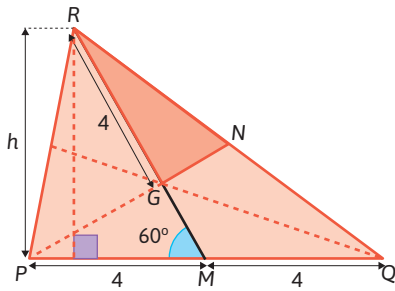


8. Sabemos que $[PN]$ e $[RM]$ são medianas do triângulo $[PQR]$.



$$\overline{GR} = \frac{2}{3} \overline{RM} \Leftrightarrow 4 = \frac{2}{3} \overline{RM}$$

$$\Leftrightarrow 6 \overline{RM}$$

M é ponto médio de $[PQ]$, logo, $\overline{PM} = 4$ e $\overline{PQ} = 8$.

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{6} \Leftrightarrow h = 6 \times \text{sen } 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow h = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$$

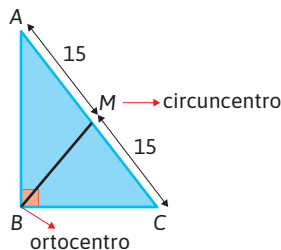
$$A_{[PQR]} = \frac{8 \times 3\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

Como as três medianas dividem o triângulo $[PQR]$ em seis triângulos equivalentes, então

$$A_{[RGN]} = \frac{A_{[PQR]}}{6} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

9. Opção (A)

Num triângulo retângulo, o circuncentro localiza-se na hipotenusa e, como a sua distância a A e a C é igual, então o circuncentro é o ponto médio de $[AC]$.



Seja G o baricentro do triângulo.

$$MB = 15 \Leftrightarrow \overline{MG} + \overline{GB} = 15$$

$$\Leftrightarrow \overline{MG} + 2\overline{MG} = 15$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{MG} = 15$$

$$\Leftrightarrow \overline{MG} = 5$$

Tema 4 – Funções

Recorda – páginas 40 a 45

1.

- a) A correspondência II.
A correspondência I é uma função.
Objetos: 1, 2, 3
Imagens: 2, 3, 4
Contradomínio: $\{2, 3, 4\}$
A correspondência III é uma função.
Objetos: 1, 2, 3
Imagens: 2, 3
Contradomínio: $\{2, 3\}$
A correspondência IV é uma função.
Objetos: 1, 2, 3
Imagens: 2, 3, 4
Contradomínio: $\{2, 3, 4\}$

2.

a)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5

- b) $f(x) = 2x + 1, x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

3. Opção (A)

$$k = \frac{6}{3} = 2$$

4.

a)

$$3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow 3x - x = 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

b)

$$2 - 5(x - 1) = 8 \Leftrightarrow 2 - 5x + 5 = 8$$

$$\Leftrightarrow -5x = 8 - 5 - 2$$

$$\Leftrightarrow -5x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

c)

$$1 - \frac{2-x}{3} = x - 4 \Leftrightarrow 3 - 2 + x = 3x - 12$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = -12 + 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow -2x = -13$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{13}{2}\right\}$$

5.

Uma vez que as retas r e s são paralelas, então o declive da reta r é igual a -3 . Logo, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = -3x + b$. Como o ponto de coordenadas $(3, 6)$ pertence à reta r , então:

$$6 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 15$$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -3x + 15$.

6.

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Como a abcissa de A é inferior à abcissa de C , então $A(-2, 8)$ e $C(2, 8)$.

Como a abcissa de B é igual à de C, então $B(2, 0)$.

$$A_{[AOBC]} = \frac{\overline{AC} + \overline{OB}}{2} \times \overline{BC}$$

$$A_{[AOBC]} = \frac{4 + 2}{2} \times 8 = 24 \text{ u.a.}$$

7.

a) $-3x^2 + 75 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 = -75$
 $\Leftrightarrow x^2 = 25$
 $\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$

C.S. = $\{-5, 5\}$

b) $x^2 = -7x \Leftrightarrow x^2 + 7x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x + 7) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -7$

C.S. = $\{-7, 0\}$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 4$

C.S. = $\{4\}$

Capítulo 1 – Generalidades acerca de funções – páginas 50 a 71

1. Ao cuidado do aluno.

2. Opção (C)
 O gráfico correto é o da opção (C) pois a distância, d , em quilómetros, a que o João se encontrava da sua casa, t minutos após ter saído de casa, vai aumentando, depois permanece constante durante os minutos em que espera pelo seu amigo Francisco, e depois aumenta outra vez até chegar à escola.

3.

a)

N	C
1	$60 + 5 = 65$
2	$60 + 2 \times 5 = 70$
3	$60 + 3 \times 5 = 75$
4	$60 + 4 \times 5 = 80$
5	$60 + 5 \times 5 = 85$

b) A variável independente, N , é o número de horas da festa e a variável dependente, C , é o custo total do aluguer do insuflável.

c) Domínio: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 Contradomínio: $\{65, 70, 75, 80, 85\}$

4.

a) A correspondência f não é uma função de A em B , pois existe um elemento do conjunto de partida, 3, que tem mais do que um elemento correspondente no conjunto de chegada, 30 e 40.

A correspondência g é uma função de A em B , pois a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

b) $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$
 Conjunto de chegada: $\{10, 20, 30, 40\}$
 $D'_g = \{10, 20, 30\}$

5. Domínio: {cadeira de orquestra, 1ª plateia, 2ª plateia, tribuna, balcão popular, galeria, geral}
 Contradomínio: $\{25, 30, 40, 45, 50, 60\}$

6.

a)

h	V(h)
0	0
1	$6^2 \times 1 = 36$
2	$6^2 \times 2 = 72$
2,5	$6^2 \times 2,5 = 90$
4	$6^2 \times 4 = 144$
4,5	$6^2 \times 4,5 = 162$
5	$6^2 \times 5 = 180$

b) A variável independente, h , é a altura que a água atinge, e a variável dependente, V , é o volume de água.

c) O domínio é o intervalo $[0, 6]$.

7. $V(h) = 36h$

8.

a) $P(\ell) = 4\ell$

b) Sabemos que $P(\ell) = 4\ell$ e, por outro lado, a área a de um quadrado de lado ℓ pode ser dada por $a = \ell^2$ e, como $a > 0$, vem que $\ell = \sqrt{a}$. Logo, $P(a) = 4\sqrt{a}$.

c) Seja H a altura de um triângulo equilátero com comprimento do lado ℓ :

$$H^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Leftrightarrow H^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Leftrightarrow H^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow H^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

Como $H > 0$ e $\ell > 0$, vem que $H = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$. Assim, $H = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$.

9.

a) $f(1) = 3 \times 1^2 + 1 = 4$

b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $f(7) = 3 \times 7^2 + 1 = 148$

d) $f(x) = 7 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 7 \Leftrightarrow 3x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 2$
 $\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

e) $f(0) = 3 \times 0^2 + 1 = 3 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

f) $f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

g) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = 3 \times \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

h) $f(2a) = 3 \times (2a)^2 + 1 = 3 \times 4a^2 + 1 = 12a^2 + 1$

i) $f(a - 1) = 3 \times (a - 1)^2 + 1 = 3 \times (a^2 - 2a + 1) + 1 =$
 $= 3a^2 - 6a + 3 + 1 = 3a^2 - 6a + 4$

10.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $D_g = \mathbb{R}$

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

Cálculo auxiliar

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

d) $D_i = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 1 = 0$ é uma equação impossível em \mathbb{R} .

e) $D_j = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x > 2$

f) $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0 \wedge x - 5 \neq 0\} = [-3, 5[\cup]5, +\infty[$

Cálculos auxiliares

$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

g) $D_l = \mathbb{R}$

h) $D_m = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

11. Opção (A)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -x + 3 \geq 0 \wedge x^2 - 16 \neq 0\} =]-\infty, 3] \setminus \{-4\}$

Cálculo auxiliar

$-x \geq -3 \wedge x^2 \neq 16 \Leftrightarrow x \leq 3 \wedge x \neq 4 \wedge x \neq -4$

12.

a) $D_f = \{-2, 0, 1, 2\}; D'_f = \{-6, 0, 3, 6\}$

b) 6

c) 1

d) $f(x) = 3x$

13. As representações gráficas II e III não são funções, pois há valores de x aos quais corresponde mais do que um valor de y . As representações gráficas I e IV são funções, pois a cada valor de x corresponde um e um só valor de y .

Relativamente ao gráfico I:

$D = \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e $D' = [-4, 2]$.

Relativamente ao gráfico IV:

$D =]-3, 3]$ e $D' =]-4, -1[\cup]1, 4]$.

14.

a) Pretende-se o valor da imagem por d do objeto 0,5, isto é, $d(0,5)$ que é 6.

Assim, ao fim de meia hora de caminhada os amigos estavam a 6 km de distância do destino.

b) Pretende-se t tal que $d(t) = 0$, logo $t = 4$.

Assim, a caminhada demorou 4 horas.

c) No início da caminhada (quando $t = 0$) o Pedro e os amigos encontravam-se em casa do Pedro, pretende-se, então, o valor da imagem por d do objeto 0, isto é, $d(0)$ que é 8. Assim, o local de destino encontra-se a 8 km de casa do Pedro.

d) Opção (C)

A opção (C) é a única que verifica simultaneamente $d(0) = 8$ e $d(2) = 0$.

15. $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$D_g = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Conjunto de chegada de f : $\{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

Conjunto de chegada de g : $\{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

$g(-1) = 3 \times (-1) = -3 = f(-1)$

$g(0) = 3 \times 0 = 0 = f(0)$

$g(1) = 3 \times 1 = 3 = f(1)$

$g(2) = 3 \times 2 = 6 = f(2)$

$g(3) = 3 \times 3 = 9 = f(3)$

Assim, as funções f e g têm o mesmo domínio, têm o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por f e por g . Logo, as funções f e g são iguais.

16.

a) $f(x) = 0$

$-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$

2 é o único zero de f .

b) $g(x) = 0$

$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são os únicos zeros de g .

c) $h(x) = 0$

$2x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$

$\sqrt[3]{-4}$ é o único zero de h .

d) $j(x) = 0$

$5x^4 + 10 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -2$

Equação impossível em \mathbb{R}

A função h não tem zeros.

17. Função f :

$D_f = [-3, +\infty[$

Zeros de f : -2 e 1

f é positiva em $[-3, -2[$ e em $]1, +\infty[$ e f é negativa em $]-2, 1[$.

Função g :

$D_g =]-4, 6[\setminus \{4\}$

Zeros de g : 0

g é negativa em $]-4, 0[$ e em $]0, 4[$ e g é positiva em $]4, 6[$.

18.

a) $D = [0, 90], D' = [37, 40]$

b) A temperatura encontrava-se a subir nos intervalos $[0, 20]$ e $[35, 40]$.

c) A temperatura começou a baixar às 16 h 50 min.

d) A temperatura máxima atingida foi 40 °C.

e) A temperatura esteve sem variar nos intervalos $[20, 35]$, $[40, 50]$ e $[60, 90]$ isto é, 15 minutos, depois 10 min e de seguida 30 minutos, num total de 55 minutos.

19. Por exemplo:

a) A função f é estritamente decrescente em $[-6, -4]$.

b) A função f é decrescente em sentido lato em $[-6, -1]$.

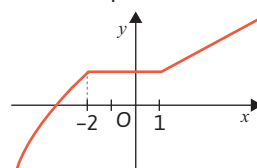
c) A função f é estritamente crescente em $[0, 3]$.

d) A função f é crescente em sentido lato em $[0, 6]$.

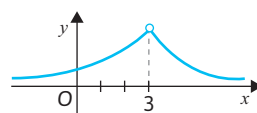
e) A função f é constante em $[-2, 0]$.

20. Por exemplo:

a)



b)



21.

a)

x	-4		-2		1		2
Varição de f	N.D.	↗	3	→	3	↗	5

f é estritamente crescente em $]-4, -2]$ e em $[1, 2]$; f é constante em $[-2, 1]$.

b)

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
Varição de g	↗	4	↘	0	↗	4	↘

g é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, 2]$; g é estritamente decrescente em $[-2, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

22.

-5 é mínimo absoluto de f em -6; 0,5 é mínimo relativo de f em -1; -2 é mínimo relativo de f em 3,5; 4 é máximo absoluto de f em -3; 2 é máximo relativo de f em 1; -1 é máximo relativo de f em 4.

23.

a)

As funções em que a imagem de a é um máximo relativo são f e h , uma vez que, nestas funções, existe pelo menos uma vizinhança r de a em que todos os objetos têm imagens inferiores a $f(a)$ e $h(a)$, respetivamente.

Quanto às funções g e i , qualquer vizinhança r de a admite objetos com imagens maiores do que $g(a)$ e $i(a)$, respetivamente.

b)

A função em que a imagem de a é um máximo absoluto é a função f , uma vez que, nesta função, qualquer elemento do seu domínio tem imagem inferior ou igual a $f(a)$.

A imagem de a não é máximo relativo para as funções g e i , logo também não é máximo absoluto.

Quanto à função h , apesar de a imagem de a ser um máximo relativo da função, não é um máximo absoluto, pois há elementos do domínio cujas imagens são superiores a $h(a)$.

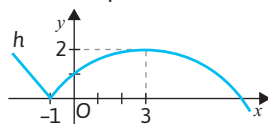
24. A. Afirmação falsa.

$h\left(-\frac{1}{2}\right) < h\left(\frac{1}{2}\right)$, logo h não é decrescente no seu domínio.

B. Afirmação verdadeira.

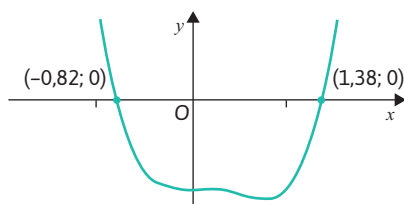
$D_h =]-1, 1[$, $D'_h =]-1, 1[$, h é decrescente em $]-1, 0[$ e em $]0, 1[$ e $h(0)$ não é extremo, logo h não tem extremos.

25. Por exemplo:



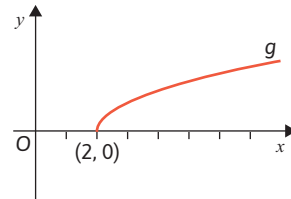
26.

a)



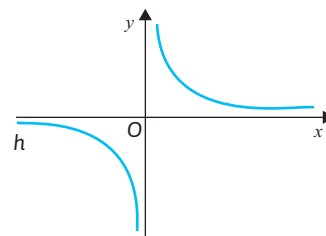
Os zeros da função f são -0,82 e 1,38 (aproximadamente).

b)



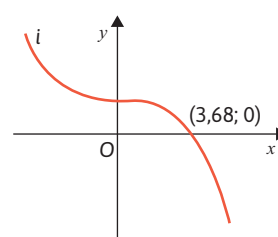
O zero da função g é 2.

c)



A função h não tem zeros.

d)

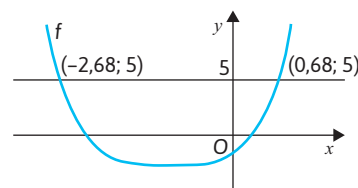


O zero da função i é 3,68 (aproximadamente).

27.

a)

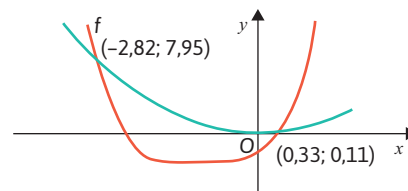
Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x) = 5$.



Os pontos pedidos são $(-2,7; 5)$ e $(0,7; 5)$.

b)

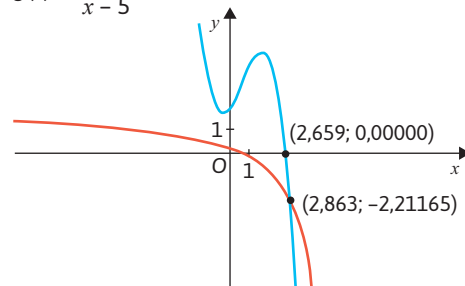
Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x) = x^2$.



Os pontos pedidos são $(-2,8; 7,9)$ e $(0,3; 0,1)$.

28. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x + 2$

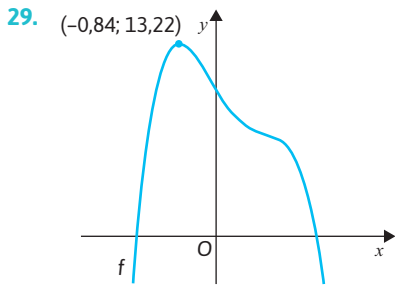
$$g(x) = \frac{2x - 1}{x - 5}$$



A(2,863; -2,212)

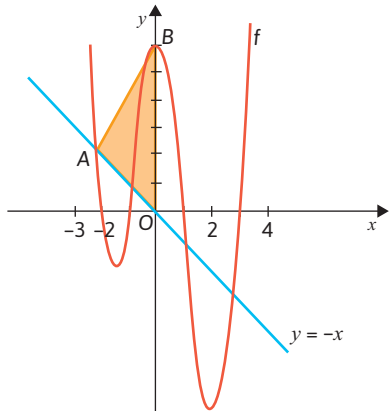
B(2,659; 0)

$$A = \frac{2,659 \times 2,211}{2} \approx 2,94 \text{ u.a.}$$



O valor máximo da função é, aproximadamente, 13,22, logo $a \approx 13,22$.

30. $y_1 = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
 $y_2 = -x$



$A(-2,12; 2,12)$

Seja $x_A = -2,12$.

$B(0, 6)$

Assim, a área do triângulo [OAB] é igual a $\frac{\overline{OB} \times |x_A|}{2}$.

Logo, $A \approx \frac{6 \times 2,12}{2} \approx 6,4$

31.

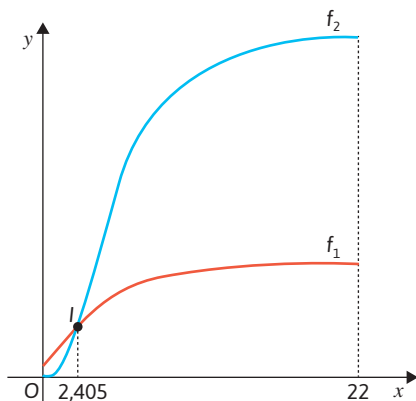
a) Temos que $S(0) = 1$ e $S(1) = \frac{22}{11,2}$, logo
 $\frac{S(1) - S(0)}{11,2} \times 100 \approx 96\%$

b) A equação que traduz o problema é $S(t + 2) = 3 S(t)$, $t \in [0, 22]$.

Usando x como variável independente:

$$f_1(x) = \frac{20(x+2)^3 + (x+2)\sqrt{x+2} + 1}{0,2(x+2)^3 + 10\sqrt{x+2} + 1}$$

$$f_2(x) = 3 \times \frac{20x^3 + x\sqrt{x} + 1}{0,2x^3 + 10\sqrt{x} + 1}$$



$t \approx 2,405$

$0,405 \times 60 \approx 24$

O instante a partir do qual, passadas duas horas, a área da mancha de crude triplicou foi às 2 horas e 24 minutos.

Aprende fazendo – páginas 76 a 83

1. Opção (D)

A correspondência I não é uma função de A em B, pois existe um elemento de A, 4, que não tem correspondente no conjunto B.

A correspondência IV também não é uma função de A em B, pois existem elementos de A, 1, por exemplo, que tem mais do que um elemento correspondente no conjunto B, -1 e -2.

2. A. Afirmação falsa, pois uma função é uma correspondência que a cada elemento do domínio faz corresponder um e um só elemento do conjunto de chegada.

B. Afirmação falsa, pois a dois objetos diferentes pode corresponder a mesma imagem, por exemplo, sendo $f(x) = x^2$, então $f(1) = f(-1) = 1$.

C. Afirmação verdadeira.

D. Afirmação falsa, pois o contradomínio é um subconjunto do conjunto de chegada que pode não coincidir com ele.

3. Opção (C)

Os gráficos I e IV não representam funções reais de variável real porque contêm valores de x aos quais corresponde mais do que um valor de y . Assim, apenas os gráficos II e III representam funções reais de variável real.

4. Opção (B)

O perímetro do quadrado é dado pela expressão $p = 4\ell$, onde ℓ representa a medida do comprimento do seu lado. Assim, $\ell = \frac{p}{4}$. A área do quadrado é dada por $A = \ell^2$. Substituindo ℓ nesta expressão, obtém-se a função que relaciona a área de um quadrado com o seu perímetro:

$$A(p) = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

5. Opção (B)

$$D_f =]-3, 6] \text{ e } D'_f = [-3, 3]$$

6. Opção (B)

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \geq 0 \wedge x \neq 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 0\right\} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[\right.$$

7.

a) $D_f = [-5, 6[$

$$D'_f =]-6, 6]$$

Os zeros de f são -5 e -2.

A função f é positiva em $] -5, -2[$ e em $]0, 6[$, e é negativa em $] -2, 0[$.

b) $D_g =]-\infty, 6[$

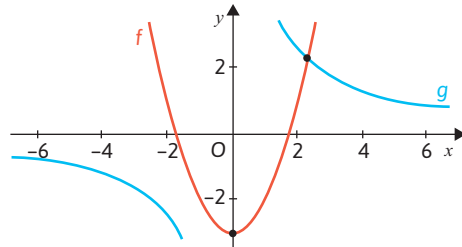
$$D'_g = [-6, +\infty[$$

Os zeros de g são -5 e 4.

A função g é positiva em $]-\infty, -5[$ e em $[4, 6]$, e é negativa em $]-5, 4[$.

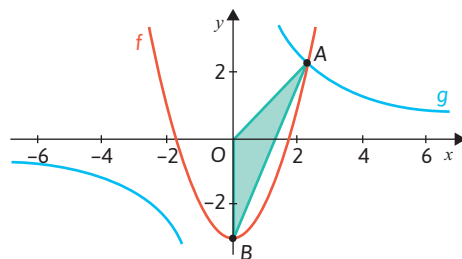
- c) $D_h = \mathbb{R}$
 $D'_h =]-\infty, 4[$
 Os zeros de h são $-6, -5$ e 3 .
 A função h é positiva em $]-6, -5[$ e em $]3, +\infty[$, e é negativa em $]-\infty, -6[$ e em $]-5, 3[$.

8.1



$A(2,28; 2,19)$

8.2



$A(2,28; 2,19)$

$B(0, -3)$

$$A_{[OAB]} = \frac{3 \times |\text{abscissa de A}|}{2} = \frac{3 \times 2,28}{2} \approx 3,4 \text{ u.a.}$$

9.

- a) Opção (B)
 $\text{Volume} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times 2r = \frac{2}{3} \pi r^3$
- b) Opção (C)
 Seja x a altura do cone e r o raio da base do cone.
 Como $x = 2r$ vem que $r = \frac{x}{2}$.
 $\text{Volume} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \pi \times r^2 \times x =$
 $= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times x = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{x^2}{4} \times x = \frac{1}{12} \pi x^3$

10. Opção (C)
 $f(2a) = 2a + a = (a + a) + a = f(a) + a$

11.

- a) $D_f = \mathbb{R}$
 b) $D_g = \mathbb{R}$
 c) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 d) $D_i = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Cálculo auxiliar
 $3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

- e) $D_j = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \geq 0\} = [3, +\infty[$

Cálculo auxiliar
 $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

- f) $D_k = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x > 0\} =]-\infty, 3[$

Cálculo auxiliar
 $3 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$

- g) $D_l = \mathbb{R}$
 h) $D_m = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
12. Opção (B)
 $D_n = \{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\} =]-4, -1[\cup]1, +\infty[$

13.

- a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[$
 b) $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 0]$
 c) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-3, 1,5[$
 d) $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x \in [-7, -3] \cup [1, 4]$
 e) $f(x) = -4 \Leftrightarrow x = -5$
 f) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 0$
 g) $f(x) = -3 \Leftrightarrow x \in [2,5; 4] \cup \{-6, -3\}$

14.

- a) A função f tem máximo absoluto 5 em $x = 4$ e tem mínimo absoluto -4 em $x = 0$; tem máximos relativos 3 em $x = -4$ e 5 em $x = 4$ e tem mínimos relativos 0 em $x = -6$ e em $x = 6$, e -4 em $x = 0$.
 A função g tem máximo absoluto 5 em $x = 0$.
 A função h tem máximo absoluto 6 em $x = 0$ e tem mínimo absoluto -4 em $x = 7$ e em $x \in [1, 3]$; tem máximos relativos 6 em $x = 0$ e 0 em $x = 5$, e tem mínimos relativos -4 em $x = 7$ e em $x \in [1, 3]$, e 3 em $x = -5$.

x	-6	-4	0	4	6				
Varição de f	0	↗	3	↘	-4	↗	5	↘	0

A função f é crescente em $[-6, -4]$ e em $[0, 4]$ e é decrescente em $[-4, 0]$ e em $[4, 6]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Varição de g	↗	5	↘

A função g é crescente em $]-\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty[$.

x	-5	0	2	3	5	7					
Varição de f	3	↗	6	↘	-4	→	-4	↗	0	↘	-4

A função h é crescente em $[-5, 0]$ e em $[3, 5]$, é decrescente em $[0, 2]$ e em $[5, 7]$ e é constante em $[2, 3]$.

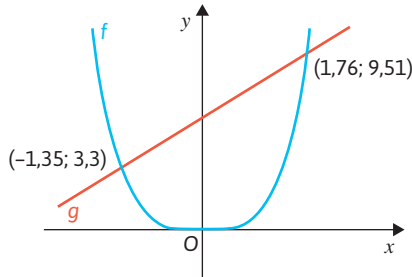
- c) A função f é negativa e estritamente crescente em $]0, 2[$, por exemplo.
15. Opção (A)
 A função f não tem mínimo relativo em a , pois a não é um elemento do domínio da função.
 A função g tem mínimo relativo em a , pois existe pelo menos uma vizinhança r de a em que todos os objetos têm imagens superiores a $g(a)$.
 A função h não tem mínimo relativo em a , pois qualquer vizinhança r de a admite objetos com imagens menores do que $h(a)$.

A função i tem mínimo relativo em a , pois existe pelo menos uma vizinhança r de a em que todos os objetos têm imagens superiores a $i(a)$. Assim, apenas as funções g e i têm mínimo relativo em a .

16. Opção (C)

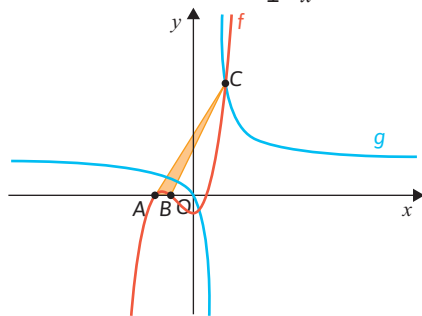
Para que $f(x) = k$ tenha três soluções, k tem de pertencer ao conjunto $[2, 3]$.

17. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^4 \leq 2x + 6$



Logo, $a \approx -1,35$ e $b \approx 1,76$.

18. Representemos graficamente, com recurso à calculadora gráfica, as funções f e g definidas por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ e $g(x) = \frac{-2x}{1-x}$.



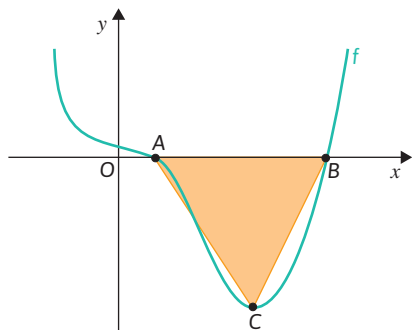
$A(-1,62; 0)$ $B(-1; 0)$ $C(1,46; 6,36)$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \text{ordenada de } C}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{0,62 \times 6,36}{2} \approx 1,97 \text{ u.a.}$$

19. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3$

Janela utilizada: $[-5, 5] \times [-40, 40]$



$A(1,13; 0)$ $B(4,53; 0)$ $C(3,46; -36,85)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |y_C|}{2}$$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{3,4 \times 36,85}{2} \approx 62,6 \text{ u.a.}$$

20. Opção (A)

A afirmação $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) - g(x) = 0$, é equivalente à afirmação $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = g(x)$, que é verdadeira, pois os gráficos das funções f e g interseccionam-se em dois pontos.

A afirmação $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > g(x)$ é verdadeira, pois, por observação do gráfico, verifica-se que qualquer valor real x positivo tem imagem pela função f superior à sua imagem pela função g .

21. Opção (C)

Se a função g é par e o ponto $P(a, b)$ pertence ao seu gráfico, então o ponto de coordenadas $(-a, b)$ também pertence ao gráfico de g . Logo, o ponto $(-a, -b)$ não pode pertencer ao gráfico de g , caso contrário, ao objeto a corresponderiam duas imagens diferentes, b e $-b$, e g não seria uma função.

22. $D_h = D_f \cap \{x: x \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assim, na opção I não pode estar representado o gráfico de h , já que, nesta opção, $h(0) = -1$.

Para $x \in]1, +\infty[$, $f(x) > 0$ e $x > 0$.

Logo, para $x \in]1, +\infty[$, tem-se que $\frac{f(x)}{x} > 0$, ou seja, para $x \in]1, +\infty[$, $h(x) > 0$, o que exclui a representação gráfica da opção II.

Sabemos que a função f é ímpar, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, h(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = h(x)$$

Logo, a função h é par, o que exclui a representação gráfica da opção III, onde o gráfico da função não apresenta uma simetria em relação ao eixo Oy .

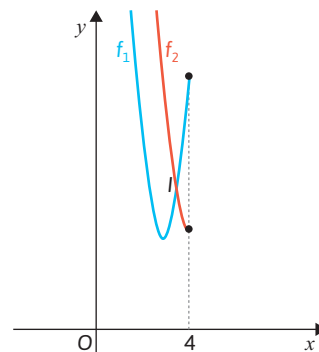
23. De acordo com o enunciado, sabe-se que, uma hora após o instante t_0 , $t_0 \in [0, 4]$, o número de bactérias presente no depósito aumentou 10%, ou seja, para $t_0 \in [0, 4]$:

$$\begin{aligned} N(t_0 + 1) &= N(t_0) + N(t_0) \times 0,10 \\ \Leftrightarrow N(t_0 + 1) &= N(t_0) \times 1,10 \\ \Leftrightarrow (t_0 + 1 + 4)^2 (t_0 + 1 - 14) + 96(t_0 + 1) + 260 &= \\ &= ((t_0 + 4)^2 (t_0 - 14) + 96t_0 + 260) \times 1,10 \\ \Leftrightarrow (t_0 + 5)^2 (t_0 - 13) + 96(t_0 + 1) + 260 &= \\ &= ((t_0 + 4)^2 (t_0 - 14) + 96t_0 + 260) \times 1,10 \end{aligned}$$

Usando a letra x como variável independente e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = (x + 5)^2 (x - 13) + 96(x + 1) + 260 \text{ e}$$

$$f_2(x) = ((x + 4)^2 (x - 14) + 96x + 260) \times 1,10$$



$I(3,52; 5,78)$

Assim, $t_0 \approx 3,52$. Logo, o número de bactérias nesse instante é, aproximadamente:
 $N(3,52) = (3,52 + 4)^2 (3,52 - 14) + 96 \times 3,52 + 260 \approx 5,3$
 O número de bactérias no instante t_0 é, aproximadamente, 5,3 milhões.

Capítulo 2 – Funções polinomiais de grau não superior a 2 – páginas 84 a 114

1.

- a) $y = 2x + 5 \rightarrow$ o declive é 2 e a ordenada na origem é 5.
- b) $y = x - 1 \rightarrow$ o declive é 1 e a ordenada na origem é -1.
- c) $y = -\frac{1}{3}x \rightarrow$ o declive é $-\frac{1}{3}$ e a ordenada na origem é 0.
- d) $y = 4 \rightarrow$ o declive é 0 e a ordenada na origem é 4.

2.

- a) $f(x) = 3x - 6$
 $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
 A função f tem um zero: 2
 Como f é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive positivo, então f é estritamente crescente. Assim, f é negativa em $]-\infty, 2[$ e é positiva em $]2, +\infty[$.

- b) $g(x) = -4x - 2$
 $-4x - 2 = 0 \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
 A função g tem um zero: $-\frac{1}{2}$
 Como g é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive negativo, então g é estritamente decrescente. Assim, g é positiva em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ e é negativa em $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

- c) $h(x) = x$
 A função h tem um zero: 0
 Como h é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive positivo, então h é estritamente crescente. Assim, h é negativa em $]-\infty, 0[$ e é positiva em $]0, +\infty[$.

- d) $i(x) = -5$
 A função i não tem zeros. A função i é uma função constante e é negativa em \mathbb{R} .

3.

- a) Seja $f(x) = ax + b$. Como se pretende que f seja uma função estritamente decrescente, então $a < 0$, por exemplo, $a = -1$. Assim, $f(x) = -x + b$. Uma vez que $f(2) = 0$, então $0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$. Logo, $f(x) = -x + 2$, por exemplo.

- b) Seja $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 4$, então $4 = 0 + b \Leftrightarrow b = 4$. Logo, $f(x) = ax + 4$. Para que f seja positiva em $]-\frac{1}{3}, +\infty[$, o declive da reta que a representa tem de ser positivo e a função tem de ter um zero em $-\frac{1}{3}$. Assim, $f(-\frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow a \times (-\frac{1}{3}) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -a + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 12$$

Logo, $f(x) = 12x + 4$.

4.

- a) Como o reservatório de gasolina tem 40 litros de capacidade e são consumidos, em média, 9,5 ℓ por cada 100 km, tendo percorrido 100 km devem estar no depósito 30,5 litros ($40 - 9,5 = 30,5$).

- b) Como o reservatório de gasolina tem 40 litros de capacidade e são consumidos, em média, 9,5 ℓ por cada 100 km, tendo percorrido x km devem estar no depósito $40 - \frac{9,5}{100}x$ litros. Assim, sendo f a função que dá a quantidade de litros de combustível existentes no depósito após x quilómetros percorridos, f pode ser definida por $f(x) = -\frac{9,5}{100}x + 40$.

- c) $f(175) = 40 - \frac{9,5}{100} \times 175 = 23,375$
 Depois de percorrer 175 km estão 23,375 litros de gasolina no depósito.

- d) Pretende-se calcular x tal que $f(x) = 0$.
 $40 - \frac{9,5}{100}x = 0 \Leftrightarrow \frac{9,5}{100}x = 40$
 $\Leftrightarrow x = \frac{40 \times 100}{9,5}$
 $\Leftrightarrow x = 421,052\ 6316$

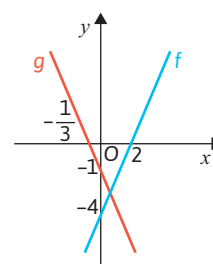
Assim, o depósito fica vazio depois de percorrer aproximadamente 421 km.

5.

- $f(x) = 2x - 8$ $g(x) = -5x + 1$
- a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$
- b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$
- c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 8 = -5x + 1 \Leftrightarrow 7x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{7}$
- d) $f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 4[$
- e) $g(x) \geq 3 \Leftrightarrow -5x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow -5x \geq 2 \Leftrightarrow 5x \leq -2$
 $\Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{2}{5}]$

6.

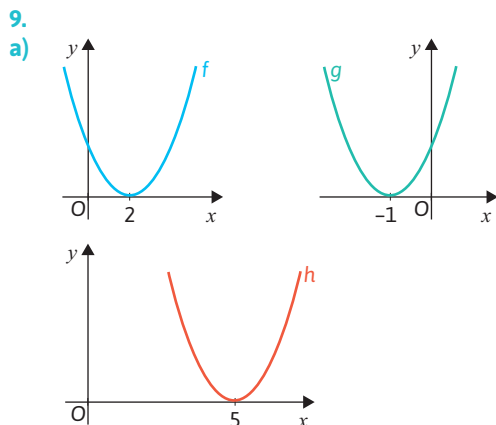
a)



- b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
 Logo, $A(2, 0)$.
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$
 Logo, $B(-\frac{1}{3}, 0)$.
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = -3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$
 $f(\frac{3}{5}) = 2 \times \frac{3}{5} - 4 = \frac{6}{5} - 4 = -\frac{14}{5}$.
 Logo, $C(\frac{3}{5}, -\frac{14}{5})$.

$$\text{Assim, } A_{\Delta[ABC]} = \frac{(\frac{1}{3} + 2) \times \frac{14}{5}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \times \frac{14}{5}}{2} = \frac{7 \times 14}{3 \times 5 \times 2} = \frac{49}{15} \text{ u.a.}$$

7.
 a) Substituir, no programa, a por 3 e b por 15.
 b) Por exemplo, $a = 2$ e $b = -8$.
 c) Por exemplo, $a = 0$ e $b = 3$.
8. As coordenadas do ponto A são $(3, f(3))$, as de B são $B(-3, f(-3))$ e as de C são $C(0, f(3))$. Como $f(x) = x^2$, temos que $A(3, 9)$, $B(-3, 9)$ e $C(0, 9)$.
 Assim, a área do triângulo $[OBC]$ é igual a $\frac{\overline{BC} \times \overline{OC}}{2}$,
 ou seja, $A = \frac{3 \times 9}{2} = \frac{27}{2}$.

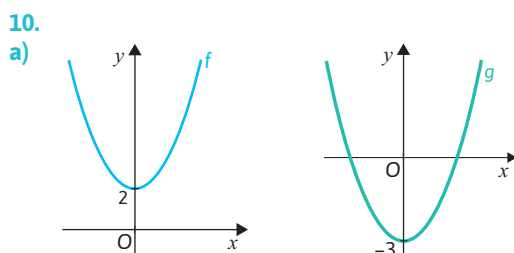


- b) **Função f**
 i. Vértice da parábola: $(2, 0)$; eixo de simetria $x = 2$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_f = \mathbb{R}$
 iv. $D'_f = \mathbb{R}_0^+$
 v. Zeros: 2

- Função g**
 i. Vértice da parábola: $(-1, 0)$; eixo de simetria $x = -1$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_g = \mathbb{R}$
 iv. $D'_g = \mathbb{R}_0^+$
 v. Zeros: -1

- Função h**
 i. Vértice da parábola: $(5, 0)$; eixo de simetria $x = 5$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_h = \mathbb{R}$
 iv. $D'_h = \mathbb{R}_0^+$
 v. Zeros: 5

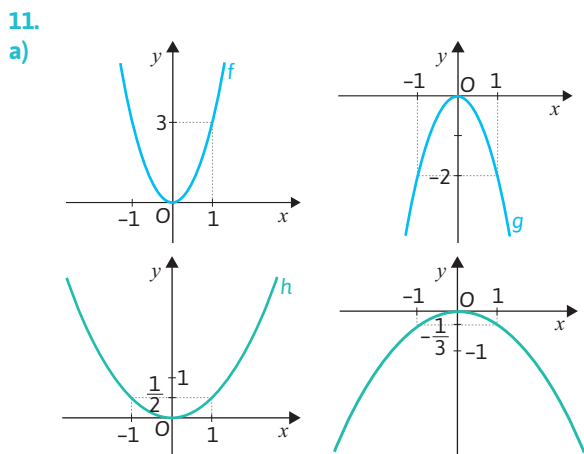
- c) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$.
 g é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.
 h é estritamente decrescente em $]-\infty, 5]$ e estritamente crescente em $[5, +\infty[$.



- b) **Função f**
 i. Vértice da parábola: $(0, 2)$; eixo de simetria $x = 0$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_f = \mathbb{R}$
 iv. $D'_f = [2, +\infty[$
 v. Zeros: não tem.

- Função g**
 i. Vértice da parábola: $(0, -3)$; eixo de simetria $x = 0$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_g = \mathbb{R}$
 iv. $D'_g = [-3, +\infty[$
 v. Zeros: $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

- c) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
 g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.



- b) **Função f**
 i. Vértice da parábola: $(0, 0)$; eixo de simetria $x = 0$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_f = \mathbb{R}$
 iv. $D'_f = \mathbb{R}_0^+$
 v. Zeros: 0

- Função g**
 i. Vértice da parábola: $(0, 0)$; eixo de simetria $x = 0$.
 ii. Concavidade voltada para baixo.
 iii. $D_g = \mathbb{R}$
 iv. $D'_g = \mathbb{R}_0^-$
 v. Zeros: 0

- Função h**
 i. Vértice da parábola: $(0, 0)$; eixo de simetria $x = 0$.
 ii. Concavidade voltada para cima.
 iii. $D_h = \mathbb{R}$
 iv. $D'_h = \mathbb{R}_0^+$
 v. Zeros: 0

- Função i**
 i. Vértice da parábola: $(0, 0)$; eixo de simetria $x = 0$.
 ii. Concavidade voltada para baixo.
 iii. $D_i = \mathbb{R}$
 iv. $D'_i = \mathbb{R}_0^-$
 v. Zeros: 0

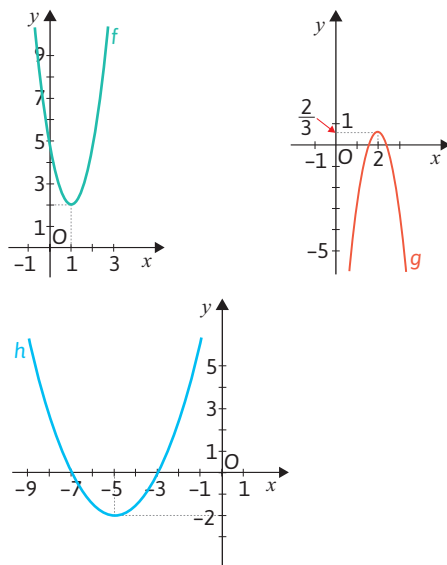
- c) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
 g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.
 h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
 i é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

12.

- a) Como f é da forma $f(x) = ax^2$ e o ponto de coordenadas $(1, 3)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se que $f(1) = 3$. Ou seja, $a \times 1^2 = 3 \Leftrightarrow a = 3$.
 Assim, a função f pode ser definida por $f(x) = 3x^2$.
- b) Como f é da forma $f(x) = ax^2$ e o ponto de coordenadas $(2, -2)$ pertence ao gráfico da função f , tem-se que $f(2) = -2$. Ou seja, $a \times 2^2 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{4}$
 $\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.
 Assim, a função f pode ser definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

13.

a)



b) **Função f**

- i. $V(1, 2); x = 1$
- ii. Concavidade voltada para cima.
- iii. $D = \mathbb{R}$
- iv. $D' = [2, +\infty[$
- v. Não tem zeros.

Função g

- i. $V\left(2, \frac{2}{3}\right); x = 2$
- ii. Concavidade voltada para baixo.
- iii. $D = \mathbb{R}$
- iv. $D' =]-\infty, \frac{2}{3}]$
- v. Dois zeros: $2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $2 + \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Função h

- i. $V(-5, -2); x = -5$
- ii. Concavidade voltada para cima.
- iii. $D = \mathbb{R}$
- iv. $D' = [-2, +\infty[$
- v. Dois zeros: -7 e -3 .

- c) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$.
 g é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente decrescente em $[2, +\infty[$.
 h é estritamente decrescente em $]-\infty, -5]$ e estritamente crescente em $[-5, +\infty[$.

14.

- a) $f(x) = a(x - h)^2 + k$
 Como o vértice da parábola que representa a função tem coordenadas $(1, 5)$, então $f(x) = a(x - 1)^2 + 5$. Como o gráfico da função contém o ponto de coordenadas $(-1, 3)$, então:
 $f(-1) = 3 \Leftrightarrow a(-1 - 1)^2 + 5 = 3 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$
 Logo, $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 5$.
- b) $f(x) = a(x - h)^2 + k$
 Como o contradomínio da função é $[4, +\infty[$, então $f(x) = a(x - h)^2 + 4$. Uma vez que o eixo de simetria da parábola que representa a função é $x = -2$, então $f(x) = a(x + 2)^2 + 4$. O gráfico da função interseca o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 8)$, então:
 $f(0) = 8 \Leftrightarrow a(0 + 2)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$
 Logo, $f(x) = (x + 2)^2 + 4$.

15.

- a) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
- b) $x^2 + 8x + 10 = x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 10 =$
 $= (x^2 + 8x + 4^2) - 16 + 10 =$
 $= (x + 4)^2 - 6$
- c) $x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 =$
 $= \left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \frac{9}{4} + 1 =$
 $= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$
- d) $2x^2 + 2x = 2(x^2 + x) = 2\left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) =$
 $= 2\left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2 \times \frac{1}{4} =$
 $= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$
- e) $5x^2 - 20x + 22 = 5(x^2 - 4x) + 22 =$
 $= 5(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 22 =$
 $= 5(x^2 - 4x + 2^2) - 5 \times 4 + 22 =$
 $= 5(x - 2)^2 + 2$
- f) $-x^2 - 12x + 7 = -(x^2 + 12x) + 7 =$
 $= -(x^2 + 12x + 6^2 - 6^2) + 7 =$
 $= -(x^2 + 12x + 6^2) - 1 \times (-6^2) + 7 =$
 $= -(x + 6)^2 + 36 + 7 =$
 $= -(x + 6)^2 + 43$

16.

- a) $f(x) = 6 - 2(x + 1)^2 = -2(x + 1)^2 + 6$
 Vértice: $(-1, 6)$
- b) $f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
 Vértice: $(5, 0)$

- c) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
 Abcissa do vértice = $\frac{-(-6)}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$
 Ordenada do vértice: $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$
 Vértice: (3, -1)
- d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$
 Abcissa do vértice = $\frac{-(-10)}{2 \times 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
 Ordenada do vértice: $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10 \times \frac{5}{2} + 12 = \frac{25}{2} - 25 + 12 = -\frac{1}{2}$
 Vértice: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- e) $f(x) = -x^2 - x - \frac{9}{4}$
 Abcissa do vértice: $\frac{-(-1)}{2 \times (-1)} = -\frac{1}{2}$
 Ordenada do vértice: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = -2$
 Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

17.

- a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2(x+1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 3$
 $\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3} \vee x+1 = -\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \vee x = -1 - \sqrt{3}$
 Os zeros de f são $-1 + \sqrt{3}$ e $-1 - \sqrt{3}$.

- b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x-5 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 5$

O zero de f é 5.

- c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$
 Os zeros de f são 2 e 4.

- d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$

Os zeros de f são 2 e 3.

- e) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x - \frac{9}{4} = 0$
 $\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 144}}{8}$

Equação impossível em \mathbb{R} .

A função f não tem zeos.

18. Opção (D)

O gráfico da função definida por $f(x) + 3$ obtém-se do gráfico da função f deslocando-o 3 unidades para cima, o que significa que nada se pode afirmar acerca dos zeros desta função.

O gráfico da função definida por $f(x) - 3$ obtém-se do gráfico da função f deslocando-o 3 unidades para baixo, o que significa que também nada se pode afirmar acerca dos zeros desta função.

O gráfico da função definida por $f(x - 3)$ obtém-se do gráfico da função f deslocando-o 3 unidades para a direita, o que significa que esta função tem um zero no intervalo [1, 6], mas nada se pode concluir acerca da existência de zeros no intervalo [-5, 0].

O gráfico da função definida por $f(x + 3)$ obtém-se do gráfico da função f deslocando-o 3 unidades para a esquerda, o que significa que esta função tem, necessariamente, um zero no intervalo [-5, 0].

19.

- a) $f(x) = 3x^2 - 18$
 $3x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$
 Os zeros de f são $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$.

- b) $f(x) = 2x^2 + 1$
 $2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$
 Equação impossível em \mathbb{R}
 A função f não tem zeros.

- c) $f(x) = 2(x+1)^2$
 $2(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x+1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$
 A função f tem apenas um zero: -1

- d) $f(x) = -4x^2 + 2x$
 $-4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-4x + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee -4x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$
 Os zeros de f são 0 e $\frac{1}{2}$.

- e) $f(x) = x^2 - 10x$
 $x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x - 10) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 10 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$

Os zeros de f são 0 e 10.

- f) $f(x) = x^2 - 10x + 25$
 $x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 5$

A função f tem apenas um zero: 5

- g) $f(x) = 2x^2 + 20x + 2$
 $2x^2 + 20x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{96}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-10 + 4\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{-10 - 4\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = -5 + 2\sqrt{6} \vee x = -5 - 2\sqrt{6}$$

Os zeros de f são $-5 + 2\sqrt{6}$ e $-5 - 2\sqrt{6}$.

h) $f(x) = 2x^2 - 13x + 15$

$$2x^2 - 13x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 2 \times 15}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13 + 7}{4} \vee x = \frac{13 - 7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = \frac{3}{2}$$

Os zeros de f são $\frac{3}{2}$ e 5.

20. Para que a função f definida por $f(x) = x^2 + kx + k$ tenha apenas um zero, a equação $x^2 + kx + k = 0$ tem de ter apenas uma solução, ou seja, $\Delta = 0$:

$$k^2 - 4 \times 1 \times k = 0 \Leftrightarrow k(k - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 4$$

21. Para que a função f definida por $f(x) = x^2 - px - 5$ tenha dois zeros distintos, a equação $x^2 - px - 5 = 0$ tem de ter duas soluções distintas, ou seja, $\Delta > 0$:

$$(-p)^2 - 4 \times 1 \times (-5) > 0 \Leftrightarrow p^2 + 20 > 0 \Leftrightarrow p^2 > -20$$

que é uma condição universal em \mathbb{R} . Assim, qualquer que seja o valor de p , a função f tem dois zeros distintos.

22.

```

print("Número de zeros de uma função quadrática da forma y=ax2+bx+c")
a=3
b=6
c=3
delta=b**2-4*a*c
if delta<0:
    print("Não tem zeros.")
elif delta==0:
    print("Tem apenas um zero.")
else:
    print("Tem dois zeros.")
    
```

Número de zeros de uma função quadrática da forma $y=ax^2+bx+c$
Tem apenas um zero.

23. $f(x) = -2x^2 + 3x + k$

Para que a função f não tenha zeros, então $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4 \times (-2) \times k < 0 \Leftrightarrow 9 + 8k < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{9}{8}$$

24.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

A parábola que representa a função f tem concavidade voltada para baixo. A função f é positiva em $]2, 3[$ e é negativa em $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 4)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 3$

$$\Leftrightarrow x - 4 = \sqrt{3} \vee x - 4 = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{3} \vee x = 4 - \sqrt{3}$$

A parábola que representa a função g tem concavidade voltada para cima. A função g é positiva em $]-\infty, 4 - \sqrt{3}[\cup]4 + \sqrt{3}, +\infty[$ e é negativa em $]4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}[$.

25. Uma vez que 1 é um zero da função f e as imagens de 0 e 8 são ambas negativas, então a parábola que representa a função tem a concavidade voltada para baixo e o outro zero da função é 7. Assim, a função é positiva em $]1, 7[$ e é negativa em $]-\infty, 1[\cup]7, +\infty[$.

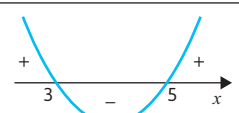
26.

a) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 2}{2}$$

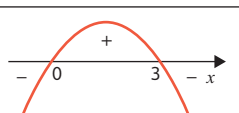
$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 3$$


C.S. = $[3, 5]$

b) $3x - x^2 < 0$

Cálculo auxiliar

$$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$


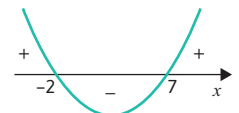
C.S. = $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

c) $x^2 - 5x < 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 < 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 9}{2}$$

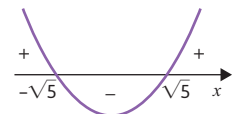
$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -2$$


C.S. = $]2, 7[$

d) $x^2 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$


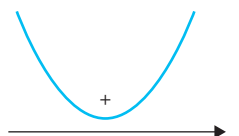
C.S. = $]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$

e) $2x^2 + 3x + 4 > 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .



C.S. = \mathbb{R}

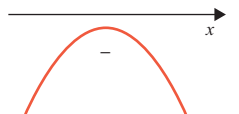
f) $-2x^2 - 3x - 4 > 0$

Cálculo auxiliar

$$-2x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .



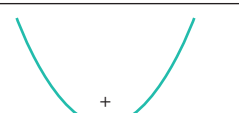
C.S. = \emptyset

g) $x^2 \leq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Cálculo auxiliar

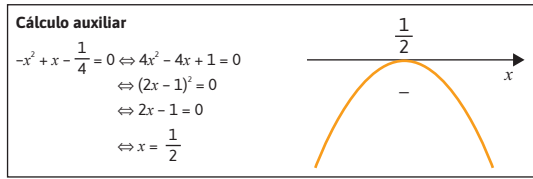
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$


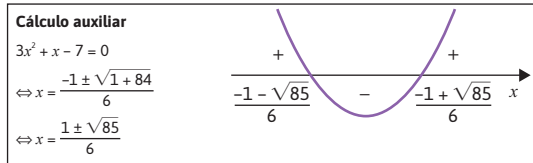
C.S. = $\{1\}$

h) $-x(x-1) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -x^2 + x - \frac{1}{4} < 0$



C.S. = $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

i) $2(x-1)(x+2) - 3 < -x^2 + x \Leftrightarrow 2(x^2 + x - 2) - 3 + x^2 - x < 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 - 3 + x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 7 < 0$



C.S. = $\left] \frac{-1 - \sqrt{85}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{85}}{6} \right[$

27. $h(t) = 16 + 6t - t^2$

a) $h(0) = 16 + 6 \times 0 - 0^2 = 16$

A distância da varanda ao chão é 16 metros.

b) $h(t) = 0 \Leftrightarrow 16 + 6t - t^2 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 6t + 16 = 0$
 $\Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{-2}$
 $\Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm 10}{-2}$
 $\Leftrightarrow t = 8 \vee t = -2$

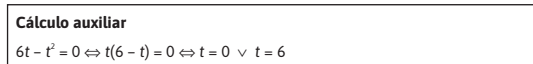
O foguete chega ao chão ao fim de 8 segundos.

c) Abcissa do vértice: $\frac{-6}{2 \times (-1)} = 3$

Ordenada do vértice: $h(3) = 16 + 6 \times 3 - 3^2 = 16 + 18 - 9 = 25$

O foguete atingiu a altura máxima 3 segundos após ter sido lançado. A altura máxima atingida foi 25 metros.

d) $h(t) > 16 \Leftrightarrow 16 + 6t - t^2 > 16 \Leftrightarrow 6t - t^2 > 0 \Leftrightarrow t \in]0, 6[$



O foguete esteve dos 16 metros durante 6 segundos.

28. Opção (C)

Opção (A): $-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

Abcissa do vértice: $\frac{0+8}{2} = 4$

Ordenada do vértice: $-4^2 + 8 \times 4 = -16 + 32 = 16 \neq 12$ (altura máxima)

Opção (B): $-\frac{3}{8}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(-x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

Abcissa do vértice: $\frac{0+8}{2} = 4$

Ordenada do vértice: $-\frac{3}{8} \times 4^2 + 3 \times 4 = -6 + 12 = 6 \neq 12$ (altura máxima)

Opção (C): $-\frac{3}{4}x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(-x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

Abcissa do vértice: $\frac{0+8}{2} = 4$

Ordenada do vértice: $-\frac{3}{8} \times 4^2 + 6 \times 4 = -12 + 24 = 12$ (altura máxima)

29.

a) O número de peças que torna o lucro nulo é 100 ($300 - 200 = 100$) e 500 ($300 + 200 = 500$) peças.

b) Os valores de x que tornam o lucro negativo são os pertencentes a $[0, 100[\cup]500, 600]$.

c) $L(x) = a(x-300)^2 + 800$

$L(0) = -1000 \Leftrightarrow a \times 300^2 + 800 = -1000$

$\Leftrightarrow 90\,000a = -1800$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{50}$

Logo, $L(x) = -\frac{1}{50}(x-300)^2 + 800$

d) $L(200) = -\frac{1}{50}(200-300)^2 + 800 = -\frac{10\,000}{50} + 800 = 600$

Quando se vendem 200 peças obtém-se um lucro de 600 euros.

e) $L(x) = 35 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}(x-300)^2 + 800 = 350$

$\Leftrightarrow \frac{1}{50}(x-300)^2 = 450$

$\Leftrightarrow (x-300)^2 = 22\,500$

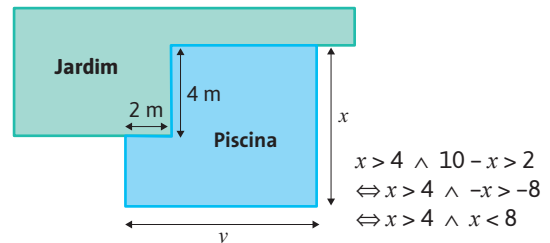
$\Leftrightarrow x-300 = 150 \vee x-300 = -150$

$\Leftrightarrow x = 450 \vee x = 150$

Para que o lucro seja 350 euros devem ser vendidas 450 peças ou 150 peças.

30.

a)



Seja P o perímetro da piscina.

$P = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20$

$\Leftrightarrow x + y = 10$

$\Leftrightarrow y = 10 - x$

Seja $A(x)$ a expressão da área da piscina em função de x :

$A(x) = x(10 - x) - 2 \times 4 =$

$= 10x - x^2 - 8 =$

$= -x^2 + 10x - 8, 4 < x < 8$

b) $A(x) = -x^2 + 10x - 8 =$

$= -(x^2 - 10x) - 8 =$

$= -(x^2 - 10x + 25) - 8 + 25 =$

$= -(x-5)^2 + 17$

O vértice da parábola definida por $A(x) = -x^2 + 10x - 8$ tem coordenadas (5, 17).

Logo, a área da piscina é máxima para $x = 5$ e o seu valor é 17.

c) Para $4 < x < 8$:

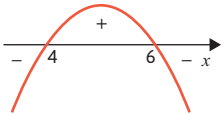
$$\begin{aligned} A(x) > 16 &\Leftrightarrow -x^2 + 10x - 8 > 16 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 10x - 24 > 0 \\ &\Leftrightarrow 4 < x < 6 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times (-1) \times (-24)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm 2}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 4$$


C.S. =]4, 6[

31.

a) $A(x) = \frac{\overline{AB} + \overline{QP}}{2} \times \overline{AQ}$

Cálculo auxiliar

A(2, 10)
 B(2, 3) $y_b = 2 + 1 = 3$
 Q(x, 10)
 P(x, x + 1)
 Assim:
 $\overline{AB} = 10 - 3 = 7$
 $\overline{QP} = 10 - (x + 1) = 9 - x$
 $\overline{AQ} = x - 2$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{7 + (9 - x)}{2} \times (x - 2) = \\ &= \left(\frac{16 - x}{2}\right) \times (x - 2) = \\ &= 8x - 16 - \frac{x^2}{2} + x = \\ &= -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

b) Pretende-se os valores de $x \in]2, 9[$ tais que

$$\begin{aligned} A(x) > 12. \\ -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 > 12 \\ \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 9x - 28 > 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 18x - 56 > 0 \end{aligned}$$

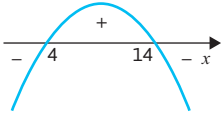
Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 18x - 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times (-1) \times (-56)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{100}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-18 + 10}{-2} \vee x = \frac{-18 - 10}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 14$$


Assim, os valores de x que satisfazem o pretendido são os valores de x que pertencem ao conjunto $]4, 14[\cap]2, 9[$, isto é, $x \in]4, 9[$.

c) Opção (B)

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 = -\frac{1}{2}(x^2 - 18x) - 16 = \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 18x + 9^2 - 9^2) - 16 = \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 18x + 9^2) - 9^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 16 = \\ &= -\frac{1}{2}(x - 9)^2 + \frac{81}{2} - 16 = \\ &= -\frac{1}{2}(x - 9)^2 + \frac{49}{2} \end{aligned}$$

Assim, $a = -\frac{1}{2}$, $h = 9$ e $k = \frac{49}{2}$.

32. Seja $y = x + k$ a equação da reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Pretendemos que a equação $x^2 - 2x = x + k$ tenha exatamente uma solução.

$x^2 - 2x = x + k \Leftrightarrow x^2 - 2x - x - k = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - k = 0$
 A equação $x^2 - 3x - k = 0$ tem exatamente uma solução se $\Delta = 0$:

$$9 - 4 \times 1 \times (-k) = 0 \Leftrightarrow 9 + 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = -9 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{4}$$

Determinemos agora a interseção da reta e da parábola:

$$\begin{cases} y = x - \frac{9}{4} \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = x - \frac{9}{4} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 4 \times 9}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12 \pm 0}{8} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{4} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$I\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

33. $f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow kx + 2 &= x^2 + 3x + 3k \\ \Leftrightarrow -x^2 - 3x + kx - 3k + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - kx + 3k - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (3 - k)x + (3k - 2) &= 0 \end{aligned}$$

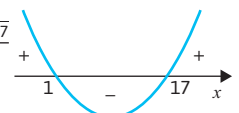
Os gráficos de f e de g interseitam-se em dois pontos distintos se e só se $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} (3 - k)^2 - 4(3k - 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 9 - 6k + k^2 - 12k + 8 &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 18k + 17 &> 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$k^2 - 18k + 17 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times 17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{18 \pm 16}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 17 \vee k = 1$$


Logo, $k^2 - 18k + 17 > 0 \Leftrightarrow k < 1 \vee k > 17$
 $k \in]-\infty, 1[\cup]17, +\infty[$

34. A reta definida por $y = mx + 2$ não interseita a parábola definida por $y = x^2 - x + 6$ se e só se a equação $x^2 - x + 6 = mx + 2$ for impossível.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 6 &= mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - mx + 6 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (-1 - m)x + 4 = 0 \end{aligned}$$

A equação $x^2 + (-1 - m)x + 4 = 0$ é impossível se e só se $\Delta < 0$:

$$\begin{aligned} (-1 - m)^2 - 4 \times 4 < 0 &\Leftrightarrow 1 + 2m + m^2 - 16 < 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + m - 15 < 0 \\ \Leftrightarrow -5 < m < 3 \end{aligned}$$

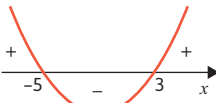
Cálculo auxiliar

$$m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{18 \pm \sqrt{4 - 4 \times (1) \times (-15)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = -5 \vee m = 3$$



Logo, $m \in]-5, 3[$.

35. A reta de equação $y = mx + b$ interseca a parábola de equação $y = ax^2 + c$ em apenas um ponto se e só se a equação $ax^2 + c = mx + b$ tiver exatamente uma solução.

$$ax^2 + c = mx + b \Leftrightarrow ax^2 - mx + c - b = 0$$

A equação $ax^2 - mx + c - b = 0$ tem exatamente uma solução se e só se $\Delta = 0$:

$$m^2 - 4a(c - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 40 - (c - b)$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4a - 4ab$$

Aprende fazendo – páginas 119 a 127

1. Opção (B)

Nas opções (A) e (D) não se encontram funções afim já que não podem ser definidas por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Na opção (C) encontra-se a expressão analítica de uma função afim f , mas o ponto $O(0, 0)$ não pertence ao gráfico de f , já que $f(0) = 0 + 2 = 2 \neq 0$.

Na opção (B) encontra-se a expressão analítica de uma função afim f e o ponto $O(0, 0)$ pertence ao gráfico de f , já que $f(0) = \frac{0}{2} = 0$.

2. Opção (C)

Os pontos $(1, 0)$ e $(-3, 8)$ pertencem ao gráfico da função. Assim, o declive da reta que representa a

$$\text{função é } \frac{0 - 8}{1 - (-3)} = \frac{-8}{4} = -2.$$

A única opção que representa uma função afim em que o coeficiente de x é -2 é a opção C.

3. Opção (B)

A função g é representada graficamente por uma reta de declive negativo. Essa reta interseca obrigatoriamente o eixo Ox num único ponto, pelo que a função tem um único zero.

4. $f(x) = (a - 1)x + 2a$

- a) Para que f seja estritamente decrescente, então:

$$a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \Leftrightarrow a \in]-\infty, 1[$$

- b) Se o gráfico de f interseca o eixo Ox no ponto de abscissa -1 , então:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow (a - 1) \times (-1) + 2a = 0 \Leftrightarrow -a + 1 + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

- c) Para que o gráfico de f seja uma reta paralela ao eixo das abscissas:

$$a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

5. Opção (D)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Assim, a função g interseca o eixo Ox em dois pontos.

A reta de equação $x = \frac{3 - 1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ é o eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função.

A função g é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$, pelo que, em particular, é estritamente crescente em $[2, 6]$.

$$g(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Logo, $D'_g = [-4, +\infty[$, pelo que 2 pertence ao contradomínio de g .

6. Opção (D)

A parábola tem concavidade voltada para baixo, pelo que $a < 0$. A abscissa do vértice é negativa, pelo que $h < 0$. A ordenada do vértice é positiva, pelo que $k > 0$.

7. Opção (A)

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f segundo as seguintes transformações sucessivas:

- deslocamento de 2 unidades para a esquerda;
- simetria em relação ao eixo Ox ;
- deslocamento de 1 unidade para baixo.

8. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2}$$

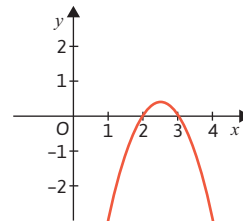
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Os zeros de f são 2 e 3.

- b) O eixo de simetria do gráfico de f é $x = \frac{2 + 3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

- c)



- d) $f(x) \leq -6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 \leq -6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$


C.S. = $] -\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

- 9.

a) $x^2 - x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 - 5}{2} \vee x = \frac{1 + 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

C.S. = $\{-2, 3\}$

b) $6x^2 + x = 5$
 $\Leftrightarrow 6x^2 + x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 6 \times (-5)}}{2 \times 6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{12}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 - 11}{12} \vee x = \frac{-1 + 11}{12}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{6}$
 C.S. = $\left\{-1, \frac{5}{6}\right\}$

c) $36 - 12x + x^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{12}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 6$
 C.S. = $\{6\}$

d) $1 = x(-2x - 3)$
 $\Leftrightarrow 1 = -2x^2 - 3x$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-3 - 1}{4} \vee x = \frac{-3 + 1}{4}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$
 C.S. = $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

e) $(x - 1)^2 = 3 - x$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 3 + x = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 - 3}{2} \vee x = \frac{1 + 3}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$
 C.S. = $\{-1, 2\}$

f) $(x - 3)^2 = 2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6 - \sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{6 + \sqrt{8}}{2}$
 C.S. = $\left\{\frac{6 - \sqrt{8}}{2}, \frac{6 + \sqrt{8}}{2}\right\}$

g) $2(x^2 - x) + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times 10}}{2 \times 2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-76}}{2}$

Equação impossível em \mathbb{R}
 C.S. = \emptyset

h) $(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 - 5x + 20 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 1 \times 36}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{13 - 5}{2} \vee x = \frac{13 + 5}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 9$
 C.S. = $\{4, 9\}$

i) $\frac{x^2 - 2}{3} = 8 - \frac{x - 3}{6}$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 48 - x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 55 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-55)}}{2 \times 2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{441}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 - 21}{4} \vee x = \frac{-1 + 21}{4}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{11}{2} \vee x = 5$
 C.S. = $\left\{-\frac{11}{2}, 5\right\}$

10. Opção (D)
 Se $a < 0$, então a reta que representa a função tem declive negativo, pelo que ou é a reta representada na opção B ou na opção D. Se $\frac{b}{a} > 0$, então $b < 0$, logo a opção correta é a opção D.

11. **a)** $V = \pi \times 3^2 \times 3 = 27\pi \text{ m}^3 = 27\,000 \times \pi \text{ litros}$

$\frac{27\,000 \times \pi}{100 \times 60} = \frac{27}{6} \pi \approx 14 \text{ horas}$

b) $27\,000 \times \pi - 2 \times 60 \times 100 \approx 72\,823 \text{ litros}$

c) $D_v = \left[0, \frac{27}{6} \pi\right]$
 $D'_v = [0, 27\pi]$

d) Como a piscina tem a forma de um cilindro a função v é uma função afim.

Uma vez que $v(0) = 27\pi$ e $v\left(\frac{27}{6}\pi\right) = 0$, então o declive da reta que representa esta função é $\frac{27\pi - 0}{0 - \frac{27}{6}\pi} = -6$

e a ordenada na origem é 27π .
 Logo, $v(t) = 27\pi - 6t$.

12. **a)** Opção (C)
 Por observação dos gráficos de f e g , conclui-se que:

- $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ não é verdadeira, pois a função g não é positiva para todo o valor real x . Em $x = 0$, tem-se que $g(x) = 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq f(x)$ não é verdadeira, pois existem valores reais negativos para os quais se verifica que as suas imagens por g são inferiores às suas imagens por f ;

- $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = g(x)$ é verdadeira, uma vez que os gráficos de f e de g se intersectam, isto é, existe pelo menos um valor real x tal que a sua imagem por f é igual à sua imagem por g ;
- $\exists x \in \mathbb{R}^+: f(x) = 1$ é falsa, pois não existe nenhum valor real positivo tal que a sua imagem por f seja 1. Observa-se que o gráfico de f não intersecta a reta de equação $y = 1$ em \mathbb{R}^+ .

b) Opção (A)

O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(0, 2)$.

Assim, a expressão analítica de f é da forma

$$f(x) = mx + b, \text{ onde } m = \frac{2-0}{0-(-3)} = \frac{2}{3} \text{ e } b = 2.$$

$$\text{Logo, } f(x) = \frac{2}{3}x + 2.$$

13. Opção (C)

Sabe-se que o gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e com vértice no ponto de coordenadas

$$\left(-\frac{-8}{2 \times 2}, f\left(\frac{-8}{2 \times 2}\right)\right) = (2, f(2)) = (2, -18).$$

Sabe-se também que f tem dois zeros: -1 e 5

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0$$

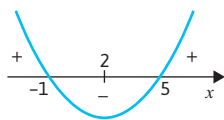
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+6}{2} \vee x = \frac{4-6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Um esboço desta parábola é:



Logo:

- a função f é crescente em $[2, +\infty[$ e, por isso, a afirmação I verdadeira;
- a função f é negativa em $]-1, 5[$ e, por isso, a afirmação II verdadeira;
- o eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = 2$, logo a afirmação III é falsa.

14. Opção (B)

Para que a função não tenha zeros reais $\Delta < 0$.

$$4^2 - 4 \times (-1) \times k < 0 \Leftrightarrow 16 + 4k < -16 \Leftrightarrow k < -4$$

Ou seja, $k \in]-\infty, -4[$.

15. Opção (A)

$$\text{A abcissa do vértice é: } \frac{-a}{4} = 2 \Leftrightarrow -a = 8 \Leftrightarrow a = -8$$

A ordenada do vértice é:

$$f(2) = -2 \Leftrightarrow 2 \times 2^2 - 8 \times 2 - b = -2$$

$$\Leftrightarrow 8 - 16 - b = -2$$

$$\Leftrightarrow -b = 6 \Leftrightarrow b = -6$$

16.

a) Seja r a reta que representa graficamente a função f . A reta r passa pelos pontos de coordenadas $(1, 3)$

e $(0, 4)$, logo o seu declive é $\frac{4-3}{0-1} = -1$ e $b = 4$.

A equação reduzida da reta r é, então, $y = -x + 4$.

Como o gráfico da função quadrática g é uma parábola de vértice na origem do referencial, então g é da forma $g(x) = ax^2$ e como passa pelo ponto de coordenadas $(4, 8)$, tem-se que:

$$8 = a \times 4^2 \Leftrightarrow a = \frac{8}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}. \text{ Assim, } g(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Determinemos os valores de x para os quais $f(x) = g(x)$:

$$-x + 4 = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-4)}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

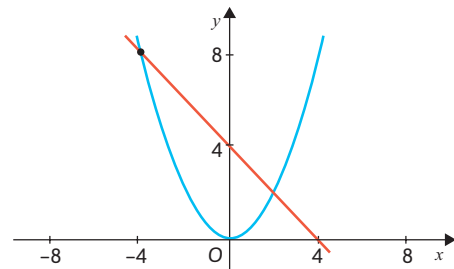
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{1}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - 3 \vee x = -1 + 3$$

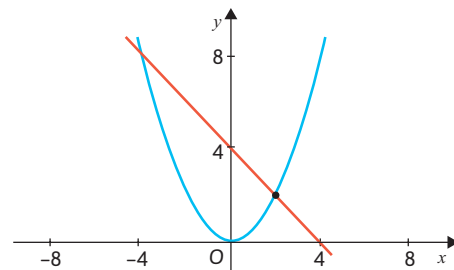
$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$$

Considerando A o ponto de menor abcissa, tem-se que as coordenadas de A são $(-4, f(-4))$, ou seja, $(-4, 8)$ e as coordenadas de B são $(2, f(2))$, isto é, $(2, 2)$.

b)



Interseção: $A(-4, 8)$



Interseção: $B(2, 2)$

17. $f(x) = x^2 - kx - 5, k \in \mathbb{R}$

Para que a função f tenha dois zeros distintos, a equação $f(x) = 0$ tem de ter duas soluções distintas, ou seja, $\Delta > 0$:

$(-k)^2 - 4 \times 1 \times (-5) > 0 \Leftrightarrow k^2 + 20 > 0$, que é uma condição universal em \mathbb{R} , ou seja, para qualquer valor real de k tem-se que $k^2 + 20$ é sempre um valor maior do que zero.

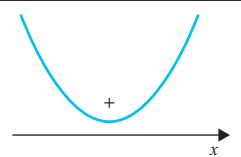
18.

a) $2x^2 + 5x + 6 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{2}$$

Condição impossível em \mathbb{R} .



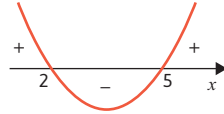
C.S. = \mathbb{R}

b) $(x-3)^2 \leq x-1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$$


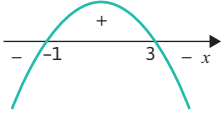
C. S. = [2, 5]

c) $2x - 1 < (x-2)(x-2) \Leftrightarrow 2x - 1 < x^2 - 4 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 < 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$


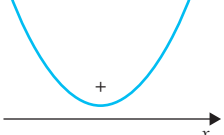
C.S. = $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

d) $x^2 + 4 < 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 < 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2x^2 = -3$$

Equação impossível em \mathbb{R} .



C.S. = \emptyset

19. Opção (D)

A parábola que representa a função tem concavidade voltada para baixo. Logo, exclui-se a opção A. Nas restantes opções, a abscissa do vértice da parábola é 6.

Na opção B, tem-se que $f(6) = 12$, mas a altura máxima atingida pelo projétil é 72 metros, pelo que se exclui esta opção.

Na opção C, $f(12) = -0,5 \times (12 - 6)^2 + 72 = 54$. Mas o projétil cai a 12 metros da base de lançamento. Assim, exclui-se também esta opção.

20. Opção (B)

A função tem um mínimo absoluto, logo a parábola que a representa tem a concavidade voltada para cima. Se $f(-3) = f(5) = -2$, então a equação $f(x) = -1$ tem uma solução menor do que -3 e outra solução maior do que 6 .

A inequação $f(x) < -1$ terá como conjunto-solução um intervalo cujos extremos são essas duas soluções.

O único intervalo nestas condições é o representado na opção B.

21. Opção (C)

Seja r a reta que representa graficamente a função f e s a reta que representa graficamente a função g . A reta r passa pelos pontos de coordenadas $(-2, 0)$

e $(0, 2)$, logo o seu declive é $\frac{2-0}{0-(-2)} = 1$ e $b = 2$.

A equação reduzida da reta r é, então, $y = x + 2$.

A reta s passa pelos pontos de coordenadas $(1, 0)$ e

$(0, 2)$, logo o seu declive é $\frac{2-0}{0-1} = -2$ e $b = 2$.

A equação reduzida da reta s é, então, $y = -2x + 2$.

Temos assim que $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -2x + 2$.

Logo, $h(x) = f(x) \times g(x) =$
 $= (x + 2) \times (-2x + 2) =$
 $= -2x^2 + 2x - 4x + 4 =$
 $= -2x^2 - 2x + 4$

Esta expressão analítica representa uma parábola de concavidade voltada para baixo ($-2 < 0$), que é o gráfico de uma função quadrática cujos zeros são -2 e 1 .

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2) \times (-2x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2=0 \vee -2x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$$

22. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

a) Abscissa do vértice: $\frac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$

Ordenada do vértice: $f(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$

Logo, $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$.

b) A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$, tem um mínimo absoluto igual a -1 em 1 .

c) Se $k > 1$, a função $f(x) + k$ é sempre positiva.

d) $D_f = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 4(-x) + 1 = 2x^2 + 4x + 1$

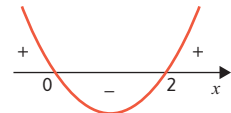
Ou seja, não é verdade que $f(-1) = f(x), \forall x \in D_f$, logo f não é uma função par e, portanto, o seu gráfico não é simétrico em relação ao eixo Oy , pelo que a afirmação é falsa.

e) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) - 1 \geq 0\}$

$f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$


$D_g =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

23. $h(t) = -t^2 + 5t + 10$

a) $h(3) = -3^2 + 5 \times 3 + 10 = -9 + 15 + 10 = 16$

A altura do foguete ao fim de 2 segundos é 16 metros.

b) O gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Abcissa do vértice: $\frac{-5}{2 \times (-1)} = \frac{5}{2}$

Ordenada do vértice: $h\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{2} + 10 =$
 $= -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 10 = 16,25$

A altura máxima atingida é 16,25 metros.

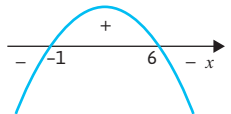
c) Para $t \geq 0$:

$h(t) \geq 4 \Leftrightarrow -t^2 + 5t + 10 \geq 4 \Leftrightarrow -t^2 + 5t + 6 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$-t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = 6 \vee t = -1$$


Logo, $t \in [0, 6[$.

A luz útil de cada foguete dura 6 segundos.

24.

a) $\overline{AE} = x = \overline{AD} = \overline{DE}$
 $\overline{AB} = 6$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{DE}^2 &= \overline{CB}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AE}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \overline{CB}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{CB}^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \overline{CB}^2 + \frac{3}{4}x^2 \end{aligned}$$

Logo, $\overline{CB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$\overline{DC} = \overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AE} = 6 - \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim: } A(x) &= \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \times \overline{CB}}{2} = \frac{\left(6 + 6 - \frac{x}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \\ &= \left(12 - \frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{4}x = \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 = \\ &= \frac{24\sqrt{3}}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}(24x - x^2) \end{aligned}$$

b) $A(x) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8}(24x - x^2) = 10\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 24x - x^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 24x - 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 80}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24 \pm 16}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \vee x = 4$$

Como $x \leq 6$, então $x = 4$.

25.

a) $A_{\text{figura sombreada}} = A_{[ABC]} - A_{[APQR]} =$
 $= \frac{4 \times 6}{2} - \overline{AP} \times \overline{PQ} =$
 $= 12 - x \times \left(6 - \frac{3}{2}x\right) =$
 $= 12 - 6x + \frac{3}{2}x^2 =$
 $= \frac{3}{2}x^2 - 6x + 12 = f(x)$

Cálculo auxiliar

$$\frac{4}{6} = \frac{RQ}{RC} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{x}{6 - PQ}$$

$$\Leftrightarrow 24 - 4PQ = 6x$$

$$\Leftrightarrow 4PQ = 24 - 6x$$

$$\Leftrightarrow PQ = 6 - \frac{3}{2}x$$

$\overline{AB} = 4$ e $\overline{AP} = x$ e, como P se desloca sobre $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B , então $x \in]0, 4[$.

b) Sendo $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 12$, a abcissa do vértice da parábola que representa graficamente a função f é dada por $m = -\frac{-6}{2 \times \frac{3}{2}} = 2$ e a ordenada do vértice

é $f(2) = \frac{3}{2} \times 2^2 - 6 \times 2 + 12 = 6$. Como a concavidade da parábola é voltada para cima, tem-se que 6 é o mínimo de f .

c) $f(x) < 8$

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 12 < 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \wedge x < \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$$

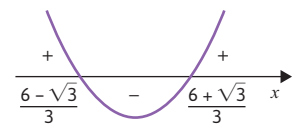
Cálculo auxiliar

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 4}}{2 \times \frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$



$$\text{C.S.} = \left] \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \right[$$

Como $\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} > 0$ e $\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} < 4$, os valores de x para os quais a área da figura sombreada é inferior a 8 são $x \in \left] \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \right[$.

26. Opção (A)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = ax - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-2 - a)x + 1 = 0$$

Para que esta equação tenha apenas uma solução, $\Delta = 0$:

$$(-2 - a)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4a + a^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -4$$

27.

a) $f(x) = -x^2 - x + 6 = -(x^2 + x) + 6 =$

$$= -\left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 6 =$$

$$= -\left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 =$$

$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

b) Vértice da parábola que representa o gráfico da função f : $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

Zeros de f : -2 e 3

Cálculo auxiliar

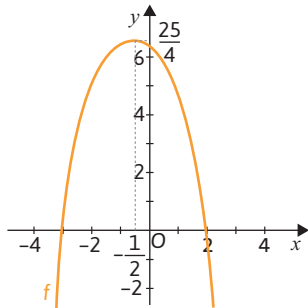
$$f(x) = 0$$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$



- c) A. A função f , de domínio \mathbb{R} , tem dois zeros. Como o gráfico da função g se pode obter do gráfico da função f deslocando-o 2 unidades para a direita, então a função g tem o mesmo número de zeros da função f . Assim, a afirmação é falsa.

B. Cálculos auxiliares

$$f(x) \leq 7$$

$$-x^2 - x + 6 \leq 7$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x - 1 \leq 0$$

$$-x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times (-1)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{-2}$$

Equação impossível em \mathbb{R}

$y = -x^2 - x - 1$

Verifica-se, assim, que $f(x) \leq 7$ tem conjunto-solução \mathbb{R} , sendo uma condição universal em \mathbb{R} e, portanto, a afirmação é verdadeira.

- d) Seja V_f o vértice da parábola que representa graficamente a função f .

Sabe-se que $V_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Seja V_h o vértice da parábola que representa graficamente a função h .

Como o gráfico de h se pode obter do gráfico da função f deslocando-o k unidades para cima, tem-se que $V_h = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4} + k\right)$.

Para que este ponto pertença ao terceiro quadrante, a abcissa e a ordenada têm de ser negativas.

Para que este ponto pertença ao terceiro quadrante, a abcissa e a ordenada têm de ser negativas.

$$-\frac{1}{2} < 0 \wedge \frac{25}{4} + k < 0, \text{ logo } k < -\frac{25}{4}.$$

Assim, $k \in]-\infty, -\frac{25}{4}[$.

28. $f(x) = (1 - k)x^2 + 2x + 1$

a) $A(0, f(0))$

$B(x, f(x))$

$f(0) = 0 + 0 + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$

Logo, $A(0, 1)$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow (1 - k)x^2 + 2x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow (1 - k)x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x((1 - k)x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee (1 - k)x = -2$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-2}{1 - k}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{k - 1}$

Logo, $B\left(\frac{2}{k - 1}, 1\right)$.

$\overline{AB} = \left| \frac{2}{k - 1} - 0 \right| = \left| \frac{2}{k - 1} \right| = \frac{2}{k - 1}$, pois $k > 1$.

- b) Para que a equação $f(x) = 0$ tenha duas soluções distintas, $\Delta > 0$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4(1 - k) \times 1 > 0 \Leftrightarrow 4 - 4 + k > 0 \Leftrightarrow k > 0$

Como $k > 1$, então $k > 0 \wedge k > 1 \Leftrightarrow k > 1$.

C.S. = $]1, +\infty[$

- c) $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$

i. $-2x^2 + 2x + 1 \leq -3 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

C.S. = $] -\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

ii. $g(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{4 + 8}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \vee x = 1 + \sqrt{3}$

Logo, os zeros de g são $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$.

iii. $h(x) = -2f(x - 3) + 1 = -2[-2(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 1] + 1 =$

$= -2(-2(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 1) + 1 =$

$= -2(-2x^2 + 12x - 18 + 2x - 5) + 1 =$

$= 4x^2 - 28x + 47$

Abcissa do vértice: $\frac{-(-28)}{2 \times 4} = \frac{7}{2}$

Ordenada do vértice:

$h\left(\frac{7}{2}\right) = 4\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 28 \times \frac{7}{2} + 46 = 49 - 98 + 47 = -2$

Como a parábola que representa graficamente a função tem concavidade voltada para cima, então, $D'_h = [2, +\infty[$.

29. $f(x) = (x - 2)^2 - mx + 1$

$4 \notin D'_f$ se e só se $f(x) = 4$ é uma equação impossível.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - mx + 1 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - mx + 1 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + (-4 - m)x + 1 = 0$

A equação acima é impossível se e só se $\Delta < 0$:

$(-4 - m)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow 16 + 8m + m^2 - 4 < 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 12 < 0$

Cálculo auxiliar

$$m^2 + 8m + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \vee m = -2$$

$m^2 + 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow -6 < m < -2$

C.S. = $] -6, -2[$

$$\begin{aligned}
 30. \quad ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a \times \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} + c = \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
 \end{aligned}$$

Colocando a expressão $ax^2 + bx + c$ na forma $a(x - h)^2 + k$, sabemos que a abcissa do vértice da parábola que representa o gráfico de f é igual a h . Assim, fica provado que a abcissa do vértice da parábola é igual a $-\frac{b}{2a}$.

31. A função f é definida por $f(x) = kx^2 + (-10k - 6)x + 108$, $k \in \mathbb{R}$.
 Para que a função f não tenha zeros, a equação $f(x) = 0$, isto é, $kx^2 + (-10k - 6)x + 108 = 0$ tem de ser uma equação impossível, ou seja, $\Delta < 0$.
 $(-10k - 6)^2 - 4 \times k \times 108 < 0$
 $\Leftrightarrow 100k^2 + 120k + 36 - 432k < 0$
 $\Leftrightarrow 100k^2 - 312k + 36 < 0$

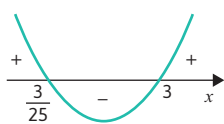
Cálculo auxiliar

$$100k^2 + 312k + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-312) \pm \sqrt{(-312)^2 - 4 \times 100 \times 36}}{2 \times 100}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{312 \pm \sqrt{82\,944}}{200}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{312 - 288}{200} \vee x = \frac{312 + 288}{200}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{25} \vee x = 3$$


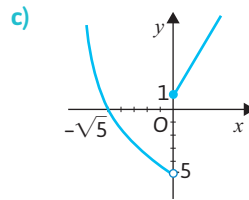
Assim, $100k^2 - 312k + 36 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{25} < k < 3$, ou seja, os valores reais de k para os quais a função f não tem zeros são os valores pertencentes ao intervalo $\left] \frac{3}{25}, 3 \right[$.

Capítulo 3 – Funções definidas por ramos – páginas 128 a 138

1. A função c_1 não está correta, uma vez que as unidades de tempo estão em minutos quando deveriam estar em segundos. A função c_2 não está correta, uma vez que, se se falar mais de 1 minuto, paga-se 20 cêntimos por cada segundo e não por cada segundo acima de 1 minuto. Além disso, também não inclui o pagamento dos primeiros 60 segundos. A função c_4 não está correta, uma vez que, se falar mais de 1 minuto, não se pagam os primeiros 60 segundos. Assim, a função correta é a c_3 .
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- a) $f(-\sqrt{2}) + f\left(\frac{1}{2}\right) = [(-\sqrt{2})^2 - 5] + \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) = 2 - 5 + 1 + 1 = -1$
- b) Em $]-\infty, 0[$:
 $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$
 Mas $\sqrt{5} \notin]-\infty, 0[$, logo apenas $-\sqrt{5}$ é zero da função f .

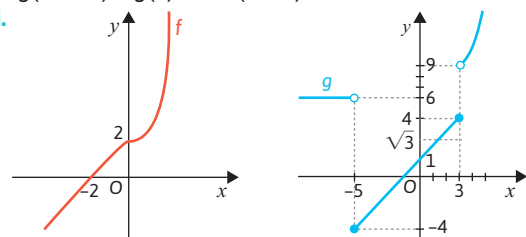
Em $[0, +\infty[$:
 $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
 Mas $-\frac{1}{2} \notin [0, +\infty[$.

Logo, a função f tem apenas um zero, que é $-\sqrt{5}$.



3. Opção (B)
- Em $x < 2$:
 $x^2 - 3x - 4 = 0 \wedge x < 2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \wedge x < 2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \wedge x < 2$
 $\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -1) \wedge x < 2$
 $\Leftrightarrow x = -1$
 - Em $x \geq 2$:
 $x^3 - 1 = 0 \wedge x \geq 2$
 $\Leftrightarrow x^3 = 1 \wedge x \geq 2$
 $\Leftrightarrow (x = 1 \wedge x \geq 2)$
 condição impossível
- 1 é o único zero da função f .

4. a) i. $f(-1) + f(\sqrt{3}) = (-1 + 2) + (3 \times (\sqrt{3})^2 + 2) = 12$
 ii. $g(-2025) + g(0) = 6 + (0 + 1) = 7$
 b) i.



- ii. -2 é o único zero da função f e -1 é o único zero da função g .

5. Em $]-\infty, -1]$, f está definida por uma função afim cuja representação gráfica é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-4, 4)$ e $(-1, -2)$.
 Assim, tem declive $\frac{4 - (-2)}{-4 - (-1)} = -2$.
 Logo, $f(x) = -2x + b$.
 Como $(-4, 4)$ pertence à reta, vem que $4 = -2 \times (-4) + b$. Assim, $b = -4$ e $f(x) = -2x - 4$ para $x \leq -1$.
 Logo, no intervalo $]-\infty, -1]$ o zero de f é -2 , pois $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
- Em $[0, +\infty[$, f está definida por uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola de vértice $(0, -8)$ e que passa no ponto de coordenadas $(3, 10)$.
 $y = ax^2 - 8$
 $10 = a(3)^2 - 8 \Leftrightarrow 9a = 18 \Leftrightarrow a = 2$
 Assim, $f(x) = 2x^2 - 8$, para $x \geq 0$.
 Logo, no intervalo $[0, +\infty[$, o zero de f é 2, pois $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Assim, tem-se que:

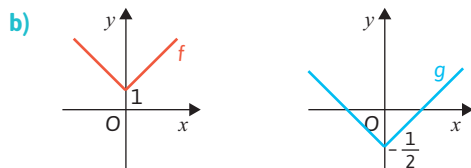
x	$-\infty$	-2		-1		0		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	0	$+$

6. Se $x \in]-\infty, 2[$: $g(x) = a(x + 2)^2 + 1$
 $g(2) = 9 \Leftrightarrow a(2 + 2)^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow 16a = 8 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
 Logo, $g(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$.
 Se $x \in [2, +\infty[$: $g(x) = a(x + 2)^2 + 9$
 $g(5) = 0 \Leftrightarrow a(5 - 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 9a = -9 \Leftrightarrow a = -1$
 Logo, $g(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

$$\text{Assim, } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ 2(x - 2)^2 + 9 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

7. a) $f(x) = |x| + 1 = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$g(x) = |x| - \frac{1}{2} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x < 0 \\ -x - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



- c) $f(x) = |x| + 1$
 $D_f = \mathbb{R}$
 $D'_f = [1, +\infty[$
 A função f não tem zeros.

$$g(x) = |x| - \frac{1}{2}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

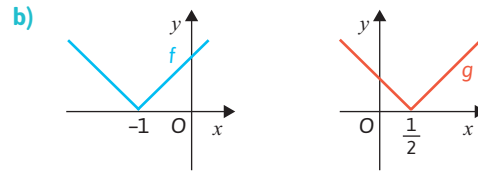
$$D'_g = \left[\frac{1}{2}, +\infty[$$

A função g tem dois zeros.

- d) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
 g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

8. a) $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

$$g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



- c) $f(x) = |x + 1|$
 $D_f = \mathbb{R}$
 $D'_f = \mathbb{R}^+$
 A função f tem um zero.

$$g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

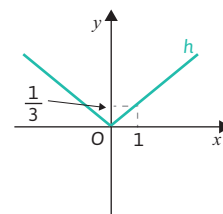
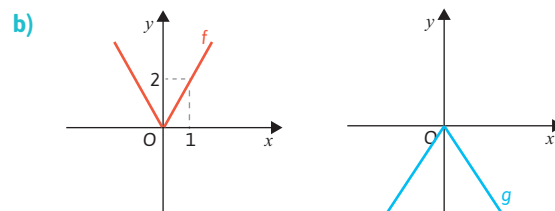
$D_g = \mathbb{R}$
 $D'_g = \mathbb{R}^+$
 A função g tem um zero.

- d) f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.
 g é estritamente decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e estritamente crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

9. a) $f(x) = 2|x| = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$g(x) = -2|x| = \begin{cases} -2x & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}|x| = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



- c) $f(x) = 2|x|$
 $D_f = \mathbb{R}$
 $D'_f = \mathbb{R}^+$
 A função f tem um zero.

$g(x) = -2|x|$
 $D_g = \mathbb{R}$
 $D'_g = \mathbb{R}^-$
 A função g tem um zero.

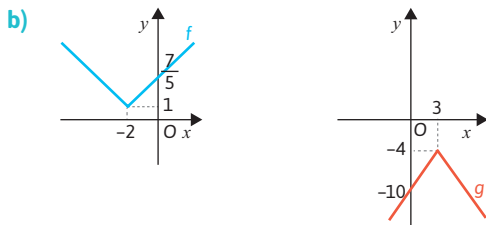
$$h(x) = \frac{1}{3}|x|$$

$D_h = \mathbb{R}$
 $D'_h = \mathbb{R}^+$
 A função h tem um zero.

- d) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
 g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.
 h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

10. a)
$$f(x) = \frac{1}{5}|x+2| + 1 = \begin{cases} \frac{1}{5}(x+2) + 1 & \text{se } x+2 \geq 0 \\ \frac{1}{5}(-x-2) + 1 & \text{se } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{7}{5} & \text{se } x \geq -2 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

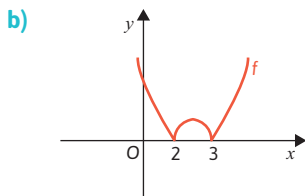
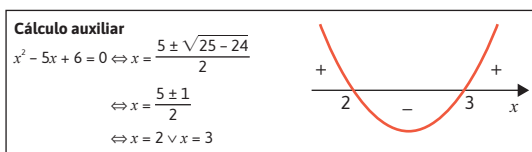
$$g(x) = -2|x-3| - 4 = \begin{cases} -2(x-3) - 4 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -2(-x+3) - 4 & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{se } x \geq 3 \\ 2x-10 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$



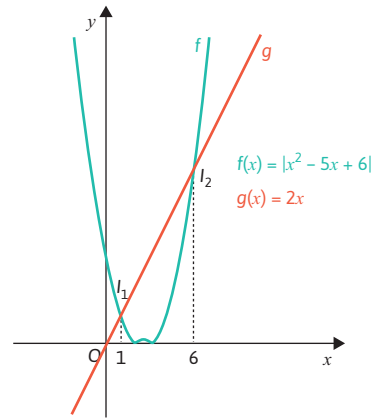
- c) $f(x) = \frac{1}{5}|x+2| + 1$
 $D_f = \mathbb{R}$
 $D'_f = [1, +\infty[$
 A função f não tem zeros.
 $g(x) = -2|x-3| - 4$
 $D_g = \mathbb{R}$
 $D'_g =]-\infty, -4]$
 A função g não tem zeros.

- d) f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e estritamente crescente em $[-2, +\infty[$.
 g é estritamente crescente em $]-\infty, 3]$ e estritamente decrescente em $[3, +\infty[$.

11. a)
$$f(x) = |x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \leq 2 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

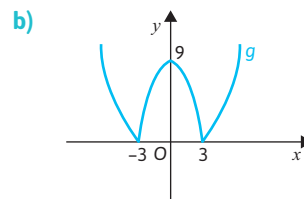
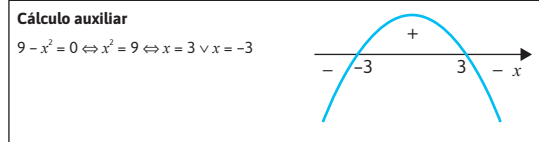


c) $f(x) < 2x \Leftrightarrow 1 < x < 6$

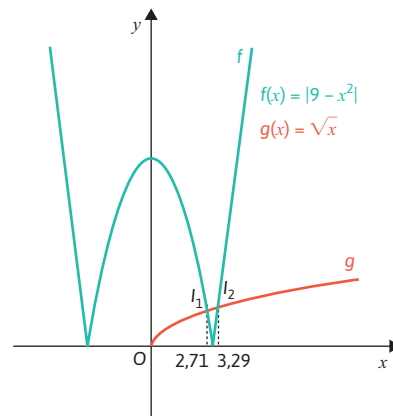


C.S. =]1, 6[

12. a)
$$g(x) = |9 - x^2| = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{se } 9 - x^2 \geq 0 \\ -9 + x^2 & \text{se } -9 - x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ -9 - x^2 & \text{se } x < -3 \vee x > 3 \end{cases}$$



c) $f(x) < \sqrt{x} \wedge x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3$



C.S. = {3}

Aprende fazendo – páginas 140 a 145

1. Para $125 \leq x \leq 250$, a função é definida por uma expressão do tipo $y = ax + b$. Como os pontos de coordenadas (125, 350) e (250, 1500) pertencem ao gráfico da função, então:

$$\begin{cases} 1500 = 250a + b \\ 350 = 125a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1500 = 250a + b \\ 350 - 125a = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1500 = 250a + 350 - 125a \\ 350 - 125a = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1500 - 350 = 250a - 125a \\ 350 - 125a = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1150 = 125a \\ 350 - 125a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9,2 \\ 350 - 125 \times 9,2 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9,2 \\ 350 - 1150 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9,2 \\ b = -800 \end{cases}$$

Para $125 \leq x \leq 250$, a função é definida por $y = 9,2x - 800$.

Para determinar o número mínimo de livros que é necessário vender para obter um lucro superior ou igual a 1000 euros, temos de resolver a inequação: $1000 \leq 9,2x - 800 \Leftrightarrow 1800 \leq 9,2x$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1800}{9,2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4500}{23}$$

Como $\frac{4500}{23} \approx 195,7$, então terão de se vender, no mínimo, 196 livros.

b) Para $0 \leq x < 125$, a função também é definida por uma expressão do tipo $y = ax + b$.

Como o ponto de coordenadas $(0, -800)$ pertence ao gráfico da função e o ponto de coordenadas $(125, 500)$ pertence à reta suporte do gráfico da função no intervalo considerado, então:

$$\begin{cases} -800 = b \\ 500 = 125a - 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -800 \\ 125a = 1300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -800 \\ a = 10,4 \end{cases}$$

Para $0 \leq x < 125$, a função é definida por $y = 10,4x - 800$.

Para determinar o número mínimo de livros que é necessário vender para obter um lucro superior ou igual a 0 euros temos de resolver a inequação:

$$0 \geq 10,4x - 800 \Leftrightarrow 10,4x \leq 800$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{800}{10,4}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1000}{13}$$

Como $\frac{1000}{13} \approx 76,9$ então terão de se vender, no mínimo, 77 livros.

c) Para $125 \leq x \leq 250$, a função é definida por $y = 9,2x - 800$.

Assim, se forem vendidos 125 livros o lucro será $9,2 \times 125 - 800 = 350$ euros.

Para $0 \leq x < 125$, a função é definida por $y = 10,4x - 800$.

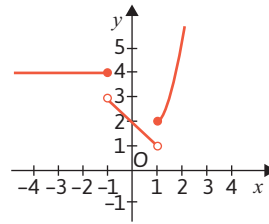
Assim, se forem vendidos 120 livros o lucro será $10,4 \times 120 - 800 = 448$ euros.

Logo, é mais vantajoso vender 120 livros.

O aumento de livros publicados de 124 para 125 pode implicar mais máquinas de impressão e/ou mão de obra e um aumento dos respetivos custos de tipografia.

d) $y = 10,4 \times 0 - 800 = -800$
O prejuízo será 800 euros.

2. a)



b) $f(-\sqrt[3]{3}) - f(0) + f(\sqrt{2}) = 4 - (2 - 0) + (\sqrt{2}^2 + 1) = 4 - 2 + 3 = 5$

c) $D'_f =]1, +\infty[$

d) Se $x \in]-\infty, 1]$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 = 0$, que é uma equação impossível. Logo, a função não tem zeros neste intervalo.

Se $x \in]-1, 1]$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Mas $2 \notin]-1, 1]$, logo a função não tem zeros neste intervalo.

Se $x \in [1, +\infty[$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$, que é uma equação impossível em \mathbb{R} , pelo que a função também não tem zeros neste intervalo.

Logo, a função f não tem zeros.

e) Se $k \in [2, 3]$, então a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções.

3. a)

$$\begin{aligned} f(x) = |x - 5| - 2 &= \begin{cases} (x - 5) - 2 & \text{se } x - 5 \geq 0 \\ -(x - 5) - 2 & \text{se } x - 5 < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x - 5 - 2 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 - 2 & \text{se } x < 5 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x - 7 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 3 & \text{se } x < 5 \end{cases} \end{aligned}$$

b) $f(x) = 0$

$$|x - 5| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x - 5| = 2 \Leftrightarrow x - 5 = 2 \vee x - 5 = -2 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = 3$$

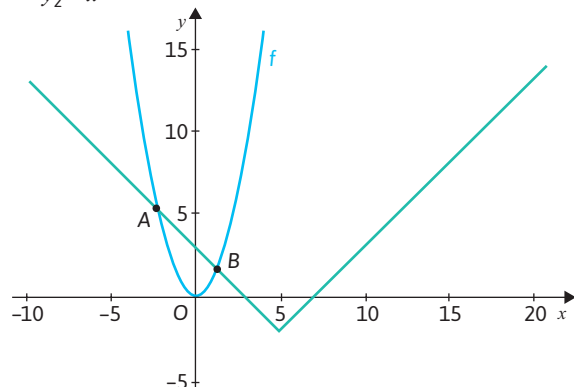
Os zeros são 3 e 7.

c) $f(x) = x^2$, ou seja, $|x - 5| - 2 = x^2$.

Na calculadora gráfica intersecamos os gráficos das funções:

$$y_1 = |x - 5| - 2$$

$$y_2 = x^2$$



As coordenadas pretendidas são $(-2,303; 5,303)$ e $(1,303; 1,697)$.

4. Opção (B)

Seja C a função que dá o preço a pagar, em euros, em função do número de quilómetros percorridos na viagem, x .

Atendendo a que viagens não superiores a 10 quilómetros custam 5 euros, concluímos que $C(x) = 5$ se $0 \leq x \leq 10$.

Atendendo ao facto de cada quilómetro acima dos 10 quilómetros custar 50 cêntimos (0,5 euros), então, para determinar o custo da viagem, temos de adicionar aos 5 euros (correspondentes aos primeiros 10 quilómetros percorridos) o custo associado ao número de quilómetros percorridos a mais do que os 10 quilómetros.

Por exemplo,

$$C(11) = 5 + 0,5(11 - 10) = 5 + 0,5 = 5,5$$

$$C(12) = 5 + 0,5(12 - 10) = 5 + 0,5 \times 2 = 6$$

Assim, se $x > 10$, então $C(x) = 5 + 0,5(x - 10)$.

Logo, a função C é definida por:

$$C(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 5 + 0,5(x - 10) & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

5.

a) $5 \times 6 + 3 \times 4 = 30 + 12 = 42$

A Maria pagou 42 euros.

b) $5 \times 6 + 3 \times (x - 6) = 60 \Leftrightarrow 30 + 3x - 18 = 60$

$$\Leftrightarrow 3x = 48$$

$$\Leftrightarrow x = 16$$

A Maria foi a 16 aulas.

c) $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{se } x \leq 6 \\ 5 \times 6 + 3(x - 6) & \text{se } x > 6 \end{cases} = \begin{cases} 5x & \text{se } x \leq 6 \\ 12 + 3x & \text{se } x > 6 \end{cases}$

d) i.

```
print("Valor a pagar pelas aulas de Zumba num determinado mês")
print("Qual foi o número de aulas a que assistiu?")
print("Note que o número de aulas a que assistiu neste mês deverá ser um número inteiro não negativo.")
n=int(input())
if (n>=0 and n<=6):
    C=5*n
else:
    C=3*n+12
print("O valor a pagar é de", C,"euros.")
```

ii.

```
print("Valor a pagar pelas aulas de Zumba num determinado mês")
print("Qual foi o número de aulas a que assistiu?")
print("Note que o número de aulas a que assistiu neste mês deverá ser um número inteiro não negativo.")
n=int(input())
if (n>=0 and n<=6):
    C=5*n
else:
    C=3*n+12
print("O valor a pagar é de", C,"euros.")
```

☞ Valor a pagar pelas aulas de Zumba num determinado mês
Qual foi o número de aulas a que assistiu?
Note que o número de aulas a que assistiu neste mês deverá ser um número inteiro não negativo.
10
O valor a pagar é de 42 euros.

```
print("Valor a pagar pelas aulas de Zumba num determinado mês")
print("Qual foi o número de aulas a que assistiu?")
print("Note que o número de aulas a que assistiu neste mês deverá ser um número inteiro não negativo.")
n=int(input())
if (n>=0 and n<=6):
    C=5*n
else:
    C=3*n+12
print("O valor a pagar é de", C,"euros.")
```

☞ Valor a pagar pelas aulas de Zumba num determinado mês
Qual foi o número de aulas a que assistiu?
Note que o número de aulas a que assistiu neste mês deverá ser um número inteiro não negativo.
16
O valor a pagar é de 60 euros.

6.

a) $-2f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4$
C.S. = $]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\}$

Cálculos auxiliares

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\} =$$

$$= [-4, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, 4[= [-4, 4] \setminus \{-2, 2\}$$

c)

x	$-\infty$	-4		0		4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

d)

Se $x \leq -2$, o gráfico da função f é uma reta que contém os pontos de coordenadas $(-4, 0)$ e $(-2, 3)$.

O declive da reta é: $\frac{0 - 3}{-4 - (-2)} = \frac{3}{2}$.

Então, a equação reduzida da reta é da forma

$$f(x) = \frac{3}{2}x + b.$$

$$f(-4) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \times (-4) + b = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

Logo, $f(x) = \frac{3}{2}x + 6$ se $x \in]-\infty, -2]$.

Se $-2 < x < 0$, a função é constante.

Logo, $f(x) = 3$ se $x \in]-2, 0[$.

Se $x \geq 0$, o gráfico da função f é uma parábola de vértice $(2, 2)$ e em que um dos zeros é o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

Assim, $f(x) = a(x - 2)^2 + 2$.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a \times (-2)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 2 = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 + 2 = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x \text{ se } x \in [0, +\infty[. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 6 & \text{se } x \leq -2 \\ 3 & \text{se } -2 < x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

7. Opção (B)

• Para $x \in [-5, -2[$:

$$f(x) = a(x + 3)^2 + 4$$

Como $f(-4) = 2$, então:

$$a(-4 + 3)^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$$

$$f(x) = -2(x + 3)^2 + 4$$

• Para $x \in]-2, 2]$:

$$f(x) = mx + b$$

$$m = \frac{6 - 3}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$f(x) = x + b$$

Como $f(-1) = 3$, então:

$$3 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4$$

$$f(x) = x + 4$$

• Para $x \in [2, 4]$: $f(x) = 6$

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x + 3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

8.

a)

• Para $x < -4$:

$$f(x) = mx + b$$

$$m = \frac{3 - (-5)}{-4 - (-12)} = \frac{8}{8} = 1$$

$$f(x) = x + b$$

Como $f(-4) = 3$, então:

$$3 = -4 + b \Leftrightarrow b = 7$$

$$f(x) = x + 7$$

• Para $-4 \leq x \leq 5$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

Como $f(5) = 12$, então:

$$a\left(5 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{8} = 12 \Leftrightarrow \frac{121}{4}a - \frac{25}{8} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{121}{4}a = 12 + \frac{25}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{121}{4}a = \frac{121}{8}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

• Para $x > 5$:

$$f(x) = mx + b$$

$$m = \frac{14 - 12}{7 - 5} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f(x) = x + b$$

Como $f(7) = 14$, então:

$$14 = 7 + b \Leftrightarrow b = 7$$

$$f(x) = x + 7$$

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{se } x < 2 \vee x > 5 \\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{8} & \text{se } -4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

b)

x	$-\infty$	-7		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

9.

a)

Opção (B)

$f(x) = k$ tem exatamente três soluções se a reta $y = k$ intersecciona o gráfico de f em três pontos, logo $k \in]-3, 3]$.

b)

Opção (A)

Para $x < 1$:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + 5$$

Como o ponto de coordenadas $(-4, -13)$ pertence ao gráfico de f :

$$a(-4 + 1)^2 + 5 = -13 \Leftrightarrow 9a + 5 = -13 \Leftrightarrow 9a = -18 \Leftrightarrow a = -2$$

$$f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x + 1)^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \vee x = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Sabemos que $-1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ é um zero de f e que 5 é máximo absoluto de f .

Logo, as afirmações são todas verdadeiras.

c)

• Para $x < 1$:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + 5$$

Como o ponto de coordenadas $(-4, -13)$ pertence ao gráfico de f :

$$a(-4 + 1)^2 + 5 = -13 \Leftrightarrow 9a + 5 = -13 \Leftrightarrow 9a = -18 \Leftrightarrow a = -2$$

$$f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$$

• Para $1 \leq x \leq 3$:

$$f(x) = mx + b$$

$$m = \frac{3 + 3}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$f(x) = 3x + b$$

Como o ponto de coordenadas $(1, -3)$ pertence ao gráfico de f :

$$3 \times 1 + b = -3 \Leftrightarrow b = -6$$

$$f(x) = 3x - 6$$

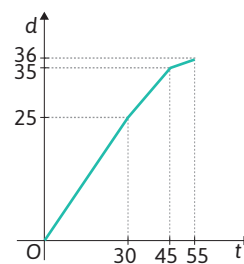
• Para $x > 3$: $f(x) = 5$

Assim:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x + 1)^2 + 5 & \text{se } x < 1 \\ 3x - 6 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 5 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

10.

a)



b)

Consideremos que $d(t)$ é a distância percorrida pelo Joaquim, em quilômetros, t minutos após ter saído de casa.

$$\text{Se } 0 \leq t \leq 30: d(t) = \frac{50}{60}t = \frac{5}{6}t$$

$$\text{Se } 30 < t \leq 45: d(t) = d(30) + \frac{2}{3}(t - 30) = 25 + \frac{2}{3}t - 20 = \frac{2}{3}t + 5$$

$$\text{Se } t \geq 45: d(t) = d(45) + \frac{1}{10}(t - 45) = 35 + \frac{1}{10}t - 4,5 = \frac{1}{10}t + 30,5$$

$$d(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}t & \text{se } 0 \leq t \leq 30 \\ \frac{2}{3}t + 5 & \text{se } 30 < t \leq 45 \\ \frac{1}{10}t + 30,5 & \text{se } 45 < t \leq 55 \end{cases}$$

11.

a)

$$f(x) = -\frac{1}{2}|x - 4| + 6 \quad g(x) = \frac{3}{4}|x - 4|$$

$$A\left(x, -\frac{1}{2}|x - 4| + 6\right), \quad 0 < x < 4$$

Como $0 < x < 4$, então:

$$-\frac{1}{2}|x - 4| + 6 = -\frac{1}{2}(4 - x) + 6 =$$

$$= -2 + \frac{x}{2} + 6 =$$

$$= 4 + \frac{x}{2}$$

$$A\left(x, 4 + \frac{x}{2}\right)$$

$$D\left(x, \frac{3}{4}|x-4|\right), \quad 0 < x < 4$$

Como $0 < x < 4$, então:

$$\frac{3}{4}|x-4| = \frac{3}{4}(4-x) = 3 - \frac{3}{4}x$$

$$D\left(x, 3 - \frac{3}{4}x\right)$$

$$\overline{AD} = \left| 4 + \frac{x}{2} - \left(3 - \frac{3}{4}x\right) \right| =$$

$$= \left| 4 + \frac{x}{2} - 3 + \frac{3}{4}x \right|$$

$$= \left| 1 + \frac{5}{4}x \right| =$$

$$= 1 + \frac{5}{4}x$$

$$\overline{AB} = 2(4-x) = 8 - 2x$$

$$h(x) = \left(1 + \frac{5}{4}x\right)(8 - 2x) =$$

$$= 8 - 2x + 10x - \frac{5}{2}x^2 =$$

$$= -\frac{5}{2}x^2 + 8x + 8, \quad 0 < x < 4$$

- b) h é uma restrição de uma função quadrática. Assim, o máximo de h é a ordenada do vértice da parábola que a representa.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$$

$$h\left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{5}{2} \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 + 8 \times \left(\frac{8}{5}\right) + 8 =$$

$$= -\frac{32}{5} + \frac{64}{5} + 8 = \frac{72}{5}$$

O retângulo tem área máxima quando o ponto A tem abscissa $\frac{8}{5}$ e o valor da área máxima é $\frac{72}{5}$ u. a.

- c) $h(x) > 14 \wedge 0 < x < 4$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x^2 + 8x + 8 > 14 \wedge 0 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x^2 + 8x - 6 > 0 \wedge 0 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 16x - 12 > 0 \wedge 0 < x < 4$$

Cálculo auxiliar

$$-5x^2 + 16x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \times (-5) \times (-12)}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-16 \pm 4}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1,2$$

$$-5x^2 + 16x - 12 > 0 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow 1,2 < x < 2$$

$$\text{C.S.} =]1,2; 2[$$

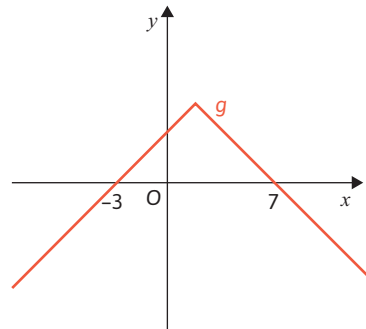
12.

- a) $g(x) = -|x-2| + 5 =$

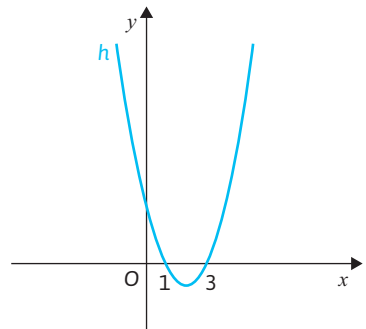
$$= \begin{cases} -(x-2) + 5 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(-x-2) + 5 & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+7 & \text{se } x \geq 2 \\ x+3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

- b)



Os zeros de g são -3 e 7 .



Os zeros de h são 1 e 3 .

- c) $h(x) \geq 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 \geq 8$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

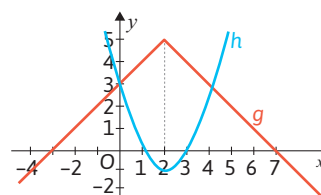
$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 5$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$$

- d)



13. Consideremos que $P(h)$ é o perímetro da superfície do líquido em função da altura, h , do líquido dentro do cubo.

Começamos por determinar a medida de comprimento da diagonal facial do cubo:

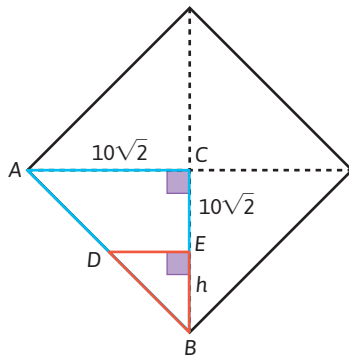
$$d^2 = 20^2 + 20^2 \Leftrightarrow d^2 = 800$$

$$\Leftrightarrow d = \pm \sqrt{800}$$

$$\Leftrightarrow d = \pm 20\sqrt{2}$$

Como $d > 0$, $d = 20\sqrt{2}$.

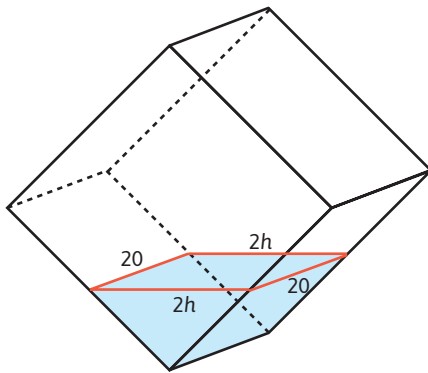
Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[DBE]$.



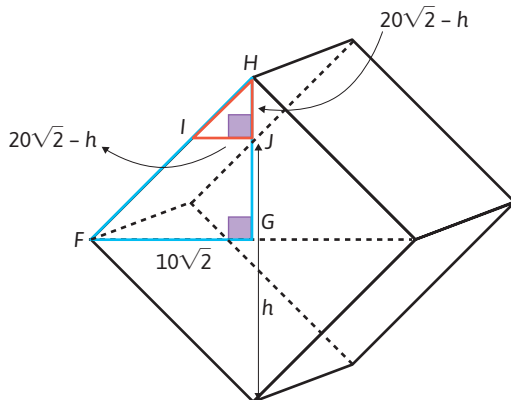
Os triângulos são semelhantes, pois têm dois pares de ângulos iguais.

$$\text{Assim, } \frac{DE}{10\sqrt{2}} = \frac{h}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow DE = h$$

$$\text{Se } 0 < h \leq 10\sqrt{2}: P(h) = 20 + 20 + 2h + 2h = 4h + 40$$



Consideremos os triângulos [FGH] e [IJH].



Os triângulos são semelhantes, pois têm dois pares de ângulos iguais.

$$\text{Assim, } \frac{IJ}{10\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2} - h}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow IJ = 20\sqrt{2} - h$$

Se $10\sqrt{2} < h < 20\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} P(h) &= 20 + 20 + 2(20\sqrt{2} - h) + 2(20\sqrt{2} - h) = \\ &= 40 + 40\sqrt{2} - 2h + 40\sqrt{2} - 2h = \\ &= -4h + 80\sqrt{2} + 40 \end{aligned}$$

$$P(h) = \begin{cases} 4h + 40 & \text{se } 0 < h \leq 10\sqrt{2} \\ -4h + 40 + 8\sqrt{20} & \text{se } 10\sqrt{2} < h < 20\sqrt{2} \end{cases}$$

14.

```
def simetrico_modulo(x):
    if x<0:
        return x
    else:
        return -x

x=float(input("x="))
print("A imagem de", x, "é:", simetrico_modulo(x))
```

x=15
A imagem de 15.0 é: -15.0

Teste final – páginas 146 a 149

1. Opção (C)

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \\ \Leftrightarrow -6 \leq x < 0 \vee 3 < x \leq 6$$

$$\text{Assim, C.S.} = [-6, 0[\cup]3, 6].$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a) } V &= \pi \times 1^2 \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \times 1 = \\ &= \pi - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} = \\ &= \pi - \frac{2}{27} \approx \\ &\approx 3,067\,52 \text{ m}^3 = \\ &= 3067,52 \ell \end{aligned}$$

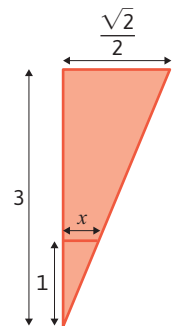
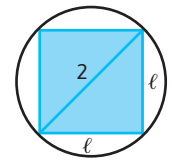
Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \ell^2 + \ell^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2\ell^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \ell^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \ell &= \sqrt{2} \\ \uparrow \\ \ell &> 0 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

O lado do quadrado, que é a base da pirâmide de altura igual a 1 m, é

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$



b) i. A altura do líquido no reservatório varia entre 0 m e 3 m (inclusive), logo $D_f = [0, 3]$.

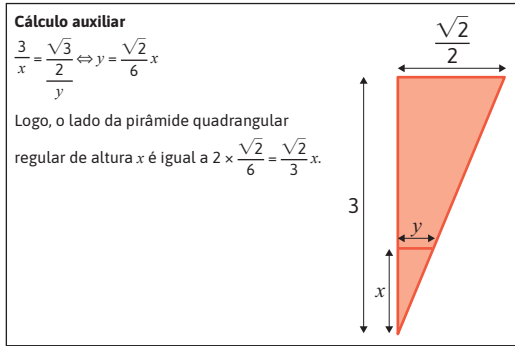
O volume máximo do líquido ocorre quando $x = 3$:

$$\pi \times 1^2 \times 3 - \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 3\pi - 2$$

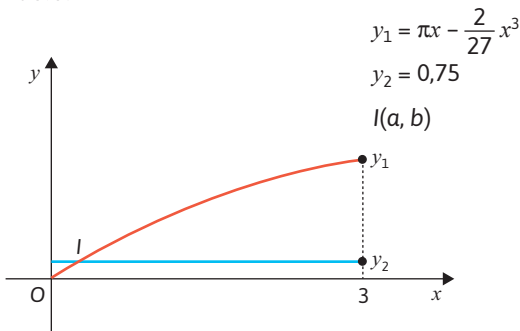
Logo, $D'_f = [0, 3\pi - 2]$.

ii. Seja x a altura de água no reservatório. O volume (em m^3) da água nesse reservatório é igual a

$$\begin{aligned} \pi \times 1^2 \times x - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \times x &= \pi x - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} x^3 = \\ &= \pi x - \frac{2}{27} x^3 \end{aligned}$$



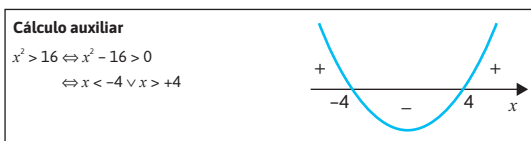
iii. $750 \ell = 750 \text{ dm}^3 = 0,75 \text{ m}^3$
 Pretendemos resolver a equação $f(x) = 0,75$.
 Com recurso às capacidades gráficas da calculadora:



A água atingirá, aproximadamente, 0,24 metros.

3. Como f é uma função par, tem-se que $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.
 Assim, $g(-x) = -x \times f(-x) = -x \times f(x) = -g(x)$, ou seja, $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in D_g$. Logo, g é uma função ímpar, o que exclui a opção apresentada em II, já que nesta opção o gráfico não é simétrico em relação à origem referencial.
 Sabemos que f é estritamente crescente em $[2, +\infty[$, isto é, $\forall x_1, x_2 \in [2, +\infty[$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, de onde se conclui que, para quaisquer $x_1, x_2 \in [2, +\infty[$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$ e, consequentemente, vem que $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$, ou seja, $g(x_1) < g(x_2)$. Logo, g é estritamente crescente em $[2, +\infty[$, o que não se verifica na representação gráfica III, que apresenta uma função que não é estritamente crescente em $[2, +\infty[$.
 Como $f(x) > 0$, $\forall x \in]-\infty, -2[$ e $x < 0$, $\forall x \in]-\infty, -2[$, tem-se que $g(x) = x \times f(x) < 0$, $\forall x \in]-\infty, -2[$, o que não se verifica na representação gráfica I, que apresenta uma função positiva em $]-\infty, -2[$.

4. Opção (C)



C.S. = $]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

5. Opção (B)

- Para $-5 \leq x < -2$:
 $f(x) = a(x - h)^2 + k$
 $f(x) = a(x + 3)^2 + 4$

Como $(-5, -4)$ pertence ao gráfico de f :
 $-4 = a(-5 + 3)^2 + 4 \Leftrightarrow -4 = 4a + 4$
 $\Leftrightarrow -8 = 4a$
 $\Leftrightarrow a = -2$

$f(x) = -2(x + 3)^2 + 4$

- Para $-2 < x < 2$:

$f(x) = mx + b$

$m = \frac{6 - 4}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$

$f(x) = x + 4$

- Para $2 \leq x < 4$:

$f(x) = 6$

Logo,

$$f(x) = \begin{cases} -2(x + 3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

6. $P(x, 2x + 6)$, $x \in]-3, 1[$

a) $A_{[ABCD]} = \frac{BC + AP}{2} \times \overline{AB}$

Cálculo auxiliar

$2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$C(1, y)$

$y = 2 + 6 = 8$

$x < 0$

$-x > 0$

$\overline{AO} = -x$

$\overline{AB} = -x + 1$

$A_{[ABCD]} = \frac{8 + (2x + 6)}{2} \times (-x + 1) =$

$= \frac{2x + 14}{2} \times (-x + 1) =$

$= (x + 7)(-x + 1) =$

$= -x^2 - 7x + x + 7 =$

$= -x^2 - 6x + 7$

b) $A(x) = -x^2 - 6x + 7 =$

$= -(x^2 + 6x + 9) + 7 + 9 =$

$= -(x + 3)^2 + 16$

$V(-3, 16)$

Para $x = -3$ obtemos o valor da área máxima do trapézio que é igual a 16.

c) $A(x) > 12 \wedge -3 < x < 1$

$\Leftrightarrow -x^2 - 6x + 7 > 12 \wedge -3 < x < 1$

$\Leftrightarrow -x^2 - 6x - 5 > 0 \wedge -3 < x < 1$

$\Leftrightarrow -5 < x < -1 \wedge -3 < x < 1$

$\Leftrightarrow -3 < x < -1$

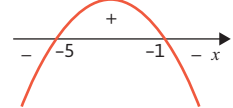
Cálculo auxiliar

$-x^2 - 6x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1$



C.S. = $]-3, -1[$

7. Seja f a função quadrática tal que $f(-3) = 0$, $f(1) = 0$ e $f(0) = 6$.

-3 e 1 são zeros da parábola, logo $\frac{-3 + 1}{2} = -1$ é a abscissa do vértice.

$f(x) = a(x + 1)^2 + k$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1+1)^2 + k = 0 \\ a(0+1)^2 + k = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + k = 0 \\ a + k = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(6-k) + k = 0 \\ a = 6 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 4k + k = 0 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3k = -24 \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ a = 6 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = -2(x+1)^2 + 8$$

8.
a)

Opção (B)
 $f(2) = 1 \Leftrightarrow 4 - 2k + 7 = 1 \Leftrightarrow -2k = -10 \Leftrightarrow k = 5$
 $f(x) = x^2 - 5x + 7$

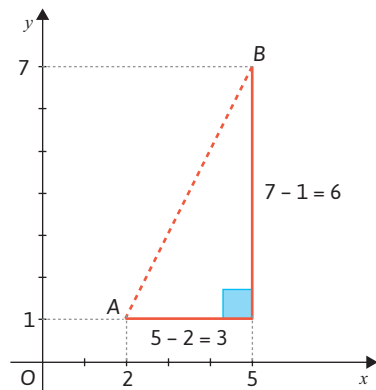
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x^2 - 5x + 7 \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 10}}{2} \\ \text{-----} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm 3}{2} \\ \text{-----} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \times 5 - 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \times 2 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

B(5, 7)



$$d(A, B) = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

b)

$$x^2 - kx + 7 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (-2 - k)x + 10 = 0$$

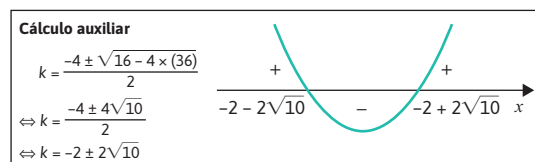
$$\Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow (-2 - k)^2 - 4 \times 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4k + k^2 - 40 < 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{10} < k < -2 + 2\sqrt{10}$$



$$k \in]-2 - 2\sqrt{10}, -2 + 2\sqrt{10}[$$

9.
a)

Opção (C)
 • Para $x > 1$: $f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

$1 \notin]1, +\infty[$
 2 é zero de f .

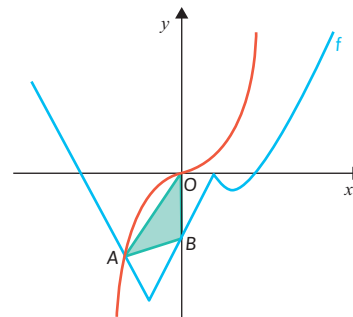
• Para $x < 1$: $f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow 2|x+1| - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow |x+1| = 2$
 $\Leftrightarrow x+1 = 2 \vee x+1 = -2$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

$1 \notin]-\infty, 1[$
 -3 é zero de f .

$f(1) = 2$
 Logo, f tem exatamente dois zeros.

b)

$A(a, a^3)$
 $B(0, f(0))$
 $f(0) = 2|0+1| - 4 = 2 - 4 = -2$
 $B(0, -2)$
 $f(x) = x^3$



$A(a, b)$
 $a \approx -1,456$
 $b \approx -3,088$
 $A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times |\text{abscissa de } A|}{2} =$
 $= \frac{2 \times |-1,456|}{2} =$
 $\approx 1,46 \text{ u.a.}$