrow -2y = -10x + 2 \Leftrightarrow y = 5x - 1 \end{aligned}$$

b) Aplicando a fórmula da equação da mediatriz do segmento de reta $[BC]$, concluímos que:

$$\begin{aligned} (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 &= (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - (-1))^2 + (y - (-3))^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow -6x - 2y = 2x + 6y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2y - 6y &= 2x + 6x \Leftrightarrow -8y = 8x \Leftrightarrow y = -x \end{aligned}$$

24.2. Para que A pertença à mediatriz de $[BC]$, então as suas coordenadas deverão ser simétricas. Como a abcissa de A é simétrica da sua ordenada, podemos concluir que A pertence à mediatriz de $[BC]$.

25. O circuncentro é o ponto de interseção das mediatrizes do triângulo $[ABC]$.

A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é $y = \frac{3}{2}$, pois A e B pertencem à mesma reta vertical. Basta agora determinar uma das bissetrizes dos outros dois lados.

A fórmula da equação da mediatriz de $[AC]$ permite-nos concluir que:

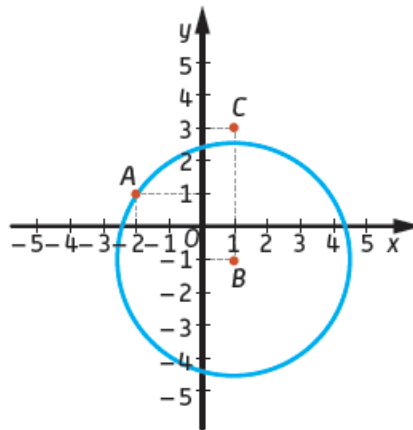
$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x + 2y &= 4x - 2y \Leftrightarrow 2y + 2y = 4x + 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y &= 8x \Leftrightarrow y = 2x \end{aligned}$$

Agora, intersetando as duas mediatrizes, concluímos que: $\begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$

As coordenadas do circuncentro são $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$.

Tarefa 12 – Página 35

1. Usando um referencial cartesiano ortogonal monométrico xOy , o conjunto de pontos que se situam no limite do alcance da emissora são:



2. Para que um possível ouvinte localizado no ponto C consiga ouvir esta emissora de rádio, a sua distância à antena da emissora terá de ser não superior ao raio de alcance do seu sinal. Assim:

$$raio = \overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Logo, podemos concluir que um ouvinte localizado no ponto C não consegue receber sinal da emissora de rádio.

3. Consideremos o ponto $P(x, y)$ do plano, sendo x e y números reais. Para verificar se P pertença à circunferência, a sua distância ao ponto B tem de ser igual a $\text{raio} = \sqrt{13}$. Ou seja:

$$d(P, B) = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x - 1)^2 + (y - (-1))^2} \right)^2 = (\sqrt{13})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

Aplicar – Página 36

26.

26.1. Usando a fórmula da equação reduzida da circunferência, obtemos:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

26.2. Neste caso, a equação reduzida da circunferência é dada por:

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

26.3. Começemos por determinar o raio da circunferência. A medida do comprimento do raio é dado pela distância entre o centro $(3; 0)$ e o ponto $(1; -2)$ contido na circunferência:

$$\text{raio} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

Assim, podemos concluir que a equação reduzida desta circunferência é:

$$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 8$$

26.4. Recorrendo à fórmula da equação reduzida da circunferência, temos que:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

27. Para verificar se o ponto $(-2, -6)$ pertence à circunferência, então a distância desse ponto ao ponto $(2, -2)$ terá de ser igual a $4\sqrt{2}$. Assim:

$$\text{distância} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-6 - (-2))^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-6 + 2)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

Podemos então concluir que $(-2, -6)$ pertence à circunferência.

28.

28.1. Analisando a equação da circunferência, podemos concluir que $\text{Centro} = (1, -3)$ e $\text{raio} = \sqrt{4} = 2$.

28.2. Neste caso, concluímos que $\text{Centro} = (0, 7)$ e $\text{raio} = \sqrt{5}$.

28.3. Tendo em conta a equação que define esta circunferência, verificamos que $\text{Centro} = (-2, 0)$ e $\text{raio} = \sqrt{25} = 5$.

29. O comprimento da circunferência é obtido determinando a medida do comprimento do seu perímetro. Tendo em conta que o seu raio é:

$$r = \sqrt{24} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{6}$$

Assim:

$$P = \pi \times 2 \times r = \pi \times 2 \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}\pi \text{ u. m.}$$

A medida do comprimento da circunferência é $4\sqrt{6}\pi$ unidades de medida.

Aplicar – Página 37

30.

30.1. Tendo em conta as coordenadas do centro do círculo e o seu raio, observamos que:

$$(x - (-1))^2 + (y - (-3))^2 \leq 10^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 100$$

A área do círculo é:

$$A = \pi \times \text{raio}^2 = 10^2\pi = 100\pi \text{ u. a.}$$

A condição que define o círculo é $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 100$ e a sua área é 100π unidades de área.

30.2. Tomando em consideração a equação da circunferência, podemos observar as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 100 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 100 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 6y - 100 + 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 6y - 90 = 0 \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que as equações são equivalentes.

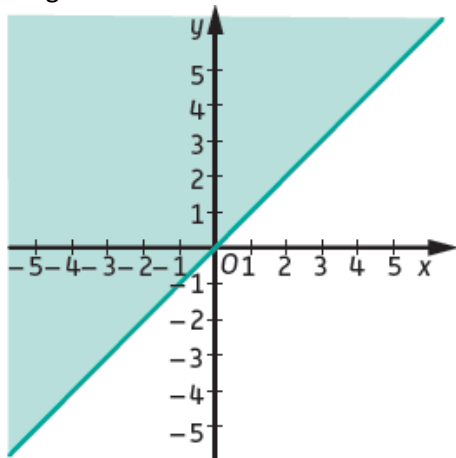
Tarefa 13 – Página 38

1. (A) corresponde ao conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é menor ou igual a 5 e a ordenada é maior ou igual a 3.

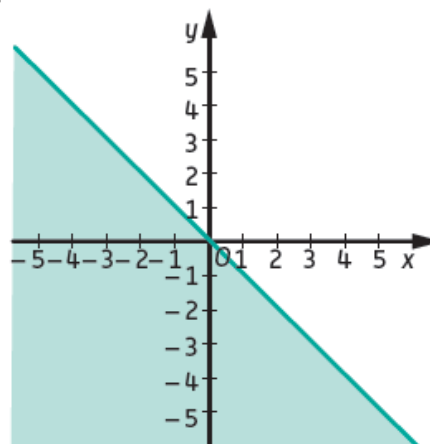
(B) corresponde ao conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é menor ou igual a 0 ou a ordenada é maior ou igual a zero.

2.

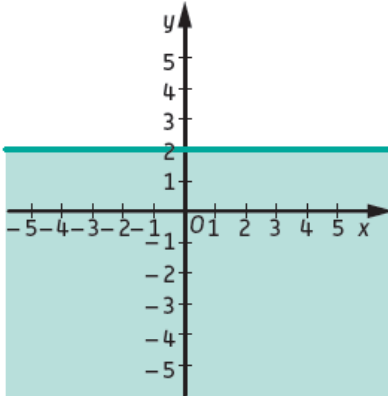
2.1. Poderemos representar este conjunto de pontos da seguinte forma:



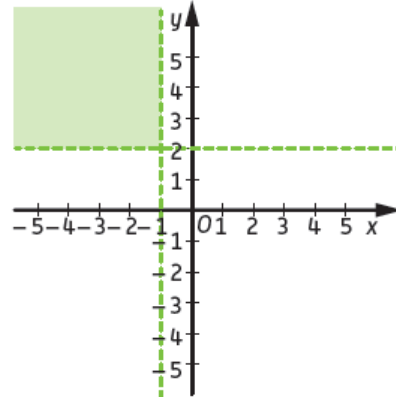
2.2. A representação associada a este conjunto de pontos é:



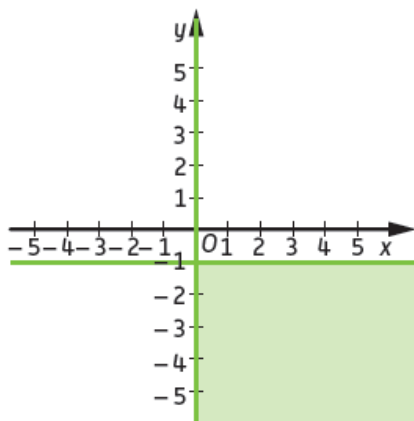
2.3. Neste caso, a ordenada terá de ser não superior a 2, ou seja, terá de ser menor ou igual a 2. Este conjunto de pontos é representado por:



2.4. Podemos concluir que este conjunto de pontos pode ser representado pelo seguinte domínio plano:

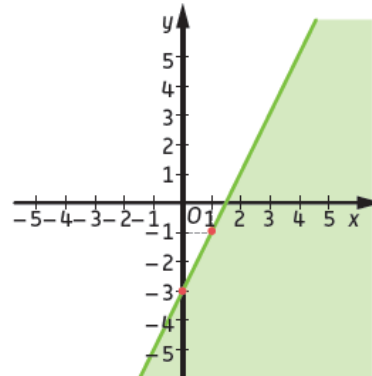


2.5. Este conjunto de pontos fica representado da seguinte forma:



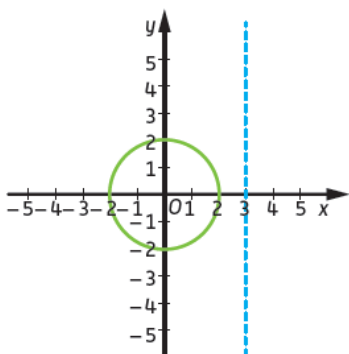
2.6. Começamos por determinar dois pontos da reta que faz a fronteira deste domínio plano e, de seguida, representando-o, obtemos:

x	$y = 2x - 3$	$(x; y)$
0	$y = 2 \times 0 - 3 = -3$	$(0; -3)$
1	$y = 2 \times 1 - 3 = -1$	$(1; -1)$

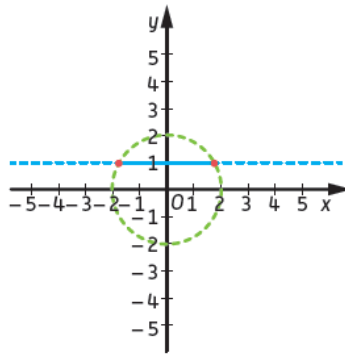


2.7. Nestes casos, a questão menciona um círculo (pois a distância do conjunto de pontos a considerar à origem é menor ou igual a 2) de centro na origem.

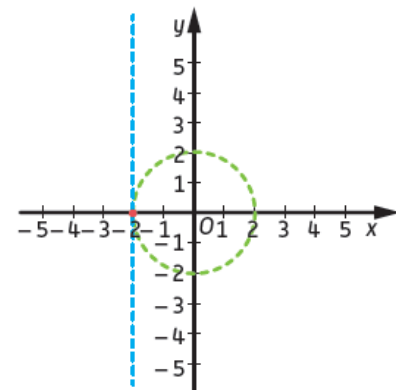
a) A representação deste conjunto de pontos no referencial cartesiano o.m. xOy é:



b) Neste caso, o conjunto de pontos considerado por ser representado por:



c) A representação deste domínio plano é:

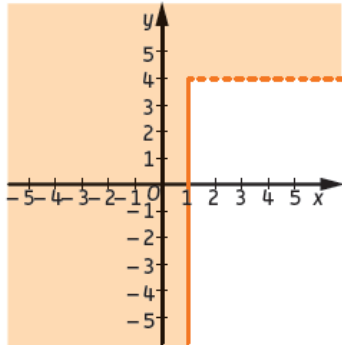


O conjunto de pontos considerado é o conjunto vazio.

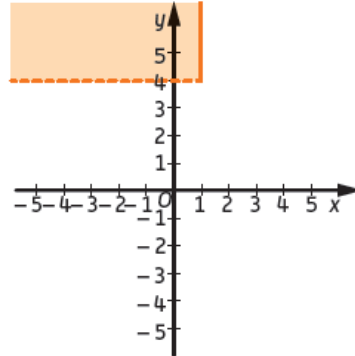
Aplicar – Página 40

31.

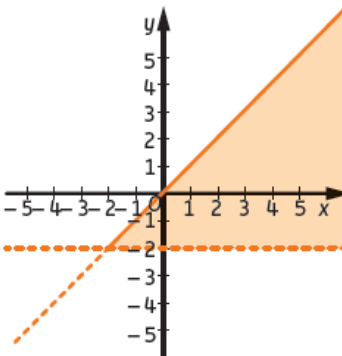
31.1.



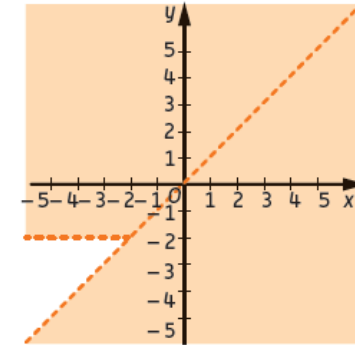
31.2.



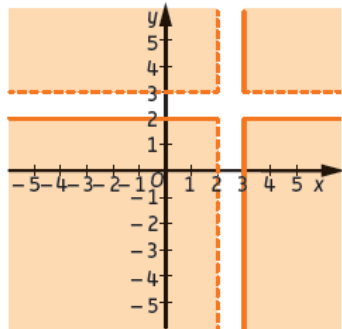
31.3.



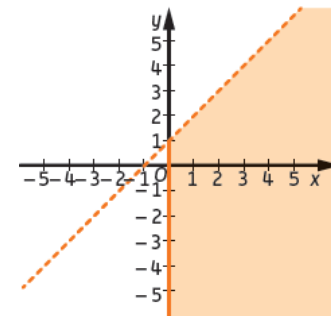
31.4.



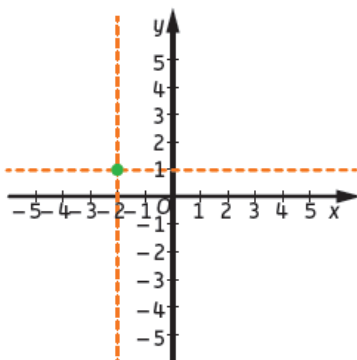
31.5.



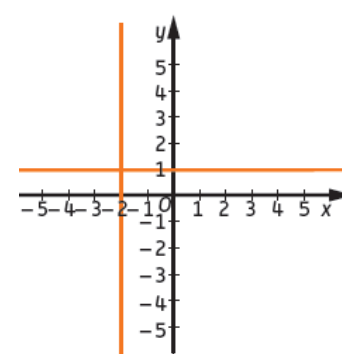
31.6.



31.7.



31.8.

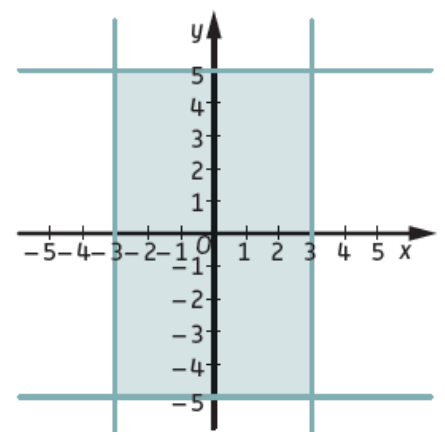


Aplicar – Página 41

32.

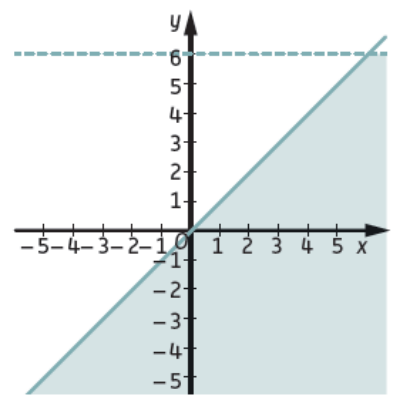
32.1.

Começando por desenvolver a condição dada:
 $|x| \leq 3 \wedge |y| \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \wedge -5 \leq y \leq 5$
 Representando o conjunto de pontos determinados pela condição num referencial cartesiano, vem que:



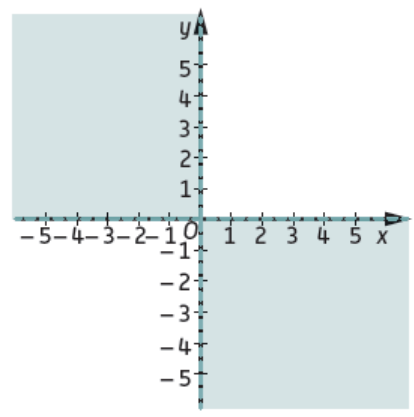
32.2.

Tem-se que:
 $y - x \leq 0 \wedge 6 - y > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y \leq x \wedge -y > 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y \leq x \wedge y < 6$
 Concluimos então que a sua representação em referencial cartesiano é:



32.3.

Verificamos que:
 $xy < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$
 Assim, a representação do conjunto de pontos definidos por esta condição será:



33.

33.1. As fronteiras deste domínio plano ficam definidas pelas seguintes condições:

$$y = x \quad y = -x \quad x = -2 \quad x = 2 \quad y = 4$$

Logo, a condição que define a região colorida é:

$$y \leq 4 \wedge -2 \leq x \leq 2 \wedge y \geq -x \wedge y \geq x$$

33.2.

a) Para determinar o perímetro, comecemos por observar que:

$$A(2; 2) \quad B(2; 4) \quad C(-2; 4) \quad D(-2; 2)$$

Logo:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 4 - 2 = 2 \quad \overline{BC} = 2 - (-2) = 4$$

Tendo em conta que $\overline{OD} = \overline{OA}$ e aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OA}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 4 + 4 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{2^2 \times 2} \Leftrightarrow \sqrt{\overline{OA}} = 2\sqrt{2}$$

Concluimos então que:

$$P_{[OABCD]} = 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times 2 + 4 = (4\sqrt{2} + 8) \text{ u. m.}$$

O perímetro de $[OABCD]$ é $4\sqrt{2} + 8$ unidades de medida.

b) A área do pentágono pode ser obtida por:

$$A_{[OABCD]} = A_{[ABCD]} + A_{[OAD]} = 4 \times 2 + \frac{4 \times 2}{2} = 12 \text{ u. a.}$$

A área do pentágono é 12 unidades de medida.

Aplicar – Página 42

34.

34.1. A condição que define este conjunto de pontos é:

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 < 4^2 \Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y - 4)^2 < 16$$

34.2. Comecemos por determinar o raio da circunferência que delimita este domínio plano:

$$\text{raio} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Neste caso, a condição que define este domínio plano será:

$$(x - 1)^2 + (y - (-4))^2 > \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 > 5$$

34.3. A condição que define a região colorida é dada por:

$$\begin{aligned} (x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leq 3^2 \wedge (x - 4)^2 + (y - 0)^2 \leq 2^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \wedge (x - 4)^2 + y^2 \leq 4 & \end{aligned}$$

34.4. Comecemos por determinar o raio de cada uma das circunferências que são fronteira deste domínio plano:

$$\text{raio}_{\text{pequeno}} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$raio_{grande} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-1 - (-4))^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Neste caso, a condição do domínio plano representado é:

$$\begin{aligned} & ((x - 1)^2 + (y - (-1))^2 \leq \sqrt{10}^2 \wedge (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 \geq (2\sqrt{2})^2) \vee ((x - 1)^2 + (y - (-1))^2 \geq \sqrt{10}^2 \wedge (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 \leq (2\sqrt{2})^2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow ((x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 10 \wedge (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 8) \vee ((x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 10 \wedge (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 8) \end{aligned}$$

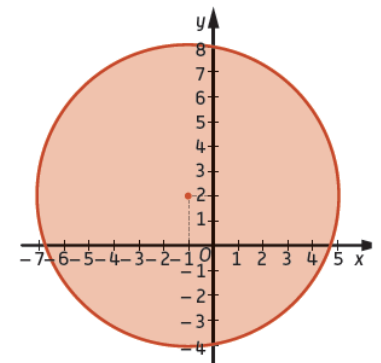
Aplicar – Página 43

35.

35.1.

Corresponde ao conjunto de pontos do plano definidos pelo círculo de centro $(-1; 2)$ e $raio = \sqrt{36} = 6$.

Ou seja:

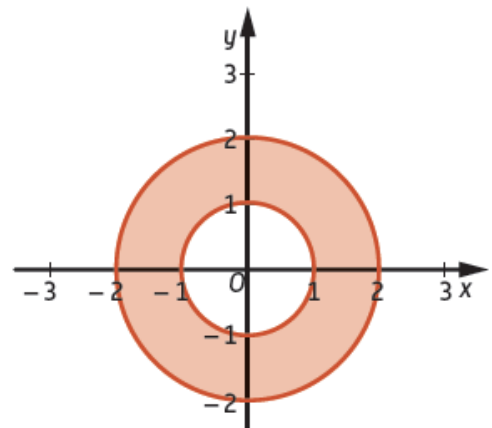


35.2.

Neste caso:

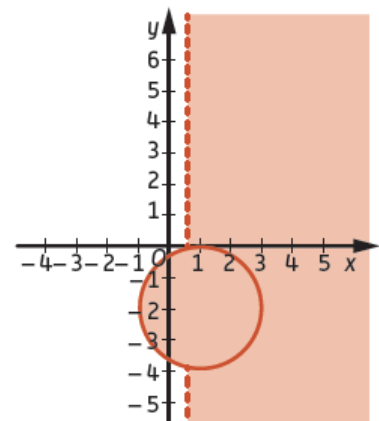
$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$$

Ou seja, corresponde a uma coroa circular delimitada pelas circunferências de centro $(0; 0)$ e raios 1 e 2. Representando-a em referencial cartesiano:



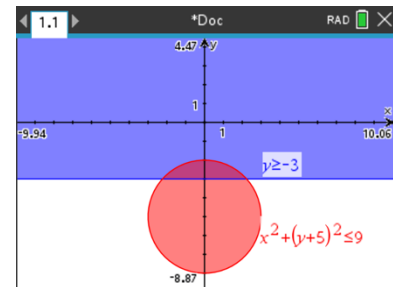
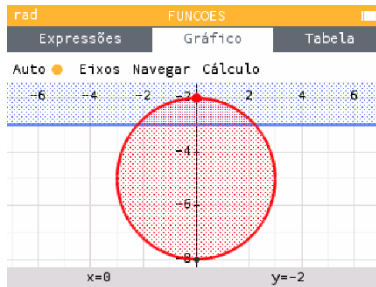
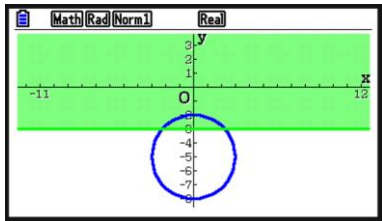
35.3.

O domínio plano considerado corresponde a parte do interior do círculo de raio 2 e centro $(1; -2)$ unido com o conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é superior a $\frac{1}{2}$. Fazendo a sua representação em referencial cartesiano, podemos verificar que:



Momento Calculadora Gráfica - página 43

Usando as potencialidades da calculadora gráfica, obtemos a representação do conjunto de pontos definidos pela condição:



Aplicar + - Páginas 46 a 53

1. Como $a \times b < 0$, então podemos concluir que a e b têm sinais contrários. Os segundo e quarto quadrantes são os únicos quadrantes cujos pontos têm abcissa e ordenada com sinais contrários.

Opção (B)

2. Como A pertence ao quarto quadrante, então $x_A > 0$ e $y_B < 0$. Assim:

$$x_A > 0 \Leftrightarrow -2k - 1 > 0 \Leftrightarrow -2k > 1 \Leftrightarrow 2k < -1 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{2}$$

$$y_A < 0 \Leftrightarrow -3k - 3 < 0 \Leftrightarrow -3k < 3 \Leftrightarrow 3k > -3 \Leftrightarrow k > -\frac{3}{3} \Leftrightarrow k > -1$$

Fazendo a interseção das duas condições, podemos concluir que $k \in]-1; -\frac{1}{2}[$.

Opção (B)

3. Podemos observar que:

- (I) é falsa, pois o transformado do ponto pela reflexão segundo Ox é $(-\sqrt{2}; -2)$.
- (II) é falsa, pois os pontos cuja abcissa é positiva e ordenada é negativa pertencem ao quarto quadrante.

Opção (B)

4. Para que um ponto do plano pertença ao eixo das abcissas, então a sua ordenada terá de ser zero. Logo:

$$y_P = 0 \Leftrightarrow 6 + x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+1}{2} \vee x = \frac{5-1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$$

Opção (C)

5. Seja B o ponto de coordenadas $(x_B; y_B)$. Assim, temos que:

$$M_{[AB]} = (3; 4) \Leftrightarrow \left(\frac{2 + x_B}{2}; \frac{6 + y_B}{2} \right) = (3; 4)$$

Ou seja:

$$\frac{2 + x_B}{2} = 3 \Leftrightarrow 2 + x_B = 6 \Leftrightarrow x_B = 6 - 2 \Leftrightarrow x_B = 4$$

$$\frac{6 + y_B}{2} = 4 \Leftrightarrow 6 + y_B = 8 \Leftrightarrow y_B = 8 - 6 \Leftrightarrow y_B = 2$$

Concluimos então que as coordenadas do ponto B são $(4; 2)$.

Opção (C).

6.

$$d(C, A) = d(C, B) \Leftrightarrow \sqrt{(-3 - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(-3 + 4)^2 + (y + 3)^2} \Leftrightarrow 16 + (y + 2)^2 = 1 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16 + y^2 + 4y + 4 = 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow 10 = 2y \Leftrightarrow y = 5$$

Opção (B).

7.

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5 + 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

Como os comprimentos dos lados são diferentes, então o triângulo é escaleno.

Como $(\sqrt{40})^2 \neq (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{18})^2$, então o triângulo não é retângulo.

Opção (D).

8. Qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas pode ser definida pela condição $x = k, k \in \mathbb{R}$. Para que os pontos A, B e C pertençam à mesma reta vertical (paralela ao eixo das ordenadas), então:

$$x_A = x_B = x_C$$

Ou seja, podemos concluir que $a = 3$ e $b = 3$.

Opção (B)

9. A bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela condição $y = x$, pelo que qualquer ponto que a ela pertença assume o mesmo valor na abcissa e na ordenada. Em particular,

$$x_p = y_p \Leftrightarrow 2k^2 - 5k = k^2 + k - 9 \Leftrightarrow 2k^2 - k^2 - 5k - k + 9 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{6}{2} \Leftrightarrow k = 3$$

Opção (C)

10. Por hipótese, o ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes pares. Assim, podemos observar que $y_P = -x_P$, pelo que $P(x_P; x_P)$.

Assim, poderemos equacionar que:

$$\begin{aligned} \overline{QP} = 5 &\Leftrightarrow d(Q, P) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x_P - 3)^2 + (-x_P - 2)^2} = 5 \Leftrightarrow x_P^2 - 6x_P + 9 + (-x_P)^2 + 4x_P + 4 = 5^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_P^2 - 2x_P + 13 = 25 \Leftrightarrow 2x_P^2 - 2x_P - 12 = 0 \Leftrightarrow x_P^2 - x_P - 6 = 0 \Leftrightarrow x_P = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_P = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x_P = \frac{1+5}{2} \vee x_P = \frac{1-5}{2} \Leftrightarrow x_P = -2 \vee x_P = 3 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que P poderá assumir as coordenadas $(-2; 2)$ ou $(3; -3)$.

Opção (A)

11. A mediatriz de $[AB]$ pode ser obtida usando a seguinte condição:

$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 0)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow -6x + 9 = -2x + 1 - 4y + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6x + 2x + 4y = 1 + 4 - 9 \Leftrightarrow -4x + 4y = -4 \Leftrightarrow x - y = 1 \end{aligned}$$

Opção (A)

12. $d(A, C) = \sqrt{(7 - 1)^2 + (-10 + 2)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Opção (D)

13. Começemos por determinar a medida do comprimento do raio da circunferência.

$$\text{raio} = \frac{\text{diâmetro}}{2} = \frac{d(P, Q)}{2} = \frac{\sqrt{(2 - 4)^2 + (8 - 0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 64}}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 \times 17}}{2} = \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$$

As coordenadas do centro da circunferência irão coincidir com o ponto médio de $[PQ]$, ou seja:

$$M_{[PQ]} = \left(\frac{2 + 4}{2}; \frac{8 + 0}{2} \right) = (3, 4)$$

Assim, concluímos que a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{17}^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$$

Opção (C).

14. Para que $P(-3, k)$, $k \in \mathbb{R}$, pertença a essa circunferência, então $\overline{PC} = 3\sqrt{2}$.

Logo:

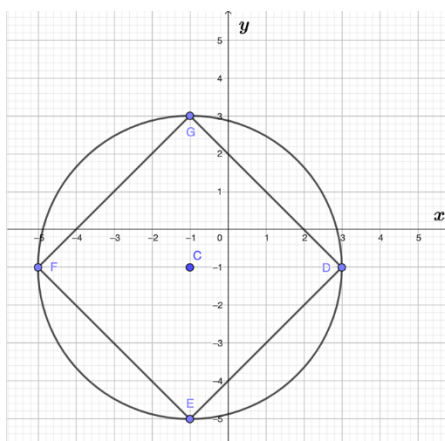
$$\begin{aligned} (-3 - 1)^2 + (k + 5)^2 &= (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 16 + (k + 5)^2 = 18 \Leftrightarrow (k + 5)^2 = 2 \Leftrightarrow k + 5 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \sqrt{2} - 5 \vee k = -\sqrt{2} - 5 \end{aligned}$$

Opção (D)

15. Através da equação reduzida da circunferência, podemos verificar que:

$$\text{centro} = (-1; -1) \quad \text{raio} = \sqrt{16} = 4$$

Podemos então esboçar a circunferência e um dos seus quadrados a si circunscrito:

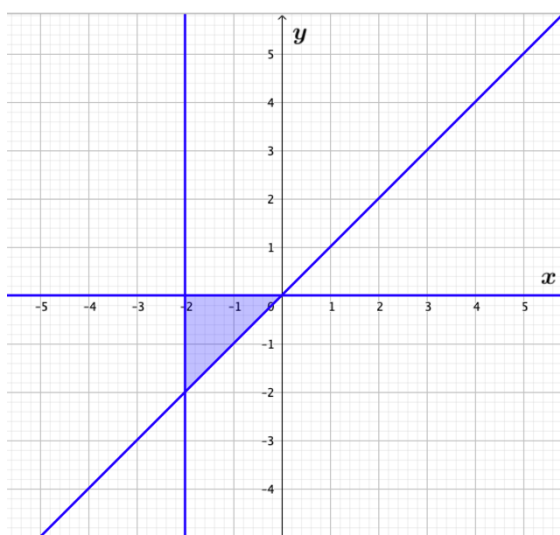


Considerando $D(3; -1)$ e $E(-1; -5)$, vem que:

$$\text{lado} = d(D, E) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - (-5))^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

Opção (B)

16. Trata-se do conjunto de pontos que estão acima da bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja abcissa é maior ou igual a -2 e cuja ordenada é menor ou igual a 0 .



Opção (A)

17. O conjunto de pontos pode ser definido pela disjunção seguinte.

$$(x \geq -2 \wedge x < 2) \vee (y > -1 \wedge y < 3) \Leftrightarrow -2 \leq x < 2 \vee -1 < y < 3$$

Opção (D).

18. Analisando a condição, podemos verificar que:

- O círculo a considerar terá centro no ponto $(0; 0)$ e raio $\sqrt{2}$, o que nos leva a exclusão da opção (A).
- O domínio plano considera o conjunto de pontos cuja ordenada é superior à sua abcissa, pelo que exclui a opção (B).
- Como a condição $x^2 + y^2 \leq 2$ corresponde ao círculo e na representação geométrica está o exterior ao círculo, então podemos excluir desta forma a opção (D).

Opção (C).

19.

19.1. A circunferência desenhada tem centro no ponto D de coordenadas $(3; 4)$. A medida do comprimento do seu raio é 3. Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Assim, a condição que corresponde ao conjunto de pontos representados a sombreado na figura (incluindo a fronteira) é

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9 \wedge y \leq 4$$

Opção (C)

19.2. A medida do comprimento do segmento de reta $[BD]$ é igual à medida do comprimento do raio da circunferência.

$$\overline{BD} = 3 \quad \overline{BC} = \overline{CD} = l$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[BCD]$, concluímos que:

$$l^2 + l^2 = 3^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 9 \Leftrightarrow l^2 = \frac{9}{2}$$

Logo, como $l > 0$, $l = \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow l = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Assim,

$$B = (x_D - l; y_D + l) = \left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Opção (A)

20. Para cada uma das situações consideradas, começemos por determinar a apótema do hexágono. O hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros congruentes. A sua altura h pode ser determinada aplicando o Teorema de Pitágoras.

Ou seja:

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = h^2 \Leftrightarrow \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = h^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = h^2$$

Como $h > 0$, então $\sqrt{\frac{3}{4}} = h \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, podemos então concluir que:

Referencial (A)

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad B = \left(1 + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad C = (2; 0) \quad D = \left(1 + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$E = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad F = (0,0)$$

Referencial (B)

$$A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad C = (1,0) \quad D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$E = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad F = (-1,0)$$

Referencial (C)

$$A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad B = (0,1) \quad C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$E = (0, -1) \quad F = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

21.

21.1. As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são dadas por:

$$M_{[AB]} = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

21.2. As coordenadas do ponto médio de $[BC]$ são determinadas por:

$$M_{[BC]} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = (3,0)$$

21.3. Como C é o ponto médio de $[AD]$, então $\overline{AD} = 2 \times \overline{AC}$.

Temos que:

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-1-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Logo:

$$\overline{AD} = d(A, D) = 2 \times \overline{AC} = 2\sqrt{34}$$

21.4. Seja $E(x_E, y_E)$.

Temos então que:

$$A = M_{[EB]} \Leftrightarrow (-1,2) = \left(\frac{x_E+2}{2}; \frac{y_E+1}{2}\right)$$

Ou seja:

$$\frac{x_E + 2}{2} = -1 \Leftrightarrow x_E + 2 = -2 \Leftrightarrow x_E = -2 - 2 \Leftrightarrow x_E = -4$$

$$\frac{y_E + 1}{2} = 2 \Leftrightarrow y_E + 1 = 4 \Leftrightarrow y_E = 4 - 1 \Leftrightarrow y_E = 3$$

Logo, concluímos que $E(-4; 3)$.

22.

22.1. Tomando como referência a fórmula de cálculo da distância entre dois pontos, verificamos que:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 12)^2 + (7 - (-4))^2} = \sqrt{121 + 121} = \sqrt{242} = \sqrt{11^2 \times 2} = 11\sqrt{2}$$

22.2. Usando a fórmula da distância entre dois pontos no plano, obtemos que:

$$d(C, D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(-1 - 7)^2 + (4 - (-5))^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

23. O perímetro do triângulo $[ABC]$ é obtido através da soma das medidas dos comprimentos dos seus lados. Assim:

$$\text{lado}_1 = d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\text{lado}_2 = d(B, C) = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

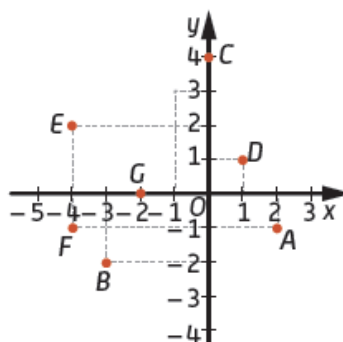
$$\text{lado}_3 = d(A, C) = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Logo, o perímetro do triângulo $[ABC]$ é:

$$P_{[ABC]} = \text{lado}_1 + \text{lado}_2 + \text{lado}_3 = (\sqrt{13} + \sqrt{2} + \sqrt{13}) = (\sqrt{2} + 2\sqrt{13}) \text{ u. m.}$$

24.

24.1. Usando um referencial cartesiano monométrico do plano, os pontos considerados ficam representados da seguinte forma:



24.2. Por observação da representação feita na alínea anterior, podemos concluir que:

- D pertence ao 1.º quadrante;
- E pertence ao 2.º quadrante;
- F e B pertencem ao 3.º quadrante;
- A pertence ao 4.º quadrante;
- C e G não pertencem a nenhum dos quadrantes.

24.3.

a) Para que P pertença à reta de equação $x = 3$, então:

$$x_p = 3 \Leftrightarrow k + 2 = 3 \Leftrightarrow k = 3 - 2 \Leftrightarrow k = 1$$

Logo, $k = 1$.

b) Para que P pertença ao 4.º quadrante, então $x_p > 0$ e $y_p < 0$.

Logo:

$$x_p > 0 \Leftrightarrow k + 2 > 0 \Leftrightarrow k > -2$$

e

$$y_p < 0 \Leftrightarrow -2k + 3 < 0 \Leftrightarrow -2k < -3 \Leftrightarrow k > \frac{3}{2}$$

Podemos concluir que $k \in]-2, +\infty[\cap]\frac{3}{2}, +\infty[\Leftrightarrow k \in]\frac{3}{2}, +\infty[$.

c) Para que P não pertença a nenhum quadrante, então $x_p = 0$ ou $y_p = 0$.

Ou seja:

$$x_p = 0 \Leftrightarrow k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2 \qquad y_p = 0 \Leftrightarrow -2k + 3 = 0 \Leftrightarrow -2k = -3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Ou seja, neste caso, quando $k = -2$ ou $k = \frac{3}{2}$, o ponto P não pertence a nenhum quadrante.

24.4. D' é o transformado do ponto D pela reflexão segundo o eixo das ordenadas.

Assim:

$$D' = (-x_D; y_D) = (-1; 1)$$

D' pertence ao 2.º quadrante.

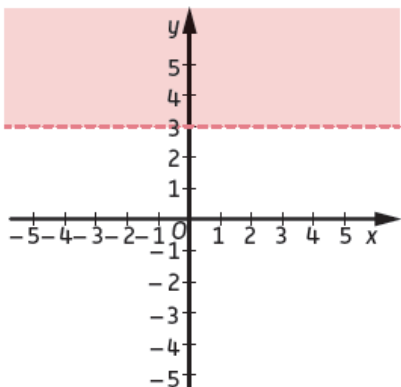
24.5. F' é o transformado obtido pela reflexão de F segundo o eixo Ox . Logo:

$$F' = (x_F; -y_F) = (-5; -(-1)) = (-5; 1)$$

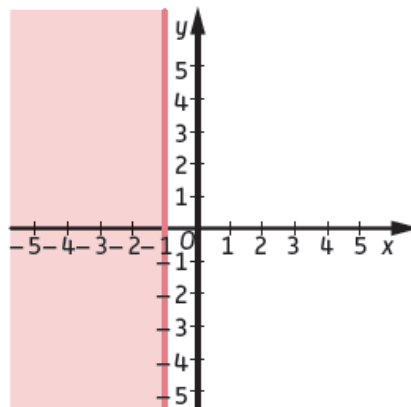
O ponto F' pertence ao 2.º quadrante.

25.

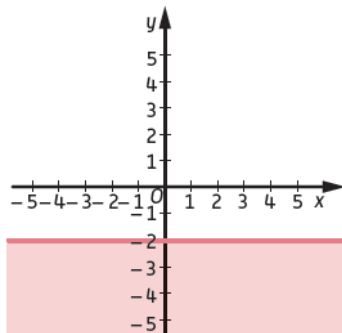
25.1. A condição que define este conjunto de pontos é $y > 3$, sendo que a sua representação em referencial cartesiano é:



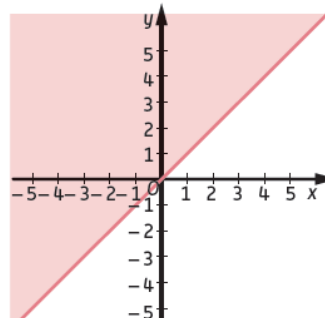
25.2. Este conjunto de pontos fica definido pela condição $x \leq -1$, pelo que a sua representação é:



25.3. Neste caso, a condição que define este conjunto de pontos do plano é $y \leq -2$, sendo a sua representação em referencial cartesiano:

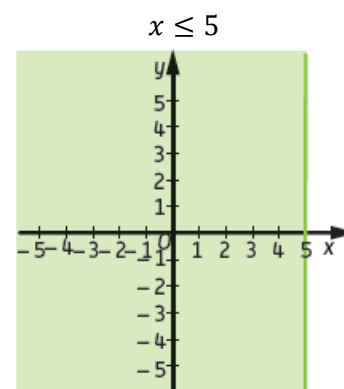
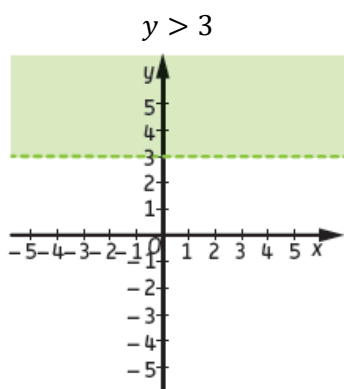
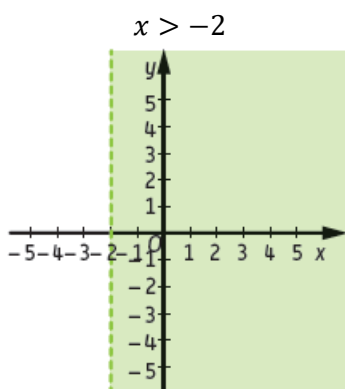


25.4. Neste conjunto de pontos, a abcissa é não superior à sua ordenada, ou seja, a abcissa é menor ou igual á ordenada. Assim, a condição que os define é $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$. A sua representação em referencial cartesiano é:

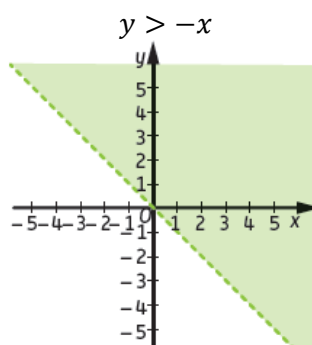
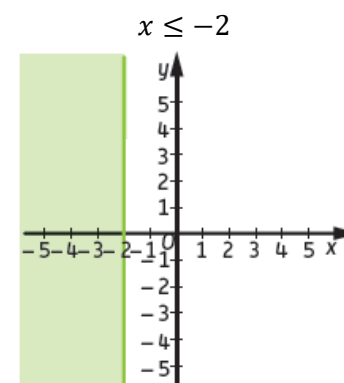
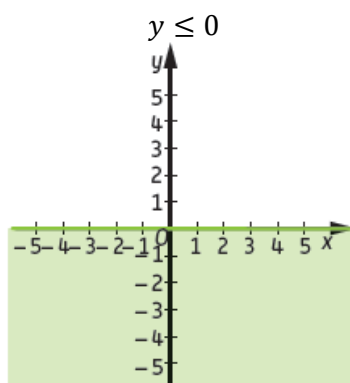
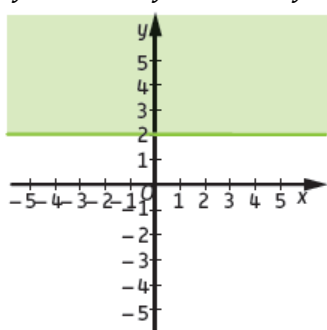


26.

26.1. Usando a representação de um referencial cartesiano para cada condição a considerar, obtemos:



$2 - y \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq -2 \Leftrightarrow y \geq 2$



26.2. Podemos concluir que:

- Semiplanos fechados: $x \leq 5$; $2 - y \leq 0$; $y \leq 0$; $x \leq -2$.
- Semiplanos abertos: $x > -2$; $y > 3$; $y > -x$.

26.3. Analisando cada uma das opções, concluímos que apenas o ponto $(0; 3)$ cumpre aos semiplanos $x > -2$ e $y > -x$.

Opção (D)

27.

27.1. Sabemos que $C(5; -2)$ é o centro da circunferência. Precisamos de determinar o raio desta circunferência:

$$\text{raio} = d(C, A) = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 5$$

27.2. Para que $B(6,0)$ pertença a esta circunferência, então as suas coordenadas devem cumprir com a condição algébrica que define a circunferência. Ou seja:

$$B(6; 0) \quad (6 - 5)^2 + (0 + 2)^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Concluimos então que B pertence à circunferência.

27.3. No caso do ponto $D(4; -1)$, tem-se que: $(4 - 5)^2 + (-1 + 2)^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

Como 2 é menor do que 5, podemos concluir que D não pertence à circunferência, mas pertence ao círculo com o mesmo centro e o mesmo raio da circunferência dada.

28. Os pontos A , B e C são vértices de um triângulo $[ABC]$. A circunferência da qual se pretende determinar a equação é uma circunferência cujo centro é o ponto de interseção das mediatrizes dos seus lados.

Como sabemos que as três mediatrizes interseitam-se todos no mesmo ponto (o circuncentro), basta determinar a interseção de duas das mediatrizes do lado, para descobrir o circuncentro. Assim:

- Mediatriz de $[AB]$

$$\begin{aligned} (x - (-5))^2 + (y - 3)^2 &= (x - (-3))^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = (x + 3)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 10x + 25 - 6y = 6x - 2y + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -6y + 2y &= 6x - 10x - 25 + 1 \Leftrightarrow -4y = -4x - 24 \Leftrightarrow y = x + 6 \end{aligned}$$

- Mediatriz de $[AC]$

$$\begin{aligned} (x - (-5))^2 + (y - 3)^2 &= (x - (-7))^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = (x + 7)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 + 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10x + 25 - 6y + 9 &= 14x + 49 - 2y + 1 \Leftrightarrow -6y + 2y = 14x - 10x + 49 + 1 - 25 - 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y &= 4x + 16 \Leftrightarrow y = -x - 4 \end{aligned}$$

Logo, o circuncentro será obtido através da resolução do sistema:

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ x + 6 = -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ 2x = -4 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 + 6 \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

As coordenadas do circuncentro são $(-5; 1)$. Já o raio da circunferência circunscrita é obtido ao determinar a distância do circuncentro a um dos vértices do triângulo. Ou seja:

$$\text{raio} = \sqrt{(-5 - (-5))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$$

Concluimos então que a equação da circunferência que passa pelos pontos A , B e C é:

$$(x - (-5))^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

29.

29.1. Por observação e análise da figura, podemos concluir que:

$$a = x_C = -2 \quad b = y_A = 4$$

Logo, $D(-2; 4)$. O raio da circunferência é obtido por:

$$\text{raio} = d(B, D) = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

Concluimos então que a circunferência é definida pela equação:

$$(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$$

29.2.

a) A mediatriz de $[BC]$ é uma reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa no ponto médio de $[BC]$.

$$\text{Logo: } M_{[BC]} = \left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{-1+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -1 \right)$$

Assim, a mediatriz de $[BC]$ é definida pela condição $x = \frac{1}{2}$.

b) Neste caso, a mediatriz de $[AB]$ é uma reta paralela ao eixo das abcissas e que passa no ponto médio de $[AB]$.

$$\text{Ou seja: } M_{[AB]} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+(-1)}{2} \right) = \left(3, \frac{3}{2} \right)$$

Concluimos que a mediatriz de $[AB]$ é dada pela condição $y = \frac{3}{2}$.

c) $A(3,4)$, $C(-2, -1)$

A mediatriz de $[AC]$ pode ser obtida usando a seguinte condição:

$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow -6x + 9 - 8y + 16 = 4x + 4 + 2y + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -10y &= 10x - 20 \Leftrightarrow y = -x + 2 \end{aligned}$$

29.3. A área da parte colorida irá ser obtida pela diferença entre a área do círculo representado e a área do quadrado $[ABCD]$.

$$\text{Ou seja: } lado_{\text{quadrado}} = d(A, B) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{0 + 25} = 5$$

$$raio = 5\sqrt{2} \quad A_{\text{círculo}} = \pi \times (5\sqrt{2})^2 = 50\pi \quad A_{\text{quadrado}} = 5^2 = 25 \quad A_{\text{colorida}} = (50\pi - 25) \text{ u. a.}$$

30.

30.1. Por hipótese, $[ABC]$ é um triângulo equilátero, pelo que:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = d(A, B) = 2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[OBC]$, vem que:

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + \overline{OC}^2 = 2^2 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 3$$

Como $\overline{OC} > 0$, então $\overline{OC} = \sqrt{3}$

Assim, podemos deduzir que C tem como coordenadas $(0; \sqrt{3})$, como queríamos mostrar.

30.2. O centro da circunferência irá coincidir com o baricentro do triângulo $[ABC]$, por este ser equilátero. Logo:

$$\text{Centro} = \text{Baricentro} = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{-1 + 1 + 0}{3}; \frac{0 + 0 + \sqrt{3}}{3} \right) = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Já a medida do comprimento do seu raio irá corresponder a $\frac{2}{3}$ de \overline{OC} (como estudado anteriormente), ou seja, $raio = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Concluimos que:

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4 \times 3}{9} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{12}{9} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

30.3.

a) As retas verticais tangentes à circunferência vão ser definidas por condições $x = k, k \in \mathbb{R}$. Tem-se que então que:

$$x = x_{\text{centro}} + raio = 0 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x = x_{\text{centro}} - raio = 0 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) As retas horizontais tangentes à circunferência vão ser definidas por condições $y = k, k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ou seja: } y = y_{\text{centro}} + raio = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \quad y = y_{\text{centro}} - raio = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

30.4. A área da região sombreada irá ser calculada pela subtração à área do círculo da área do triângulo $[ABC]$.

$$\text{Assim: } A_{\text{círculo}} = \pi \times raio^2 = \pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4}{3}\pi. \quad A_{\text{triângulo}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Concluimos então: } A_{\text{sombreada}} = \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right) \text{ u. a.}$$

31.

31.1. Tem-se que: $x \leq -1$

31.2. Por observação, concluímos que: $y > 2$

31.3. Concluímos que: $x < -1 \vee x > 3$

31.4. Temos que: $x < 2 \vee y \geq -1$

31.5. O domínio plano representado fica definido pela condição: $(y < -x \wedge y > x) \vee (y > -x \wedge y < x)$

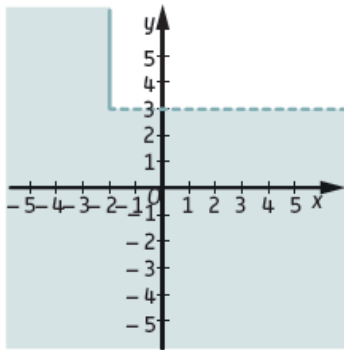
31.6. Tem-se que: $y > x \wedge y < -x \wedge x \geq -2$

31.7. Vem que: $(y > x \wedge y \leq 2) \vee (y > x \wedge x > 3)$

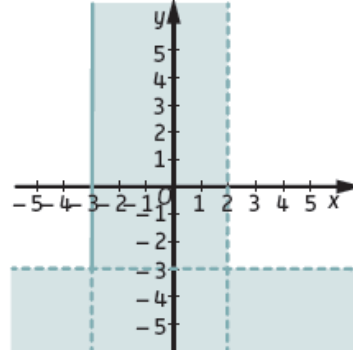
31.8. O conjunto de pontos da região colorida fica definido por: $0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 4$

32. Usando um referencial cartesiano ortogonal monométrico, obtemos as seguintes representações dos lugares geométricos considerados:

32.1. $y < 3 \wedge x \leq -1$



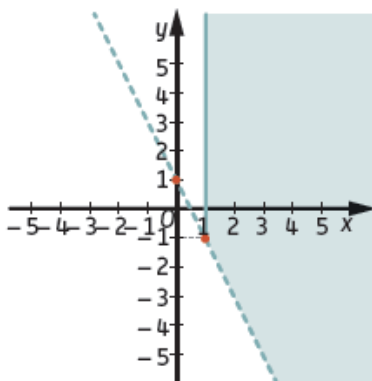
32.2. $y > x \wedge x < 2$



32.3. $y > -2x + 1 \wedge x \geq 1$

$$x = 0 \rightarrow y = -2 \times 0 + 1 = 1 \rightarrow (0; 1)$$

$$x = 1 \rightarrow y = -2 \times 1 + 2 = -1 \rightarrow (1; -1)$$

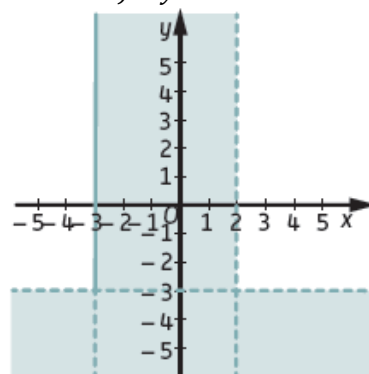


32.4. $(x \geq -3 \wedge x < 2) \vee y < -3$

$$(x \geq -3 \wedge x < 2) \vee -3 - y < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \geq -3 \wedge x < 2) \vee -y < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \geq -3 \wedge x < 2) \vee y < -3$$



33.

33.1.

a) $x = -1$

b) $y = -2$

c) $A(-3, -1), C(1, -3)$

A mediatriz de $[AC]$ pode ser obtida usando a seguinte condição:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow 6x + 2y = -2x + 6y \Leftrightarrow -4y = -8x \Leftrightarrow y = 2x$$

33.2. $-3 \leq y \leq -1 \wedge -3 \leq x \leq 1$

34.

34.1. Por hipótese, temos que $\overline{AC} = 2 \times \overline{AO} = 2 \times 4 = 8$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$, temos que:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow l^2 + l^2 = 8^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 64 \Leftrightarrow l^2 = \frac{64}{2} \Leftrightarrow l^2 = 32$$

Como $l > 0$, $l = \sqrt{32} \Leftrightarrow l = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} \Leftrightarrow l = 4\sqrt{2}$

Daqui, podemos verificar que:

$$A = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{2}; \frac{4\sqrt{2}}{2}\right) = (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \quad B = \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}; \frac{4\sqrt{2}}{2}\right) = (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$$

$$C = \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}; -\frac{4\sqrt{2}}{2}\right) = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) \quad D = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{2}; -\frac{4\sqrt{2}}{2}\right) = (-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$$

34.2. A área da região representada a sombreada é dada pela condição:

$$x \geq -2\sqrt{2} \wedge y \geq -2\sqrt{2} \wedge y < -x$$

34.3. A área do quadrado e do losango podem ser obtidas da seguinte forma:

$$A_{\text{quadrado}} = (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32 \text{ u. a.}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{\overline{DB} \times \overline{EF}}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ u. a.}$$

Logo:

$$\text{razão} = \frac{32}{16} = 2$$

Concluimos então que a área do quadrado corresponde ao dobro da área do losango.

34.4. A área delimitada é dada pelo seguinte cálculo:

$$A_{\text{delimitada}} = \frac{A_{\text{círculo}}}{4} - A_{[AOB]} = \frac{\pi \times 4^2}{4} - \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\pi - \frac{8 \times 2}{2} = (4\pi - 8) \text{ u. a.}$$

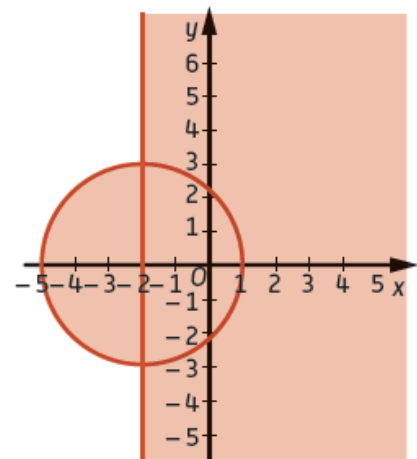
35.

35.1. Temos que:

$$(x + 2)^2 + y^2 \leq 9 \vee x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 0)^2 \leq 3^2 \vee x \geq -2$$

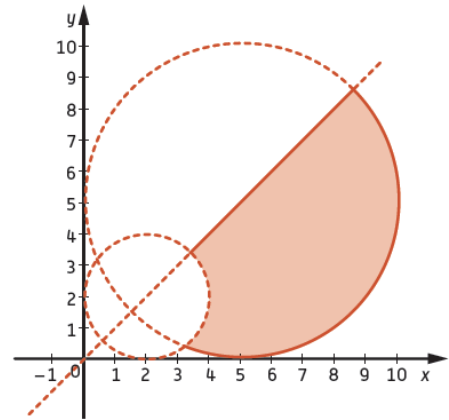
Ou seja, fazendo a representação das condições num referencial cartesiano ortogonal monométrico, obtemos o seguinte domínio plano:



35.2. Neste caso:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 4 \wedge (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \leq 25 \wedge y \leq x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 > 2^2 \wedge (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \leq 5^2 \wedge y \leq x$$

Fazendo a representação do domínio plano, vem que:



36.

36.1. Começemos por definir as circunferências representadas por uma condição:

$$centro_1 = (0; 0) \quad raio_1 = 2 \quad raio_2 = 6$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 36$$

A condição que define o domínio plano representado é:

$$x^2 + y^2 \geq 4 \wedge x^2 + y^2 < 36$$

36.2. As fronteiras deste domínio plano são dadas por:

$$y = x$$

$$centro_1 = (-2; -3) \quad raio_1 = 3 \quad (x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

$$centro_2 = (0; 0) \quad raio_2 = 2 \quad (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Logo, este domínio plano é definido pela condição:

$$x^2 + y^2 < 4 \wedge (x + 2)^2 + (y + 3)^2 < 9 \wedge y \leq x$$

36.3. As fronteiras neste domínio plano são:

$$y = 2 \quad x = -3$$

$$centro = (-3; 2) \quad raio = 3 \quad (x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Concluimos que a condição que o define é:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 \geq 9 \wedge x \geq -3 \wedge y \leq 2$$

36.4. As fronteiras deste domínio plano são:

$$y = x \quad y = -x$$

$$centro = (0; 0) \quad raio = 4 \quad (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$$

Neste caso, o domínio plano vai ser definido por uma disjunção de condições, ou seja:

$$[x^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \geq -x \wedge y \geq x] \vee [x^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \leq -x \wedge y \leq x]$$

37.

37.1. Por observação das representações das duas circunferências, podemos verificar que C_2 possui um raio superior ao raio da circunferência C_1 . Assim, podemos fazer a seguinte associação:

$$C_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \qquad C_2: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

37.2. A origem do referencial pertence a ambas as circunferências, pois: $O(0; 0)$

$$(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 1 + 1 = 2 \qquad (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = 4 + 4 = 8$$

Logo, $O(0; 0)$ pertence a C_1 e C_2 .

37.3. Por observação, podemos concluir que:

$$A = (0; y_A) \quad B = (0; y_B) \quad C = (x_C; 0) \quad D = (x_D; 0)$$

Como os pontos pertencem às circunferências representadas, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} A = (0; y_A) &\rightarrow (0 - 1)^2 + (y_A - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + (y_A - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (y_A - 1)^2 = 2 - 1 \Leftrightarrow (y_A - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_A - 1 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow y - 1 = 1 \vee y - 1 = -1 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = 0 \end{aligned}$$

Como $y_A \neq 0$, então $y = 2$

$$\begin{aligned} B = (0; y_B) &\rightarrow (0 - 2)^2 + (y_B - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow 4 + (y_B - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow (y_B - 2)^2 = 8 - 4 \Leftrightarrow (y_B - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_B - 2 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow y_B - 2 = 2 \vee y_B - 2 = -2 \Leftrightarrow y_B = 2 + 2 \vee y_B = -2 + 2 \Leftrightarrow y_B = 4 \vee y_B = 0 \Leftrightarrow_{y_B \neq 0} y_B = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = (x_C; 0) &\rightarrow (x_C - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x_C - 1)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow (x_C - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_C - 1 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_C - 1 = 1 \vee x_C - 1 = -1 \Leftrightarrow x_C = 1 + 1 \vee x_C = -1 + 1 \Leftrightarrow x_C = 2 \vee x_C = 0 \Leftrightarrow_{x_C \neq 0} x_C = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = (x_D; 0) &\rightarrow (x_D - 2)^2 + (0 - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_D - 2)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow (x_D - 2)^2 = 8 - 4 \Leftrightarrow (x_D - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_D - 2 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x_D - 2 = 2 \vee x_D - 2 = -2 \Leftrightarrow x_D = 2 + 2 \vee x_D = -2 + 2 \Leftrightarrow x_D = 4 \vee x_D = 0 \Leftrightarrow_{x_D \neq 0} x_D = 4 \end{aligned}$$

Logo, $A(0; 2)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$ e $D(4; 0)$. Assim, o perímetro do quadrilátero é dado por:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 4 - 2 = 2$$

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = d(B, D) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$P_{[ABCD]} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{AC} + \overline{BD} = 2 + 2 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (4 + 6\sqrt{2}) \text{ u. m.}$$

37.4. O domínio plano representado pela região colorida é definido pela condição:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 2 \wedge (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$$

37.5. A área da região sombreada é calculada através da subtração das áreas do círculo definido por C_2 e do círculo C_1 .

$$\text{Ou seja: } \text{raio}_1 = \sqrt{2} \quad A_{C_1} = \pi \times \sqrt{2}^2 = 2\pi$$

$$\text{raio}_2 = \sqrt{8} \quad A_{C_2} = \pi \times \sqrt{8}^2 = 8\pi \quad A_{\text{colorida}} = 8\pi - 2\pi = (6\pi) \text{ u. a.}$$

Opção (D)

Avaliar – Páginas 54 a 56

1.

1.1. Os pontos representados no referencial são definidos pelas seguintes coordenadas:

$A(1,1)$	$B(2,-2)$	$C(-3,-3)$	$D(0,4)$	$E(3,2)$	$F(3,3)$	$G(-2,2)$
$H(-4,0)$	$I(6,-2)$	$J(3,-4)$	$K(0,-3)$	$L(-6,-1)$	$M(-5,5)$	$N(-5,-6)$

1.2.

- a) Pontos D e K . b) Pontos A, E e F . c) Pontos B, G e M . d) Pontos D, H e K .

1.3. A afirmação é verdadeira. Para qualquer valor real de x e de y , tem-se que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$.

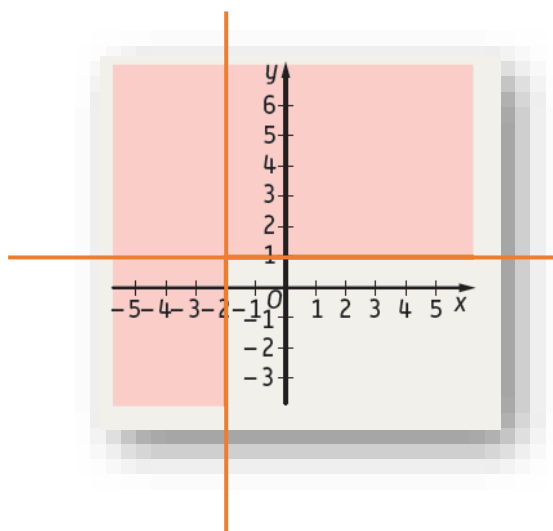
Logo:

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 0 + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 2$$

$$y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 3 \geq 0 + 3 \Leftrightarrow y^2 + 3 \geq 3$$

Logo, podemos concluir que as coordenadas do ponto P serão sempre positivas para qualquer valor real que x e y assumam. Logo, P irá pertencer sempre ao 1.º quadrante.

2.. A condição define o domínio plano do conjunto de pontos cuja abcissa é inferior ou igual a -2 ou ordenada superior ou igual a 1. Logo, a sua representação será:



Opção (A)

3.

3.1. Observando o referencial cartesiano, podemos concluir que:

$$A(-3,3) \quad G(3,1) \quad K(-1,-3)$$

3.2. A imagem do ponto $D(-3,1)$ é o ponto H de coordenadas $(1,1)$.

3.3. As fronteiras do domínio plano assinalado a cor no referencial serão:

$$x = 1 \quad x = 3 \quad y = 1 \quad y = 3 \quad y = x \quad x = -1 \quad y = -3$$

A região será definida por uma disjunção de condições, ou seja:

$$(1 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 3) \vee (y \leq x \wedge x \leq -1 \wedge y \geq -3)$$

3.4. A reta CM corresponde à bissetriz dos quadrantes pares, pelo que os pontos que lhe pertencem têm abcissa e ordenada simétricas. Como Q pertence à reta de equação $y = 5$, então conseguimos determinar o seu k , equacionando que:

$$y_Q = 5 \Leftrightarrow k^2 + 4k = 5 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-4 + 6}{2} \vee k = \frac{-4 - 6}{2} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -5$$

Assim, as possíveis coordenadas são:

$$(1; 1^2 + 4 \times 1) = (1; 1 + 4) = (1; 5) \quad (-5; (-5)^2 + 4 \times (-5)) = (-5; 25 - 20) = (-5; 5)$$

Como Q pertence ao 2.º quadrante, então $Q = (-5; 5)$. Assim, a abcissa de Q , $x_Q = -5$, é simétrica da ordenada de Q , $y_Q = 5$. Concluímos então que Q pertence à reta CM .

3.5. Tendo em conta que $A_{\text{quadrado}} = \frac{64}{9} \text{ cm}^2$, então a medida do seu lado é $\text{lado} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} \text{ cm}$. Passemos então a determinar o diâmetro d do círculo.

Ou seja:

$$d^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{64}{9} + \frac{64}{9} \Leftrightarrow d^2 = \frac{128}{9} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{128}{9}} \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2}}{3} \Leftrightarrow d = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{raio} = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

A área dessa circunferência é: $A = \pi \times \text{raio}^2 = \pi \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{32\pi}{9} \text{ u. a.}$

Por observação do estudo do logotipo no referencial cartesiano, podemos observar que os dois triângulos que a compõem tem a medida do comprimento da base e da sua altura igual ao do lado do quadrado.

Logo:

$$\text{lado} = \frac{8}{3}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{8}{3} \times \frac{8}{3}}{2} = \frac{32}{9} \text{ cm}^2$$

Assim, podemos concluir que:

$$A_{\text{quadrado}} = \frac{64}{9} \text{ cm}^2 \quad A_{\text{triângulo}} = \frac{32}{9} \text{ cm}^2 \quad A_{\text{círculo}} = \frac{32}{9} \pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total logo}} = 2 \times \frac{64}{9} + 2 \times \frac{32}{9} + \frac{16}{3} \pi = \left(\frac{64}{3} + \frac{32\pi}{9}\right) \text{ cm}^2$$

Ou seja: $\text{razão} = \frac{\frac{64}{3} + \frac{32\pi}{9}}{64} \approx 0,5079 = 50,79\%$

A razão entre as áreas do logotipo e a área da cartolina é de 50,79%.

4. Tem-se que:

$$d(A, B) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(2-4)^2 + (-3-k)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(2-4)^2 + (-3-k)^2}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-4)^2 + (-3-k)^2 = 4 \times 2 \Leftrightarrow 4 + (-3-k)^2 = 8 \Leftrightarrow (-3-k)^2 = 8-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3-k)^2 = 4 \Leftrightarrow -3-k = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow -3-k = 2 \vee -3-k = -2 \Leftrightarrow -k = 2+3 \vee -k = -2+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -5 \vee k = -1$$

Opção (A)

5. Usando a fórmula para determinar a mediatriz de um segmento de reta, podemos verificar que:

$$\begin{aligned} (x - (-6))^2 + (y - (-1))^2 &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow (x + 6)^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow 12x + 36 + 2y = -2x - 6y + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12x + 2x + 2y + 6y + 36 - 9 &= 0 \Leftrightarrow 14x + 8y + 27 = 0 \end{aligned}$$

Opção (B)

6. Opção (D)

7.

7.1. Tem-se que: $A(3, -2)$ $B(b, 3)$ $C(0, 4)$

Logo:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(3 - b)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{(3 - b)^2 + 25}$$

$$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{(b - 0)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{b^2 + 1}$$

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

Como $[ABC]$ é triângulo retângulo em C , podemos recorrer ao Teorema de Pitágoras. Deste modo:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{45})^2 + (\sqrt{b^2 + 1})^2 = (\sqrt{(3 - b)^2 + 25})^2 \Leftrightarrow 45 + b^2 + 1 = (3 - b)^2 + 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 45 + b^2 + 1 &= 9 - 6b + b^2 + 25 \Leftrightarrow 6b = 9 + 25 - 45 - 1 \Leftrightarrow 6b = -12 \Leftrightarrow b = -\frac{12}{6} \Leftrightarrow b = -2 \end{aligned}$$

7.2. Sendo o ponto M o local onde foi colocado o radar, temos que este ponto pode ser determinado através:

$$M_{[AC]} = \left(\frac{3 + 0}{2}; \frac{-2 + 4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1 \right)$$

Logo, o radar irá ser colocado no ponto M de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 1 \right)$.

7.3. Sabemos que D tem coordenadas $(0; y_D)$. Logo:

$$d(A; D) = d(C; D) \Leftrightarrow \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - y_D)^2} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - y_D)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - y_D)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - y_D)^2} \right)^2 \Leftrightarrow 9 + (-2 - y_D)^2 = (4 - y_D)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + 4 + 4y_D + y_D^2 = 16 - 8y_D + y_D^2 \Leftrightarrow 4y_D + 8y_D = 16 - 9 - 4 \Leftrightarrow 12y_D = 3 \Leftrightarrow y_D = \frac{3}{12} \Leftrightarrow y_D = \frac{1}{4}$$

Logo, D tem coordenadas $\left(0, \frac{1}{4} \right)$.

7.4. A torre poderá vir a ser instalada na mediatriz de $[AC]$.

Logo:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-(-2))^2 &= (x-0)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow -6x + 9 + 4y + 4 = -8y + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y + 8y &= 6x + 16 - 9 - 4 \Leftrightarrow 12y = 6x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{6}{12}x + \frac{3}{12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

A condição que define o conjunto de possíveis localizações da torre é $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

7.5. O baricentro do triângulo $[ABC]$ é determinado por:

$$\text{Baricentro} = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{3 + (-2) + 0}{3}; \frac{-2 + 3 + 4}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3} \right)$$

Logo, o café do Berto localiza-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

8.

8.1. O centro da circunferência corresponde ao ponto médio do diâmetro $[AC]$.

Logo:

$$\text{Centro} = M_{[AC]} = \left(\frac{2+1}{2}; \frac{4+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$$

A medida do raio da circunferência é obtida determinando metade do comprimento do diâmetro $[AC]$, ou seja:

$$\text{raio} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (4-(-1))^2}}{2} = \frac{\sqrt{1+25}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Concluimos então que a equação reduzida desta circunferência é:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{26}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

8.2. Como o ponto B pertence à circunferência e $B = (x_B; 2)$, então:

$$\begin{aligned} B(x_B; 2) \quad \left(x_B - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{2} \Leftrightarrow \left(x_B - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \left(x_B - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x_B - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{26}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x_B - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x_B - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow x_B - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \vee x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_B &= -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \vee x_B = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_B = -\frac{2}{2} \vee x_B = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x_B < 0 \Leftrightarrow x_B = -1 \end{aligned}$$

8.3. Começamos por determinar a medida do comprimento do lado do quadrado.

Ou seja:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Assim, o perímetro do quadrado é: $P_{[ABCD]} = 4 \times \overline{AB} = 4\sqrt{13}$

Opção (A)

8.4.

a) Sabemos que qualquer ponto do eixo das ordenadas tem $x = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} - \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{26}{4} - \frac{9}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{17}{4} \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}} \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \vee y - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{2} \vee y = -\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ou seja, as coordenadas dos pontos são $\left(0, \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{2}\right)$.

b) Os pontos que pertencem à bissetriz dos quadrantes pares têm ordenada e abcissa simétricas. Assim:

$$y = -x$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} + x^2 + 3x + \frac{9}{4} &= \frac{13}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{18}{4} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= \frac{13}{2} - \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Ou seja, as coordenadas dos pontos de interseção são $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.

2. Geometria analítica no espaço

Recordar - Página 59 e 60

1. O volume da Basílica é determinado da forma seguinte.

$$V_{semiesfera} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times \text{raio}^3}{2} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 41^3}{2} \approx 144\,347,8 \text{ m}^3$$

$$V_{cilindro} = A_{base} \times \text{altura} = \pi \times \text{raio}^2 \times \text{altura} = \pi \times 41^2 \times 30 = 158\,430,5 \text{ m}^3$$

$$\text{altura}_{\text{paralelepipedo}} = 116 - 41 - 30 = 45 \text{ m} \quad V_{\text{paralelepipedo}} = 122 \times 187 \times 45 = 1\,026\,630 \text{ m}^3$$

Logo:

$$V_{total} = 144\,347,8 + 158\,430,5 + 1\,026\,630 = 1\,329\,408,3 \text{ m}^3$$

Assim:

$$\text{percentagem}_{\text{cúpula}} = \frac{144\,347,8}{1\,329\,408,3} \times 100 \approx 10,9\%$$

A cúpula ocupa 10,9% do volume total da Basílica.

2.

2.1. Seja M_1 o centro da face $[BGIH]$, M_2 o centro da face $[CDEF]$, X_1 o ponto médio de $[BG]$ e X_2 o ponto médio de $[CD]$. Tem-se que os triângulos $[OM_1X_1]$ e $[OM_2X_2]$ são semelhantes, pelo critério AA, pois:

- $\widehat{OM_1X_1} = \widehat{OM_2X_2} = 90^\circ$
- $M_1\widehat{OX_1} = M_2\widehat{OX_2}$

Logo:

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM_2}} = \frac{\overline{M_1X_1}}{\overline{M_2X_2}} \Leftrightarrow \frac{2+h}{h} = \frac{\frac{3}{2}}{1} \Leftrightarrow 2+h = \frac{3}{2}h \Leftrightarrow 4+2h = 3h \Leftrightarrow 2h-3h = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -h = -4 \Leftrightarrow h = 4$$

Logo, $\overline{OM_2} = 4$ cm

A distância de O ao plano AKJ é determinada por:

$$\text{distância} = 4 + 2 + 4 = 10 \text{ cm}$$

A distância de O ao plano AKJ é 10 cm.

2.2. Reta KH , por exemplo.

2.3. Observando o modelo geométrico, podemos concluir que:

$$V_{\text{tronco}} = V_{[BGIHO]} - V_{[CDEFO]} = \frac{1}{3} \times 3^2 \times (2+4) - \frac{1}{3} \times 2^2 \times 4 = \frac{1}{3} \times 9 \times 6 - \frac{1}{3} \times 4 \times 4 = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3} \text{ cm}^3$$

O tronco de pirâmide tem $\frac{38}{3} \text{ cm}^3$ de volume.

2.4. Tendo em conta que os oitos vértices do prisma pertencem à superfície esférica que delimita a esfera, para determinarmos o seu raio basta calcular uma das diagonais espaciais do prisma.

Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 25$$

Como $\overline{AG} > 0$, $\overline{AG} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AG} = 5$ cm

$$\overline{AG}^2 + \overline{GI}^2 = \overline{AI}^2 \Leftrightarrow 5^2 + 3^2 = \overline{AI}^2 \Leftrightarrow 25 + 9 = \overline{AI}^2 \Leftrightarrow 34$$

Como $\overline{AI} > 0$, então $\overline{AI} = \sqrt{34}$ cm

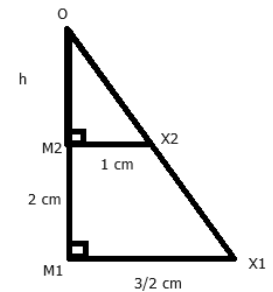
Podemos então determinar o volume da esfera:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \times \text{raio}^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^3 \approx 103,8 \text{ cm}^3$$

3.

3.1. Tendo em conta o volume de cada queijo, podemos equacionar que:

$$V_{\text{queijo}} = 36\pi \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi \times \text{raio}^3 = 36\pi \Leftrightarrow \text{raio}^3 = \frac{36\pi}{\frac{4}{3}\pi} \Leftrightarrow \text{raio}^3 = 36 \times \frac{3}{4} \Leftrightarrow \text{raio}^3 = 27 \Leftrightarrow \text{raio} = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow \text{raio} = 3 \text{ dm}$$



3.2. A superfície da embalagem de queijos é dada por:

$$A_{caixa} = 4 \times (4 \times 3 \times 2 \times 3) + 2 \times (2 \times 3)^2 = 360 \text{ dm}^2$$

3.3. Tem-se, por hipótese, que:

$$V_{nova\ embalagem} = 4\pi \quad altura = \frac{2}{3} \times (3 \times 2) = 4 \text{ dm}$$

$$V_{nova} = 4\pi \Leftrightarrow A_{base} \times altura = 4\pi \Leftrightarrow \pi \times raio^2 \times 4 = 4\pi \Leftrightarrow raio^2 = \frac{4\pi}{4\pi} \Leftrightarrow raio^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow raio = \sqrt{1} \Leftrightarrow raio = 1 \text{ dm}$$

Ou seja:

$$diâmetro = 2 \times 1 = 2 \text{ dm}$$

Tarefa 1 – Página 61

1. Por observação do referencial, podemos concluir que:

$$A(0,6) \quad B(6,6) \quad C(6,0) \quad O(0,0)$$

$$D_1(0,-6) \quad D_2(-6,0) \quad E_1(6,-6) \quad E_2(12,0) \quad F_1(6,12) \quad F_2(12,6) \quad G_1(0,12) \quad G_2(-6,6)$$

2. Tendo em conta a indicação dada, temos que:

$$A(0,6,0) \quad B(6,6,0) \quad C(6,0,0) \quad D(0,0,6) \quad E(6,0,6) \quad F(6,6,6) \quad G(0,6,6) \quad O(0,0,0)$$

Aplicar – Página 63

1.

1.1. Cubo

As coordenadas dos vértices do cubo são:

$$A(2,0,0) \quad B(2,2,0) \quad C(0,2,0) \quad O(0,0,0)$$

$$E(2,0,2) \quad F(2,2,2) \quad G(0,0,2) \quad H(0,2,2)$$

1.2. Prisma quadrangular regular

As coordenadas dos vértices deste prisma são

$$A(2,-2,-3) \quad B(2,2,-3) \quad C(-2,2,-3) \quad D(-2,-2,-3)$$

$$E(2,-2,3) \quad F(2,2,3) \quad G(-2,-2,3) \quad H(-2,2,3)$$

1.3. Pirâmide quadrangular regular

Para determinar \overline{AO} , devemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo $[AOD]$.

Ou seja:

$$\overline{AO} = \overline{OD} = \overline{OC} = \overline{OB}$$

$$\overline{AO}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AO}^2 + \overline{AO}^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2\overline{AO}^2 = 4 \times 2 \Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 4$$

$$\text{Como } \overline{AO} > 0, \overline{AO} = \sqrt{4} \Leftrightarrow \overline{AO} = 2$$

Assim, podemos concluir que:

$$A(2,0,0) \quad B(0,-2,0) \quad C(-2,0,0) \quad D(0,2,0) \quad E(0,0,3)$$

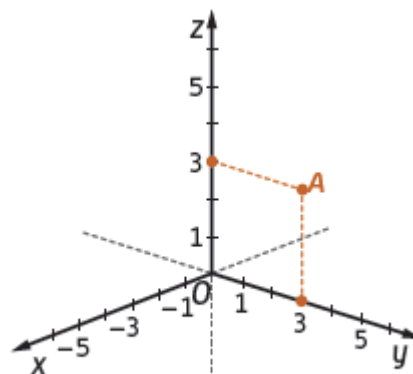
Aplicar – Página 64

2.

2.1.

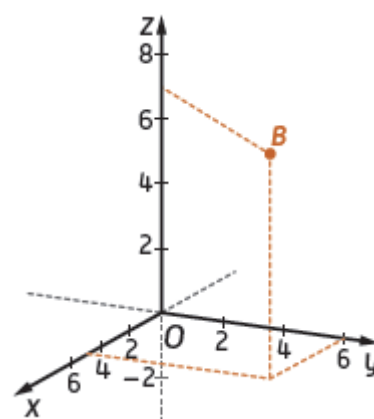
Denominando o ponto pretendido por A , temos que as coordenadas de A são $(0; 3; 3)$, tendo em que a sua abcissa é nula ($x = 0$) e ordenada e cota têm o mesmo valor numérico correspondente a 3 unidades ($y = z = 3$).

Fazendo a respetiva representação em referencial cartesiano $Oxyz$, temos que:



2.2.

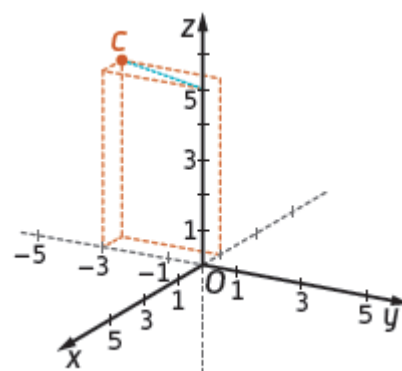
Considerando o ponto B pretendido, temos que $B = (5, 6, 7)$, pois a abcissa assume o valor 5, $x = 5$, a ordenada assume o valor 6, $y = 6$, e a cota assume o valor 7, $z = 7$. Logo, representado em referencial ortogonal monométrico $Oxyz$, vem que:



2.3.

Considerando C o ponto descrito, temos que $C = (-1; -3; 5)$, tendo em conta a abcissa assume o valor -1 , $x = -1$, a ordenada assume o valor -3 , $y = -3$, e a cota assume o valor 5, $z = 5$.

Logo, representado em referencial ortogonal monométrico $Oxyz$, vem que:



Aplicar – página 65

3.

3.1. Tendo em conta as coordenadas de cada um dos pontos considerados, podemos concluir que:

$A \rightarrow$ Não pertence a qualquer octante.

$B \rightarrow$ Pertence ao 6.º octante.

$C \rightarrow$ Não pertence a nenhum octante.

$D \rightarrow$ Pertence ao 2.º octante.

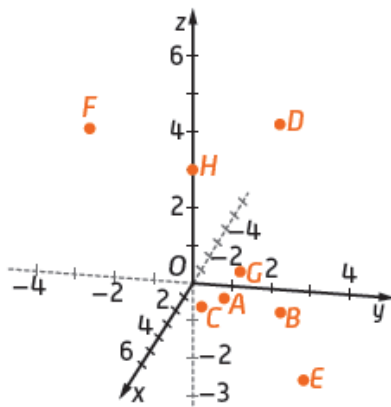
$E \rightarrow$ Pertence ao 5.º octante.

$F \rightarrow$ Pertence ao 4.º octante.

$G \rightarrow$ Não pertence a nenhum octante.

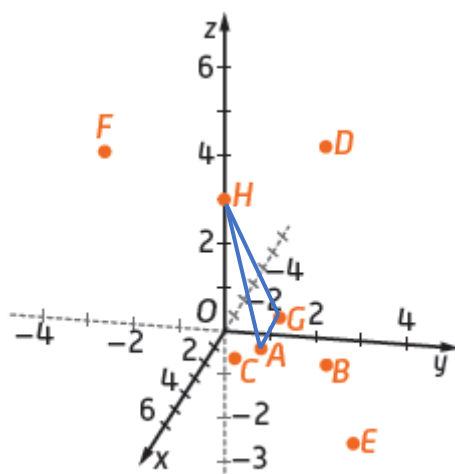
$H \rightarrow$ Não pertence a nenhum octante.

3.2. Representando um referencial cartesiano ortogonal e monométrico, podemos incluir a representação dos pontos do enunciado:



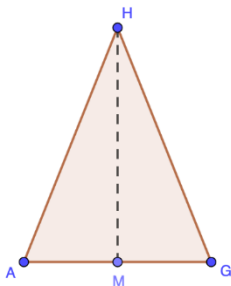
3.3.

a) O triângulo a considerar será:



Por observação, podemos concluir que o triângulo $[AGH]$ é isósceles, em que $\overline{AH} = \overline{GH}$.

b) Representando-o, observamos que:



$$\overline{AG} = 2$$

Usando, novamente o Teorema de Pitágoras,

Para obter a medida do comprimento de \overline{HM} , aplicamos um Teorema de Pitágoras ao triângulo $[OHM]$.

Ou seja:

$$\overline{OM} = 1 \quad \overline{OH} = 3$$

$$\overline{OM}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{HM}^2 \Leftrightarrow 1^2 + 3^2 = \overline{HM}^2 \Leftrightarrow 1 + 9 = \overline{HM}^2 \Leftrightarrow 10 = \overline{HM}^2$$

$$\text{Como } \overline{HM} > 0, \overline{HM} = \sqrt{10}$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{HM}^2 \Leftrightarrow \overline{AH}^2 = 1^2 + \sqrt{10}^2 \Leftrightarrow \overline{AH}^2 = 11$$

$$\text{Como } \overline{AH} > 0, \overline{AH} = \sqrt{11}$$

Concluimos então:

$$P_{[AGH]} = 2 + 2 \times \sqrt{11} = (2 + 2\sqrt{11}) \text{ u. m.} \quad A_{[AGH]} = \frac{2 \times \sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \text{ u. a.}$$

Momento Python – Página 66

1. Com este programa Python, estamos a determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta do plano.
2. Para estender para pontos do espaço, basta acrescentar uma linha de código que diga respeito à cota. Assim, uma possível melhoria:

```
abcA=float(input("Qual a abcissa do ponto A do espaço?"))
ordA=float(input("Qual a ordenada do ponto A do espaço?"))
cotaA=float(input("Qual a cota do ponto A do espaço?"))

abcB=float(input("Qual a abcissa do ponto B do espaço?"))
ordB=float(input("Qual a ordenada do ponto B do espaço?"))
cotB=float(input("Qual a cota do ponto B do espaço?"))

abcM=(abcA+abcB)/2
ordM=(ordA+ordB)/2
cotM=(cotaA+cotB)/2

print("ponto M tem coordenadas (" ,abcM, ", " ,ordM," ,",cotM,")")
```

Tarefa 3 – Página 67

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ADC]$, constatamos que:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 3^2 + 2^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 9 + 4 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 13 = \overline{AC}^2$$

$$\text{Como } \overline{AC} > 0, \text{ então } \overline{AC} = \sqrt{13}$$

O triângulo $[ACH]$ é retângulo em C . Assim, voltando a aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow \overline{AH}^2 = \sqrt{13}^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AH}^2 = 13 + 16 \Leftrightarrow \overline{AH}^2 = 29 \Leftrightarrow \overline{AH} = \sqrt{29}$$

$$\text{Como } \overline{AH} > 0, \overline{AH} = \sqrt{29}$$

Concluimos que a distância de A a H é $\sqrt{29}$ unidades de medida.

Aplicar – Página 67

4.

4.1. As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são dadas por:

$$M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) = \left(\frac{7 + (-7)}{2}, \frac{-3 + 2}{2}, \frac{0 + 5}{2} \right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

4.2. Seja $C = (x_C; y_C; z_C)$. Tem-se que:

$$B = M_{[AC]} \Leftrightarrow (-7, 2, 5) = \left(\frac{x_C + 7}{2}, \frac{y_C + (-3)}{2}, \frac{z_C + 0}{2} \right)$$

Assim, podemos deduzir que:

$$-7 = \frac{x_C + 7}{2} \Leftrightarrow -14 = x_C + 7 \Leftrightarrow -14 - 7 = x_C \Leftrightarrow -21 = x_C$$

$$2 = \frac{y_C - 3}{2} \Leftrightarrow 4 = y_C - 3 \Leftrightarrow 4 + 3 = y_C \Leftrightarrow 7 = y_C$$

$$5 = \frac{z_C + 0}{2} \Leftrightarrow 10 = z_C$$

Então, podemos concluir que $C(-21, 7, 10)$.

Aplicar – Página 68

5.

5.1. A altura da pirâmide vai ser dada pela distância do ponto E ao plano que contém a base $[ABCD]$ da pirâmide. Assim, a altura da pirâmide é 8 unidades de comprimento.

5.2. O volume da pirâmide é dado por:

$$V_{[ACBDE]} = \frac{A_{[ABCD]} \times altura}{3}$$

Para determinar a área da base da pirâmide, temos de calcular:

$$d(A, C) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 5)^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{20} = \sqrt{2 \times 5^2} = 2\sqrt{5}$$

Logo:

$$A_{[ABCD]} = (2\sqrt{5})^2 = 20 \text{ u. a.} \quad altura = 8$$

$$V_{[ACBDE]} = \frac{A_{[ABCD]} \times altura}{3} = \frac{20 \times 8}{3} = \frac{160}{3} \text{ u. v.}$$

6. Começemos por determinar a distância entre os vértices do triângulo.

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - 9)^2 + (8 - (-2))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{64 + 100 + 25} = \sqrt{189} = \sqrt{3^2 \times 3 \times 7} = 3\sqrt{21}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(9 - (-3))^2 + (-2 - 6)^2 + (2 - 7)^2} = \sqrt{144 + 64 + 25} = \sqrt{233}$$

$$d(C, A) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (6 - 8)^2 + (7 - (-3))^2} = \sqrt{16 + 4 + 100} = \sqrt{120} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3 \times 5} = 2\sqrt{30}$$

Como as três distâncias são diferentes, podemos concluir que o triângulo $[ABC]$ é escaleno.

7. Seja a a medida do comprimento da aresta do cubo. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$, temos que:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow a^2 + a^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2a^2 = \overline{AC}^2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ACG]$, concluímos que:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 \Leftrightarrow 2a^2 + a^2 = \overline{AG}^2 \Leftrightarrow 3a^2 = \overline{AG}^2$$

Como $\overline{AG} > 0$, $\overline{AG} = \sqrt{3a^2} \Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{3}a$

No entanto, conseguimos determinar a distância de A a G .

$$d(A, G) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 11)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{16 + 100 + 1} = \sqrt{117}$$

Equacionando, tem-se que:

$$\overline{AG} = \sqrt{117} \Leftrightarrow \sqrt{3}a = \sqrt{117} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{117} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{351}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3^2 \times 3 \times 13}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3\sqrt{39}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{39}$$

Tarefa 4 – Página 69

1.

1.1. Todos os pontos do plano xOz têm ordenada nula.

1.2. Todos os pontos do plano xOy têm cota nula.

1.3. Todos os pontos do plano yOz têm abcissa nula.

2.

2.1. Os pontos do plano α têm abcissa igual a 2.

2.2. Os pontos do plano β têm em comum ordenada igual a 5.

2.3. Os pontos do plano γ têm cota igual a 4.

Tarefa 5 – Página 69

1.

1.1. O lugar geométrico representado é o conjunto de pontos do espaço cuja abcissa é igual a 1. Esse lugar geométrico é um plano.

1.2. Este plano é perpendicular ao plano xOy e ao plano xOz e paralelo ao plano yOz .

2. O lugar geométrico representado foi o conjunto de pontos do espaço cuja ordenada é igual a 1, ou seja, um plano. Neste caso, esse plano é perpendicular ao plano xOy e ao plano yOz e paralelo ao plano xOz .

3. O lugar geométrico é o conjunto dos pontos do espaço cuja cota assume um valor igual a 1. Constitui assim um plano perpendicular ao plano yOz e ao plano xOz e paralelo ao plano xOy .

4. A interseção dos três planos considerados anteriormente é um ponto de coordenadas $(1,1,1)$.

Aplicar – Página 70

8.

8.1. Podemos observar que os pontos A , B e C têm em comum o valor numérico da sua cota. Assim, pertencem ao plano $z = 3$.

8.2. Neste caso, os três pontos não têm valores numéricos comuns nas suas coordenadas, pelo que não definem um plano paralelo aos planos coordenados.

8.3. Os pontos G , H e I têm a sua ordenada igual a 3. Assim, os pontos G , H e I definem o plano $y = 3$.

8.4. Neste caso, os pontos J , K e L têm a mesma abcissa. Logo, estes pontos definem o plano $x = 2$.

Aplicar – Página 71

9.

9.1. Por observação, podemos concluir que:

$$D(-2,2,-1) \quad F(2,-1,3)$$

9.2. O vértice do prisma que pertence ao oitavo octante é o ponto B .

9.3. O plano FEG é definido pela condição $z = 3$ e o plano ADC é definido pela equação $z = -1$.

9.4. O plano que contém a face $[BCGF]$ é definido pela condição $y = -1$. Como o ponto dado tem ordenada igual a -1 , podemos concluir que $(2,-1,4)$ pertence a esse plano.

Tarefa 6 – Página 73

1. Os pontos pertencentes ao eixo Ox têm ordenada e cota iguais a 0. Assim, o eixo Ox fica definido pela condição $y = 0 \wedge z = 0$.

2. Os pontos pertencentes ao eixo Oy têm abcissa e cota iguais a 0. Assim, o eixo Oy fica definido pela condição $x = 0 \wedge z = 0$.

3. Os pontos que pertencem ao eixo Oz têm abcissa e cota iguais a 0. Assim, o eixo Oz fica definido pela condição $x = 0 \wedge y = 0$.

4. Os pontos da reta AD têm abcissa igual a 3 e cota igual a 4. Logo, a reta AD fica definida pela condição $x = 3 \wedge z = 4$.

5. A reta DH corresponde ao conjunto de pontos do espaço cuja abcissa é igual a 3 e cuja ordenada é igual a 8. Logo, a reta DH fica definida pela condição $x = 3 \wedge y = 8$.

6. A reta DC corresponde ao conjunto de pontos do espaço cuja ordenada é igual a 8 e cuja cota é igual a 4. A reta DC pode ser definida pela condição $y = 8 \wedge z = 4$.

Aplicar – Página 73

10.

10.1. Como A e B têm ordenada igual a 2 e cota igual a 3, podemos concluir que definem uma reta paralela ao eixo Ox . A condição que define a reta AB é $y = 2 \wedge z = 3$.

10.2. Os pontos D e E têm abcissa igual a -2 e ordenada igual a -3 . Logo, definem uma reta paralela ao eixo Oz . A reta DE é definida pela condição $x = -2 \wedge y = -3$.

10.3. A reta FG não é paralela a nenhum dos eixos coordenados, pois ambos os pontos têm apenas o valor da cota em comum.

10.4. Os pontos H e I têm abcissa igual a 0 e cota igual a -2 . Assim, a reta HI é paralela a Oy e fica definida pela condição $x = 0 \wedge z = -2$.

10.5. Os pontos J e K são coincidentes, pelo que pertencem a três retas paralelas aos eixos coordenados:

$$x = 1 \wedge y = 2 \quad y = 2 \wedge z = -1 \quad x = 1 \wedge z = -1$$

Aplicar – Página 74

11.

11.1. Tendo em conta os dados fornecidos, podemos verificar que:

$$A(4,0,0) \quad D(0,-4,0) \quad E(4,-4,4)$$

11.2. Sabe-se que $V_{pirâmide} = 16$. Ou seja:

$$V_{pirâmide} = A_{[KLMJ]} \times altura$$

Como K, L, M e J são os pontos médios dos lados da face $[EFGH]$, então:

$$A_{[KLMJ]} = \frac{A_{[EFGH]}}{2} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ u. a.}$$

Assim:

$$V_{pirâmide} = A_{[KLMJ]} \times altura \Leftrightarrow 16 = 8 \times altura \Leftrightarrow \frac{16}{8} = altura \Leftrightarrow 2 = altura$$

Daqui, podemos concluir que as coordenadas de I são:

$$I = (2, 2, 4 + 2) = (2, 2, 6)$$

11.3.

- a) O plano ABE é definido pela condição $x = 4$.
- b) A reta EH é definida pela condição $y = -4 \wedge z = 4$.
- c) A face $[ODGH]$ é definida pela condição $x = 0 \wedge -4 \leq y \leq 0 \wedge 0 \leq z \leq 4$.
- d) A reta AB é definida pela condição $x = 4 \wedge z = 0$.
- e) A aresta AB é definida pela condição $x = 4 \wedge -4 \leq y \leq 0 \wedge z = 0$.

11.4.

- a) Uma reta paralela ao eixo Oz fica definida pela condição $x = k_1 \wedge y = k_2$, com k_1 e k_2 constantes reais. A reta pretendida terá de incluir o ponto I pelo que a condição que a define é $x = 2 \wedge y = 2$.
- b) A reta JL é definida pela condição $x = 2 \wedge z = 4$. Assim, um plano paralelo a ABE e que contém a reta JL é definido pela condição $x = 2$.

Aplicar – Página 75

12.

12.1. Tem-se que:

$$M_{[AC]} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{3+(-2)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

12.2. Para que D pertença ao plano mediador de $[AC]$, então terá de se verificar que $d(D, A) = d(D, C)$. Ou seja:

$$d(D, A) = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$$d(D, C) = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

Concluimos que D pertence ao plano mediador de $[AC]$.

12.3. O plano mediador de $[BC]$ é dado por:

$$\begin{aligned} (x - (-4))^2 + (y - 1)^2 + (z - (-1))^2 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - (-2))^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 4z + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x + 16 - 2y + 1 + 2z + 1 &= -4x + 4 - 4y + 4 + 4z + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x + 4x - 2y + 4y + 2z - 4z + 16 + 1 + 1 - 4 - 4 - 4 &= 0 \Leftrightarrow 12x + 2y - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x + y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Tarefa 7 – Página 77

1. Nesta superfície esférica, tem-se que:

$$\text{raio} = d(A, C) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - 5)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$$

Assim, para que B pertença à superfície esférica considerada, então a sua distância ao centro da circunferência terá de ser igual ao raio.

$$d(B, C) = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (1 - 5)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$$

Concluimos que B pertence à superfície esférica.

2. Começemos por determinar a distância de D ao centro C :

$$d(D, C) = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (6 - 5)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

Podemos concluir que a distância de D ao centro C é menor do que o raio da superfície esférica. Assim, D encontra-se no interior da esfera.

Aplicar – Página 78

13.

13.1. A superfície esférica descrita é definida pela equação:

$$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$$

13.2. Neste caso, a superfície esférica é definida pela equação:

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 + (z - (-3))^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$$

13.3. Começemos por determinar o raio da superfície esférica:

$$\text{raio} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - (-2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

Assim, a equação que a define é:

$$(x - 3)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$$

13.4. Esta superfície esférica fica determinada pela condição:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

14.

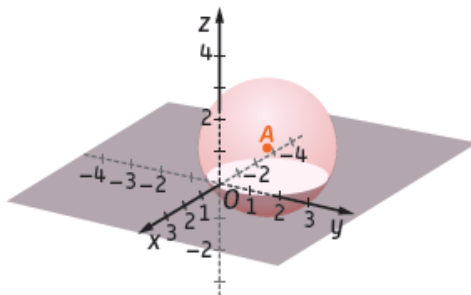
14.1. Podemos concluir que o centro tem de coordenadas $(1, -3, 2)$ e o raio é 2.

14.2. Neste caso, o centro tem coordenadas $(0, 7, -1)$ e raio $\sqrt{7}$.

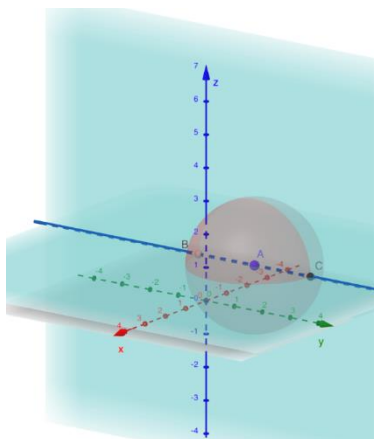
14.3. Esta esfera tem centro no ponto de coordenadas $(-2, 0, 0)$ e raio 4.

Tarefa 8 – Página 79

1. As coordenadas do centro da esfera são $(-1,1,1)$ e o seu raio é $raio = \sqrt{4} = 2$.
2. Usando o *Geogebra 3D*, obtemos a seguinte representação:



3. Usando o GeoGebra 3D, podemos constatar que:



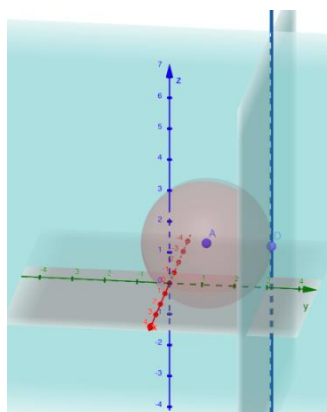
Assim, podemos concluir que a interseção da reta $x = -1 \wedge z = 1$ com a esfera são os pontos $B(-1, -1, 1)$ e $C(-1, 3, 1)$. Algebricamente:

$$x = -1 \wedge z = 1$$

$$(-1 + 1)^2 + (y - 1)^2 + (1 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow y - 1 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow y = 2 + 1 \vee y = -2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \vee y = -1$$

4. Recorrendo às potencialidades do GeoGebra 3D, verificamos que:



O que neste caso se verifica é que a interseção da reta com a esfera irá ser o ponto D de coordenadas $(-1,3,1)$. Algebricamente, tem-se que:

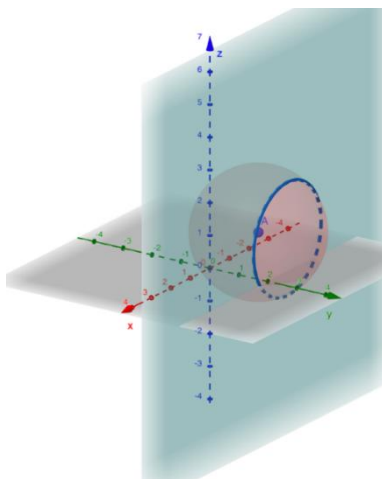
$$x = -1 \wedge y = 3$$

$$\begin{aligned} (-1 + 1)^2 + (3 - 1)^2 + (z - 1)^2 &= 4 \Leftrightarrow 0 + 4 + (z - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 4 - 4 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z - 1 &= \pm\sqrt{0} \Leftrightarrow z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \end{aligned}$$

5. Uma reta que não intersete a esfera poderá ser $x = 4 \wedge z = 5$, por exemplo.

6.

6.1. Corresponde a um círculo.



Podemos determinar o seu centro e o seu raio.

$$y = 2$$

Logo:

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + (2 - 1)^2 + (z - 1)^2 &= 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 + (z - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (z - 1)^2 &= 4 - 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que o círculo contido no plano de equação $y = 2$ tem centro no ponto $(-1,2,1)$ e raio igual a $\sqrt{3}$.

6.2.

- a) Por exemplo, o plano $x = 0$.
- b) Por exemplo, o plano $z = 3$.
- c) Por exemplo, o plano $y = -4$.

Aplicar – Página 79
15.
15.1. Sabe-se que o círculo resulta da interseção do plano com a esfera. Logo:

$$z = 8. \quad x^2 + y^2 + 8^2 = 289 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 289 - 64 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 225$$

Assim, podemos concluir que o raio do círculo é:

$$raio = \sqrt{225} = 15$$

Assim, o perímetro do círculo é:

$$P_{\text{círculo}} = 2 \times \pi \times raio = 2 \times \pi \times 15 = 30\pi \text{ u. m.}$$

15.2. Neste caso, a interseção da esfera com o plano coordenado xOy é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e o raio é:

$$raio = \sqrt{289} = 17$$

Logo, a sua área é:

$$A_{\text{círculo}} = \pi \times raio^2 = \pi \times 17^2 = 289\pi \text{ u. a.}$$

15.3. Os planos paralelos ao plano yOz são definidos por equações do tipo $x = k$, com k constante e real. Logo, tendo em conta a abcissa do centro da esfera e o seu raio, podemos concluir que tais planos ficam definidos pelas condições $x = 17$ e $x = -17$.

Aplicar + - Páginas 82 a 93
1. Por hipótese, tem-se que $x_p = 0$, $z_p = 0$ e $y_p > 0$. Assim:

$$x_p = 0 \Leftrightarrow 7 - a^2 = 0 \Leftrightarrow -a^2 = -7 \Leftrightarrow a^2 = 7 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{7}$$

 Como $y_p > 0$, então podemos concluir que $a = -\sqrt{7}$, pois $-2 \times (-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$ que é positivo.

 Para determinar b , tem-se que:

$$z_p = 0 \Leftrightarrow 6b - 3 = 0 \Leftrightarrow 6b = 3 \Leftrightarrow b = \frac{3}{6} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Opção (C)

2. Para que $[ABC]$ seja retângulo, então as medidas dos comprimentos dos seus lados obedecem ao Teorema de Pitágoras.

Assim:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 6)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = d(B, C) = \sqrt{(1 - c)^2 + (6 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(1 - c)^2 + 16 + 1} = \sqrt{(1 - c)^2 + 17}$$

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(3 - c)^2 + (4 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{(3 - c)^2 + 4 + 9} = \sqrt{(3 - c)^2 + 13}$$

Equacionando:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(3-c)^2 + 13}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 + \left(\sqrt{(1-c)^2 + 17}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3-c)^2 + 13 = 12 + (1-c)^2 + 17 \Leftrightarrow 9 - 6c + c^2 + 13 = 12 + 1 - 2c + c^2 + 17 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6c + 2c = 12 + 1 + 17 - 9 - 13 \Leftrightarrow -4c = 8 \Leftrightarrow c = \frac{8}{-4} \Leftrightarrow c = -2 \end{aligned}$$

Opção (B)

3. O volume da pirâmide é dado por

$$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times \text{altura}$$

Ora, temos que:

$$A(2; 0; 0) \quad B(0; 2; 0) \quad C(2; 4; 0) \quad D(4; 2; 0) \quad E(2; 2; 6)$$

Sejam M o ponto médio de $[BD]$.

Assim:

$$\begin{aligned} \overline{AD} = d(A, D) &= \sqrt{(2-4)^2 + (0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \\ A_{[ABCD]} = \overline{AD}^2 &= (2\sqrt{2})^2 = 2^2 \times 2 = 8 \quad \text{altura} = z_E = 6 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times 8 \times 6 = 16 \text{ u. v.}$$

Opção (B)

4. Um plano paralelo a xOy é definido por uma condição do tipo $z = k$, com k uma constante real. Como o plano tem de passar por B , podemos concluir que a equação que o define é $z = -3$.

Opção (D)

5. Uma reta paralela ao eixo das abcissas é definida por uma condição do tipo $y = k_1 \wedge z = k_2$, em que k_1 e k_2 são constantes reais.

Opção (C)

6. Uma reta perpendicular ao plano xOz é paralela ao eixo Oy .

Opção (D)

7.

7.1. O ponto G tem coordenadas $(-4, -3, 3)$, tendo em conta as condições descritas.

Opção (D)

7.2. O ponto médio de $[AH]$ é dado por:

$$M_{[AH]} = \left(\frac{4 + (-4)}{2}, \frac{-3 + 2}{2}, \frac{0 + 3}{2} \right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

Opção (C)

7.3. Tem-se que:

$$B(4, 2, 0) \quad G(-4, -3, 3)$$

Assim, a equação do plano mediador de $[BG]$ pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 &= (x - (-4))^2 + (y - (-3))^2 + (z - 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + z^2 &= (x + 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2 &= x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 6z + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8x - 8x - 4y - 6y + 6z + 4 - 9 - 9 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16x - 10y + 6z - 14 = 0 &\Leftrightarrow -8x - 5y + 3z - 7 = 0 \Leftrightarrow 8x + 5y - 3z + 7 = 0 \end{aligned}$$

Opção (A)

7.4. O volume do paralelepípedo pode ser calculado através:

$$V_{\text{paralelepipedo}} = A_{[ABFE]} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{BF} \times \overline{BD} = 5 \times 8 \times 3 = 120 \text{ u. v.}$$

Opção (D)

8. Podemos observar que A e B têm ordenadas iguais e cotas iguais, sendo as suas abcissas simétricas. Assim, o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é o plano yOz , ou seja, o plano de equação $x = 0$.

Opção (A)

9. Temos que:

$$\begin{aligned} \text{raio} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{-m + 14} = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{-m + 14})^2 &= 4^2 \Leftrightarrow -m + 14 = 16 \Leftrightarrow -m = 16 - 14 \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m = -2 \end{aligned}$$

Opção (C)

10.

10.1. Tendo em conta as informações dadas no enunciado, podemos verificar que $C(-2; 2; 2)$.

Opção (D)

10.2. A reta AB pode ser definida pela condição $x = 0 \wedge z = 2$.

Opção (B)

10.3. Tem-se que:

$$O(0; 0; 0) \quad C(-2; 2; 2)$$

$$d(O, C) = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

Opção (B)

10.4. Como o ponto H pertence ao eixo Ox , então $H = (x_G; 0; 0)$, em que x_G é um número real.

$$d(H, C) = \sqrt{33} \Leftrightarrow \sqrt{(x_G - (-2))^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{33} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_G - (-2))^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2} \right)^2 = (\sqrt{33})^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + 4 + 4 = 33 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5 \Leftrightarrow x = 5 - 2 \vee x = -5 - 2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -7$$

Concluimos, então, que as possíveis coordenadas de H são $(-7; 0; 0)$ e $(3; 0; 0)$.

Opção (A)

10.5. O plano ABG é o plano mediador do segmento de reta $[CF]$. Assim:

$$C(-2; 2; 2) \quad F(0; 2; 0)$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4z + 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow x - z + 2 = 0$$

Opção (D)

10.6. Reconhece-se a equação cartesiana de uma superfície esférica, cujo centro é $(-2; 2; 0)$ e cujo raio é igual a $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

Assim, identificamos o centro como o ponto G .

O comprimento do raio é igual ao comprimento de $[AE]$, pois:

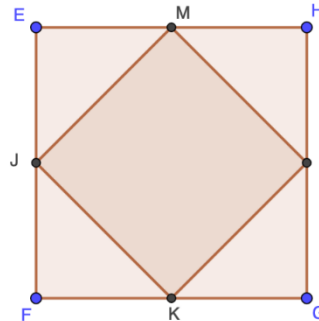
$$\overline{AE} = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (0 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Opção (A)

11.

11.1. $[ACF]$ é um triângulo equilátero, pois os seus lados são diagonais faciais no cubo, cujas medidas dos seus comprimentos são iguais.

11.2. Observando a vista de cima do cubo, tem-se a seguinte representação:



Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, ao triângulo $[EMJ]$, temos que:

$$\overline{EM} = \overline{EJ} = \frac{a}{2}$$

$$\overline{JM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EJ}^2 \Leftrightarrow \overline{JM}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{JM}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{JM}^2 = \frac{2a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\text{Como } \overline{JM} > 0, \text{ então } \overline{JM} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} \Leftrightarrow \overline{JM} = \frac{\sqrt{2a^2}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow \overline{JM} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

11.3. O volume do tetraedro $[ACFH]$ é dado por:

$$\begin{aligned} V_{[ACFH]} &= V_{\text{cubo}} - 4 \times V_{[ABCF]} = a^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times A_{[ABC]} \times \overline{BF} = a^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \\ &= a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{3}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3 \text{ u. v.} \end{aligned}$$

11.4. Começemos por determinar o volume do octaedro.

$$\begin{aligned} V_{[NLKJMI]} &= 2 \times V_{[KLMJI]} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_{[KLMJ]} \times \text{altura} = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2a^2}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{4a^3}{24} = \frac{a^3}{6} \text{ u. v.} \end{aligned}$$

Logo, a razão entre os volumes do tetraedro e do octaedro é

$$\text{razão} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{6}a^3} = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$$

11.5. Sabemos que o volume do cubo é 24 cm^3 .

Logo, a medida da sua aresta é:

$$a = \sqrt[3]{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Logo:

$$\begin{aligned} V_{\text{octaedro}} &= \frac{1}{6} (2\sqrt{3})^3 = \frac{1}{6} \times 8 \times 3 = \frac{24}{6} = 4 \text{ cm}^3 \\ V_{\text{tetraedro}} &= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^3 = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

12.

12.1. Observando a representação da pirâmide, podemos concluir que:

$$A(3, -3, 0) \quad B(3, 3, 0) \quad C(-3, 3, 0) \quad D(-3, -3, 0) \quad E(0, 0, 4)$$

12.2. O volume da pirâmide é dado por:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times \overline{OE} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4 = 48 \text{ cm}^3$$

12.3. A área lateral da pirâmide é obtida através de

$$A_{lateral} = 4 \times A_{[ABE]}$$

Sabemos que $\overline{AB} = 4$. Determinando a medida do comprimento da sua altura, vem que:

$$M_{[AB]} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{-3+3}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (3, 0, 0)$$

$$\text{Altura} = d(M, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Logo:

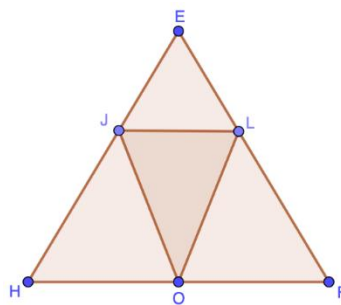
$$A_{lateral} = 4 \times \frac{6 \times 5}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

12.4.a) Tendo em conta as condições dadas, podemos observar que:

$$\overline{EK} = \frac{1}{4} \overline{OE} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

Logo, a cota do ponto K é dada por $z_K = 4 - 1 = 3$.

12.4.b) Observando a vista de frente da pirâmide, obtemos a seguinte representação:



Pelo critério A-A, os triângulos $[HFE]$ e $[JLE]$ são semelhantes (o ângulo HEF é comum aos dois triângulos e $E\hat{H}F = E\hat{J}L$ pois são definidos por retas paralelas). A razão de semelhança entre os dois triângulos é $\frac{1}{4}$.

Assim, a semelhança entre as áreas é dada por:

$$\frac{A_{[JLMN]}}{A_{[ABCD]}} = \text{razão}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

13.

13.1. Por observação do referencial e tendo em conta as condições dadas, temos que:

$$H(-2,0,2) \quad F(-4,1,0) \quad B(-4,1,2)$$

13.2. Temos que:

$$J(2,0,2) \quad F(-4,1,0)$$

$$\overline{JF} = d(J, F) = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (0 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{36 + 1 + 4} = \sqrt{41}$$

13.3.a) O plano OGI é definido pela equação $x = 0$.

13.3.b) O plano AJE é definido pela condição $x = 2$.

13.3.c) O plano CFB é definido pela equação $y = 1$.

13.3.d) O plano DHB é definido pela condição $z = 2$.

13.3.e) A aresta $[AJ]$ é definida pela condição $x = 2 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 2$.

13.3.f) A reta DB é definida pela condição $x = -4 \wedge z = 2$.

13.4. Na primeira frase, o Pedro está a referir-se ao plano DBF . Na segunda frase, o Pedro está a referir-se à aresta $[EN]$.

13.5. Neste caso, o paralelepípedo que o Pedro necessita de construir será definido pela condição:

$$-6 \leq x \leq -4 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

14.

14.1. Sabemos que $V_{cubo} = 8$. Logo, a sua aresta será:

$$aresta = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ u. m.}$$

Assim, podemos concluir que:

$$A(0, -4, 0) \quad B(-2, -2, 2) \quad C(-4, 0, 4) \quad D(-2, -4, 4) \quad E(0, 0, 2)$$

$$F(-2, 0, 4) \quad G(-4, 0, 0) \quad O(0, 0, 0)$$

14.2. Tendo em conta as indicações dadas, podemos concluir que as coordenadas do ponto I são $(0; 0; 4)$. Tal verifica-se, pois, a abcissa dos pontos pertencentes ao sólido representado está compreendida entre 0 e -4 . Logo, $x_I = 0$.

14.3. Por exemplo, o ponto B de coordenadas $(-2; -2; 2)$.

15.

15.1.

$$A(2, -2, 4) \quad B(2, 2, 4) \quad C(-2, 2, 4) \quad D(-2, -2, 4)$$

$$E(2, -2, -4) \quad F(2, 2, -4) \quad G(-2, 2, -4) \quad H(-2, -2, -4)$$

15.2. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[DB]$. O triângulo $[ABD]$ é retângulo, pelo que podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow 4^2 + 4^2 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow 16 + 16 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow 32 = \overline{BD}^2$$

$$\text{Como } \overline{BD} > 0, \text{ então } \overline{BD} = \sqrt{32} \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} \Leftrightarrow \overline{BD} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Logo, podemos concluir que } \overline{MB} = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[IMB]$, tem-se que:

$$\overline{MB}^2 + \overline{MI}^2 = \overline{BI}^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 + \overline{MI}^2 = 5^2 \Leftrightarrow 8 + \overline{MI}^2 = 25 \Leftrightarrow \overline{MI}^2 = 25 - 8 \Leftrightarrow \overline{MI}^2 = 17$$

$$\text{Como } \overline{MI} > 0, \text{ então } \overline{MI} = \sqrt{17}$$

Concluimos então que I tem de coordenadas $(0, 0, 4 + \sqrt{17})$.

15.3.

a) A semirreta \vec{HD} fica definida pela condição $x = -2 \wedge y = -2 \wedge z \geq -4$.

b) O polígono $[EFGH]$ é definido pela condição $-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge z = -4$.

15.4.

a) A condição define a reta AD .

b) A equação define o plano que contém a face $[ABCD]$, ou seja, o plano ABC .

c) A condição define o quadrilátero $[CDHG]$.

d) A condição define o prisma $[ABCDHEFG]$.

16.

16.1. Tendo em conta o modelo geométrico descrito, tem-se que:

$$B(6, -4, 0) \quad C(-6, 4, 0) \quad D(-6, -4, 0) \quad E(6, 2, 7) \quad F(-6, 2, 7) \quad G(6, -2, 7)$$

16.2. O plano que contém $[EFGH]$ é definido pela condição $z = 7$.

16.3. O volume do plinto é dado por: $V_{boque} = V_{[ABCDEFGH]} + \frac{V_{cilindro}}{2}$

Assim:

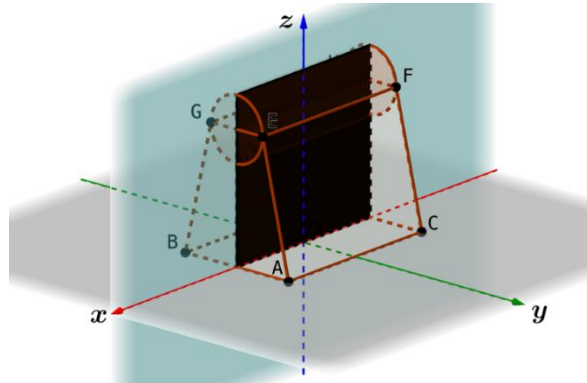
$$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABEG]} \times \overline{AC} = \frac{(\overline{AB} + \overline{EG}) \times altura}{2} \times \overline{AC} = \frac{(8 + 4) \times 7}{2} \times 12 = \frac{12 \times 7}{2} \times 12 = 504 \text{ dm}^3$$

$$V_{cilindro} = A_{base} \times altura_{cilindro} = \pi \times 2^2 \times 12 = 48\pi \text{ dm}^3$$

$$\text{Concluimos que: } V_{boque} = V_{[ABCDEFGH]} + \frac{V_{cilindro}}{2} = 504 + \frac{48\pi}{2} = 504 + 24\pi$$

$$\text{Logo, } V_{boque} \approx 579,4 \text{ dm}^3$$

16.4. Tendo em conta os dados do problema, a secção a considerar poderá ser representada da seguinte forma (polígono a negro):



Assim, a secção trata-se de um retângulo, cujas dimensões serão dadas por:

$$\text{comprimento} = \text{altura}_{\text{prisma}} = 12 \text{ m} \qquad \text{largura} = \text{altura}_{\text{base prisma}} + \text{raio} = 7 + 2 = 9 \text{ m}$$

$$P_{\text{secção}} = 2 \times 12 + 2 \times 9 = 24 + 18 = 42 \text{ m} \qquad A_{\text{secção}} = 12 \times 9 = 108 \text{ m}^2$$

17.

17.1.

$$B(4,4,0) \quad C(-4,4,0) \quad D(-4,-4,0)$$

17.2. A reta CD fica definida pela condição $x = -4 \wedge z = 0$.

17.3. A reta que é paralela ao eixo das cotas e que contém o ponto A é definida pela condição $x = 4 \wedge y = -4$.

17.4. Teremos de determinar o volume do cone onde irá ser depositado o perfume. Ou seja:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 \approx 100,53 \text{ cm}^3 = 0,10053 \text{ dm}^3 \approx 0,10 \text{ l}$$

Como $150 \text{ ml} = 0,15 \text{ l}$ e a capacidade do cone é $0,10 \text{ l}$, podemos concluir que a empresa não conseguirá encher o frasco com 150 ml de perfume.

17.5. A embalagem de perfume de 125 ml irá manter a base do cone onde se irá depositar o perfume. No entanto, a sua altura irá adaptar-se à quantidade de perfume a colocar lá.

Assim, seja h o comprimento da altura do cone das embalagens de 125 ml .

$$\text{Ou seja: } 125 \text{ ml} = 0,125 \text{ l} = 0,125 \text{ dm}^3 = 125 \text{ cm}^3 = V_{\text{cone}}$$

Concluimos então que

$$V_{\text{cone}} = 125 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = 125 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times h = 125 \Leftrightarrow \frac{16}{3} \pi h = 125 \Leftrightarrow h = \frac{125}{\frac{16}{3} \pi}$$

$$\Leftrightarrow h = 375 : \frac{16}{3} \pi \Leftrightarrow h = 375 \times \frac{3}{16\pi} \Leftrightarrow h = \frac{1125}{16\pi}$$

As coordenadas do ponto E são $(0; 0; \frac{1125}{16\pi})$.

18. Começemos por determinar as distâncias entre os pontos.

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-5 - 1)^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{9 + 36 + 0} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-5 - 4)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{0 + 81 + 16} = \sqrt{97}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (1 - 4)^2 + (-3 - 7)^2} = \sqrt{9 + 9 + 100} = \sqrt{118}$$

Tendo em conta as distâncias determinadas, podemos concluir que os dois pontos mais próximos são os pontos A e B .

19.

19.1. Tem-se que: $M_{[AB]} = \left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{3+\frac{3}{2}}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2} \right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2} \right)$

19.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano medidor de $[AB]$.

Então,

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = (x - (-2))^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 + (z - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = (x + 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 + (z - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x - 4x - 6y + 3y - 2z + 4z + \frac{1}{4} + 9 + 1 - 4 - \frac{9}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x - 3y + 2z = 0$$

19.3. $M_{[BC]} = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{\frac{3}{2}+y}{2}, \frac{2+z}{2} \right)$

Logo, $\left(\frac{-2+x}{2}, \frac{\frac{3}{2}+y}{2}, \frac{2+z}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 3, 1 \right)$

Ou seja,

$$\frac{-2+x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\frac{\frac{3}{2}+y}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$$

$$\frac{2+z}{2} = 1 \Leftrightarrow z = 0$$

Então, $C \left(3, \frac{9}{2}, 0 \right)$.

19.4. O centro da esfera é $M_{[AB]} = \left(-\frac{3}{4}; \frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)$

O raio da esfera é dado por

$$d(M_{[AB]}, B) = \sqrt{\left(-\frac{3}{4} + 2\right)^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{9}{16} + \frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{38}{16}} = \frac{\sqrt{38}}{4}$$

Inequação da esfera:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{38}{16}$$

20.

20.1. Tendo em conta o descrito e o referencial cartesiano representado, podemos concluir que:

$$A(5,5,10) \quad B(5,0,5) \quad C(0,5,5) \quad E(10,5,5) \quad F(5,5,0) \quad G(5,10,5)$$

20.2. O volume do octaedro pode ser determinado da seguinte forma:

$$V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{[ABCGE]} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_{[BCGE]} \times \text{altura}$$

Assim, tem-se que:

$$\overline{BE} = d(B, E) = \sqrt{(5 - 10)^2 + (0 - 5)^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{25 + 25 + 0} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$A_{[BCGE]} = \overline{BE}^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50 \text{ u. a.}$$

Logo:

$$V_{\text{octaedro}} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_{[BCGE]} \times \text{altura} = 2 \times \frac{1}{3} \times 50 \times 5 = \frac{500}{3} \text{ u. v.}$$

20.3.

a) O sólido obtido corresponde a um cone cujo centro da base coincide com o centro da esfera e cuja geratriz é $[AB]$.

b) Tem-se que:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \times \text{raio}^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi \text{ u. v.}$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 5 = \frac{125}{3}\pi \text{ u. v.}$$

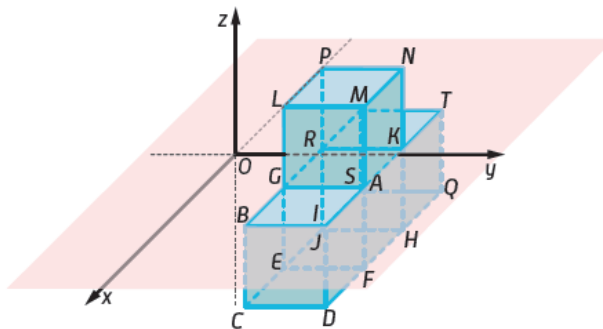
Ou seja:

$$\text{razão} = \frac{\frac{125}{3}\pi}{\frac{500}{3}\pi} = \frac{125}{3} : \frac{500}{3} = \frac{125}{3} \times \frac{3}{500} = \frac{125}{500} = \frac{1}{4}$$

20.4. $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 \leq 25$

21.

21.1. Analisando as condições dadas, temos que:



21.2. Os pontos E e H tem coordenadas $(2, 2, -3)$ e $(-1, 5, -3)$, respetivamente. O ponto E pertence ao 5.º octante e o ponto H pertence ao 6.º octante.

21.3.

- a) A reta NK é definida pela condição $x = -1 \wedge y = 5$.
- b) A face $[KTHQ]$ é definida pela condição algébrica $-4 \leq x \leq -1 \wedge y = 5 \wedge -3 \leq z \leq 0$.
- c) O plano MNP é definida pela equação $z = 3$.
- d) O plano mediador de $[BQ]$ é obtido através:

$$B(5; 2; 0) \quad Q(-4; 5; -3)$$

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 &= (x - (-4))^2 + (y - 5)^2 + (z - (-3))^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 2)^2 + z^2 &= (x + 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 + z^2 &= x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -10x - 8x - 4y + 10y - 6z + 25 + 4 - 16 - 25 - 9 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -18x + 6y - 6z - 21 = 0 \Leftrightarrow 6x - 2y + 2z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

21.4.

- a) A condição define o plano PMN .
- b) A condição define a aresta $[BG]$.
- c) A condição define a reta SQ .

21.5. Podemos começar por determinar o centro da superfície esférica que corresponde ao ponto médio de $[BF]$.

$$B(5, 2, 0) \quad F(2, 5, -3)$$

$$M_{[BF]} = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+5}{2}, \frac{0+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Tendo em conta que a superfície esférica é circunscrita ao cubo, o seu diâmetro é metade de \overline{BF} .

Assim:

$$d(B, F) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - 5)^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{9 + 9 + 9} = \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$d = 3\sqrt{3} \quad \text{raio} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Concluimos então que a equação da superfície esférica considerada é:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

22.

22.1. Tendo em conta que a diagonal facial do cubo é igual a $\sqrt{72}$ e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABG]$, vem que:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{AG}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = \sqrt{72}^2 \Leftrightarrow 2\overline{AB}^2 = 72 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{72}{2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 36$$

Como $\overline{AB} > 0$, $\overline{AB} = \sqrt{36} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$

Concluimos então que a medida do comprimento da aresta do cubo é 6.

Logo:

$$A = (6, 0, 0)$$

22.2. Tem-se que:

$$A(6, 0, 0) \quad D(0, 6, 6)$$

Logo:

$$d(A, D) = \sqrt{(6 - 0)^2 + (0 - 6)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{36 + 36 + 36} = \sqrt{108} = \sqrt{6^2 \times 3} = 6\sqrt{3}$$

A distância de A a D é $6\sqrt{3}$ unidades de medida.

22.3.

a) Temos que $A(6; 0; 0)$ e $G(6; 6; 6)$.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de $[AG]$.

Então,

$$\begin{aligned} (x - 6)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 &= (x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + z^2 &= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12y + 12z + 36 - 36 - 36 - 36 &= 0 \Leftrightarrow 12y + 12z - 72 = 0 \Leftrightarrow y + z - 6 = 0 \end{aligned}$$

b) A face $[BCDG]$ é definida pela condição $0 \leq x \leq 6 \wedge y = 6 \wedge 0 \leq z \leq 6$.

c) A esfera inscrita no cubo tem como centro o ponto médio de $[AD]$ e raio metade da medida do comprimento da aresta do cubo.

Ou seja:

$$M_{[AD]} = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (3,3,3) \quad \text{raio} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 \leq 3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 \leq 9$$

22.4. Como $z = 2$ é o plano que intersesta a esfera, então:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-3)^2 + (2-3)^2 &\leq 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + 1 \leq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 9-1 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 8 \end{aligned}$$

A figura que resulta da interseção da esfera com o plano é um círculo de centro no ponto $(3; 3; 2)$ e raio $\sqrt{8}$. A sua área pode ser obtida fazendo:

$$A_{\text{circulo}} = \pi \times \text{raio}^2 = \pi \times \sqrt{8}^2 = 8\pi \text{ u. a.}$$

23.

23.1. A reta DE pode ser definida pela condição $x = 8 \wedge z = 8$.

23.2. Tem-se que o centro da superfície esférica é o ponto H de coordenadas $(4; 4; 16)$. O raio da superfície esférica pode ser obtido, calculando:

$$d(E, H) = \sqrt{(8-4)^2 + (8-2)^2 + (8-16)^2} = \sqrt{16 + 16 + 64} = \sqrt{96} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3} = 4\sqrt{6}$$

Ou seja, a superfície esférica pode ser definida pela condição:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-16)^2 = (4\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-16)^2 = 96$$

23.3. Tem-se que:

$$A(8,0,0) \quad F(0,8,8)$$

Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de $[AF]$.

Logo,

$$(x-8)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (x-0)^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 16y + 64 + z^2 - 16z + 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -16x + 16y + 16z + 64 - 64 - 64 = 0 \Leftrightarrow -16x + 16y + 16z - 64 = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 4 = 0$$

23.4. O quadrado $[IJLM]$ é semelhante com o quadrado $[DEFG]$. A sua razão de semelhança irá ser dada pela razão entre as alturas das pirâmides $[DEFGH]$ e $[IJLMH]$, pelo que:

$$\text{altura}_{[DEFGH]} = 8 \quad \text{altura}_{[IJLMH]} = 16 - 13 = 3$$

Assim:

$$\text{razão}_{\text{redução}} = \frac{3}{8}$$

Ou seja:

$$\overline{LM} = \frac{3}{8}\overline{DE} = \frac{3}{8} \times 8 = 3 \text{ u. m.}$$

Pelo que:

$$A_{[IJLM]} = \overline{LM}^2 = 3^2 = 9 \text{ u. a.}$$

23.5. Tem-se que a interseção do sólido pelo plano $z = k$, faz com que:

$$V_{\text{sólido } 1} = V_{\text{sólido } 2} \Leftrightarrow V_{\text{paralelepípedo } 1} = V_{\text{paralelepípedo } 2} + V_{\text{pirâmide}}$$

Mas então:

$$V_{\text{paralelepípedo } 1} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = 8^2 \times k = 64k \text{ u. v.}$$

$$V_{\text{paralelepípedo } 2} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = 8^2 \times (8 - k) = 64 \times (8 - k) = 512 - 64k$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 8 = \frac{512}{3} \text{ u. v.}$$

Equacionando:

$$V_{\text{paralelepípedo } 1} = V_{\text{paralelepípedo } 2} + V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64k = 512 - 64k + \frac{512}{3} \Leftrightarrow 64k + 64k = \frac{2048}{3} \Leftrightarrow 128k = \frac{2048}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2048}{3} : 128 \Leftrightarrow k = \frac{2048}{3} \times \frac{1}{128} \Leftrightarrow k = \frac{16}{3}$$

O valor de k é $\frac{16}{3}$.

24.

24.1. Sabe-se que a esfera de menor raio tem diâmetro $6\sqrt{5}$.

Logo:

$$\text{raio} = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

Como α é paralelo a xOy e tangente à esfera de menor raio, então α é definido pela condição $z = 3\sqrt{5}$.

24.2. A esfera menor é definida pela condição:

$$\text{Centro} = (0; 0; 0) \quad \text{raio} = 3\sqrt{5}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = (3\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 45$$

24.3. Tem-se que a interseção da esfera maior com o plano α é $36\pi \text{ cm}^2$. Assim, podemos concluir que:

$$A = 36\pi \Leftrightarrow \pi \times \text{raio}^2 = 36\pi \Leftrightarrow \text{raio}^2 = 36 \Leftrightarrow \text{raio} = \sqrt{36} \Leftrightarrow \text{raio} = 6 \text{ cm}$$

Aplicando um Teorema de Pitágoras, vem que:

$$\overline{OA}^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 45 + 36 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 81$$

Como $\overline{OA} > 0$, $\overline{OA} = \sqrt{81} \Leftrightarrow \overline{OA} = 9$

Conseguimos então determinar o volume da esfera maior:

$$V_{\text{esfera maior}} = \frac{4}{3}\pi \times \overline{OA}^3 = \frac{4}{3}\pi \times 9^3 = 972\pi \text{ cm}^3$$

24.4. Planos que sejam paralelos a xOz são definidos por condições do tipo $y = k$, onde k é uma constante real.

Assim, podemos concluir que os planos tangentes pedidos são definidos pelas equações $y = -9$ e $y = 9$.

25.

25.1. O centro da superfície esférica é $A(1,1,1)$ e a medida do comprimento do raio é 5. A superfície esférica é definida pela condição:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$$

25.2. O ponto B pertence á reta $x = 1 \wedge y = 4$, então as suas coordenadas são $B(1,4,z_B)$. Para além disso, sabemos que B pertence à superfície esférica:

$$(1 - 1)^2 + (4 - 1)^2 + (z_B - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 9 + (z_B - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (z_B - 1)^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow (z_B - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow z_B - 1 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow z_B = 4 + 1 \vee z_B = -4 + 1 \Leftrightarrow z_B = 5 \vee z_B = -3$$

Como B pertence ao 1.º octante, então as coordenadas de B são $(1,4,3)$.

O ponto B' , imagem do ponto B pela reflexão de eixo Oy , tem de coordenadas $(-1,4,-3)$.

25.3. Os pontos que pertencem ao eixo das cotas (eixo Oz) tem abcissa e ordenada nulas. Logo,

$$(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 1 + 1 + (z - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 25 - 1 - 1 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 23 \Leftrightarrow z - 1 = \pm\sqrt{23} \Leftrightarrow z = \sqrt{23} + 1 \vee z = -\sqrt{23} + 1$$

A superfície esférica interseta o eixo das cotas nos pontos $(0,0,\sqrt{23} + 1)$ e $(0,0,-\sqrt{23} + 1)$.

25.4. O centro de ambas as circunferências que resultam da interseção dos dois planos com a superfície esférica pertencem à reta de equação $x = 1 \wedge y = 1$. Como são planos paralelos ao plano xOy , então serão definidos por $z = k$, com $k \in]1,6[$.

Assim:

$$(1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (k - 1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (k - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow k - 1 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow k = 4 + 1 \vee k = -4 + 1 \Leftrightarrow k = 5 \vee k = -3$$

Os planos são definidos pelas condições $z = 5$ e $z = -3$.

Avaliar – Página 94 a 96

1.

1.1. Seja $\overline{OI} = h$. Tem-se que $\overline{GH} = 6$.

$$A_{[GHI]} = 12.$$

Logo:

$$A_{[GHI]} = 12 \Leftrightarrow \frac{\overline{GH} \times \overline{OI}}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{6h}{2} = 12 \Leftrightarrow 3h = 12 \Leftrightarrow h = \frac{12}{3} \Leftrightarrow h = 4$$

Podemos então concluir que $I(0;0;-4)$, pelo que a sua cota assume o valor de -4 .

1.2. Por observação do referencial e tendo em conta os dados fornecidos, temos que:

$$A(0;-2;0) \quad B(0;-2;4) \quad C(-3;0;4) \quad D(0;2;4) \quad E(0;2;0) \quad F(3;0;4) \quad G(3;0;0) \quad H(-3;0;0) \quad I(0;0;-4)$$

1.3. A área de $[AGEH]$ é obtida por:

$$A_{[AGEH]} = 2 \times A_{[EGH]} = 2 \times \frac{\overline{GH} \times \overline{OE}}{2} = 2 \times \frac{6 \times 2}{2} = 12 \text{ u. a.}$$

1.4. Tem-se que:

$$V_{[AGEHBFDC]} = A_{[AGEH]} \times \overline{HC} \quad V_{[AGEHI]} = \frac{1}{3} \times A_{[AGEH]} \times \overline{OI} = \frac{1}{3} \times A_{[AGEH]} \times \overline{HC}$$

Logo:

$$\text{razão} = \frac{V_{[AGEHBFDC]}}{V_{[AGEHI]}} = \frac{A_{[AGEH]} \times \overline{HC}}{\frac{1}{3} \times A_{[AGEH]} \times \overline{HC}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 : \frac{1}{3} = 1 \times 3 = 3$$

Concluimos então que o volume do prisma é o triplo do volume da pirâmide.

1.5. Os vértices do prisma com abcissa nula e ordenada negativa são os vértices A e B .

Assim, a soma das suas cotas será:

$$\text{soma} = z_A + z_B = 0 + 4 = 4$$

Opção (B)

1.6. A área do polígono $[ABDEI]$ é dada por:

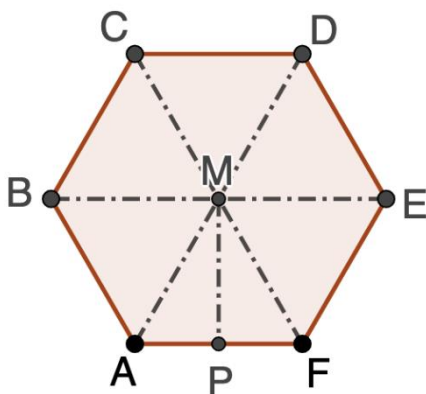
$$A_{[ABDEI]} = A_{[ABDE]} + A_{[AEI]} = \overline{AE} \times \overline{AB} + \frac{\overline{AE} \times \overline{OI}}{2} = 4 \times 4 + \frac{4 \times 4}{2} = 16 + 8 = 24 \text{ u. a.}$$

2. Como a reta é paralela ao eixo das abcissas, então será definida por uma condição do tipo $y = k_1 \wedge z = k_2$, em que k_1 e k_2 são constantes reais. Neste caso, temos que A , B e C têm ordenada igual a 1 e cota igual a 1. Logo, a reta fica definida pela condição $y = 1 \wedge z = 1$.

Opção (D)

3.

3.1. As bases do prisma são hexágonos regulares, sendo que podemos representar a vista de cima do prisma. Desta forma, podemos concluir que:



$$\overline{AF} = \overline{FM} = \overline{AM}$$

$$\overline{AM} = 2 \quad \overline{AP} = \frac{2}{2} = 1 \quad \overline{PM} = h$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo \overline{APM} , temos que:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + h^2 \Leftrightarrow 4 - 1 = h^2 \Leftrightarrow 3 = h^2$$

$$\text{Como } h > 0, h = \sqrt{3}$$

Logo,

$$A(\sqrt{3}, -1, 3) \quad B(0, -2, 3) \quad I(0, -2, -3) \quad J(-\sqrt{3}, -1, -3)$$

3.2

- a) O plano AFH pode ser definido pela equação $x = \sqrt{3}$.
 b) A reta GH é definida pela condição $x = \sqrt{3} \wedge z = -3$.
 c) A aresta $[CD]$ é definida pela condição $x = -\sqrt{3} \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge z = 3$.

3.3.

- a) Por exemplo, a reta AF .
 b) O plano BFH , por exemplo.
 c) O plano ABI , por exemplo.

3.4. Começemos por estudar a embalagem cúbica. Temos que:

$$cartão_{cubo} = 6 \times 4^2 = 6 \times 16 = 96 \text{ cm}^2$$

Em termos de custo, podemos então concluir que:

$$custo_{cubo} = 0,07 \times 96 = 6,72 \text{ €}$$

Considerando a embalagem em forma de prisma hexagonal regular, temos que:

$$\begin{aligned} A_{prisma \text{ hexagonal}} &= 2 \times A_{[ABCDE]} + 6 \times A_{[AFGH]} = 2 \times \frac{P}{2} \times \text{apótema} + 6 \times \overline{AF} \times \overline{FG} = 2 \times \frac{12}{2} \times \sqrt{3} + 6 \times 2 \times 6 = \\ &= 12\sqrt{3} + 72 \approx 92,78 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Em termos de custo, esta embalagem ficará orçamentada com:

$$custo_{prisma} = 92,78 \times 0,05 \approx 4,64 \text{ €}$$

Tendo em conta que a empresa pretende economizar na embalagem, podemos concluir que deverá optar pela embalagem com a forma de prisma hexagonal regular.

4.

4.1. A superfície esférica tem centro no ponto A . Para escrever a condição que a define, temos de determinar a medida do comprimento do raio dessa superfície.

$$raio = d(A, C) = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (2 - 5)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9 + 0} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Logo:

$$(x - (-2))^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 18$$

4.2. Tendo em conta a descrição feita no enunciado, temos que:

$$V = \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}; z_A + 12 \right) = \left(\frac{-2 + (-5)}{2}; \frac{2 + 5}{2}; 2 + 12 \right) = \left(-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}; 14 \right)$$

$$B = (x_A; y_C; z_A) = (-2; 5; 2) \quad D = (x_C; y_A; z_C) = (-5; 2; 2)$$

4.3. O plano mediador de $[DC]$ é paralelo ao plano coordenado xOz .

Tem-se:

$$M_{[DC]} = \left(\frac{-5 + (-5)}{2}, \frac{2 + 5}{2}, \frac{2 + 2}{2} \right) = \left(-5, \frac{7}{2}, 2 \right)$$

Como o plano mediador de $[DC]$ tem de incluir o ponto médio de $[DC]$, então a equação que o define é $y = \frac{7}{2}$.

As coordenadas do ponto V são $\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 14\right)$. Como a sua ordenada é $\frac{7}{2}$, então V pertence ao plano mediador de $[DC]$.

5.

5.1. Como octaedro é um sólido regular, então os comprimentos das suas arestas são iguais. As coordenadas dos vértices do octaedro são:

$$(\sqrt{2}; 0; 0) \quad (-\sqrt{2}; 0; 0) \quad (0; \sqrt{2}; 0) \quad (0; -\sqrt{2}; 0) \quad (0; 0; \sqrt{2}) \quad (0; 0; -\sqrt{2})$$

5.2. As equações dos planos que contém as faces do cubo são paralelas aos planos coordenados. Logo, ficam definidas por:

$$x = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2} \quad y = \sqrt{2} \quad y = -\sqrt{2} \quad z = \sqrt{2} \quad z = -\sqrt{2}$$

5.3. Temos que o centro da superfície esférica é o ponto N de coordenadas $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$. O raio da superfície esférica pode ser dado por:

$$\text{raio} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ u. m.}$$

5.4. Os pontos P e M têm coordenadas $(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, respetivamente.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de $[PM]$. Então,

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - (-\sqrt{2}))^2 + (z - \sqrt{2})^2 = (x - (-\sqrt{2}))^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}y + 2 + 2 + 2 - 2 - 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$$

Opção (B)

3. Vetores no plano e no espaço

Recordar – Página 99

1.

1.1. Podem ser definidas 3 direções.

1.2.

a) Origem: G ; Extremidade: E

c) Por exemplo: $[A, J]$ e $[H, F]$

e) Por exemplo: $[D, E]$ e $[F, G]$

g) Por exemplo: \vec{AI} e \vec{GF}

b) Por exemplo: $[A, B]$ e $[F, H]$

d) Por exemplo: $[F, A]$ e $[E, G]$

f) Por exemplo: AI e FH

h) Por exemplo: \vec{GD}

2.1. Por exemplo: Forças \vec{a} e \vec{c}

2.2. Por exemplo: Forças \vec{a} e \vec{b}

3.

a) Por exemplo: \vec{a} e \vec{b}

b) Por exemplo: \vec{b} e \vec{u}

c) Por exemplo: \vec{b} e \vec{v}

d) Por exemplo: \vec{c} e \vec{u}

e) \vec{a} e \vec{w}

f) \vec{c} e \vec{d}

Tarefa 1 – Página 102

1. Para determinar as intensidades de \vec{F}_3 e \vec{F}_4 temos de aplicar o Teorema de Pitágoras.

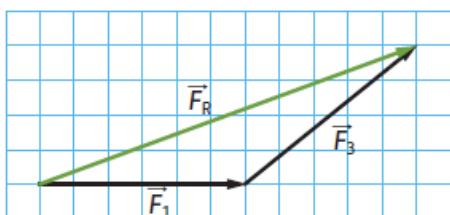
$$\bullet x^2 = 5^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 + 16 \Leftrightarrow x^2 = 41 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{41}$$

$$\bullet y^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow y^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow y = \pm 5$$

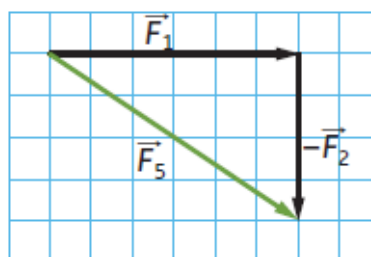
A intensidade de \vec{F}_1 é 6 N, de \vec{F}_2 é 4 N, de \vec{F}_3 é $\sqrt{41}$ N, de \vec{F}_4 é 5 N.

2. Se se aplicar a força \vec{F}_1 ao corpo representado na figura, este irá deslocar-se para a direita. Se se aplicar a força \vec{F}_2 o corpo irá deslocar-se para cima. Se se aplicar a força \vec{F}_3 o corpo irá deslocar-se para o ponto que se observa na figura.

3.



4. $\vec{F}_2 + \vec{F}_5 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{F}_5 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$



Aplicar – Página 101

1.

1.1. \vec{F}_1 e \vec{F}_3

1.2.

- $\|\vec{F}_1\| = 5 \times 10 = 50 \text{ N}$

- $\|\vec{F}_2\|^2 = 30^2 + 30^2 \Leftrightarrow \|\vec{F}_2\|^2 = 900 + 900 \Leftrightarrow \|\vec{F}_2\|^2 = 1800 \Leftrightarrow \|\vec{F}_2\| = \pm\sqrt{1800} \Leftrightarrow \|\vec{F}_2\| = \pm 30\sqrt{2}$

Como $\|\vec{F}_2\| \geq 0$, então, $\|\vec{F}_2\| = 30\sqrt{2} \text{ N}$

- $\|\vec{F}_3\| = 4 \times 10 = 40 \text{ N}$

- $\|\vec{F}_4\| = 4 \times 10 = 40 \text{ N}$

- $\|\vec{F}_5\| = 2 \times 10 = 20 \text{ N}$

2.

2.1.

- $\|\vec{u}\| = 7$

- $\|\vec{v}\| = 3$

- $\|\vec{w}\|^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{w}\|^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{w}\|^2 = 18 \Leftrightarrow \|\vec{w}\| = \pm\sqrt{18} \Leftrightarrow \|\vec{w}\| = \pm 3\sqrt{2}$

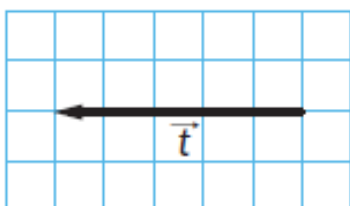
Como $\|\vec{w}\| \geq 0$, então, $\|\vec{w}\| = 3\sqrt{2}$

- $\|\vec{z}\|^2 = 6^2 + 1^2 \Leftrightarrow \|\vec{z}\|^2 = 36 + 1 \Leftrightarrow \|\vec{z}\|^2 = 37 \Leftrightarrow \|\vec{z}\| = \pm\sqrt{37}$

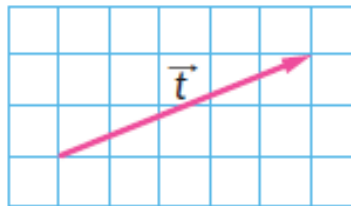
Como $\|\vec{z}\| \geq 0$, então, $\|\vec{z}\| = \sqrt{37}$

2.2.

a)



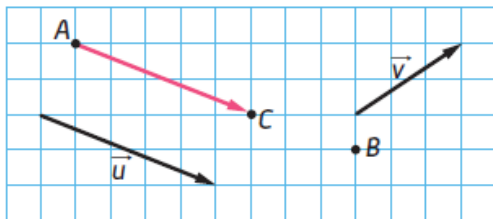
b)



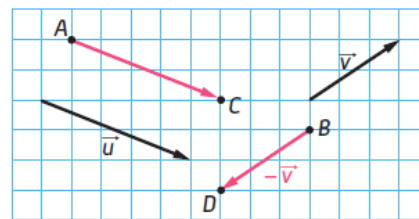
Aplicar – Página 102

3.

3.1.



3.2.



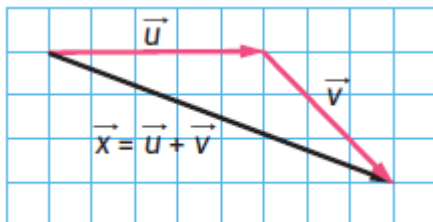
4.

- a) $\overrightarrow{FG} = G - F$ b) $\overrightarrow{AH} = H - A$ c) $E + \overrightarrow{EF} = F$ d) $G + \overrightarrow{IJ} = G + \overrightarrow{GH} = H$
 e) $B + \overrightarrow{FL} = B + \overrightarrow{BH} = H$ f) $E = C + \overrightarrow{CE}$ (p. ex.) g) $D - \overrightarrow{LD} = D + \overrightarrow{DL} = L$ h) $K - \overrightarrow{BK} = B$ (p. ex.)

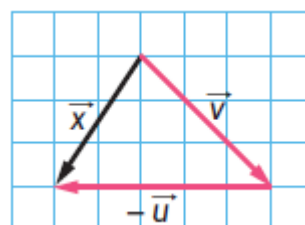
Aplicar – Página 104

5.

5.1.

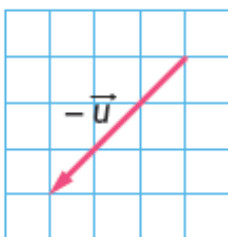


5.2. $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{v} + (-\vec{u})$



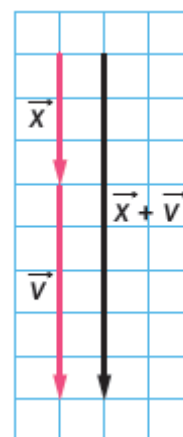
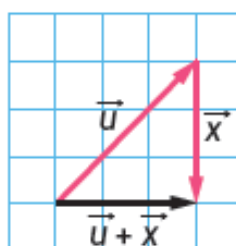
6.

6.1.

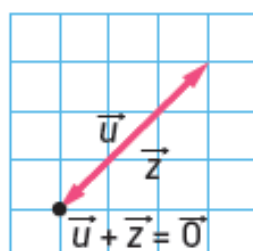


6.2. $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{v} + (-\vec{u})$

6.3.



6.4.



7.

7.1. $\vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BE}$ (p. ex.)

7.2. $\vec{BH} + \vec{HG} = \vec{BG}$ (p. ex.)

7.3. $\vec{FC} + \vec{DE} = \vec{GD} + \vec{DE} = \vec{GE}$ (p. ex.)

7.4. $\vec{AF} + \vec{FA} = \vec{AA} = \vec{0}$

7.5. $\vec{BE} + (\vec{CE} + \vec{DG}) = \vec{BE} + (\vec{CE} + \vec{EH}) =$
 $= \vec{BE} + \vec{CH} = \vec{BE} + \vec{EI} = \vec{BI}$ (p. ex.)

7.6. $\vec{ED} + \vec{0} = \vec{ED}$ (p. ex.)

7.7. $\vec{HE} + (-\vec{FE}) = \vec{HE} + \vec{EF} = \vec{HF}$ (p. ex.)

7.8. $\vec{BH} + \vec{FC} = \vec{BH} + \vec{HE} = \vec{BE}$ (p. ex.)

7.9. $\vec{FC} + (-\vec{IF}) = \vec{FC} + \vec{FI} = \vec{IG} + \vec{FI} = \vec{FI} + \vec{IG} =$
 $= \vec{FG}$ (p. ex.)

7.10. $\vec{AD} + (-\vec{FI}) = \vec{AD} + \vec{IF} =$
 $= \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{0}$

Aplicar – Página 105

8.

8.1.

a) Por ex. $[P, 0]$ e $[I, J]$

b) Por ex. \vec{PM} e \vec{IK}

c) Por ex. \vec{PO} e \vec{JI}

8.2.

a) $F + \vec{DL} = F + \vec{FN} = N$

b) $I + \vec{ML} = H$

c) $0 + \vec{ON} = N$ (p. ex.)

d) $\vec{JK} + \vec{EC} = \vec{JK} + \vec{KG} = \vec{JG}$ (p. ex.)

e) $\vec{PJ} + \vec{FE} + \vec{CF} = \vec{PK} + \vec{CF} = \vec{PN}$ (p. ex.)

f) $\vec{HG} + \vec{OK} + \vec{DL} = \vec{HG} + \vec{HC} = \vec{HD}$ (p. ex.)

g) $\vec{BL} + \vec{NH} = \vec{0}$

h) $\vec{GI} + \vec{IG} = \vec{0}$ (p. ex.)

Aplicar – Página 106

9.

9.1.

a) $G + \vec{EB} = C$

b) $K - \vec{LH} = K + \vec{HL} = I$

c) $\vec{CA} + \vec{EB} = \vec{HE} + \vec{EB} = \vec{HB}$ (p.ex.)

d) $\vec{EI} + \vec{NI} = \vec{KN} + \vec{NI} = \vec{KI}$ (p.ex.)

e) $\vec{KM} + (-\vec{DB}) = \vec{KM} + \vec{BD} = \vec{BD} + \vec{DG} = \vec{BG}$ (p.ex.)

f) $\vec{DH} - \vec{HD} = \vec{DH} + \vec{DH} = \vec{DH} + \vec{HL} = \vec{DL}$ (p.ex.)

g) $\vec{AD} - \vec{EI} = \vec{AD} + \vec{IE} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$

h) $\vec{CG} + \vec{HK} - \vec{IG} = \vec{CG} + \vec{GJ} + \vec{GI} = \vec{CJ} + \vec{GI} =$
 $= \vec{CJ} + \vec{JL} = \vec{CL}$ (p. ex.)

9.2.

$$\text{a) } \|\vec{AH}\|^2 = 4^2 + 6^2 \Leftrightarrow \|\vec{AH}\|^2 = 16 + 36 \Leftrightarrow \|\vec{AH}\|^2 = 52 \Leftrightarrow \|\vec{AH}\| = \pm\sqrt{52} \Leftrightarrow \|\vec{AH}\| = \pm 2\sqrt{13}$$

Como $\|\vec{AH}\| > 0$, então, $\|\vec{AH}\| = 2\sqrt{13}$.

$$\text{b) } \vec{JD} - \vec{HL} + \vec{AF} = \vec{JD} + \vec{LH} + \vec{AF} = \vec{JD} + \vec{DA} + \vec{AF} = \vec{JF}$$

Assim, $\|\vec{JD} - \vec{HL} + \vec{AF}\| = \|\vec{JF}\|$.

$$\|\vec{JF}\|^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{JF}\|^2 = 4 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{JF}\|^2 = 13 \Leftrightarrow \|\vec{JF}\| = \pm\sqrt{13}$$

Como $\|\vec{JF}\| > 0$, então, $\|\vec{JF}\| = \sqrt{13}$, logo, $\|\vec{JD} - \vec{HL} + \vec{AF}\| = \sqrt{13}$.

Aplicar – Página 108

10.

10.1.

- a) $3\vec{AB} = \vec{AD}$ (p.ex.)
- b) $\frac{1}{4}\vec{AE} = \vec{AB}$ (p.ex.)
- c) $-\vec{AB} = \vec{BA}$ (p.ex.)
- d) $-2\vec{AB} = \vec{CA}$ (p.ex.)
- e) $\frac{3}{2}\vec{AC} = \vec{AD}$
- f) $-\frac{4}{3}\vec{AD} = \vec{EA}$

10.2.

- a) $\|\vec{HJ}\| = 1$
- b) $\|\vec{KO}\| = 2$
- c) $\|\vec{NM}\| = \frac{1}{2}$
- d) $\| -3\vec{FG} \| = 3 \times \|\vec{FG}\| = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

11.

11.1. Como \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo sentido, então:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 4 + \sqrt{2} + (-2\sqrt{2} + 6) = 4 + 6 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 10 - \sqrt{2}$$

11.2. Como \vec{u} e \vec{v} tem sentidos contrários e $\|\vec{u}\| > \|\vec{v}\|$, então:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = 4 + \sqrt{2} - (-2\sqrt{2} + 6) = 4 - 6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2$$

Tarefa 2 – Página 109

1. $(\frac{1}{2} + 2)\vec{AI} = \frac{5}{2}\vec{AI} = \vec{AV}$ e $\frac{1}{2}\vec{AI} + 2\vec{AI} = \vec{AH} + \vec{HV} = \vec{AV}$
2. $\frac{1}{3}(\vec{PM} + \vec{MD}) = \frac{1}{3}\vec{PD} = \vec{PJ}$ e $\frac{1}{3}\vec{PM} + \frac{1}{3}\vec{MD} = \vec{PO} + \vec{ML} = \vec{PO} + \vec{OJ} = \vec{PJ}$
3. $3 \times (\frac{1}{5}\vec{BX}) = 3 \times \vec{BG} = \vec{BO}$ e $(3 \times \frac{1}{5})\vec{BX} = \frac{3}{5}\vec{BX} = \vec{BO}$

Aplicar – Página 109

12.

12.1. $3(\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{u}) + 2(-2\vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{u} - 4\vec{v} = (3 - 4)\vec{u} + (3 - 4)\vec{v} = -\vec{u} - \vec{v}$

12.2. $\frac{2}{3}(3\vec{a} - \vec{b}) - 2\left(\frac{1}{4}\vec{b}\right) - \vec{a} = 2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{a} - \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a} - \frac{4}{6}\vec{b} - \frac{3}{6}\vec{b} = \vec{a} - \frac{7}{6}\vec{b}$

12.3. $-(2\vec{v} - \vec{u}) + 4\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) + \vec{v} = -2\vec{v} + \vec{u} + 2\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + 2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{v} = 3\vec{u} - \vec{v}$

13.

a) $\lambda(3\vec{u}) + 2(\vec{u} + 2\vec{u}) = (\lambda - 5)\vec{u} \Leftrightarrow 3\lambda\vec{u} + 6\vec{u} = (\lambda - 5)\vec{u} \Leftrightarrow (3\lambda + 6)\vec{u} = (\mu - 5)\vec{u}$

$3\lambda + 6 = \lambda - 5 \Leftrightarrow 3\lambda - \lambda = -5 - 6 \Leftrightarrow 2\lambda = -11 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-11}{2}$

b) $-3(\vec{u} - \vec{u}) - 2(\lambda\vec{u}) = \vec{u} - \lambda\vec{u} \Leftrightarrow -2\lambda\vec{u} = \vec{u} - \lambda\vec{u} \Leftrightarrow -2\lambda\vec{u} = (1 - \lambda)\vec{u} \Leftrightarrow -2\lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\lambda + \lambda = 1 \Leftrightarrow -\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$

14.

14.1. $\|5(\vec{u} - \vec{v}) - 5\vec{u}\| = \|5\vec{u} - 5\vec{v} - 5\vec{u}\| = \|-5\vec{v}\| = 5\|\vec{v}\| = 5 \times (\sqrt{6} - 1) = 5\sqrt{6} - 5$

14.2. $\|2(-\vec{u}) - (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v}\| = \|-2\vec{u} - \vec{u} - \vec{v} + \vec{v}\| = \|-3\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\| = 3 \times 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

Aplicar – Página 111

16. Para provar que G é o ponto médio de [FC] basta provar que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$.

Ora $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC}$

Deste modo, conclui-se que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$, logo, G é o ponto médio de [FC].

17. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$

Como $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{FC}$ então,

$\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{FC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FC}$

Assim, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{FC} \equiv 2\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{FC} = 2(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}) = 2\overrightarrow{FE}$ c . q . m .

18. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Como B é o ponto médio do lado [AC], então, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}$

Assim,

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DB}$ c.q.m.

Aplicar – Página 112

19

19.1. $[A, B]$ e $[E, F]$ (p. ex.)

19.2. $[A, B], [E, F], [D, C]$ e $[H, G]$ (p. ex.)

19.3. $[A, E]$ (p. ex.)

19.4. \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AE} (p. ex.)

Aplicar – Página 113

20.

20.1.

a) $A + \overrightarrow{CI} = A + \overrightarrow{AG} = G$

b) $B + (-EF) = B + \overrightarrow{FA} = B + BC = C$

c) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{AL}$

d) $(D - E) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{FI} - \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{FJ}$

f) $F + 2\overrightarrow{AB} = F + \overrightarrow{FC} = C$

g) $O + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{FE} = O + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HI} = O + \overrightarrow{BI} = J$

h) $A + 2\overrightarrow{BC} = A + 2\overrightarrow{AO} = A + \overrightarrow{AD} = D$

20.2. $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{EJ}$

Logo $\|\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FL}\| = \|\overrightarrow{EJ}\|$

Pelo Teorema de Pitágoras,

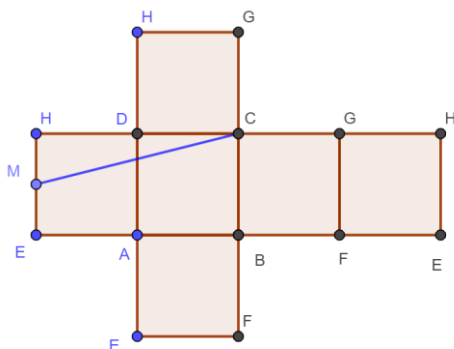
$$\|\overrightarrow{EJ}\|^2 = \|\overrightarrow{ED}\|^2 + \|\overrightarrow{DJ}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EJ}\|^2 = 4^2 + 5^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EJ}\|^2 = 16 + 25 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EJ}\|^2 = 41 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EJ}\| = \pm\sqrt{41}$$

Como $\|\overrightarrow{EJ}\| \geq 0$, então, $\|\overrightarrow{EJ}\| = \sqrt{41}$.

Assim $\|\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FL}\| = \sqrt{41}$.

Aplicar – Página 114

21. Começemos por planificar o cubo e assinalar nesta planificação o percurso mais curto entre M e C.



Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a distância pretendida.

$$d^2 = 3^2 + 12^2 \Leftrightarrow d^2 = 9 + 144 \Leftrightarrow d^2 = 153 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \pm\sqrt{153} \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{17}$$

Como $d > 0$, então $d = 3\sqrt{17}$.

A menor distância entre M e C é $3\sqrt{17}$ cm.

Tarefa 3 – Página 115

$$\vec{a} = -4\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = -4\vec{e}_1$$

$$\vec{b} = 0\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 = 5\vec{e}_2$$

$$\vec{c} = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$$

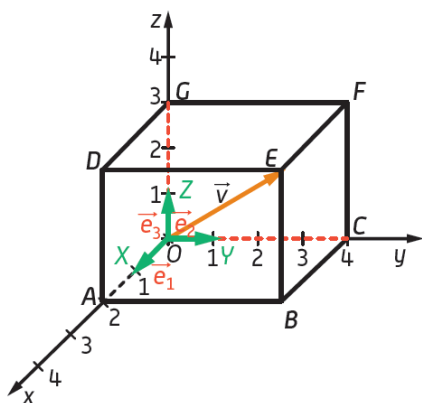
$$\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

$$\vec{v} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

$$\vec{w} = -6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

Tarefa 4 – Página 115

1.



2.

2.1. $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$

Logo, $a = 2$; $b = 4$ e $c = 3$.

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

Logo, $a = 2$; $b = 4$ e $c = 3$.

2.3. $\vec{OA} = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$

Logo, $a = 2$; $b = 0$ e $c = 0$.

2.2. $\vec{OC} = 0\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$

Logo, $a = 0$; $b = 4$ e $c = 0$.

2.4. $\vec{OG} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$

Logo, $a = 0$; $b = 0$ e $c = 3$.

3. $E(2; 4; 3)$

A abcissa, a ordenada e a cota do ponto E correspondem aos valores de a , b e c , respetivamente, obtidos em **2.1.**

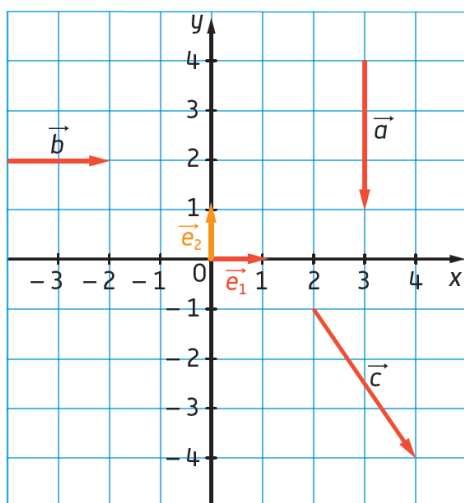
Aplicar – Página 116

22

22.1. $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$; $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$; $\vec{w} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

22.2. $\vec{u}(-4,0)$; $\vec{v}(2,5)$; $\vec{w}(-2,-2)$

22.3.



Aplicar – Página 117

23.

23.1. $\vec{AB} + \vec{RH} = \vec{QR} + \vec{RH} = \vec{QH}$

Assim, $\vec{QH}(-2,4,0)$

23.2. $\frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{EK} = \vec{FO} + \vec{OS} = \vec{FS} = (-2,0,4)$

23.3.

$$\vec{AR} - 2\vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BR} + 2\vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BR} + 2\vec{BA} = \vec{AB} + \vec{BA} + \vec{BR} + \vec{BA} = \vec{O} + \vec{BR} + \vec{RO} = \vec{BO} = (-2, -4, 4)$$

Tarefa 5 – Página 118

1.

\vec{u}	\vec{v}	$\vec{u} + \vec{v}$	$\vec{u} - \vec{v}$	$\vec{v} - \vec{u}$
(5, 3)	(2, -1)	(7, 2)	(3, 4)	(-3, -4)
(-2, 4)	(-1, -4)	(-3, 0)	(-1, 8)	(1, -8)
(6, -3)	(0, 5)	(6, 2)	(6, -8)	(-6, 8)
Por ex: (1, 2)	Por ex: (-1, -2)	(0, 0)	(2, 4)	(-2, -4)
Por ex: (4, -1)	Por ex: (2, 0)	(6, -1)	(2, -1)	(-2, 1)

2. $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2); \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2) \text{ e } \vec{v} - \vec{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)$$

3.

\vec{u}	\vec{v}	$\vec{u} + \vec{v}$	$\vec{u} - \vec{v}$	$\vec{v} - \vec{u}$
(5, 0, 3)	(2, -1, 3)	(7, -1, 6)	(3, 1, 0)	(-3, -1, 0)
(-2, 4, -2)	(-1, -4, 1)	(-3, 0, -1)	(-1, 8, -3)	(1, -8, 3)
(6, -3, 0)	(0, 5, -1)	(6, 2, -1)	(6, -8, 1)	(-6, 8, -1)
Por ex: (2, 1, 3)	Por ex: (0, 4, 4)	(2, 5, 7)	(2, -3, -1)	(-2, 3, 1)
Por ex: (1, 0, 1)	Por ex: (2, 2, 2)	(3, 2, 3)	(-1, -2, -1)	(1, 2, 1)

4. $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3); \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

$$\text{e } \vec{v} - \vec{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3)$$

Tarefa 6 – Página 119

Por exemplo,

No plano:

```
u1=float(input("Indica a 1ª coordenada do vetor u: "))
u2=float(input("Indica a 2ª coordenada do vetor u: "))
v1=float(input("Indica a 1ª coordenada do vetor v: "))
v2=float(input("Indica a 2ª coordenada do vetor v: "))
print("As coordenadas do vetor soma são (" ,u1+v1," ,",u2+v2,")")
print("e do vetor diferença são (" ,u1-v1," ,",u2-v2,")")
```

No espaço:

```
u1=float(input("Indica a 1ª coordenada do vetor u: "))
u2=float(input("Indica a 2ª coordenada do vetor u: "))
u3=float(input("Indica a 3ª coordenada do vetor u: "))
v1=float(input("Indica a 1ª coordenada do vetor v: "))
v2=float(input("Indica a 2ª coordenada do vetor v: "))
v3=float(input("Indica a 3ª coordenada do vetor v: "))
print("As coordenadas do vetor soma são (" ,u1+v1," ,",u2+v2," ,",u3+v3,")")
print("e do vetor diferença são (" ,u1-v1," ,",u2-v2," ,",u3-v3,")")
```

Aplicar – Página 119

$$24. \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = (0, -3) + (2, 3) = (0 + 2, -3 + 3) = (2, 0)$$

Concordo com a afirmação do Vítor, pois, a resultante \vec{F} das forças que atuam sobre o carro tem a direção do raio da trajetória, pois a segunda coordenada do vetor é nula.

Aplicar – Página 120
25.

$$25.1. \vec{u} + \vec{w} = (2, 0) + (1, -4) = (2 + 1, 0 + (-4)) = (3, -4)$$

$$25.2. \vec{v} - \vec{w} = (-1, 3) - (1, -4) = (-1 - 1, 3 - (-4)) = (-2, 7)$$

$$25.3. \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (2, 0) - (-1, 3) + (1, -4) = (2 - (-1), 0 - 3) + (1, -4) = (3, -3) + (1, -4) = (3 + 1, -3 + (-4)) = (4, -7)$$

26.

$$26.1. \vec{w} = \vec{x} + \vec{y} = (2, 4) + (1, -2) = (2 + 1, 4 + (-2)) = (3, 2)$$

$$26.2. \vec{x} + \vec{w} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{y} - \vec{x}$$

$$\text{Assim, } \vec{w} = \vec{y} - \vec{x} = (1, -2) - (2, 4) = (1 - 2, -2 - 4) = (-1, -6).$$

$$26.3. \vec{x} - \vec{w} = \vec{y} \Leftrightarrow -\vec{w} = \vec{y} - \vec{x} \Leftrightarrow \vec{w} = -\vec{y} + \vec{x} \Leftrightarrow \vec{w} = (\vec{x} - \vec{y})$$

$$\text{Assim, } \vec{w} = (\vec{x} - \vec{y}) = ((2, 4) - (1, -2)) = (2 - 1, 4 - (-2)) = (1, 6)$$

27.

$$27.1. \vec{t} = \vec{u} + \vec{v} = (2, 1, 3) + (1, 0, -2) = (2 + 1, 1 + 0, 3 + (-2)) = (3, 1, 1)$$

$$27.2. \vec{t} = \vec{w} - \vec{u} = (0, 0, 2) - (2, 1, 3) = (0 - 2, 0 - 1, 2 - 3) = (-2, -1, -1)$$

$$27.3. \vec{t} = \vec{v} - \vec{w} + \vec{u} = (1, 0, -2) - (0, 0, 2) + (2, 1, 3) = (1 - 0 - 0, 0 - 0 - 2) + (2, 1, 3) = (1, 0, -4) + (2, 1, 3) = (1 + 2, 0 + 1, -4 + 3) = (3, 1, -1)$$

Tarefa 7 – Página 121

$$1. \vec{u}(-1, 2)$$

$$2. \vec{u} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

3.

$$3.1. 2\vec{u} = 2(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2; 2\vec{u} = (-2, 4)$$

$$3.2. -\vec{u} = -(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2; -\vec{u} = (1, -2)$$

$$3.3. -\frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{1}{2}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2; -\frac{1}{2}\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

4.

- As coordenadas do vetor $2\vec{u}$ equivalem ao dobro das coordenadas de \vec{u} ($-2 = 2 \times (-1)$ e $4 = 2 \times 2$).
- As coordenadas do vetor $-\vec{u}$ são iguais aos simétricos das coordenadas de \vec{u} ($1 = -(-1)$ e $-2 = -(2)$).
- As coordenadas do vetor $-\frac{1}{2}\vec{u}$ são iguais ao simétrico de metade das coordenadas de \vec{u} ($\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times (-1)$ e $-1 = -\frac{1}{2} \times 2$).

Tarefa 8 – Página 121

```
u1=float(input('Qual é a primeira coordenada do vetor u?'))
u2=float(input('Qual é a segunda coordenada do vetor u?'))
v1=float(input('Qual é a primeira coordenada do vetor v?'))
v2=float(input('Qual é a segunda coordenada do vetor v?'))
if v1==0:
    if u1==0:
        print('Os vetores u e v são colineares.')
    else:
        print('Os vetores u e v não são colineares.')
else:
    if v2==0:
        if u2==0:
            print('Os vetores u e v são colineares.')
        else:
            print('Os vetores u e v não são colineares.')
    else:
        if u1/v1==u2/v2:
            print('Os vetores u e v são colineares.')
        else:
            print('Os vetores u e v não são colineares.')
```

Tarefa 9 – Página 122

1. No programa, apenas a primeira coordenada do vetor é multiplicada pelo escalar (2).

```
u1=3
u2=-1
escalar=2
(u1,u2)=(2*u1,2*u2)
print('(x,y)=(',u1,',',u2,')
```

2.

```
u1=float(input('Qual é a primeira coordenada do vetor?'))
u2=float(input('Qual é a segunda coordenada do vetor?'))
l=escalar=float(input('Qual é o valor do escalar?'))
(u1,u2)=(escalar*u1,escalar*u2)
print('(x,y)=(',u1,',',u2,')
```

Aplicar – Página 122

28.

28.1. $\vec{u}(4,2); \vec{v}(-5,0); \vec{w}(0,3); \vec{z}(-5,1)$

28.2.

a) $\vec{u} + \vec{z} = (4,2) + (-5,1) = (4 + (-5), 2 + 1) = (-1,3)$

b) $\vec{u} - \vec{w} = (4,2) - (0,3) = (4 - 0, 2 - 3) = (4, -1)$

c) $2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{w} = 2(4,2) - \frac{1}{3}(0,3) = (8,4) - (0,1) = (8 - 0, 4 - 1) = (8,3)$

d) $\vec{u} - \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{u} - 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} =$
 $= -(4,2) + \frac{1}{2}(-5,0) + \frac{1}{2}(0,3) = (-4, -2) + \left(-\frac{5}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{3}{2}\right) = \left(-4 + \left(-\frac{5}{2}\right), -2 + 0\right) + \left(0, \frac{3}{2}\right) =$
 $= \left(-\frac{13}{2}, -2\right) + \left(0, \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2} + 0, -2 + \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

29.

29.1. $3\vec{u} = 3(-1,1,2) = (-3,3,6)$

29.2. $-2\vec{u} = -2(-1,1,2) = (2, -2, -4)$

29.3. $2\vec{u} - \vec{v} = 2(-1,1,2) - (0, -2, -1) = (-2, 2, 4) - (0, -2, -1) = (-2 - 0, 2 - (-2), 4 - (-1)) =$
 $= (-2, 4, 5)$

29.4. $\frac{1}{2}\vec{u} - 2(\vec{u} - 3\vec{v}) - 2(2\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{u} + 6\vec{v} - 4\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u} + 2\vec{v} = -\frac{3}{2}(-1,1,2) + 2(0, -2, -1) =$
 $= \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -3\right) + (0, -4, -2) = \left(\frac{3}{2} + 0, -\frac{3}{2} + (-4), -3 + (-2)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}, -5\right)$

29.5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}, -3, -\sqrt{5}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) = \left(1, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

29.6. $2\vec{w} - \vec{z} = 2(\sqrt{2}, -3, -\sqrt{5}) - (\sqrt{2}, 0, -1) = (2\sqrt{2}, -6, -2\sqrt{5}) - (0\sqrt{2}, 0, -1) =$
 $= (2\sqrt{2} - 0\sqrt{2}, -6 - 0, -2\sqrt{5} - (-1)) = (0, -6, -2\sqrt{5} + 1)$

30.

30.1. $2\vec{u} = (2,4,-6) \Leftrightarrow 2(1,2k,-3) = (2,4,-6) \Leftrightarrow (2,4k,-6) = (2,4,-6) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 = 2 \wedge 4k = 4 \wedge -6 = -6 \Leftrightarrow k = \frac{4}{4} \Leftrightarrow k = 1$

30.2. $-\vec{u} = (-1,1,3) \Leftrightarrow -(1,2k,-3) = (-1,1,3) \Leftrightarrow (-1,-2k,3) = (-1,1,3) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -1 = -1 \wedge -2k = 1 \wedge 3 = 3 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

30.3. $\frac{1}{3}\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1,2k,-3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}k, -1\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \wedge \frac{2}{3}k = -\frac{1}{2} \wedge -1 = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} : \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$

Aplicar – Página 123

31.

31.1. $\vec{u}(3,-2)$ e $\vec{v}(-6,4)$

$\frac{v_1}{u_1} = \frac{-6}{3} = -2$ e $\frac{v_2}{u_2} = \frac{4}{-2} = -2$

\vec{u} e \vec{v} são colineares pois $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$.

31.2. $\vec{u}(0,6)$ e $\vec{v}(2,0)$ não são colineares, pois, $u_1 = 0$ e $v_1 \neq 0$.

31.3. $\vec{u}(2,5)$ e $\vec{v}(1,10)$

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{v_2}{u_2} = \frac{10}{5} = 2$$

\vec{u} e \vec{v} não são colineares pois $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$.

31.4) $\vec{u}(2, \sqrt{3})$ e $\vec{v}(4\sqrt{3}, 6)$

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ e } \frac{v_2}{u_2} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

\vec{u} e \vec{v} são colineares pois $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$.

32.

32.1.

a) \vec{w} é colinear com \vec{u} se e somente se $\frac{w_1}{u_1} = \frac{w_2}{u_2}$

$$\frac{w_1}{u_1} = \frac{w_2}{u_2} \Leftrightarrow \frac{-6}{2} = \frac{k-1}{3} \Leftrightarrow -18 = 2k-2 \Leftrightarrow 2k = -18+2 \Leftrightarrow 2k = -16 \Leftrightarrow k = -\frac{16}{2} \Leftrightarrow k = -8$$

b) Começemos por determinar as coordenadas de $\vec{v} - \vec{u}$.

$$\vec{v} - \vec{u} = (1,1) - (2,3) = (1-2, 1-3) = (-1, -2)$$

\vec{w} é colinear com $\vec{v} - \vec{u}$ se e somente se:

$$\frac{-6}{-1} = \frac{k-1}{-2} \Leftrightarrow -12 = k-1 \Leftrightarrow k = -12+1 \Leftrightarrow k = -11$$

c) Começemos por determinar as coordenadas de $\vec{v} - 2\vec{w}$.

$$\begin{aligned} \vec{v} - 2\vec{w} &= (1,1) - 2(-6, k-1) = (1,1) - (-12, 2k-2) = (1-(-12), 1-(2k-2)) = \\ &= (1+12, 1-2k+2) = (13, -2k+3) \end{aligned}$$

\vec{w} é colinear com $\vec{v} - 2\vec{w}$ se e somente se:

$$\frac{-6}{13} = \frac{k-1}{-2k+3} \Leftrightarrow -6(-2k+3) = 13(k-1) \Leftrightarrow 12k-18 = 13k-13 \Leftrightarrow 12k-13k = -13+18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k = 5 \Leftrightarrow k = -5$$

32.2. Começemos por determinar as coordenadas de $\vec{u} - 2\vec{v}$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (2,3) - 2(1,1) = (2,3) - (2,2) = (2-2, 3-2) = (0,1)$$

Para que \vec{w} fosse colinear com $\vec{u} - 2\vec{v}$ a primeira coordenada de \vec{w} teria de ser igual a zero, o que é impossível. Assim, provei que w não é colinear com $\vec{u} - 2\vec{v}$, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

Aplicar – Página 124

33.

33.1. Os vetores \vec{u} e \vec{v} são colineares se e só se os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais.

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}; \frac{v_2}{u_2} = \frac{3}{4}; \frac{v_3}{u_3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Como $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$ então \vec{u} e \vec{v} são colineares.

33.2. Como $u_2 = 0$ e $v_2 \neq 0$ então, \vec{u} a \vec{v} não são colineares.

33.3. Como $u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$, então, \vec{u} a \vec{v} são colineares.

33.4. Como $u_3 = v_3 = 0$ então os vetores \vec{u} a \vec{v} são colineares se os quocientes das outras duas coordenadas correspondentes forem iguais.

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{\pi^2 - 1}{\pi + 1} = \frac{(\pi + 1)(\pi - 1)}{\pi + 1} = \pi - 1$$

$$\text{e } \frac{v_2}{u_2} = \frac{2\pi - 2}{2} = \pi - 1$$

Como $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$ e $v_3 = u_3$, então, \vec{u} a \vec{v} são colineares.

Aplicar – Página 125

34.

34.1. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares temos que $\frac{2}{u_1} = \frac{v_2}{5} = \frac{10}{4}$

ou seja

$$\frac{2}{u_1} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow u_1 = \frac{2 \times 4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

e

$$\frac{v_2}{5} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow v_2 = \frac{5 \times 10}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

Assim, $u_1 = \frac{4}{5}$ e $v_2 = \frac{25}{2}$.

34.2. Para que \vec{u} e \vec{w} sejam colineares, como $w_1 = 0$, temos que $u_1 = w_1 = 0$ e

$$\frac{2}{5} = \frac{w_3}{4} \Leftrightarrow w_3 = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$$

Assim, $u_1 = 0$ e $w_3 = \frac{8}{5}$.

35.

35.1. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares, temos que:

$$\frac{a}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{-1}, \text{ ou seja, } \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Assim, $a = -\frac{2}{2} = -1$.

35.2. Começemos por calcular as coordenadas de $\vec{u} + \vec{w}$:

$$\vec{u} + \vec{w} = (2, 6, -1) + (3, -4, b - 1) = (2 + 3, 6 + (-4), -1 + b - 1) = (5, 2, b - 2)$$

Para que \vec{v} seja colinear a $\vec{u} + \vec{w}$ temos que $\frac{5}{a} = \frac{2}{-3} = \frac{b-2}{\frac{1}{2}}$

Assim,

$$\bullet \frac{5}{a} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{5 \times 3}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{2}$$

$$\bullet \frac{b-2}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow b - 2 = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow b - 2 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3} + 2 \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}$$

36. Se \vec{u} e \vec{v} fossem colineares, teríamos que $\frac{k-1}{2} = \frac{2}{5} = \frac{2}{k}$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{k-1}{2} = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{k} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 = \frac{4}{5} \\ k = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{9}{5} \\ k = 5 \end{cases}, \text{ o que é impossível.}$$

Assim, conclui-se que \vec{u} e \vec{v} não são colineares, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

Aplicar – Página 126

37.

Bola branca: $\vec{OA} = A - 0 = (-2, 6) - (0, 0) = (-2, 6)$

Bola preta: $\vec{AB} = B - A = (-4, 9) - (-2, 6) = (-2, 3)$

Aplicar – Página 127

38.

38.1.

a) $\vec{AC} = C - A = (-4, 0) - (2, 3) = (-4 - 2, 0 - 3) = (-6, -3)$

b) $\vec{BC} = C - B = (-4, 0) - (-3, 1) = (-4 - (-3), 0 - 1) = (-4 + 3, -1) = (-1, -1)$

c) $\vec{BA} = A - B = (2, 3) - (-3, 1) = (2 - (-3), 3 - 1) = (5, 2)$

38.2.

$$\vec{AB} = B - A = (-3, 1) - (2, 3) = (-3 - 2, 1 - 3) = (-5, -2)$$

$$\vec{CB} = B - C = (-3, 1) - (-4, 0) = (-3 - (-4), 1 - 0) = (-3 + 4, 1) = (1, 1)$$

$$\vec{AB} + 2\vec{CB} = (-5, -2) + 2(1, 1) = (-5, -2) + (2, 2) = (-5 + 2, -2 + 2) = (-3, 0) \text{ c.q.m.}$$

39.

$$\vec{AB} = B - A = (3, 2) - (1, 5) = (3 - 1, 2 - 5) = (2, -3)$$

$$\vec{BC} = C - B = (5, k^2 - 2k) - (3, 2) = (5 - 3, k^2 - 2k - 2) = (2, k^2 - 2k - 2)$$

Assim,

$$\vec{AB} = \vec{BC} \Leftrightarrow (2, -3) = (2, k^2 - 2k - 2) \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge -3 = k^2 - 2k - 2 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{2 \pm 0}{2} \Leftrightarrow k = 1$$

40. Para provar que $[ABCD]$ é um trapézio não paralelogramo basta provar que apenas dois dos lados são paralelos.

- Começemos por provar que os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DC} são colineares.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1) - (0, 5) = (-2 - 0, 1 - 5) = (-2, -4)$$

$$\text{e } \overrightarrow{DC} = C - D = (3, 1) - (4, 3) = (3 - 4, 1 - 3) = (-1, -2)$$

Assim $\frac{-2}{-1} = \frac{-4}{-2} = 2$, logo, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DC} são vetores colineares, ou seja, $[AB] // [DC]$.

- Agora provemos que \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{AD} não são colineares.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (3, 1) - (-2, 1) = (3 - (-2), 1 - 1) = (5, 0)$$

$$\text{e } \overrightarrow{AD} = D - A = (4, 3) - (0, 5) = (4 - 0, 3 - 5) = (4, -2)$$

Assim $-2 \neq 0$ logo \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{AD} não são vetores colineares.

Conclui-se então que $[ABCD]$ é um trapézio não paralelogramo.

41.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -b, c) - (2a - 1, 3, 1) = (1 - 2a, -b - 3, c - 1)$$

Assim,

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{u} \Leftrightarrow (1 - 2a, -b - 3, c - 1) = -(-5, 3, 0) \Leftrightarrow (1 - 2a, -b - 3, c - 1) = (5, -3, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a = 5 \\ -b - 3 = -3 \\ c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 4 \\ -b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

42.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (3, 1, 2k) - (5, -1, -2k^2) = (3 - 5, 1 - (-1), 2k - (-2k^2)) = (-2, 2, 2k + 2k^2)$$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (k, 2, 4) - (-2, -2, -2) = (k - (-2), 2 - (-2), 4 - (-2)) = (k + 2, 4, 6)$$

Então,

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (-2, 2, 2k + 2k^2) = 2(k + 2, 4, 6) \Leftrightarrow (-2, 2, 2k + 2k^2) = (2k + 4, 4, 12)$$

$$\Leftrightarrow -2 = 2k + 4 \wedge 2 = 4 \wedge 2k + 2k^2 = 12 \Leftrightarrow -2k = 4 + 2 \wedge 2k^2 + 2k - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2k = 6 \wedge k^2 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{6}{2} \wedge k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -3 \wedge k = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow k = -3 \wedge k = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = -3 \wedge \left(k = \frac{-1 + 5}{2} \vee k = \frac{-1 - 5}{2} \right) \Leftrightarrow k = -3 \wedge (k = 2 \vee k = -3) \Leftrightarrow k = -3$$

O valor de k é -3 .

Aplicar – Página 128

43.

43.1. $\overrightarrow{BA} = A - B = (2, -3) - (-2, 0) = (2 - (-2), -3 - 0) = (4, -3)$

43.2. $A + \vec{u} = (2, -3) + (1, -1) = (2 + 1, -3 + (-1)) = (3, -4)$

43.3. $B + \vec{u} = (-2, 0) + (1, -1) = (-2 + 1, 0 + (-1)) = (-1, -1)$

44.

Seja $B(a, b)$ então:

$\overrightarrow{AB} = (3, 1) \Leftrightarrow B - A = (3, 1) \Leftrightarrow B = (3, 1) + A \Leftrightarrow B = (3, 1) + (2, -3) \Leftrightarrow B = (3 + 2, 1 - 3) \Leftrightarrow B(5, -2)$

45.

45.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$, então,

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -3) - (2, 4) = (-4, -7)$

$M = (2, 4) + \frac{1}{2}(-4, -7) = \left(2 - \frac{4}{2}, 4 - \frac{7}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Ou seja, $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

45.2. Seja M o ponto médio de $[CB]$, então,

$$M = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$\overrightarrow{CB} = B - C = (-2, -3) - (0, 5) = (-2, -8)$

$M = (0, 5) + \frac{1}{2}(-2, -8) = \left(0 - \frac{2}{2}, 5 - \frac{8}{2}\right) = (-1, 1)$

Ou seja, $M(-1, 1)$.

46.

46.1. $\overrightarrow{CB} = B - C = (1, 4, -1) - (-5, 0, 2) = (1 - (-5), 4 - 0, -1 - 2) = (1 + 5, 4 - 0, -1 - 2) = (6, 4, -3)$

46.2. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = -(6, 4, -3) = (-6, -4, 3)$

Assim, $A + \overrightarrow{BC} = (3, -2, 0) + (-6, -4, 3) = (3 - 6, -2 - 4, 0 + 3) = (-3, -6, 3)$

46.3. $\overrightarrow{AC} = C - A = (-5, 0, 2) - (3, -2, 0) = (-5 - 3, 0 - (-2), 2 - 0) = (-8, 2, 2)$

Assim, $B - \overrightarrow{AC} = (1, -4, -1) - (-8, 2, 2) = (1 - (-8), -4 - 2, -1 - 2) = (9, -6, -3)$

46.4. Seja M ponto médio de $[AB]$. Então, $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Assim, $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+(-1)}{2}\right)$, ou seja, $M\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

Aplicar – Página 128

47. $B = A + \overline{AB} = (3,2, -1) + (-4,0,2) = (3 + (-4), 2 + 0, -1 + 2) = (-1,2,1)$.

48. Se M é o ponto médio de $[AB]$, então,

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} \Leftrightarrow B - A = 2\overline{AM} \Leftrightarrow B = A + 2\overline{AM}.$$

Como $\overline{AM} = M - A = (-2,4) - (1,3) = (-2 - 1, 4 - 3) = (-3,1)$,

então, $B = (1,3) + 2(-3,1) = (1,3) + (-6,2) = (-5,5)$.

49.

49.1. Seja $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ temos que

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = \sqrt{12} \wedge \frac{a_2 + b_2}{2} = 3 \Leftrightarrow a_1 + b_1 = 2\sqrt{12} \wedge a_2 + b_2 = 6$$

Assim, podemos ter, por exemplo: $A(\sqrt{12}, 2)$ e $B(\sqrt{12}, 4)$, ou seja, $A(2\sqrt{3}, 2)$ e $B(2\sqrt{3}, 4)$.

49.2. Sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$.

Como A é o ponto médio de $[BM]$ então $a_1 = \frac{b_1 + \sqrt{12}}{2}$ e $a_2 = \frac{b_2 + 3}{2}$.

Se, por exemplo, $B(0,1)$, então, $b_1 = 0 \wedge b_2 = 1$.

Assim, $a_1 = \frac{0 + \sqrt{12}}{2} \wedge a_2 = \frac{1 + 3}{2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} \wedge a_2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow a_1 = \sqrt{3} \wedge a_2 = 2$

Por exemplo, $A(\sqrt{3}, 2)$ e $B(0,1)$.

50. Se $M(a + 2b, b - a)$ é o ponto médio de $[AB]$ então:

$$a + 2b = \frac{-7 + 3}{2} \wedge b - a = \frac{6 + 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -2 \\ b - a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2(4 + a) = -2 \\ b = 4 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 8 + 2a = -2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -10 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{10}{3} \\ b = 4 + \left(-\frac{10}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{10}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Aplicar – Página 130

51.

51.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$, então $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Assim,

$$M\left(\frac{-7+5}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right),$$

ou seja,

$$M(-1; 1).$$

Temos que:

$$\text{Diâmetro} = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - (-7))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{12^2 + (-6)^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Assim, como o raio da circunferência é igual a metade do diâmetro, então, $r = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$.

Sendo $M(-1,1)$ o centro da circunferência, a sua equação é:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = (3\sqrt{5})^2$$

Ou seja,

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 45.$$

51.2.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -2) - (-7, 4) = (5 + 7, -2 - 4) = (12, -6),$$

$$C = B + \overrightarrow{AB} = (5, -2) + (12, -6) = (17, -8)$$

Logo,

$$C(17, -8)$$

52. Para que $[ABCD]$ seja um paralelogramo temos de ter $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Considerando $D(a, b)$, temos que:

$$\bullet \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 5) - (0, 2) = (2 - 0, 5 - 2) = (2, 3)$$

$$\bullet \overrightarrow{DC} = C - D = (6, 4) - (a, b) = (6 - a, 4 - b)$$

Assim,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (2, 3) = (6 - a, 4 - b) \Leftrightarrow 2 = 6 - a \wedge 3 = 4 - b \Leftrightarrow a = 6 - 2 \wedge b = 4 - 3 \Leftrightarrow a = 4 \wedge b = 1$$

$$D(4, 1)$$

53.

53.1. Determina-se o comprimento da aresta do cubo, calculando a norma do vetor \overrightarrow{EC}

$$\|\overrightarrow{EC}\| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 49 + 25} = \sqrt{83}$$

Para determinar a medida do comprimento da diagonal $[ED]$ da face $[CDFG]$ do cubo, usa-se o Teorema de Pitágoras.

$$\|\overrightarrow{ED}\|^2 = \|\overrightarrow{EC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{ED}\|^2 = (\sqrt{83})^2 + (\sqrt{83})^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{ED}\|^2 = 83 + 83 \xrightarrow{\|\overrightarrow{ED}\| > 0} \|\overrightarrow{ED}\| = \sqrt{166}$$

A medida do comprimento da diagonal $[ED]$ da face $[CDFG]$ do cubo é igual a $\sqrt{166} u. c.$

53.2. Para determinar as coordenadas do centro A, tem-se que

$$A = G + (-\overrightarrow{CE}) = (5, 10, 3) + (-3, -7, -5) = (2, 3, -2)$$

Como as arestas do cubo são iguais:

$$\overline{AB} = \sqrt{83}$$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e que contém o ponto B é

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = (\sqrt{83})^2$$

Ou seja,

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 83$$

53.3. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AG]$.

Então,

$$\begin{aligned} d(P, A) = d(P, G) &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2} \\ &= \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 10)^2 + (z - 3)^2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \\ &= (x - 5)^2 + (y - 10)^2 + (z - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 4z + 4 \\ &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 20y + 100 + z^2 - 6z + 9 \Leftrightarrow 6x + 14y + 10z = 117 \end{aligned}$$

Uma equação do plano mediador de $[AG]$ é $6x + 14y + 10z = 117$

Tarefa 10 – Página 131

1. $\vec{v}(-2,3)$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 4 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 13 \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \pm\sqrt{13}$$

Como $\|\vec{v}\| > 0$ então $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$.

2. A norma de um vetor é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das suas coordenadas.

Aplicar – Página 132

54. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-2\sqrt{5})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 \times 5 + 1} = \sqrt{21}$$

55.

55.1. $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 14^2} = \sqrt{25 + 196} = \sqrt{221}$

55.2.

• Se \vec{v} e \overrightarrow{AB} são colineares, então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, -2) - (k, 5) = (-3 - k, -2 - 5) = (-3 - k, -7)$$

$$\text{Assim } \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (-3 - k, -7) = \lambda(5, 14) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - k = 5\lambda \\ -7 = 14\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{7}{14} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - k = 5\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - k = -\frac{5}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 - 2k = -5 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k = -5 + 6 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

\vec{v} e \overrightarrow{AB} são colineares se $k = -\frac{1}{2}$.

• $\overrightarrow{AB} = (-3 - (-1/2), -7) = (-3 + 1/2, -7) = \left(-\frac{5}{2}, -7\right)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-7)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 49} = \frac{\sqrt{221}}{2}$$

56.

$$56.1. \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

56.2.

a) Se \vec{u} é colinear com \vec{w} , então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{w} = \lambda \vec{u}$.

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} = \lambda(1, -2) = (\lambda, -2\lambda)$$

Como $\|\vec{w}\| = 10$, então,

$$\sqrt{\lambda^2 + (-2\lambda)^2} = 10 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow 5\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = \left(\frac{100}{5}\right) \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{100}{5}} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{10}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{10\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{5}$$

• Se $\lambda = -2\sqrt{5}$ então $\vec{w} = (-2\sqrt{5}, -2(-2\sqrt{5})) = (-2\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$.

• Se $\lambda = 2\sqrt{5}$ então $\vec{w} = (2\sqrt{5}, -2 \times 2\sqrt{5}) = (2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$.

$$\vec{w}(-2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}) \text{ ou } \vec{w}(2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$$

$$b) \vec{u} + \vec{v} = (1, -2) + (-3, 2) = (1-3, -2+2) = (-2, 0)$$

Como \vec{w} é colinear com $\vec{u} + \vec{v}$, então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{w} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$.

$$\text{Assim, } \vec{w} = \lambda(-2, 0) = (-2\lambda, 0)$$

Como $\|\vec{w}\| = 10$ então,

$$\sqrt{(-2\lambda)^2 + 0^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{4\lambda^2 + 0} = 10 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{100}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow \lambda = \pm 5$$

• Se $\lambda = -5$ então $\vec{w} = (-2 \times (-5), 0) = (10, 0)$

• Se $\lambda = 5$ então $\vec{w} = (-2 \times 5, 0) = (-10, 0)$

$$\vec{w}(10, 0) \text{ ou } \vec{w}(-10, 0)$$

Aplicar – Página 133

$$57. \|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 2^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{9 \times 5 + 4 + 5} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + \frac{4 \times 3}{9} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3} + 1} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

58.

$$58.1. \overrightarrow{AB} = B - A = (4, -1, 3) - (-2, 2, 0) = (4 - (-2), -1 - 2, 3 - 0) = (6, -3, 3)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$58.2. \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(6, -3, 3) = (-6, 3, -3)$$

Como \vec{v} é colinear com \overrightarrow{BA} , então, $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{v} = \lambda \overrightarrow{BA}$.

$$\vec{v} = \lambda \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (2, -k, 1) = \lambda(-6, 3, -3) \Leftrightarrow (2, -k, 1) = (-6\lambda, 3\lambda, -3\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -6\lambda \\ -k = 3\lambda \\ 1 = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{6} \\ -k = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ -k = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ k = 1 \end{cases}$$

$$k = 1$$

$$60. \|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (k+1)^2 + (4+k)^2} = \sqrt{16 + k^2 + 2k + 1 + 16 + 8k + k^2} = \sqrt{2k^2 + 10k + 33}$$

$$\text{Por outro lado } \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 1) - (2, -1, 3) = (3 - 2, 1 - (-1), 1 - 3) = (1, 2, -2).$$

$$\text{Logo, } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Assim, $\|\vec{v}\| = 3\|\overrightarrow{AB}\|$, temos que:

$$\sqrt{2k^2 + 10k + 33} = 3 \times 3 \Leftrightarrow 2k^2 + 10k + 33 = 81 \Leftrightarrow 2k^2 + 10k - 48 = 0 \Leftrightarrow k^2 + 5k - 24 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm 11}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-5 + 11}{2} \vee k = \frac{-5 - 11}{2} \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -8$$

k pode tomar os valores -8 ou 3 .

Tarefa 11 – Página 134

1. O comando `sqrt`, da biblioteca `math`, permite calcular uma raiz quadrada e o comando `**` representa o “elevado a”.

2.

a)

```
from math import *
x=float(2)
y=float(1)
z=float(-3)
print('x=',x)
print('y=',y)
print('z=',z)
c=sqrt(x**2+y**2+z**2)
print('A norma do vetor é',c)
```

b)

```
from math import *
x=float(sqrt(5))
y=float(-sqrt(15))
z=float(sqrt(5))
print('x=',x)
print('y=',y)
print('z=',z)
c=sqrt(x**2+y**2+z**2)
print('A norma do vetor é',c)
```

c)

```
from math import *
x=float(-2*sqrt(2))
y=float(0)
z=float(1)
print('x=',x)
print('y=',y)
print('z=',z)
c=sqrt(x**2+y**2+z**2)
print('A norma do vetor é',c)
```

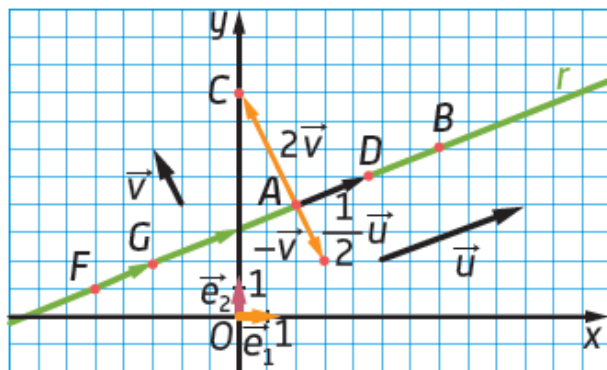
3.

```
from math import*
x=float(input('Qual é a primeira coordenada?'))
y=float(input('Qual é a segunda coordenada?'))
z=float(input('Qual é a terceira coordenada?'))
print('x=',x)
print('y=',y)
print('z=',z)
c=sqrt(x**2+y**2+z**2)
print('A norma do vetor é',c)
```

Tarefa 12 – Página 135

1. O vetor é o \vec{u} .

2.



3. Os pontos que pertencem à reta são B, D, F e G.

4. Reta que contém o ponto A e tem a direção do vetor \vec{u} .

Aplicar – Página 137

61. Por exemplo: $(x, y) = (-2, 5) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$.

62. Dados dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes a uma reta paralela a Oy, temos que $x_A = x_B$. Por exemplo, \overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta.

$$\text{Assim, } \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (0, y_B - y_A)$$

Conclui-se então que qualquer vetor cuja primeira coordenada seja nula poderá ser considerado vetor diretor de uma reta paralela a Oy.

63.

63.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r.

$$P = A + k\vec{v}, k \in \mathbb{R}, \text{ ou seja,}$$

$$P(x, y) = (-2, 3) + k(2, 1), k \in \mathbb{R}$$

63.2. $B \left(1, \frac{9}{2}\right)$ pertence à reta se e somente se $\exists k \in \mathbb{R}: B = A + k\vec{v}$.

Substituindo o valor das coordenadas na equação da alínea anterior:

$$\begin{aligned} \left(1, \frac{9}{2}\right) &= (-2, 3) + k(2, 1) \Leftrightarrow \left(1, \frac{9}{2}\right) = (-2, 3) + (2k, k) \Leftrightarrow \left(1, \frac{9}{2}\right) = (-2 + 2k, 3 + k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 + 2k \\ \frac{9}{2} = 3 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 1 + 2 \\ k = \frac{9}{2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Provamos que $B = A + \frac{3}{2}\vec{v}$, logo, B pertence à reta r.

64.

64.1.

\overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta AB.

Assim, $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -2) - (3, 1) = (0 - 3, -2 - 1) = (-3, -3)$

Logo, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta AB temos que $P = A + k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}$.
ou seja, $(x, y) = (3, 1) + k(-3, -3), k \in \mathbb{R}$.

64.2. \overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta AB.

Assim $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2) - (-1, 2) = (1 - (-1), 2 - 2) = (2, 0)$

Logo, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta AB temos que $P = A + k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}$.

Assim, $(x, y) = (-1, 2) + k(2, 0), k \in \mathbb{R}$.

65.

65.1. Uma equação vetorial da reta r é $(x, y) = (2, -1) + k(3, -4), k \in \mathbb{R}$

Logo, $(2, -1)$ são as coordenadas de um ponto da reta.

Se, por exemplo, $k = 1$, então $(2, -1) + (3, -4) = (5, -5)$ são as coordenadas de outro ponto da reta.

$(2, -1)$ e $(5, -5)$, por exemplo.

65.2. Como $2 \times (3, -4) = (6, -8)$, então o vetor de coordenadas $(6, -8)$ é colinear ao vetor $(3, -4)$. Logo, o vetor de coordenadas $(6, -8)$ é também um vetor diretor da reta r.

Assim, a equação seguinte é uma equação vetorial da reta.

$$(x, y) = (2, -1) + k(6, -8), k \in \mathbb{R}$$

66.

66.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer pertencente a reta r.

$$\begin{aligned} P &= A + k\vec{v}, k \in \mathbb{R}, \text{ ou seja,} \\ (x, y, z) &= (2, 1, 1) + k(-1, 1, 3), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

66.2. Para provar que o ponto $B(2, -2, 4)$ não pertence a reta temos de demonstrar que $\nexists k \in \mathbb{R} : B = A + k\vec{v}$.

Suponhamos que o ponto B pertence à reta r .

Então,

$$B = A + k\vec{v} \Leftrightarrow (2, -2, 4) = (2, 1, 1) + k(-1, 1, 3) \Leftrightarrow (2, -2, 4) = (2, 1, 1) + (-k, k, 3k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2, -2, 4) = (2 - k, 1 + k, 1 + 3k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 - k \\ -2 = 1 + k \\ 4 = 1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - 2 \\ k = -2 - 1 \\ 3k = 4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -3 \\ k = 1 \end{cases}$$

O sistema é impossível, logo, $\nexists k \in \mathbb{R} : B = A + k\vec{v}$, ou seja, B não é um ponto da reta r .

66.3. O vetor \overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta AB .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2, 4) - (2, 1, 1) = (2 - 2, -2 - 1, 4 - 1) = (0, -3, 3)$$

Assim, sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da reta AB , temos que:

$$P = A + k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } (x, y, z) = (2, 1, 1) + k(0, -3, 3), k \in \mathbb{R}.$$

Aplicar – Página 138

67.

67.1. O vetor \overrightarrow{DB} é um vetor diretor da reta DB .

$$\overrightarrow{DB} = B - D = (5, 5, -5) - (0, 0, -5) = (5, 5, 0)$$

Assim, sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da reta DB , temos que:

$$P = D + k\overrightarrow{DB}, k \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } (x, y, z) = (0, 0, -5) + k(5, 5, 0), k \in \mathbb{R}.$$

67.2. O vetor \overrightarrow{AF} é um vetor diretor da reta AF .

$$\overrightarrow{AF} = F - A = (0, 5, 0) - (5, 0, -5) = (-5, 5, 5)$$

Assim, sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da reta DB , temos que:

$$P = A + k\overrightarrow{AF}, k \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } (x, y, z) = (5, 0, -5) + k(-5, 5, 5), k \in \mathbb{R}.$$

68.

68.1. Começemos por determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{MN} que é vetor diretor da reta MN .

$$\text{Assim, } \overrightarrow{MN} = N - M = (6, -2) - (-1, 5) = (6 - (-1), -2 - 5) = (7, -7)$$

Assim, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer do segmento de reta $[MN]$, então,

$$P = M + k\overrightarrow{MN}, k \in [0, 1], \text{ ou seja, } (x, y) = (-1, 5) + k(7, -7), k \in [0, 1]$$

68.2. Começemos por determinar as coordenadas do vetor \overline{NM} .

Assim, $\overline{NM} = M - N = (-1,5) - (6, -2) = (-1 - 6, 5 - (-2)) = (-7,7)$.

Se $P(x, y)$ for um ponto qualquer da semirreta \overrightarrow{NM} , então:

$P = N + k\overline{NM}, k \in \mathbb{R}_0^+$, ou seja, $(x, y) = (6, -2) + k(-7,7), k \in \mathbb{R}_0^+$.

69.

69.1. O vetor \overline{AB} é um vetor diretor de reta AB .

Assim, $\overline{AB} = B - A = (2,5) - (-2,3) = (2 - (-2), 5 - 3) = (4,2)$

Logo, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer de reta AB temos que:

$P = A + k\overline{AB}, k \in \mathbb{R}$, ou seja, $(x, y) = (-2,3) + k(4,2), k \in \mathbb{R}$.

69.2. Determinemos, por exemplo, as coordenadas dos pontos de abcissas 0 e 1.

- Se $x = 0$ temos que:

$$(0, y) = (-2,3) + k(4,2) \Leftrightarrow (0, y) = (-2 + 4k, 3 + 2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2 + 4k \\ y = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{4} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ y = 3 + 2 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ y = 4 \end{cases}$$

O ponto de coordenadas $(0,4)$ pertence à reta AB .

- Se $x = 1$ temos que:

$$(1, y) = (-2,3) + k(4,2) \Leftrightarrow (1, y) = (-2 + 4k, 3 + 2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 + 4k \\ y = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 1 + 2 \\ \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 3 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ y = 3 + 2 \times \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

O ponto de coordenadas $(1, \frac{9}{2})$ pertence à reta AB .

69.3. Sendo a abcissa igual a -1 , temos que:

$$\begin{aligned} (-1, y) &= (-2,3) + k(4,2) \Leftrightarrow (-1, y) = (-2 + 4k, 3 + 2k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -2 + 4k \\ y = 3 + 2k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -1 + 2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ y = 3 + 2 \times \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 3 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a ordenado do ponto da reta AB com abcissa -1 é igual a $\frac{7}{2}$.

69.4. A equação da reta \overrightarrow{AB} será:

$$(x, y) = (-2, 3) + k(4, 2), d \in IR_0^+$$

O ponto $(-10, -1)$ pertence a reta se e somente se:

$$\exists k \in IR_0^+ : (-10, -1) = (-2, 3) + k(4, 2)$$

Assim, $(-10, -1) = (-2, 3) + k(4, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-10, -1) = (-2 + 4k, 3 + 2k) \\ -10 = -2 + 4k \\ -1 = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -10 + 2 \\ 2k = -1 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{8}{4} \\ k = -\frac{4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Como $k = -2 \notin IR_0^+$, então, o ponto $(-10, -1)$ não pertence à semirreta \overrightarrow{AB} .

69.5. O ponto pedido terá ordenada igual a zero.

Assim,

$$(x, 0) = (-2, 3) + k(4, 2) \Leftrightarrow (x, 0) = (-2 + 4k, 3 + 2k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4k \\ 0 = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 6 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

O ponto $(-8, 0)$ é a porto de interseção da reta AB com 0 eixo Ox .

Tarefa 13 – Página 139

1. \overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta AB

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 4) - (0, 2) = (3 - 0, 4 - 2) = (3, 2)$$

$(3, 2)$ é um vetor diretor da reta AB .

2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta AB , temos que:

$$P = A + k\overrightarrow{AB}, k \in IR, \text{ ou seja, } (x, y) = (0, 2) + k(3, 2), k \in IR$$

3.

$$(x, y) = (0, 2) + k(3, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 2) + (3k, 2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (3k, 2 + 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x}{3} \\ 2k = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x}{3} \\ k = \frac{y - 2}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} \Leftrightarrow 2x = 3(y-2) \Leftrightarrow 2x = 3y - 6 \Leftrightarrow 3y = 2x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{6}{3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$$

O declive da reta é $\frac{2}{3}$.

4. Como $\vec{v}(v_1, v_2)$ é colinear com $\overrightarrow{AB}(3,2)$, então $\exists k \in \mathbb{R}: \vec{v} = k\overrightarrow{AB}$, ou seja,

$$(v_1, v_2) = k(3,2) \Leftrightarrow (v_1, v_2) = (3k, 2k)$$

$$\text{Assim, como } k \neq 0, \frac{v_2}{v_1} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$$

ou seja, $\frac{v_2}{v_1}$ é igual ao declive da reta r .

5. Como $\vec{v}(v_1, v_2)$ é colinear ao vetor de coordenadas $(1, k)$, então:

$\exists a \in \mathbb{R}: \vec{v} = a(1, k)$. Nota que $a \neq 0$, pois, como \vec{v} é um vetor diretor de uma reta, então, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Assim,

$$(v_1, v_2) = a(1, k) \Leftrightarrow (v_1, v_2) = (a, ak) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = a \\ v_2 = ak \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = v_1 \\ k = \frac{v_2}{a} \end{cases}$$

Então $k = \frac{v_2}{v_1}$, ou seja k é igual ao declive da reta r .

Tarefa 14 – Página 139

1. A direção da reta vai alterando.

2. A reta intersesta o eixo Oy em diferentes pontos.

Aplicar – Página 140

70.

70.1. $y = -6x + 1$

70.2. Começemos por determinar um vetor diretor da reta:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -4) - (-2, 5) = (5, -9)$$

Assim, $m = -\frac{9}{5}$.

$$y = -\frac{9}{5}x + b$$

Substituindo pelas coordenadas do ponto A:

$$5 = -\frac{9}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow 5 = \frac{18}{5} + b \Leftrightarrow b = 5 - \frac{18}{5} \Leftrightarrow b = \frac{7}{5}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{9}{5}x + \frac{7}{5}$.

70.3. Como $(7,2)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta, então, o seu declive é igual a $m = \frac{2}{7}$.

$$\text{Assim, } y = \frac{2}{7}x + b$$

Substituindo pelas coordenadas $(-1,2)$ de um ponto da reta:

$$2 = \frac{2}{7}(-1) + b \Leftrightarrow 2 = -\frac{2}{7} + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{2}{7} \Leftrightarrow b = \frac{16}{7}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{2}{7}x + \frac{16}{7}$.

Aplicar – Página 141

71. Os pontos de coordenadas (2,0) e (0,4) pertencem à reta. Podemos então determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta r :

$$\vec{r} = (2,0) - (0,4) = (2, -4)$$

Assim, o declive da reta é $m = \frac{-4}{2} = -2$

Como 4 é a ordenada na origem, temos que $b = 4$, logo, a equação reduzida da reta é:

$$y = -2x + 4.$$

Aplicar – Página 142

72.

$$72.1. m = \frac{6}{3} = 2$$

$$72.2. m = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

$$72.3. m = \frac{0}{-1} = 0$$

$$72.4. m = \frac{-10}{\sqrt{5}} = -\frac{10\sqrt{5}}{5} = -2\sqrt{5}$$

$$72.5. m = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

73.

73.1. Os pontos $A(2,3)$ e $B(1,2)$ pertencem à reta. Podemos então determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta AB :

$$\vec{AB} = (1,2) - (2,3) = (-1, -1)$$

Assim, o declive da reta é $m = \frac{-1}{-1} = 1$.

Logo, $y = x + b$

O ponto $A(2,3)$ pertence à reta, logo $3 = 2 + b \Leftrightarrow b = 1$

A equação reduzida da reta é $y = x + 1$

73.2. Os pontos $A(0,3)$ e $B(5,0)$ pertencem à reta. Podemos então determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta AB :

$$\vec{AB} = (5,0) - (0,3) = (5, -3)$$

Assim, o declive da reta é $m = -\frac{3}{5}$.

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{3}{5}x + 3$

73.3. Os pontos $A(-1, -1)$ e $B(2, -2)$ pertencem à reta. Podemos então determinar as coordenadas de um vetor diretor da reta AB :

$$\vec{AB} = (2, -2) - (-1, -1) = (3, -1)$$

Assim, o declive da reta é $m = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$.

Logo, $y = -\frac{1}{3}x + b$

O ponto $A(-1, -1)$ pertence à reta, logo

$$-1 = -1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + b \Leftrightarrow b = -1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}$$

A equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

74.

74.1. Por exemplo: $\vec{v}(3,7)$ ou $\vec{v}(-3,-7)$.

74.2. $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

Por exemplo: $\vec{v}(1,-1)$ ou $\vec{v}(2,-2)$.

74.3. $2x - 3y = 1 \Leftrightarrow -3y = -2x + 1 \Leftrightarrow -3y = \frac{-2x}{-3} + \frac{1}{-3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Por exemplo: $\vec{v}(3,2)$ ou $\vec{v}(-3,-2)$

74.4. $y = \frac{5}{3}$ é a equação de uma reta paralela ao eixo Ox , logo, por exemplo, $\vec{v}(1,0)$ ou $\vec{v}(-1,0)$ são vetores diretores da reta dada.

75.

1. A

2. D

3. B

4. C

Tarefa 15 – Página 143

1. O programa permite determinar o declive e a ordenada na origem da reta que contém os pontos de coordenadas $(3,-1)$ e $(-4,-2)$.

2. Declive da reta: 0,14285714285714285

Ordenada na origem: -1,4285714285714286

3. Declive da reta: 1,5 ; Ordenada na origem: 3,0

4.

```
xA=-2
yA=0
xB=-4
yB=-3
if xA==xB:
    print('A reta que une os dois pontos é vertical: x=',xA)
else:
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    b= yA-m*xA
    print('Declive da reta: ',m)
    print('Ordenada na origem: ',b)
    print('y=',m,'x+',b)
    print('Uma equação vetorial da reta é: (x,y)=(',xA,',',xB,')+k(',xB-xA,',',yB-yA,')kER.')
```

Aplicar – Página 143

76.

Como o declive da reta é 3, então qualquer vetor diretor da reta é colinear com o vetor $(1,3)$, ou seja, é do tipo $\vec{r} = k(1,3) = (k, 3k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Como a sua norma é 2, então:

$$\|\vec{r}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (3k)^2} = 2 \Leftrightarrow k^2 + 9k^2 = 4 \Leftrightarrow 10k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = \frac{4}{10} \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Se $k = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ então $\vec{r} = \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, 3 \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

Se $k = \frac{\sqrt{10}}{5}$ então $\vec{r} = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, 3 \times \frac{\sqrt{10}}{5}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

Assim, os vetores são: $\vec{r} = \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}, -3\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ ou $\vec{r} = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, 3\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

77.

77.1. \overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3) - (k, -1) = (1 - k, 3 - (-1)) = (1 - k, 4)$$

Como a reta tem declive 2, então:

$$\frac{4}{1-k} = 2 \Leftrightarrow 4 = 2(1 - k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2 - 2k \Leftrightarrow 2k = 2 - 4 \Leftrightarrow 2k = -2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow k = -1$$

77.2. Como $\vec{v}(-2, k - 2)$ é vetor diretor da reta de declive 3, então:

$$\frac{k - 2}{-2} = 3 \Leftrightarrow k - 2 = 3 \times (-2) \Leftrightarrow k - 2 = -6 \Leftrightarrow k = -6 + 2 \Leftrightarrow k = -4$$

77.3. Começemos por determinar a equação reduzida da reta.

$$2x - 2y = 1 \Leftrightarrow -2y = -2x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{-2x + 1}{-2} \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

Assim, o declive da reta é igual a 1, logo, como $\vec{v}(4, k + 1)$ é vetor diretor da reta,

$$\frac{k + 1}{4} = 1 \Leftrightarrow k + 1 = 4 \Leftrightarrow k = 3$$

Tarefa 16 – Página 144

1. Ao variar o valor de m , o declive das retas r e s varia, mas estas são sempre paralelas.
2. Ao variar o valor de c , a ordenada da origem das retas s e p varia, mas as retas intersectam o eixo Oy sempre ao mesmo ponto.

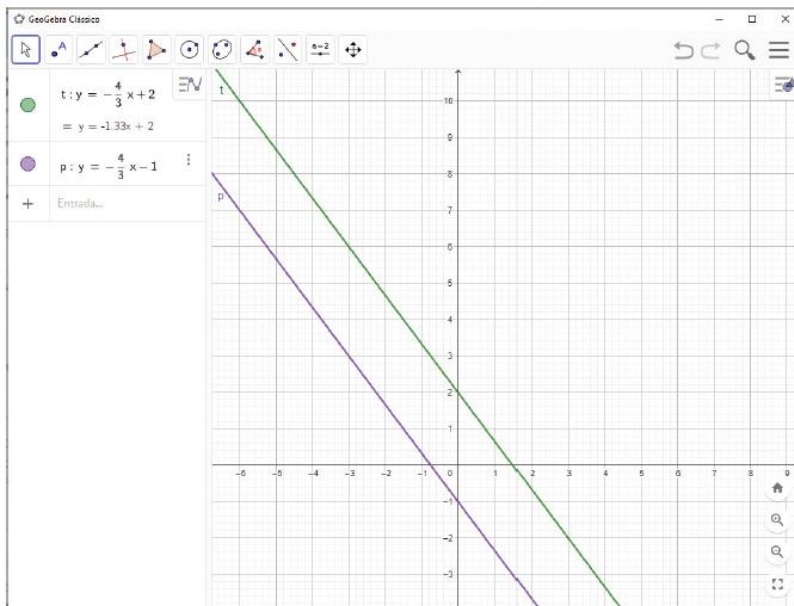
Aplicar – Página 145

78.

78.1.

- Paralela a s : por exemplo, a reta definida por $y = 3x + 1$.
- Paralela a r : por exemplo, a reta definida por $y = -2x$.
- Reta t : $4x + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = -4x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{-4x + 6}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 2$
- Paralela a t : por exemplo a reta definida por $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

78.2.



79.

79.1. Como retas paralelas têm o mesmo declive, então,

$$s: y = 3x + b, b \in \mathbb{R}$$

Como $P(1,2) \in s$,

$$2 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow 2 = 3 + b \Leftrightarrow b = 2 - 3 \Leftrightarrow b = -1$$

Assim, $s: y = 3x - 1$

79.2. $2y + x = 4 \Leftrightarrow 2y = -x + 4 \Leftrightarrow y = \frac{-x+4}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 2$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, então:

$$s: y = -\frac{x}{2} + b, b \in \mathbb{R}$$

Como $P(1,2) \in s$, então,

$$2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

Assim, $s: y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

80.

80.1. Como retas paralelas têm o mesmo declive, a equação da reta pedida será do tipo $y = -3x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Como $P(0,2)$ pertence à reta,

$$2 = -3 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Assim, a equação da reta é $y = -3x + 2$.

80.2. Como retas paralelas têm o mesmo declive, a equação da reta pedida será do tipo $y = -3x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Como o ponto $P(2,-2)$ pertence a reta

$$-2 = -3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -6 + 2 \Leftrightarrow b = -4$$

Assim, a equação da reta é $y = -3x - 4$.

81. Seja $\vec{v}(v_1, v_2)$ um vetor diretor da reta dada, então,

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3v_2 = -v_1 \Leftrightarrow v_1 = -3v_2$$

Assim, $\|\vec{v}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-3v_2)^2 + v_2^2} = 5 \Leftrightarrow 9v_2^2 + v_2^2 = 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10v_2^2 = 25 \Leftrightarrow v_2^2 = \frac{25}{10} \Leftrightarrow v_2 = \pm \sqrt{\frac{25}{10}} \Leftrightarrow v_2 = \pm \frac{5}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow v_2 = \pm \frac{5\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow v_2 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Logo, se $v_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, então, $v_1 = -3\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Se $v_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$, então, $v_1 = -3\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Assim, $\vec{v}\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ou $\vec{v}\left(-\frac{3\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

82.

82.1.

a) Por exemplo $\vec{v}_1(1,2)$ e $\vec{v}_2(-1,-2)$.

b) $(2, -3)$ é um ponto da reta.

Se, por exemplo, $k = 1$, obtemos

$$(x, y) = (2, -3) + 1(1, 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (2 + 1, -3 + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (3, -1)$$

Assim, $(2, -3)$ e $(3, -1)$ são dois pontos da reta r .

c) $x_A = -1$. Substituindo na equação obtemos

$$\begin{aligned} (-1, y) &= (2, -3) + k(1, 2) \Leftrightarrow (-1, y) = (2 + k, -3 + 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2 + k \\ y = -3 + 2k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 - 2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ y = -3 + 2(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $A(-1, -6)$.

82.2. Como as retas s e r são paralelas então um vetor diretor de r , de coordenadas $(1,2)$, também é vetor diretor de s .

$$s: (x, y) = (4, 0) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$$

Aplicar – Página 146

83.

83.1. Como o declive da reta de equação definida por $y = 3x + 1$ é igual a 3, então, por exemplo, $(1,3)$ são as coordenadas de um vetor diretor da mesma.

Determinemos um ponto. Por exemplo, se $x = 1$, então, $y = 3 \times 1 + 1 = 4$. Logo $(1,4)$ é um ponto da reta.

Assim, $(x, y) = (1, 4) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}$.

83.2. Como o declive da reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 5$ é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, então, por exemplo $(2, \sqrt{3})$ é um vetor diretor da mesma.

Determinemos um ponto da reta. Por exemplo, se $x = \sqrt{3}$, então, $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - 5 = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2}$.

Logo $(\sqrt{3}, -\frac{7}{2})$ é um ponto da reta.

Assim, $(x, y) = (\sqrt{3}, -\frac{7}{2}) + k(2, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$.

83.3. $2y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

Como o declive da reta é zero, então, por exemplo, $(1, 0)$ é vetor diretor da mesma (vetor paralelo ao eixo Ox).

Qualquer ponto de ordenada $\frac{3}{2}$ é um ponto da reta, logo, por exemplo, o ponto de coordenadas $(1, \frac{3}{2})$ é um ponto da reta.

Assim, $(x, y) = (1, \frac{3}{2}) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$.

83.4. $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$

A reta dada é paralela no eixo Oy, logo, por exemplo, o vetor de coordenadas $(0, 1)$ é um vetor diretor da mesma.

Qualquer ponto de abcissa -7 é um ponto da reta, logo, por exemplo, o ponto de coordenadas $(-7, 0)$ é um ponto da reta.

Assim $(x, y) = (-7, 0) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$.

84.

84.1. Para provar que as retas são paralelas, basta provar que têm o mesmo declive.

Assim, o declive da reta r é $m_r = -1$.

Já o declive da reta s é dado por $m_s = \frac{-2}{2} = -1$.

Assim, $m_r = m_s$, ou seja, r e s são retas paralelas.

84.2.

• O ponto de interseção da reta r com o eixo Ox tem ordenada igual a zero.

$$0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Assim, $(3, 0)$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

• O ponto de interseção da reta s com o eixo Ox tem ordenada igual a zero.

$$(x, 0) = (2, -1) + k(2, -2) \Leftrightarrow (x, 0) = (2 + 2k, -1 - 2k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2k \\ 0 = -1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2(-\frac{1}{2}) \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $(1, 0)$ é o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox.

• O ponto de interseção da reta r com o eixo Oy tem abcissa igual a zero.

$$y = -0 + 3 \Leftrightarrow y = 3$$

Assim, $(0, 3)$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

• O ponto de interseção da reta r com o eixo Oy tem abcissa igual a zero.

$$(0, y) = (2, -1) + k(2, -2) \Leftrightarrow (0, y) = (2 + 2k, -1 - 2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 + 2k \\ y = -1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-2}{2} \\ y = -1 - 2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, $(0, 1)$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

84.3.

• Reta r

$$3 = -(-2) + 3 \Leftrightarrow 3 = 2 + 3 \Leftrightarrow 3 = 5 \text{ Proposição falsa.}$$

Assim, $(-2, 3) \notin r$.

• Reta s

O ponto de coordenadas $(-2, 3)$ pertence à reta s se

$$\exists k \in \mathbb{R}: (-2, 3) = (2, -1) + k(2, -2)$$

$$(-2, 3) = (2, -1) + k(2, -2) \Leftrightarrow (-2, 3) = (2 + 2k, -1 - 2k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2 + 2k \\ 3 = -1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -2 - 2 \\ 2k = -1 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-4}{2} \\ k = \frac{-4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Assim, $(-2, 3) = (2, -1) - 2(2, -2)$, ou seja, $(-2, 3) \in s$.

84.4. Como o declive da reta r é -1 , então, por exemplo $(1, -1)$ é um dos seus vetores diretores.

O ponto $(3, 0)$ pertence a reta r .

Assim, $(x, y) = (3, 0) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$.

84.5.

$$(x, y) = (2, -1) + k(2, -2) \Leftrightarrow (x, y) = (2 + 2k, -1 - 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = x - 2 \\ 2k = -y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x - 2}{2} \\ k = \frac{-y - 1}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{-y - 1}{2} \Leftrightarrow 2(x - 2) = 2(-y - 1) \Leftrightarrow 2x - 4 = -2y - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y = -2x + 4 - 2 \Leftrightarrow 2y = -2x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{-2x + 2}{2} \Leftrightarrow y = -x + 1$$

Temos, então, que $s: y = -x + 1$.

85.

85.1. Como $\vec{v}(2, 1)$ é vetor diretor da reta r , então, o seu declive é $m_R = \frac{1}{2}$.

$$\text{Logo, } k - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}.$$

$$85.2. y + 4x = 2 \Leftrightarrow y = -4x + 2$$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, então, $k - 2 = -4 \Leftrightarrow k = -4 + 2 \Leftrightarrow k = -2$.

85.3. Como $(1, 0)$ pertence à reta r , então:

$$0 = (k - 2) \times 1 + 3 \Leftrightarrow 0 = k - 2 + 3 \Leftrightarrow k = 2 - 3 \Leftrightarrow k = -1$$

Aplicar – Página 147

86.

86.1.

- O raio de C_1 é 3 (abscissa de A).

$$\overline{AB} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Então, o raio de C_2 é 5

- Reta s : $y = mx$

$$\overrightarrow{OA} = A - 0 = (3, 2)$$

$$m = \frac{2}{3}, \text{ então, } y = \frac{2}{3}x$$

- $3^2 \leq (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 5^2 \wedge (y \leq \frac{2}{3}x \vee y \leq -x)$

$$\text{Ou seja, } 9 \leq (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 25 \wedge (y \leq \frac{2}{3}x \vee y \leq -x).$$

86.2.

- Reta t :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-7, 0) - (-1, 2) = (-6, -2)$$

$$m_t = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}, \text{ logo, } y = \frac{1}{3}x + b$$

$$\text{Como } A(-1, 2) \in t \text{ então } 2 = \frac{1}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

$$\text{Assim, } t: y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

- Reta r :

$$m_r = -1, \text{ logo, } y = -x + b.$$

$$\text{Como } D(-2, 0) \in r, \text{ então, } 0 = -(-2) + b \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Assim, } r: y = -x - 2.$$

- Reta s : $x = k$

$$E \in t \text{ e tem ordenada igual a } 3, \text{ logo, } 3 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow 9 = x + 7 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Assim, } E(2, 3).$$

A equação da reta s é $x = 2$.

- Ponto C

$$C \in t \cap r, \text{ logo,}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ -3x - 6 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - x = 7 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 13 \\ -4x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{4} \\ y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{4} \\ y = \frac{13}{4} - \frac{8}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$C\left(-\frac{13}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

Assim,

$$\left[\left(x + \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{21}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^2 \wedge y < -x - 2 \wedge y \geq \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \right] \vee \left(y \geq -x - 2 \wedge y \leq \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \wedge x \leq 2 \right)$$

Ou seja,

$$\left[\left(x + \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{21}{4}\right)^2 \leq \frac{25}{16} \wedge y < -x - 2 \wedge y \geq \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \right] \vee \left(y \geq -x - 2 \wedge y \leq \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \wedge x \leq 2 \right)$$

Aplicar + – Páginas 153 a 156

Itens de seleção

1. (B)

- \vec{EI} e \vec{KC} têm a mesma direção, logo, são colineares.
- Os vetores \vec{AC} e \vec{KJ} não têm o mesmo comprimento, logo, não são simétricos.
- Os vetores \vec{AB} e \vec{AF} não têm o mesmo comprimento, logo, têm normas diferentes.

2.

2.1. (C)

$$D - \vec{FC} = D + \vec{CF} = D + \vec{DG} \Rightarrow \vec{AD} + \vec{EG} = \vec{BE} + \vec{EG} = \vec{BG} = G$$

2.2. (D)

2.3. (D)

$$\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AG} + 2\vec{GF} = \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{EC} = \vec{AC} = \vec{EG}$$

3. (C)

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 2 + 5 = 7$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{u}\| = 5 - 2 = 3$$

4. (A)

- Por exemplo, se os vetores \vec{u} e \vec{v} tiverem sentidos contrários, temos que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{v}\| - \|\vec{u}\| = 3 - 2 = 1.$$

Assim, a opção (A) seria falsa.

- $\|5\vec{v}\| = 5 \times \|\vec{v}\| = 5 \times 3 = 15$
- $\|2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\| = 2 \times 2 = 4$
- $\|\vec{v}\| - \|\vec{u}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, quaisquer que sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} .

5. (B)

6. (D)

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (2, -1) - 2(1, -1) = (2, -1) - (2, -2) = (2 - 2, -1 + 2) = (0, 1)$$

7. (A)

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C \Leftrightarrow (2, 6) - (a, 3) = (1, b - 2) - (3, -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - a, 6 - 3) = (1 - 3, b - 2 + 2) \Leftrightarrow (2 - a, 3) = (-2, b) \Leftrightarrow 2 - a = -2 \wedge 3 = b \Leftrightarrow a = 4 \wedge b = 3$$

8. (D)

$$B(4, y)$$

$$\vec{AB} = B - A = (4, y) - (1, 2) = (3, y - 2)$$

$$\frac{y - 2}{3} = \frac{3}{-1} \Leftrightarrow -y + 2 = 9 \Leftrightarrow y = 2 - 9 \Leftrightarrow y = -7$$

9.

9.1.

a) (A)

$$x_M = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \quad y_M = \frac{6 + 0}{2} = 3$$

$$3M = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + k - 3}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k - 2 = 2 \Leftrightarrow k = 4$$

b) (B)

$$\vec{AB} = (-6, -6, -6) \Leftrightarrow B - A = (-6, -6, -6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4 - 2, 0 - 6, k - 3 - 1) = (-6, -6, -6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-6, -6, k - 4) = (-6, -6, -6) \Leftrightarrow k - 4 = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

9.2. (D)

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (-1, 3, 1) - (2, 6, 1) = (-3, -3, 0)$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

10.

10.1. (A)

$$B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{DE} = A - \overrightarrow{ED} = (4, -1, -2) - (3, -4, 0) = (1, 3, -2)$$

10.2. (D)

$$d(A, C) = 3 \text{ e } d(B, C) = 4$$

Logo,

$$V_{\text{prisma}} = 3 \times 4 \times \text{altura} \Leftrightarrow 108 = 12 \times \text{altura} \Leftrightarrow \text{altura} = \frac{108}{12} \Leftrightarrow \text{altura} = 9$$

Logo, (1, 3, 7)

11. (D)

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

12.

12.1. (C)

Como o plano é paralelo ao plano yOz , logo, é definido por: $x = 6$

12.2. (B)

Um vetor da reta AF pode ser \overrightarrow{AF} ou um vetor colinear a ele.

$$\overrightarrow{AF} = F - A = (0, 0, 6) - (6, -6, 0) = (-6, 6, 6)$$

Como $(-6, 6, 6) = -1(1, -1, -1)$, então $(1, -1, -1)$ também é um vetor diretor da reta AF .

$(3, -3, 3)$ são as coordenadas do ponto médio de $[AF]$, logo, pertence à reta AF .

13. (A)

$$m = \frac{6}{2} = 3, \text{ logo, } y = 3x + b$$

Como o ponto de coordenadas $(-2, 1)$ pertence à reta r , então,

$$1 = 3 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 1 + 6 \Leftrightarrow b = 7$$

$$y = 3x + 7$$

14.

14.1. (C)

$$m = 2 = \frac{4}{2}$$

14.2. (D)

- $1 = 2 \times 1 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ Verdadeira
- $-3 = 2 \times (-1) - 1 \Leftrightarrow -3 = -3$ Verdadeira
- $-1 = 2 \times 0 - 1 \Leftrightarrow -1 = -1$ Verdadeira
- $0 = 2 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 0 = 3$ Falso

14.3. (C)

Como as retas são paralelas então têm de ter o mesmo declive (2).

15.

15.1. (D)

Reta $r: y = ax - 3$

$(2,0) \in r$, logo, $0 = 2a - 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

$r: y = \frac{3}{2}x - 3$

Circunferência:

Raio: $r = y_C - y_A = 1 - (-3) = 4$

$x^2 + (y - 1)^2 = 4^2$, ou seja, $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

• $(\frac{48}{13}, \frac{33}{13}) \in r$, pois, $\frac{33}{13} = \frac{3}{2} \times \frac{48}{13} - 3 \Leftrightarrow \frac{33}{13} = \frac{72}{13} - 3 \Leftrightarrow 3 = 6 - 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ Verdadeira

• $(\frac{48}{13}, \frac{33}{13}) \in$ circunferência, pois, $(\frac{48}{13})^2 + (\frac{33}{13} - 1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \frac{2304}{169} + \frac{400}{169} = 16 \Leftrightarrow \frac{2704}{169} = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$

Verdadeira

15.2. (B)

$x^2 + (y - 1)^2 \leq 16 \wedge y \geq 0 \wedge y \geq \frac{3}{2}x - 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 16 \wedge y \geq 0 \wedge y \geq \frac{3}{2}x - 3 \Leftrightarrow$

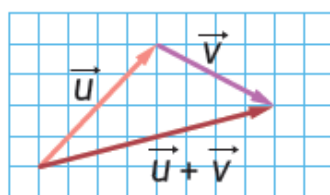
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 15 \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \geq \frac{3}{2}x - 3$

Aplicar + – Páginas 157 a 165

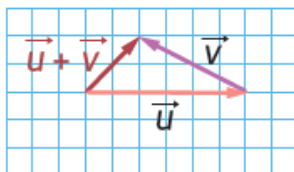
Itens de construção

16.

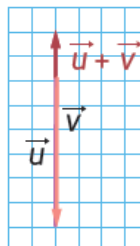
16.1.



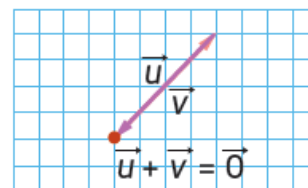
16.2.



16.3.



16.4.



17.

17.1. $A + \overline{AB} = B$

17.3. $N + \overline{EG} = P$

17.5. $H - C = \overline{AF}$ p.e.

17.7. $N + \overline{LG} = N + \overline{NI} = I$

17.9. $\overline{DK} + \overline{KC} = \overline{DC}$ p.e.

17.11. $\overline{CD} + \overline{EN} = \overline{AB} + \overline{BK} = \overline{AK}$ p.e.

17.13. $\overline{FE} + (-\overline{CK}) = \overline{FE} + \overline{KC} = \overline{LK} + \overline{KC} = \overline{LC}$ p.e.

17.2. $B + \overline{EI} = B + \overline{BF} = F$

17.4. $P - O = \overline{OP}$ p.e.

17.6. $D - \overline{NO} = D + \overline{ON} = D + \overline{DC} = C$

17.8. $\overline{EF} + \overline{FJ} = \overline{EJ}$

17.10. $\overline{NE} + \overline{CK} = \overline{NE} + \overline{EM} = \overline{NM}$

17.12. $\overline{AH} - \overline{AH} = \overline{O}$ p.e.

17.14. $\overline{AF} + \overline{NP} + \overline{GN} = \overline{AF} + \overline{FH} + \overline{HO} = \overline{AH} + \overline{HO} = \overline{AO}$ p.e.

18.

• $\|\vec{a}\| = 4$ u.c.

• $\|\vec{b}\|^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{b}\|^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{b}\|^2 = 18 \Leftrightarrow \|\vec{b}\| = \pm\sqrt{18} \Leftrightarrow \|\vec{b}\| = \pm 3\sqrt{2}$

Como $\|\vec{b}\| \geq 0$, então, $\|\vec{b}\| = 3\sqrt{2}$.

• $\|\vec{c}\|^2 = 6^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 = 36 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 = 45 \Leftrightarrow \|\vec{c}\| = \pm\sqrt{45} \Leftrightarrow \|\vec{c}\| = \pm 3\sqrt{5}$

Como $\|\vec{c}\| \geq 0$, então, $\|\vec{c}\| = 3\sqrt{5}$.

19.

19.1. \vec{a}, \vec{g} e \vec{i} (ou \vec{b}, \vec{c} e \vec{f})

19.2. \vec{a} e \vec{g} (ou \vec{a} e \vec{i})

19.3. \vec{b} e \vec{h}

20.

20.1.

a) $[A, B]$ e $[E, F]$ p.e.

b) $[A, B]$ e $[C, B]$ p.e.

c) $[AB]$ e $[E, H]$ p.e.

d) $[A, G]$ e $[E, K]$ p.e.

20.2.

a) $\|\vec{EF}\| = 2$

b) $\|\vec{OC}\| = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

c) $\|\vec{MG}\|^2 = (2 \times 2)^2 + \left(2 \times \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \|\vec{MG}\|^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{MG}\|^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{MG}\|^2 = 25 \Leftrightarrow \|\vec{MG}\| = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow \|\vec{MG}\| = \pm 5$

Como $\|\vec{MG}\| \geq 0$ então $\|\vec{MG}\| = 5$

d) $\|\vec{AL}\|^2 = (3 \times 2)^2 + \left(2 \times \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \|\vec{AL}\|^2 = 6^2 + 3^2 \Leftrightarrow \|\vec{AL}\|^2 = 36 + 9 \Leftrightarrow \|\vec{AL}\|^2 = 45 \Leftrightarrow \|\vec{AL}\| = \pm\sqrt{45} \Leftrightarrow \|\vec{AL}\| = \pm 3\sqrt{5}$

Como $\|\vec{AL}\| \geq 0$ então $\|\vec{AL}\| = 3\sqrt{5}$

20.3. $\|\vec{EF} + \vec{OC}\| = 2 + \frac{9}{2} = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$

21.

21.1. $2(3\vec{u} + \vec{v}) - 2\vec{u} = 6\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{u} = 6\vec{u} - 2\vec{u} + 2\vec{v} = 4\vec{u} + 2\vec{v}$

21.2. $-3\vec{u} + \frac{2}{5}(\vec{u} - \vec{v}) + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\vec{v}\right) = -3\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v} - \frac{3}{5}\vec{v} = \left(-3 + \frac{2}{5}\right)\vec{u} + \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right)\vec{v} = -\frac{13}{5}\vec{u} + \left(-\frac{5}{5}\right)\vec{v} = -\frac{13}{5}\vec{u} - \vec{v}$

22. $2(\vec{x} + \vec{u}) + (\vec{u} + 2\vec{v}) = 3(\vec{u} + \vec{x}) - 2(4\vec{v}) \Leftrightarrow 2\vec{x} + 2\vec{u} + \vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{u} + 3\vec{x} - 8\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{x} - 3\vec{x} = -2\vec{u} - \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{u} - 8\vec{v} \Leftrightarrow -\vec{x} = -10\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = 10\vec{v}$

23.

23.1.

a) $F + \vec{FI} = I$

c) $\vec{AD} + \vec{BF} = \vec{AD} + \vec{DH} = \vec{AH}$ p.e.

e) $\vec{BA} - \vec{IE} = \vec{BA} + \vec{AO} = \vec{BO}$

g) $\vec{AF} + \vec{GF} = \vec{DG} + \vec{GF} = \vec{DF}$

i) $D + (-\vec{FG}) = D + \vec{GF} = D + \vec{DA} = A$

k) $(B - A) - (G - E) = \vec{AB} - \vec{EG} = \vec{AB} + \vec{GE} = \vec{HG} + \vec{GE} = \vec{HE}$ p.e.

b) $A + \vec{HG} = A + \vec{AB} = B$

d) $\vec{EF} + \vec{CB} = \vec{DC} + \vec{CB} = \vec{DB}$ p.e.

f) $\vec{DC} + \vec{FE} = \vec{DC} + \vec{CD} = \vec{0}$

h) $A + 2\vec{OG} = A + \vec{AC} = C$

j) $D + \vec{HI} = D + \vec{DO} = \vec{0}$

l) $F + (D - A) = F + \vec{AD} = F + \vec{FG} = G$

23.2. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[EOF]$, temos:

$$\|\overrightarrow{EF}\|^2 = \|\overrightarrow{EO}\|^2 + \|\overrightarrow{OF}\|^2$$

Como:

$$\|\overrightarrow{EO}\| = \|\overrightarrow{OF}\|$$

Temos:

$$4^2 = 2\|\overrightarrow{EO}\|^2 \Leftrightarrow 16 = 2\|\overrightarrow{EO}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EO}\| = 8 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EO}\| = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EO}\| = \pm 2\sqrt{2}$$

Como:

$$\|\overrightarrow{EO}\| \geq 0,$$

então,

$$\|\overrightarrow{EO}\| = 2\sqrt{2}.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[EOI]$ temos:

$$\|\overrightarrow{EI}\|^2 = \|\overrightarrow{EO}\|^2 + \|\overrightarrow{OI}\|^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EI}\|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EI}\|^2 = 8 + 16 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EI}\| = \pm\sqrt{24} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EI}\| = \pm 2\sqrt{6}$$

Como $\|\overrightarrow{EI}\| \geq 0$, então, $\|\overrightarrow{EI}\| = 2\sqrt{6}$.

24.

24.1.

- a) $[A, B]$ e $[G, H]$ p.e. b) $[G, B]$, $[J, E]$ e $[I, D]$. c) \overrightarrow{BH} e \overrightarrow{CL} p.e. d) \overrightarrow{AC} p.e.

24.2.

- a) $B + \overrightarrow{GJ} = B + \overrightarrow{BE} = E$
 b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AJ}$
 c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}$
 d) $I - \overrightarrow{NM} = I + \overrightarrow{MN} = I + \overrightarrow{IJ} = J$
 e) $\overrightarrow{IH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IH} - \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{IB}$
 f) $D - (E - G) = D - \overrightarrow{GE} = D + \overrightarrow{EG} = D + \overrightarrow{DH} = H$

24.3. Começemos por determinar o comprimento das referidas diagonais: \overline{AI} e \overline{BM} .

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\bullet \overline{AI}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{EI}^2 \Leftrightarrow \overline{AI}^2 = 3\overline{AB}^2$$

Como $\overline{AI} \geq 0$, então, $\overline{AI} = \sqrt{3\overline{AB}^2} = \sqrt{3} \overline{AB}$

$$\bullet \overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DM}^2 \Leftrightarrow \overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 + (2\overline{BC})^2 \Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 6\overline{BC}^2$$

Como $\overline{BM} \geq 0$, então, $\overline{BM} = \sqrt{6\overline{BC}^2} = \sqrt{6} \overline{BC}$

$$\text{Assim, } \frac{\overline{BM}}{\overline{AI}} = \frac{\sqrt{6} \overline{BC}}{\sqrt{3} \overline{AB}} = \frac{\sqrt{6} \overline{AB}}{\sqrt{3} \overline{AB}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2} \text{ c.q.m.}$$

25. Como $C \in [AD]$ e $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, então, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CD}$.

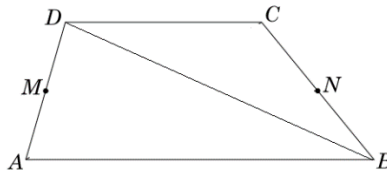
Por outro lado, como $C \in [BE]$ e $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$, então, $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{EC}$.

Assim,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC}) = 2(\overrightarrow{ED}) \text{ c.q.m.}$$

Como $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{ED}$, então, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{ED} são colineares, ou seja, $AB // ED$ c.q.m.

26. Começemos por traçar a diagonal $[DB]$ do trapézio.



Assim,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

e

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$$

Se M é o ponto médio de $[AD]$ então $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MD}$.

Se N é o ponto médio de $[BC]$ então $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN}$.

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BN} = 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}) = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{MN}$$

Se

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$$

Então

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \text{ c. q. d.}$$

27.

27.1. $\vec{a}(2,5)$

27.2. $\vec{b}(-1, -2)$

27.3. $\vec{c}(3,0)$

27.4. $\vec{d}(0, -5)$

27.5. $\vec{e}\left(\frac{1}{4}, -\sqrt{2}\right)$

27.6. $\vec{f}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

28.

28.1. $\vec{u} + \vec{v} = (1, -2) + (0, -3) = (1 + 0, -2 - 3) = (1, -5)$

28.2. $\vec{u} - \vec{v} = (1, -2) - (0, -3) = (1 - 0, -2 - (-3)) = (1, 1)$

28.3. $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(1, -2) - 3(0, -3) = (2, -4) - (0, -9) = (2 - 0, -4 - (-9)) = (2, 5)$

28.4. $\frac{1}{3}\vec{v} - \vec{w} + 2\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{v} + 2\vec{v} - \vec{w} = \frac{7}{3}\vec{v} - \vec{w} = \frac{7}{3}(0, -3) - \left(\frac{1}{3}, 1\right) = (0, -7) - \left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(0 - \frac{1}{3}, -7 - 1\right) = \left(-\frac{1}{3}, -8\right)$

28.5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{v} + 2[(\vec{u} - 3\vec{w}) + 2\vec{w}] &= \frac{1}{2}\vec{v} + 2(\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{v} + 2(\vec{u} - \vec{w}) = \\ &= \frac{1}{2}(0, -3) + 2\left[(1, -2) - \left(\frac{1}{3}, 1\right)\right] = \left(0, -\frac{3}{2}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{3}, -2 - 1\right) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{2}{3}, -3\right) = \\ &= \left(0, -\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{4}{3}, -6\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{2} - 6\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{15}{2}\right) \end{aligned}$$

29.

29.1. \vec{u} e \vec{v} não são colineares, porque a primeira coordenada de \vec{u} é zero e a primeira coordenada de \vec{v} é diferente de zero.

29.2. Como \vec{u} e \vec{v} têm as segundas coordenadas iguais a zero, então, \vec{u} e \vec{v} são colineares.

29.3. $\frac{v_1}{u_1} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ e $\frac{v_2}{u_2} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$ Como $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$, então, \vec{u} e \vec{v} são colineares.

29.4. $\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{3}$; $\frac{v_2}{u_2} = \frac{-9}{-3} = 3$ Como $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$, então, \vec{u} e \vec{v} não são colineares.

29.5. $u_2 = 0 \wedge v_2 \neq 0$, logo, \vec{u} e \vec{v} não são colineares.

29.6. $\frac{v_1}{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\frac{v_2}{u_2} = \frac{4}{\sqrt{24}} = \frac{4\sqrt{24}}{24} = \frac{4 \times 2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ e $\frac{v_3}{u_3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Como $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$, então, \vec{u} e \vec{v} são colineares.

30.

30.1. \vec{u} e \vec{v} são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Assim,

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow (5, k) = \lambda(3, 2) \Leftrightarrow (5, k) = (3\lambda, 2\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3\lambda \\ k = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{3} \\ k = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Concluimos que $k = \frac{10}{3}$.

30.2. $\vec{v} - \vec{u} = (5, k) - (3, 2) = (5 - 3, k - 2) = (2, k - 2)$

\vec{v} e $\vec{v} - \vec{u}$ são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} - \vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Assim,

$$\vec{v} - \vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (2, k - 2) = \lambda(5, k) \Leftrightarrow (2, k - 2) = (5\lambda, k\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 5\lambda \\ k - 2 = k\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{5} \\ k - 2 = \frac{2}{5}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - \frac{2}{5}k = 2 \\ \frac{3}{5}k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 10 \\ k = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Concluimos que $k = \frac{10}{3}$

31.

31.1. $\vec{a}(-4, 6)$; $\vec{b}(-5, -2)$; $\vec{c}(3, -3)$; $\vec{d}(-2, 2)$; $\vec{e}(0, 4)$ e $\vec{f}(8, 3)$.

31.2. $\frac{d_1}{c_1} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$ e $\frac{d_2}{c_2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$, então, $\frac{d_1}{c_1} = \frac{d_2}{c_2}$.

Assim, concluo que \vec{c} e \vec{d} são colineares.

31.3. $\vec{a}(-4, 6)$ e $\vec{u}(2k, 2)$

Para que \vec{a} e \vec{u} sejam colineares temos que:

$$\frac{2k}{-4} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow 12k = -8 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{12} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

31.4. Para que \vec{b} e \vec{v} fossem colineares teríamos de ter

$$\frac{3k}{-5} = \frac{-k}{-2} \Leftrightarrow -6k = 5k \Leftrightarrow -6k - 5k = 0 \Leftrightarrow -11k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Neste caso teríamos $\vec{v}(3 \times 0, -0)$, ou seja, $\vec{v}(0,0)$ o que não é possível pois o vetor é não nulo.

32.

32.1. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares temos que:

$$\frac{10}{5} = \frac{-6}{k} = \frac{4}{2}, \text{ ou seja, } -\frac{6}{k} = 2 \Leftrightarrow -6 = 2k \Leftrightarrow k = -\frac{6}{2} \Leftrightarrow k = -3$$

32.2. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares temos que:

$$\frac{-1}{2} = \frac{k-2}{-4} \Leftrightarrow 2(k-2) = 4 \Leftrightarrow 2k - 4 = 4 \Leftrightarrow 2k = 4 + 4 \Leftrightarrow 2k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{2} \Leftrightarrow k = 4$$

32.3. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares temos que:

$$\frac{2k^2 - 1}{3} = \frac{5}{1} \Leftrightarrow 2k^2 - 1 = 15 \Leftrightarrow 2k^2 = 16 \Leftrightarrow k^2 = \frac{16}{2} \Leftrightarrow k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$k = -2\sqrt{2} \text{ ou } k = 2\sqrt{2}.$$

33. Temos duas hipóteses:

- Se $k = 2$ então $\vec{u}(0,0,2)$ e $\vec{v}(5,0,1)$, logo, \vec{u} e \vec{v} não são colineares, pois a primeira coordenada de \vec{u} é nula e a de \vec{v} não.
- Se $k \neq 2$ e supondo que \vec{u} e \vec{v} são colineares, então:

$$\frac{5}{2-k} = \frac{k-1}{2} \Leftrightarrow (2-k)(k-1) = 10 \Leftrightarrow 2k - 2 - k^2 + k = 10 \Leftrightarrow -k^2 + 3k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times (-12)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 48}}{-2} \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{-39}}{-2}$$

Obtivemos uma equação impossível, logo, \vec{u} e \vec{v} não são colineares.

34. Determinemos as coordenadas do ponto médio M de $[AB]$.

$$M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{2+(-1)}{2}, \frac{-1+(-5)}{2}\right) \text{ ou seja } M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -3\right)$$

$$\text{Assim, } \overrightarrow{AM} = M - A = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -3\right) - (2, 2, -1) = \left(\frac{5}{2} - 2, \frac{1}{2} - 2, -3 - (-1)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right)$$

Para que \overrightarrow{AM} e \vec{u} sejam colineares, temos que:

$$\frac{\vec{u}}{AM} = \frac{-a}{\frac{1}{2}} = \frac{b-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{-2},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{-a}{\frac{1}{2}} = -\frac{4}{2} \\ \frac{b-2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -\frac{4}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \\ b-2 = -\frac{4}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -\frac{4}{4} \\ b-2 = \frac{12}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

35.

35.1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-6)^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

35.2. Para provar que \vec{u} e \vec{v} são colineares temos de provar que $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Assim

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (-2, 4) = \lambda(-6, 12) \Leftrightarrow (-2, 4) = (-6\lambda, 12\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} -6\lambda = -2 \\ 12\lambda = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-2}{-6} \\ \lambda = \frac{4}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Concluimos que $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$, ou seja, \vec{u} e \vec{v} são colineares.

35.3. Como \vec{w} é colinear com \vec{u} , então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{w} = \lambda\vec{u}$.

Assim $\vec{w} = \lambda\vec{u} = \lambda(-2, 4) = (-2\lambda, 4\lambda)$.

Como $\|\vec{w}\| = 4$, então,

$$\begin{aligned} \sqrt{(-2\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{4\lambda^2 + 16\lambda^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{20\lambda^2} = 4 \Leftrightarrow 20\lambda^2 = 16 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{16}{20} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Assim,

- se $\lambda = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$: $\vec{w} = \left(-2 \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), 4 \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right) = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$

- se $\lambda = \frac{2\sqrt{5}}{5}$: $\vec{w} = \left(-2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}, 4 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$.

Conclui-se que: $\vec{w} \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$ ou $\vec{w} \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$.

36.

36.1. $\vec{AB} = B - A = (5, -2, 3) - (3, -1, 0) = (5 - 3, -2 - (-1), 3 - 0) = (2, -1, 3)$ c.q.m.

36.2. Como \vec{u} e \vec{AB} são vetores colineares, então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{u} = \lambda\vec{AB}$

Assim

$$\vec{u} + \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow (-4, 2, -k + 3) = \lambda(2, -1, 3)$$

$$\Leftrightarrow (-4, 2, -k + 3) = (2\lambda, -\lambda, 3\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2\lambda \\ 2 = -\lambda \\ -k + 3 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \\ -k + 3 = 3(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ -k + 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ -k = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ k = 9 \end{cases}$$

Então $\vec{u}(-4, 2, -9 + 3)$, ou seja, $\vec{u}(-4, 2, -6)$.

A norma de \vec{u} é dada por: $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

36.3. Seja $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ um vetor colinear com \vec{AB} , então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda\vec{AB}$

Assim

$$\vec{v} = \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = \lambda(2, -1, 3) \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = (2\lambda, -\lambda, 3\lambda)$$

Logo,

$$\|\vec{v}\| = 4\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{(2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (3\lambda)^2} = 4\sqrt{7} \Leftrightarrow 4\lambda^2 + \lambda^2 + 9\lambda^2 = 16 \times 7 \Leftrightarrow 14\lambda^2 = 112 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{112}{14} \Leftrightarrow \Leftrightarrow d^2 = 8 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow d = \pm 2\sqrt{2}$$

Temos que

- Se $\lambda = -2\sqrt{2}$, então, $\vec{v}(2 \times (-2\sqrt{2}), -(-2\sqrt{2}), 3 \times (-2\sqrt{2}))$, ou seja, $\vec{v}(-4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$
- Se $\lambda = 2\sqrt{2}$, então, $\vec{v}(2 \times 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 3 \times 2\sqrt{2})$, ou seja, $\vec{v}(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$

Concluo que $\vec{v}(-4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$ ou $\vec{v}(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$.

$$37. \overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1) - (-2, 3) = (0 - (-2), -1 - 3) = (2, -4)$$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (4, 1) - (2, 5) = (4 - 2, 1 - 5) = (2, -4)$$

Concluimos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e A, B, C e D são pontos distintos, então $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Assim, $[ABCD]$ é um paralelogramo.

O perímetro é dado por $P = 2 \|\overrightarrow{AB}\| + 2 \|\overrightarrow{AC}\|$.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 1) - (-2, 3) = (4 - (-2), 1 - 3) = (6, -2)$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Então, o perímetro é

$$P = 2 \times 2\sqrt{5} + 2 \times 2\sqrt{10} = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$$

38.

38.1.

$$a) \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 1) - (2, 3, 0) = (0 - 2, 3 - 3, 1 - 0) = (-2, 0, 1)$$

$$b) \overrightarrow{CB} = B - C = (0, 3, 1) - (1, 1, 2) = (0 - 1, 3 - 1, 1 - 2) = (-1, 2, -1)$$

$$c) A + \overrightarrow{BC} = (2, 3, 0) + (1, -2, 1) = (3, 1, 1)$$

$$d) B - \overrightarrow{BA} = B + \overrightarrow{AB} = (0, 3, 1) + (-2, 0, 1) = (-2, 3, 2)$$

$$38.2. \overrightarrow{BA} = A - B = (2, 3, 0) - (0, 3, 1) = (2 - 0, 3 - 3, 0 - 1) = (2, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 2) - (2, 3, 0) = (1 - 2, 1 - 3, 2 - 0) = (-1, -2, 2)$$

Então,

$$\overrightarrow{BA} - \vec{v} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow -\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \vec{v} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \vec{v} = -(-1, -2, 2) + (2, 0, -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = (1, 2, -2) + (2, 0, -1) \Leftrightarrow \vec{v} = (1 + 2, 2 + 0, -2 + (-1)) \Leftrightarrow \vec{v} = (3, 2, -3)$$

Equação vetorial da reta que passa em A e tem a direção de \vec{v}

$$(x, y) = (2, 3, 0) + k(3, 2, -3), k \in \mathbb{R}$$

39.

$$39.1. \overrightarrow{AD} = D - A = (-3, 2) - (-4, -1) = (-3 - (-4), 2 - (-1)) = (1, 3)$$

Logo, $(x, y) = (-4, -1) + k(1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta AD.

$$39.2. B = A + \overrightarrow{AB} = (-4, -1) + (7, 2) = (-4 + 7, -1 + 2) = (3, 1)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

Equação reduzida da circunferência de centro $B(3, 1)$ e raio $\sqrt{10}$.

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{53})^2$$

Ou seja, $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53$

39.3. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, então,

$$C = D + \overrightarrow{AB} = (-3, 2) + (7, 2) = (-3 + 7, 2 + 2) = (4, 4)$$

40.

40.1.

a) $E(3, 4, 2)$, logo, $\overrightarrow{OE}(3, 4, 2)$.

b) $A(3, 0, 0)$ logo $\overrightarrow{OA}(3, 0, 0)$.

c) $C(0, 4, 0)$ logo $\overrightarrow{OC}(0, 4, 0)$.

d) $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 4, 0) - (3, 0, 0) = (3 - 3, 4 - 0, 0 - 0) = (0, 4, 0)$

e) $\overrightarrow{BF} = F - B = (0, 4, 2) - (3, 4, 0) = (0 - 3, 4 - 4, 2 - 0) = (-3, 0, 2)$

f) $\overrightarrow{BG} = G - B = (0, 0, 2) - (3, 4, 0) = (0 - 3, 0 - 4, 2 - 0) = (-3, -4, 2)$

40.2.

a) \overrightarrow{GC}

b) \overrightarrow{AG}

c) \overrightarrow{AF}

40.3. $z = 2$

40.4. Se a reta é paralela a BG, \overrightarrow{BG} é um vetor diretor da reta.

$\overrightarrow{BG}(-3, -4, 2)$ e $F(0, 4, 2)$

$(x, y, z) = (0, 4, 2) + k(-3, -4, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta.

41.

41.1.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0, -4) - (2, 0, -1) = (0 - 2, 0 - 0, -4 - (-1)) = (-2, 0, -3)$

b) $\overrightarrow{CA} = A - C = (2, 0, -1) - (3, -1, 2) = (2 - 3, 0 - (-1), -1 - 2) = (-1, 1, -3)$

41.2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 0 + 9} = \sqrt{13}$

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$41.3. \|\vec{a}\| = \|\vec{BA}\| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{b}\| = \|\vec{2CA}\| = 2 \|\vec{CA}\| = 2\sqrt{11}$$

$$41.4. \vec{CE} = -3\vec{BA} \Leftrightarrow E - C = -3\vec{BA} \Leftrightarrow E = C - 3\vec{BA}$$

$$\vec{BA} = A - B = (2, 0, -1) - (0, 0, -4) = (2 - 0, 0 - 0, -1 - (-4)) = (2, 0, 3)$$

Então

$$E = (3, -1, 2) - 3(2, 0, 3) \Leftrightarrow E = (3, -1, 2) - (6, 0, 9) \Leftrightarrow E = (3 - 6, -1 - 0, 2 - 9) \Leftrightarrow E = (-3, -1, -7)$$

41.5.

a) Se a circunferência tem centro em D e a sua equação reduzida é

$$(x + 4)^2 + (y - 6)^2 + (z - 5)^2 = 109$$

então, $D(-4, 6, 5)$

$$b) \vec{DC} = C - D = (3, -1, 2) - (-4, 6, 5) = (3 - (-4), -1 - 6, 2 - 5) = (7, -7, -3)$$

$$\|\vec{DC}\| = \sqrt{7^2 + (-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 49 + 9} = \sqrt{107}$$

Como a superfície esférica tem centro em D e o raio é igual a $\sqrt{109}$, então C não pertence à superfície esférica, pois $\|\vec{DC}\| = \sqrt{107}$.

42.

42.1.

$$A(3, -5, -4)$$

$$E(3, -5, 4)$$

$$B(3, 5, -4)$$

$$F(3, 5, 4)$$

$$C(-3, 5, -4)$$

$$G(-3, 5, 4)$$

$$D(-3, -5, -4)$$

$$H(-3, -5, 4)$$

42.2.

Interseção do eixo Ox com:

- Face [ABFE]: (3, 0, 0)
- Face [CGHD]: (-3, 0, 0)

Interseção do eixo Oy com:

- Face [BCGF]: (0, 5, 0)
- Face [ADHE]: (0, -5, 0)

Interseção do eixo Oz com:

- Face [ABCD]: (0, 0, -4)
- Face [EFGH]: (0, 0, 4)

42.3. Sendo a reta paralela ao eixo Oy então um vetor diretor da reta poderá ser o vetor de coordenadas (0, 1, 0).

Assim, uma equação vetorial da reta que contém o ponto E e é paralela ao eixo Oy é

$$(x, y, z) = (3, -5, 4) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

$$42.4. \vec{AG} = G - A = (-3, 5, 4) - (3, -5, -4) = (-3 - 3, 5 - (-5), 4 - (-4)) = (-6, 10, 8)$$

Assim, uma equação vetorial da reta AG é

$$(x, y, z) = (3, -5, -4) + k(-6, 10, 8), k \in \mathbb{R}$$

42.5. Começamos por determinar as coordenadas do ponto médio M da aresta [AB].

Assim,

$$M\left(\frac{3+3}{2}, \frac{-5+5}{2}, \frac{-4+(-4)}{2}\right),$$

ou seja, $M(3, 0, -4)$

Como o ponto N é o centro da face [ADHE], então, é o ponto médio de [AH], logo

$$N\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{-5+(-5)}{2}, \frac{-4+4}{2}\right),$$

ou seja, $N(0, -5, 0)$.

Então, um vetor diretor da reta MN poderá ser \overline{MN} , ou seja,

$$\overline{MN} = N - M = (0, -5, 0) - (3, 0, -4) = (0 - 3, -5 - 0, 0 - (-4)) = (-3, -5, 4)$$

Assim, uma equação vetorial da reta MN será

$$(x, y, z) = (3, 0, -4) + \lambda(-3, -5, 4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

42.6. $C(-3, 5, -4); E(3, -5, 4)$

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[EC]$, ou seja, é o ponto O de coordenadas $(0, 0, 0)$.

O raio da superfície esférica é igual a $\|\overline{OE}\|$.

$$\overline{OE} = (3, -5, 4)$$

$$\|\overline{OE}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

A equação reduzida da superfície esférica é

$$x^2 + y^2 + z^2 = 50$$

42.7. $A(3, -5, -4); E(3, -5, 4)$;

O plano mediador de $[AE]$ é o plano xOy cuja equação é $z = 0$.

42.8. Condição que define a face $[BCGF]$: $-3 \leq x \leq 3 \wedge -4 \leq y \leq 4$

43.

43.1.

a) Por exemplo, $(1, \sqrt{2})$ e $(2, 2\sqrt{2})$.

b) Qualquer vetor diretor \vec{v} da reta é colinear com o vetor $(1, \sqrt{2})$, logo

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda(1, \sqrt{2}), \text{ ou seja, } \exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = (\lambda, \sqrt{2}\lambda)$$

Como

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + (\sqrt{2}\lambda)^2} = 6 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda^2 = 36 \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 36 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{36}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 = 12 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda = -2\sqrt{3}$ tem-se $\vec{v}(-2\sqrt{3}, \sqrt{2}(-2\sqrt{3}))$, ou seja, $\vec{v}(-2\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$.

Se $\lambda = 2\sqrt{3}$ tem-se $\vec{v}(2\sqrt{3}, \sqrt{2}(2\sqrt{3}))$, ou seja, $\vec{v}(2\sqrt{3}, 2\sqrt{6})$.

c) Por exemplo, o ponto de coordenadas $(2, -1)$ é um ponto da reta.

Se, por exemplo, $k = 1$ temos

$$(x, y) = (2, -1) + 1(1, \sqrt{2}), \text{ ou seja, } (x, y) = (3, -1 + \sqrt{2}),$$

Assim, $(3, -1 + \sqrt{2})$ é outro ponto da reta dada.

d) Como a abcissa do ponto da reta é 4 então

$$(4, y) = (2, -1) + k(1, \sqrt{2}) \Leftrightarrow (4, y) = (2, -1) + (k, \sqrt{2}k) \Leftrightarrow (4, y) = (2 + k, -1 + \sqrt{2}k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2 + k \\ y = -1 + \sqrt{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 - 2 \\ y = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto pedido são $(4, -1 + 2\sqrt{2})$.

- O ponto de interseção da reta com o eixo Ox tem ordenada igual a zero, logo,

$$(x, 0) = (2, -1) + \lambda(1, \sqrt{2}) \Leftrightarrow (x, 0) = (2, -1) + (\lambda, \sqrt{2}\lambda) \Leftrightarrow (x, 0) = (2 + \lambda, -1 + \sqrt{2}\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ 0 = -1 + \sqrt{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\lambda = 1 \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox .

- O ponto de interseção da reta com o eixo Oy tem abcissa igual a zero, logo,

$$(0, y) = (2, -1) + \lambda(1, \sqrt{2}) \Leftrightarrow (0, y) = (2, -1) + (\lambda, \sqrt{2}\lambda) \Leftrightarrow (0, y) = (2 + \lambda, -1 + \sqrt{2}\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ y = -1 + \sqrt{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$(0, -1 - 2\sqrt{2})$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy .

43.2. Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta temos:

$$(2 + \sqrt{2}, 1) = (2, -1) + k(1, \sqrt{2}) \Leftrightarrow (2 + \sqrt{2}, 1) = (2 + k, -1 + \sqrt{2}k) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{2} = 2 + k \\ 1 = -1 + \sqrt{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2}k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \sqrt{2} \\ k = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k = \sqrt{2} \end{cases}$$

Então

$$(2 + \sqrt{2}, 1) = (2, -1) + \sqrt{2}(1, \sqrt{2})$$

Ou seja, o ponto $(2 + \sqrt{2}, 1)$ pertence à reta r .

43.3. Começemos por determinar um vetor diretor da reta $AB: \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -1 + 3\sqrt{2}) - (2, -1) = (5 - 2, -1 + 3\sqrt{2} - (-1)) = (3, 3\sqrt{2})$$

Assim, uma condição que define o segmento de reta $[AB]$ é

$$(x, y) = (2, -1) + \lambda(3, 3\sqrt{2}), \lambda \in [0, 1]$$

44.

$$44.1. V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \times h$$

Logo,

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{OE} \Leftrightarrow 10 = \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times \overline{OE} \Leftrightarrow 8\overline{OE} = 10 \Leftrightarrow \overline{OE} = \frac{10}{8} \Leftrightarrow \overline{OE} = 1,25$$

A pirâmide tem 1,25 cm de altura.

$$44.2. C(-2; 3; 0); E(0; 0; 1,25)$$

$$44.3. \overrightarrow{AC} = C - A = (-2; 3; 0) - (2; -3; 0) = (-2 - 2; 3 - (-3); 0 - 0) = (-4; 6; 0)$$

Assim, uma equação vetorial da reta AC é

$$(x, y, z) = (2; -3; 0) + k(-4; 6; 0), k \in \mathbb{R}$$

$$44.4. \text{Aresta } [DC]: x = -2 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge z = 0$$

$$44.5. \overrightarrow{DB} = B - D = (2; 3; 0) - (-2; -3; 0) = (2 - (-2); 3 - (-3); 0 - 0) = (4; 6; 0)$$

$\vec{v}(a, b, c)$ e \overrightarrow{DB} são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda \overrightarrow{DB}$

Assim,

$$\vec{v} = \lambda \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow (a, b, c) = \lambda(4; 6; 0) \Leftrightarrow (a, b, c) = (4\lambda, 6\lambda, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\lambda \\ b = 6\lambda \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{a}{4} \\ \lambda = \frac{b}{6} \\ \lambda = \frac{c}{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{b}{6} \\ \frac{a}{4} = \frac{c}{0} \\ \frac{b}{6} = \frac{c}{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{6} \\ a = \frac{4b}{6} \\ a = \frac{2b}{3} \end{cases}$$

Então, $\vec{v}(\frac{2b}{3}, b, 0)$

Como $\|\vec{v}\| = \sqrt{39}$, temos que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{39} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{2b}{3}\right)^2 + b^2 + 0^2} = \sqrt{39} \Leftrightarrow \frac{4b^2}{9} + b^2 = 39 \Leftrightarrow 4b^2 + 9b^2 = 351 \Leftrightarrow 13b^2 = 351 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{351}{13} \Leftrightarrow b^2 = 27 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{27} \Leftrightarrow b = \pm 3\sqrt{3}$$

Concluimos então que $\vec{v}(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 0)$ ou $\vec{v}(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}, 0)$.

45.

a) Declive de r: $-\frac{1}{2}$

b) Se $x = 2$ então $y = -\frac{1}{2} \times 2 + 3 = -1 + 3 = 2$

Se $x = -2$ então $y = -\frac{1}{2} \times (-2) + 3 = 1 + 3 = 4$

Assim, (2,2) e (-2,4) são dois pontos da reta dada.

c) Como $-\frac{1}{2}$ é o declive da reta, então, por exemplo, $(2, -1)$ é um vetor diretor da reta.

Seja \vec{r} o vetor diretor da reta de norma 10, temos que $\vec{r} = \lambda(2, -1) = (2\lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

Como

$$\|\vec{r}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(2\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = 10 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + \lambda^2 = 100 \Leftrightarrow 5\lambda^2 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{100}{5} \Leftrightarrow \lambda^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{20} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{5}$$

Então, se por exemplo, $\lambda = 2\sqrt{5}$ então $\vec{r}(2 \times 2\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$, ou seja, $\vec{r}(4\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

Assim $(2, -1)$ e $(4\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ são dois vetores diretores da reta r .

d) Pela alínea anterior, qualquer vetor diretor da reta é do tipo $(2\lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Como $-\lambda = -5$ então $\lambda = 5$. Logo $(2 \times 5, -5)$, ou seja, $(10, -5)$ é o vetor diretor da reta pedido.

e) Como a ordenada é igual a 6, então

$$6 = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -3 \Leftrightarrow x = -6$$

Assim, $(-6, 6)$ é o ponto pedido da reta.

f)

- O ponto de interseção da reta r com o eixo Ox tem ordenada igual a zero, logo

$$0 = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

$(6, 0)$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox .

- O ponto de interseção da reta r com o eixo Oy tem ordenada igual a zero, logo

$$y = -\frac{1}{2} \times 0 + 3 \Leftrightarrow y = 3$$

$(0, 3)$ é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy .

45.2. Por exemplo, $(2, -1)$ é um vetor diretor da reta r e $(0, 3)$ é um ponto da mesma, logo, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y) = (0, 3) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$$

45.3. Como r e s são retas paralelas então têm o mesmo declive, logo

$$s: y = -\frac{1}{2}x + b$$

Como $P(-3, 1) \in s$ então

$$1 = \frac{1}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Assim,

$$s: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

46.

46.1.

a) Como $[BC]$ é paralelo ao eixo Oy , então $\overline{BC} = \overline{OC} = 4$.

Assim, como o ponto C pertence ao eixo Ox , $C(4,0)$ e é o centro da circunferência que tem raio igual a 4.

Logo, a equação da circunferência é

$$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 4^2, \text{ ou seja, } (x - 4)^2 + y^2 = 16.$$

b) Temos que $A(8,0)$ e $B(4,4)$.

Assim, sendo a reta r a mediatriz de $[AB]$ tem-se que:

$$(x - 8)^2 + (y - 0)^2 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8y = -8x + 16x + 16 + 16 - 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8y = 8x - 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = x - 4$$

Então, $r: y = x - 4$

c)

- Sendo D o ponto de interseção da reta r com a circunferência, tem-se que as suas coordenadas correspondem à solução do sistema

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ (x - 4)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \{(x - 4)^2 + (x - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow \{2(x - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow \{(x - 4)^2 = 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{x - 4 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2\sqrt{2} - 4 \\ x = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 4 + 2\sqrt{2} - 4 \\ x = 4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{2} \\ x = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2\sqrt{2} \\ x = 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Como a ordenada do ponto D é positiva, então, $D(4 + 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

- Começemos por determinar as coordenadas do ponto E .

Como $x_E = x_D = 4 + 2\sqrt{2}$ e E pertence à circunferência, então, substituindo na equação da circunferência:

$$\begin{aligned} (4 + 2\sqrt{2} - 4)^2 + y^2 = 16 &\Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow 4 \times 2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 = 16 - 8 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como $y_E < 0$ então $E(4 + 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

d) Um vetor diretor da reta s é

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (4 + 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) - (0,0) = (4 + 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

Assim o declive de s é:

$$m_s = \frac{-2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}(4 - 2\sqrt{2})}{16 - 4 \times 2} = \frac{-8\sqrt{2} + 4 \times 2}{8} = -\sqrt{2} + 1$$

Logo $s: y = (-\sqrt{2} + 1)x + b$

Como $O(0,0) \in s$ então $b = 0$, logo, $s: y = (-\sqrt{2} + 1)x$.

e) As coordenadas do ponto F de interseção das retas r e s constituem a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x - 4 \\ y = (-\sqrt{2} + 1)x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-\sqrt{2} + 1)x = x - 4 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x + x - x = -4 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x = -4 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{-\sqrt{2}} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (-\sqrt{2} + 1) \times 2\sqrt{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \times 2 + 2\sqrt{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = -4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Temos então $F(2\sqrt{2}, -4 + 2\sqrt{2})$.

46.2. $(x - 4)^2 + y^2 \leq 16 \wedge y \geq x - 4 \wedge y \geq (-\sqrt{2} + 1)x$

47.

47.1.

- Coordenadas do ponto F

$$\overrightarrow{AE} = E - A = \left(\frac{4}{3}, -1, -\frac{20}{3}\right) - (5, 2, -4) = \left(-\frac{11}{3}, -3, -\frac{8}{3}\right)$$

$$F = B + \overrightarrow{AE} = (2, 3, -1) + \left(-\frac{11}{3}, -3, -\frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, 0, -\frac{11}{3}\right)$$

- Coordenadas do ponto D

$$D = B + \overrightarrow{BD} = B + \overrightarrow{FH} = (2, 3, -1) + (4, -4, -1) = (6, -1, -2)$$

47.2. O centro do prisma é o ponto médio M de $[HB]$.

Começamos por determinar as coordenadas do ponto H .

$$H = F + \overrightarrow{FH} = \left(-\frac{5}{3}, 0, -\frac{11}{3}\right) + (4, -4, -1) = \left(\frac{7}{3}, -4, -\frac{14}{3}\right)$$

Assim, as coordenadas do ponto médio M de $[HB]$ são dadas por

$$M\left(\frac{\frac{7}{3}+2}{2}, \frac{-4+3}{2}, \frac{-\frac{14}{3}+(-1)}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(\frac{13}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{17}{6}\right).$$

47.3. Qualquer vetor colinear com \overrightarrow{AB} é um vetor diretor da reta AB .

Assim,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3, -1) - (5, 2, -4) = (-3, 1, 3)$$

Como

$$(6, -2, -6) = -2 \times (-3, 1, 3),$$

então,

$$(6, -2, -6) \text{ é vetor diretor da reta } AB.$$

Temos ainda que $(2, 3, -1)$ são as coordenadas do ponto B , ou seja, de um ponto que pertence à reta AB , logo, a equação

$$(x, y, z) = (2, 3, -1) + k(6, -2, -6), k \in IR$$

é uma equação vetorial da reta AB .

Avaliar – Páginas 166 e 167

1.

1.1. Opção (B)

1.2.

a) $F + \overline{FP} = P$

b) $D + 2\overline{HM} = D + \overline{DN} = N$

c) $\overline{EA} + \overline{BQ} = \overline{EA} + \overline{AP} = \overline{EP}$, por exemplo

d) $\overline{JO} - \overline{LG} = \overline{JO} + \overline{GL} = \overline{BG} + \overline{GL} = \overline{BL}$, por exemplo

e) $M + \overline{KF} = M + \overline{MH} = H$

f) $0 + \overline{OP} = P$

1.3. Opção (C)

$\overline{AK} + \overline{LD} = \overline{AC} \neq \vec{0}$.

1.4. Sendo $\vec{u} = \overline{EJ}$ e $\overline{EJ} = \overline{AF}$, então, $\overline{AF} = \vec{u}$.

Sendo $\vec{v} = \overline{EA}$ e $\overline{LD} = 2\overline{EA}$, então, $\overline{LD} = 2\vec{v}$.

Temos ainda $\overline{NI} = -\overline{EJ}$, ou seja, $\overline{NI} = -\vec{u}$.

Assim,

$$2(\overline{EJ} + 3\overline{EA}) - 2\left(\frac{1}{2}\overline{AF} + \overline{LD}\right) + \overline{NI} = 2(\vec{u} + 3\vec{v}) - 2\left(\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}\right) + (-\vec{u}) = 2\vec{u} + 6\vec{v} - \vec{u} - 4\vec{v} - \vec{u} = 2\vec{v} = 2\overline{EA} = \overline{PH} \text{ c.q.d.}$$

2. Para provar que $[GBHE]$ é um paralelogramo temos de mostrar que $\overline{GB} = \overline{EH}$ e que $\overline{GE} = \overline{BH}$

Ora $\overline{GB} = \overline{GA} + \overline{AB} = \overline{DH} + \overline{ED} = \overline{ED} + \overline{DH} = \overline{EH}$.

Logo, também temos que $\overline{BH} = \overline{GE}$.

De modo análogo, mostramos que $\overline{GE} = \overline{BH}$

Assim, provamos que $[GBHE]$ é um paralelogramo.

3. Opção (A)

$\overline{AB} = B - A = (3,5) - (-1,2) = (3 - (-1), 5 - 2) = (4,3)$

$\overline{CD} = D - C = (k^2 - k, 3) - (-2, -3) = (k^2 - k + 2, 3 - (-3)) = (k^2 - k + 2, 6)$

Assim, os vetores são colineares se

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overline{AB} = \lambda \overline{CD} \Leftrightarrow (4,3) = \lambda (k^2 - k + 2, 6) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \lambda(k^2 - k + 2) \\ 3 = 6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \lambda(k^2 - k + 2) \\ \lambda = \frac{3}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \frac{1}{2}(k^2 - k + 2) \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \frac{1}{2}(k^2 - k + 2) \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = k^2 - k + 2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - k - 6 = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left\{ k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ k = \frac{1 \pm 5}{2} \right\} \Leftrightarrow \left\{ k = 3 \vee k = -2 \right\}$$

4.

4.1. Opção (D)

$$\vec{v} - \vec{u} = (0, 2, -1) - (2, 1, 1) = (0 - 2, 2 - 1, -1 - 1) = (-2, 1, -2)$$

$$\vec{z} - \vec{v} + \vec{u} = \vec{w} \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{w} + (\vec{v} - \vec{u})$$

Então,

$$\vec{z} = (3, -4, 0) + (-2, 1, -2) = (3 + (-2), -4 + 1, 0 + (-2)) = (1, -3, -2)$$

5.

5.1. A equação da reta r é do tipo $y = mx + b$.

Como $D(0, 2) \in r$ então $b = 2$.

Assim $r: y = mx + 2$.

O ponto $H(-4, 0)$, e pertence à reta, logo

$$0 = m \times (-4) + 2 \Leftrightarrow 4m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

E, portanto, $r: y = \frac{1}{2}x + 2$.

A abcissa do ponto J é 4 e este ponto pertence à reta r , logo

$$y = \frac{1}{2} \times 4 + 2 = 2 + 2 = 4$$

Assim, $J(4, 4)$.

5.2. $0 \leq x \leq 4 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2$

5.3.

- Área

$$A_{[OJKD]} = \frac{\overline{JK} + \overline{DO}}{2} \times \overline{OK} = \frac{y_J + y_D}{2} \times x_K = \frac{4 + 2}{2} \times 4 = 3 \times 4 = 12 \text{ u. a.}$$

- Perímetro

Começamos por determinar \overline{DJ} .

$$\overline{DJ} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Assim

$$P = \overline{OD} + \overline{DJ} + \overline{JK} + \overline{KO} = 2 + 2\sqrt{5} + 4 + 4 = 10 + 2\sqrt{5} \text{ u. c.}$$

5.4. $\frac{\overline{HK}}{\overline{HO}} = \frac{4+4}{2} = 2, \frac{\overline{JK}}{\overline{DO}} = \frac{4}{2} = 2$ e $D\hat{O}H = J\hat{K}H = 90^\circ$

Assim, como os triângulos $[HDO]$ e $[HKJ]$ têm, de um para o outro, dois lados diretamente proporcionais e o ângulo por eles formado é congruente, então são triângulos semelhantes. A razão de semelhança é 2.

6.

6.1.

a) Como as retas r e s são paralelas, então, $(10,6)$ também é vetor diretor da reta r .

Assim, o seu declive é $m_r = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Temos então $y = \frac{3}{5}x + b$.

Como $C(0,-4) \in r$ então $b = -4$.

A equação da reta r é $y = \frac{3}{5}x - 4$.

b) Como $D \in r \cap Ox$ então $0 = \frac{3}{5}x - 4 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x = 4 \Leftrightarrow 3x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$.

Assim $D\left(\frac{20}{3}, 0\right)$.

6.2. Pela alínea 6.1. a) sabemos que o declive da reta r é igual a $\frac{3}{5}$. Assim, $(5,3)$ é um vetor diretor da reta r .

$(10,2)$ é um ponto da reta r , pois, substituindo na equação $y = \frac{3}{5}x - 4$ temos

$2 = \frac{3}{5} \times 10 - 4$, que é uma proposição verdadeira.

Assim, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y) = (10, 2) + \lambda(5, 3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

6.3. Começemos por determinar as coordenadas do ponto B.

Como $B \in s \cap Oy$, então, a sua abcissa é zero e

$$\begin{aligned} (0, y) = (5, 6) + \lambda(10, 6) &\Leftrightarrow (0, y) = (5 + 10\lambda, 6 + 6\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 5 + 10\lambda \\ y = 6 + 6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\lambda = -5 \\ _ \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{10} \\ _ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ y = 6 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3 \\ _ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Então $B(0,3)$

Ora, como $[BF]$ é um diâmetro da circunferência, então, E é o ponto médio de $[BF]$, ou seja, sendo $F(x, y)$ temos

$$\left(\frac{105}{68}, \frac{29}{68}\right) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{105}{68} \\ \frac{3+y}{2} = \frac{29}{68} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{105}{34} \\ 3+y = \frac{29}{34} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{29}{34} - 3 \\ _ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{105}{34} \\ y = -\frac{73}{34} \end{cases}$$

Assim, $F\left(\frac{105}{34}, -\frac{73}{34}\right)$.

7.

7.1. $A(4, -4, 10); B(4, 4, 10); C(-4, 4, 10); D(-4, -4, 10); O(0, 0, 0)$

7.2. Reta AD

Como a reta é paralela ao eixo Ox , o vetor $(1, 0, 0)$, por exemplo, é vetor diretor da reta AD .

Como $A(4, -4, 10)$ pertence à reta AD , então, uma equação vetorial da reta é

$$(x, y, z) = (4, -4, 10) + \lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

7.3. $\overrightarrow{OB} = B - O = (4, 4, 10)$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{16 + 16 + 100} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 132$$

Preparar o exame – Páginas 170 a 173

1. Opção (B)

A equação da mediatriz de $[AB]$ é dada por

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - (-2))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -4x + 4 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

2. Opção (C)

3.

3.1. $A(-3, 3)$ e $C(1, 0)$

Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AC]$.

$$\begin{aligned} d(P, A) = d(P, C) &\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow -6y = -8x - 17 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{6} \end{aligned}$$

3.2. $\overline{OA}^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 18 \Leftrightarrow \overline{OA} = \pm\sqrt{18} \Leftrightarrow \overline{OA} = \pm 3\sqrt{2}$

Como $\overline{OA} > 0$, então $\overline{OA} = 3\sqrt{2}$ que corresponde ao raio de c_1 .

Assim $B(3\sqrt{2}, 0)$.

Então $\overline{CB} = 3\sqrt{2} - 1$ que corresponde ao raio de c_2 .

$A(-3, 3) \in r$, logo, $r: y = -x$ (pois é bissetriz dos quadrantes pares)

Concluimos que a região sombreada é dada por:

$$x^2 + y^2 \leq (3\sqrt{2})^2 \wedge (x - 3\sqrt{2})^2 + y^2 \geq (3\sqrt{2} - 1)^2 \wedge y \geq -x \wedge y \geq 0$$

Ou seja

$$x^2 + y^2 \leq 18 \wedge (x - 3\sqrt{2})^2 + y^2 \geq (3\sqrt{2} - 1)^2 \wedge y \geq -x \wedge y \geq 0$$

4.

4.1.

- Reta r:

As coordenadas do ponto D são $(1,2)$ e do ponto L são $(0,-2)$.

O declive da reta r é dado por

$$m_r = \frac{-2 - 2}{0 - 1} = -\frac{4}{-1} = 4$$

Assim $r: y = 4x - 2$

- Reta s:

Os pontos $J(-2,5)$ e $D(1,2)$ pertencem à reta s , logo,

$$m_s = \frac{2 - 5}{1 - (-2)} = -1$$

Assim, a equação da reta s é do tipo $y = -x + b$.

Como $D(1,2) \in s$ então $2 = -1 + b \Leftrightarrow b = 3$.

Logo $s: y = -x + 3$.

- Reta w:

A reta w é paralela ao eixo Ox e contém o ponto $L(0,-2)$, logo, a sua equação é $y = -2$.

- Reta z:

Como o ponto K pertence à bissetriz dos quadrantes pares e $y_k = -2$, então, $x_k = -y_k = -(-2) = 2$.

Assim $K(2,-2)$.

Os pontos $K(2,-2)$ e $J(-2,5)$ pertencem à reta z , logo, o seu declive é $m_z = \frac{5 - (-2)}{-2 - 2} = -\frac{7}{4}$.

A equação da reta z é do tipo $y = -\frac{7}{4}x + b$.

Como $K(2,-2) \in z$, então, $-2 = -\frac{7}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow -2 = -\frac{7}{2} + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{7}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

Então $z: y = -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2}$.

4.2. O ponto H é o ponto de interseção das retas r e z , logo, as suas coordenadas correspondem à solução do sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} \\ 16x - 8 = -7x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 7x = 6 + 8 \\ 23x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \times \frac{14}{23} - 2 \\ x = \frac{14}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{23} \\ x = \frac{14}{23} \end{cases} \end{aligned}$$

$s = \left\{ \left(\frac{14}{23}, \frac{10}{23} \right) \right\}$

Assim, $H \left(\frac{14}{23}, \frac{10}{23} \right)$.

$$4.3. \left(y \geq -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} \wedge y \geq 4x - 2 \wedge y \leq -x + 2 \right) \vee \left(y \leq 4x - 2 \wedge y \leq -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} \wedge y \geq -2 \right)$$

5.

$$5.1. A(0,0,3); B(0,6,0); C(-2,6,0); D(-2,0,0); E(0,4,3); F(-2,0,3); G(-2,4,3); O(0,0,0)$$

5.2. Começemos por determinar a área total da superfície do prisma.

- $A_{[OBEA]} = \frac{\overline{OB} + \overline{AE}}{2} \times \overline{OA} = \frac{6+4}{2} \times 3 = 15 \text{ u.a.}$
- $A_{[ODFA]} = \overline{OD} \times \overline{OA} = 2 \times 3 = 6 \text{ u.a.}$
- $A_{[BCGE]} = \overline{BC} \times \overline{CG}$

$$\overline{CG} = \sqrt{(-2 - (-2))^2 + (6 - 4)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{0 + 4 + 9} = \sqrt{13}$$

- $A_{[BCGE]} = \overline{BC} \times \overline{CG} = 2 \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13} \text{ u.a.}$
- $A_{[AEGF]} = \overline{AE} \times \overline{AF} = 4 \times 2 = 8 \text{ u.a.}$
- $A_{[OBCD]} = \overline{OB} \times \overline{OD} = 6 \times 2 = 12 \text{ u.a.}$

Então, a área da peça é:

$$A_t = 2 \times 15 + 6 + 2\sqrt{13} + 8 + 12 = 56 + 2\sqrt{13} \text{ u.a.}$$

$$\text{Ou seja, a área a cobrir corresponde a } (56 + 2\sqrt{13}) \text{ dm}^2 = \frac{56+2\sqrt{13}}{100} \text{ m}^2 \Leftrightarrow \left(0,56 + \frac{\sqrt{13}}{50}\right) \text{ m}^2$$

$$\left(0,56 + \frac{\sqrt{13}}{50}\right) \times 9,90 \approx 6,26 \text{ €}$$

A Joana gastará cerca de 6,26 euros.

$$5.3. z = 3 \wedge -2 \leq \kappa \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 4$$

5.4.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{[AEGF]} \times \text{altura}}{3} \Leftrightarrow 24 = \frac{y_E \times |x_F| \times (z_J - z_A)}{3} \Leftrightarrow 24 = \frac{4 \times 2 \times (z_J - 3)}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 = 8(z_J - 3) \Leftrightarrow 8z_J - 24 = 72 \Leftrightarrow 8z_J = 96 \Leftrightarrow z_J = 12$$

Temos ainda que:

- $x_J = \frac{x_A + x_F}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$
- $y_J = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$

Assim, $J(-1,2,12)$.

6.

$$6.1. \overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{1}{4}(\overline{BE} + \overline{EC}) \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{BE} + \frac{1}{4}\overline{EC} \Leftrightarrow \overline{BE} - \frac{1}{4}\overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{EC} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\overline{BE} = \frac{1}{4}\overline{EC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{BE} = \overline{EC} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{EC} \text{ c.q.d.}$$

6.2. Para provar que $[ABED]$ é um trapézio basta provar que AB é paralela a DE .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CE} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{DE}$$

Então, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DE} são colineares, ou seja, AB e DE são retas paralelas.

Podemos, assim, concluir que $[ABED]$ é um trapézio.

7. \vec{v} e \vec{z} são colineares se $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda \vec{z}$

$$\vec{v} = \lambda \vec{z} \Leftrightarrow (0, 3, 1) = \lambda(3 - \lambda, 6, -2) \Leftrightarrow (0, 3, 1) = (3\lambda - \lambda^2, 6\lambda, -2\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3\lambda - \lambda^2 \\ 3 = 6\lambda \\ 1 = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Sistema impossível}$$

Assim,

$$\nexists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda \vec{z}$$

Concluimos que \vec{v} e \vec{z} não são colineares.

8.

8.1.

a) $\overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$ (p.e.)

b) $I + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DB}) = I + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DB}) = I + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = I + \overrightarrow{IF} = F$

c) $F - (B - C) = F - (\overrightarrow{CB}) = F + \overrightarrow{BC} = F + \overrightarrow{FG} = G$

d) $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI}$ (p.e.)

8.2. Opção (A)

$$V_{[ABCDI]} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}}{3} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}$$

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}$$

Assim

$$\frac{V_{[ABCDI]}}{V_{[ABCDEFGH]}} = \frac{\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}} = \frac{1}{6} \text{ c.q.d.}$$

8.3.

a) Sabemos que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

Por outro lado,

$$\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CG}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 = 4^2 + 4^2 + (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 = 16 + 16 + 16 \times 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 = 64 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \pm 8$$

Como $\overrightarrow{AG} > 0$, $\overrightarrow{AG} = 8$.

Temos então que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = 4$, logo, o triângulo $[ABI]$ é equilátero.

$$\text{b) } \vec{EG} + \vec{DA} + 2\vec{IH} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BH} = \vec{AB} + \vec{BH} = \vec{AH}$$

$$\text{Assim, } \|\vec{EG} + \vec{DA} + 2\vec{IH}\| = \|\vec{AH}\|$$

Temos que

$$\|\vec{AH}\|^2 = \|\vec{AD}\|^2 + \|\vec{DH}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AH}\|^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AH}\|^2 = 16 + 16 \times 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AH}\|^2 = 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AH}\| = \pm\sqrt{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AH}\| = \pm 4\sqrt{3}$$

Como $\|\vec{AH}\| > 0$ então $\|\vec{AH}\| = 4\sqrt{3}$, ou seja, $\|\vec{EG} + \vec{DA} + 2\vec{IH}\| = 4\sqrt{3}$.

9.

9.1.

a) $z = -4$

b) $x = -2$

c) $y = -1 \wedge z = -4$

d) $x = 2 \wedge y = 4$

9.2. O centro do prisma M corresponde ao ponto médio $[DF]$, ou seja,

$$M\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{-4+4}{2}\right)$$

Isto é, o ponto médio $M\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$ é o centro do prisma.

9.3. Por exemplo \vec{AD} e \vec{CG}

9.4. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 11$

9.5. Começemos por determinar as coordenadas dos pontos E e H : $E(2, -1, 4)$ e $H(-2, -1, 4)$

Assim,

$$\vec{EH} = H - E = (-2, -1, 4) - (2, -1, 4) = (-2 - 2, -1 - (-1), 4 - 4) = (-4, 0, 0)$$

Seja $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ o vetor colinear com \vec{EH} e norma igual a 17.

Então,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{v} = \lambda \vec{EH}$$

$$\vec{v} = \lambda \vec{EH} \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = \lambda(-4, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -4\lambda \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Assim $\vec{v}(-4\lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como $\|\vec{v}\| = 17$ então

$$\sqrt{(-4\lambda)^2 + 0^2 + 0^2} = 17 \Leftrightarrow \sqrt{16\lambda^2} = 17 \Leftrightarrow 16\lambda^2 = 289 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{289}{16}} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{17}{4}$$

Assim $\vec{v} \left(-4 \times \left(-\frac{17}{4}\right), 0, 0\right)$ ou $\vec{v} \left(-4 \times \frac{17}{4}, 0, 0\right)$

Ou seja, $\vec{v}(17, 0, 0)$ ou $\vec{v}(-17, 0, 0)$.

10.

10.1. $s: 2y + 4x = 6 \Leftrightarrow 2y = -4x + 6 \Leftrightarrow y = -2x + 3$

Declive da reta $s: m_s = -2$ Declive da reta $r: m_r = \frac{4}{-1} = -4$

10.2. Reta s :

- Interseção com eixo Ox :

$$2 \times 0 + 4x = 6 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}, 0\right) \in s \cap Ox$$

- Interseção com eixo Oy :

$$2y + 4 \times 0 = 6 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{2} \Leftrightarrow y = 3$$

$$(0, 3) \in s \cap Oy$$

Reta r :

- Interseção com eixo Ox :

$$(x, 0) = \left(1, -\frac{9}{2}\right) + \lambda(-1, 4) \Leftrightarrow (x, 0) = \left(1 - \lambda, -\frac{9}{2} + 4\lambda\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ 0 = -\frac{9}{2} + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 4\lambda = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{9}{8} \\ \lambda = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{8} \\ \lambda = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{8}, 0\right) \in r \cap Ox$$

- Interseção com eixo Oy :

$$(0, y) = \left(1, -\frac{9}{2}\right) + \lambda(-1, 4) \Leftrightarrow (0, y) = \left(1 - \lambda, -\frac{9}{2} + 4\lambda\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - \lambda \\ y = -\frac{9}{2} + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = -\frac{9}{2} + 4 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right) \in r \cap Oy$$

10.3.

- Como o declive da reta s é -2 , então, por exemplo, o vetor $\vec{s}(1, -2)$ é um vetor diretor da reta. Pela alínea anterior, por exemplo, $(0, 3)$ é um ponto da reta s , então,

$$s: (x, y) = (0, 3) + \lambda(1, -2), \lambda \in IR$$

- Como o declive da reta r é -4 e o ponto $\left(0, -\frac{1}{2}\right) \in r \cap Oy$, então, a sua equação reduzida é
- $$y = -4x - \frac{1}{2}$$

10.4. Como os declives das retas r e s são diferentes ($m_s = -2$ e $m_r = -4$), então, estas não são retas paralelas.

As coordenadas do ponto de interseção correspondem à solução do sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y + 4x = 6 \\ y = -4x - \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(-4x - \frac{1}{2}\right) + 4x = 6 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 1 + 4x = 6 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 4x = 6 + 1 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 7 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \times \left(-\frac{7}{4}\right) - \frac{1}{2} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - \frac{1}{2} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ y = \frac{13}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim o ponto de interseção das retas r e s é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{7}{4}, \frac{13}{2}\right)$.

11.

11.1. Seja x a abcissa do ponto A então $A(x, 0)$ e $B(0, 2x)$.

$$\text{Então } \overline{AB}^2 = x^2 + (2x)^2 \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2 = x^2 + 4x^2 \Leftrightarrow 9 \times 5 = 5x^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Como $x > 0$, então, $x = 3$.

Assim, $A(3, 0)$; $B(0, 6)$; $C(-3, 0)$ e $D(0, -6)$.

11.2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{PA} = \overline{PB} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow 12y = 6x - 9 + 36 \Leftrightarrow 12y = 6x + 27 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{27}{12} \end{aligned}$$

Por outro lado, como o declive da mediatriz de $[AB]$ é $\frac{1}{2}$, então, por exemplo o vetor de coordenadas $(2, 1)$ é um dos seus vetores diretores.

Como $\left(0, \frac{27}{12}\right)$ é um ponto da referida reta, então, também temos que a sua equação é dada por:

$$(x, y) = \left(0, \frac{27}{12}\right) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

11.3. $A = \frac{6 \times 12}{2} = 36$

Logo, $A = 36 \text{ cm}^2$

12.

12.1. $A(3, -2, 0)$; $B(3, 6, 0)$; $C(-3, 6, 0)$; $D(-3, -2, 0)$; $E(3, -2, 5)$; $F(3, 6, 5)$; $G(-3, 6, 5)$; $H(-3, -2, 5)$

12.2. Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[BH]$, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{PB} = \overline{PH} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 + z^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -12x - 16y + 10z = -7 \end{aligned}$$

Logo, $-12x - 16y + 10z = -7$

$$12.3. \vec{AO} = 0 - A = (0,0,0) - (3,-2,0) = (-3,2,0)$$

$$\vec{EF} = F - E = (3,6,5) - (3,-2,5) = (3-3, 6-(-2), 5-5) = (0,8,0)$$

Assim

$$2\vec{AO} + \frac{1}{2}\vec{EF} = 2(-3,2,0) + \frac{1}{2}(0,8,0) = (-6,4,0) + (0,4,0) = (-6,8,0).$$

12.4. O vetor \vec{HB} é um vetor diretor da reta pedida.

$$\vec{HB} = B - H = (3,6,0) - (-3,-2,5) = (3-(-3), 6-(-2), 0-5) = (6,8,-5)$$

Como o ponto $E(3,-2,5)$ pertence à reta pedida, então, uma equação vetorial poderá ser

$$(x, y, z) = (3, -2, 5) + \lambda(6, 8, -5), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$12.5. V_{prisma} = \vec{AB} \times \vec{BC} \times \vec{CG} = (6 - (-2)) \times (3 - (-3)) \times (5 - 0) = 8 \times 6 \times 5 = 240 \text{ u.v.}$$