Tema 4 – Funções

1. Generalidades acerca de funções

Exercícios – páginas 46 a 56

1. A correspondência f não é uma função, pois ao elemento 4 do conjunto A faz corresponder dois elementos do conjunto B, 11 e 13.
A correspondência g é uma função, pois a cada elemento do conjunto A faz corresponder um e um só elemento do conjunto B.
$D_g = \{2, 3, 5, 7\}$
Conjunto de chegada: $\{1, 4, 6, 8\}$
$D'_g = \{1, 4, 6\}$

2.

2.1. Variável independente: dia da semana
Variável dependente: tempo (em minutos)

2.2. D = {segunda, terça, quarta, quinta, sexta}
$D' = \{17, 19, 21, 23\}$

3. A opção correta é a (A).
A opção (B) está errada, pois é referido no enunciado que ambas as amigas vivem à mesma distância da casa do Diogo, logo a distância percorrida por ambas terá de ser igual, o que não se encontra representado nesta opção.
A opção (C) está errada, pois a distância percorrida por cada uma das amigas aumenta desde o momento em que saem de casa, começando em 0, e, nesta opção, o gráfico da função f não começa na origem do referencial e os valores da distância estão a diminuir.

4. A proposição I é falsa, pois $0 \notin D'_g$.
A proposição II é falsa, pois $2 \notin D_f$.
A proposição III é falsa, pois $f(1) \leq 4$ e $g(0) < 3$, logo $f(1) + g(0) < 4 + 3 = 7$.

5.

5.1. Variável independente: medida em polegadas
Variável dependente: medida em centímetros

5.2. $D = \{24, 28, 32, 40, 43, 50, 55, 65, 75\}$
$D' = \{61, 71, 81, 101, 109, 127, 140, 165, 189\}$

6.

6.1. $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$D'_f = \{-10, -4, 1, 7, 13\}$

6.2. $D_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$D'_g = \{-11, -7, -3, 5, 9\}$

6.3. **a)** $(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 7 + (-7) = 0$

b) $(g - f)(5) = g(5) - f(5) = -11 - 13 = -24$

c) $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = -4 \times 5 = -20$

d) $f^2(2) = (f(2))^2 = (-4)^2 = 16$

e) $f^3(4) = (f(4))^3 = (-10)^3 = -1000$

f) $g(3) - f(2) \times g(1) = -7 + (-4) \times (-3) = -7 + 12 = 5$

7.

7.1.

r	0,3	0,7	1	1,2	1,7
A	0,09π	0,49π	π	1,44π	2,89π

7.2. Variável independente: r
Variável dependente: A

7.3. $D = \{0,3; 0,7; 1; 1,2; 1,7\}$
$D' = \{0,09\pi; 0,49\pi; \pi; 1,44\pi; 2,89\pi\}$

8.

8.1.

a	4	6	12
b	3	2	1

8.2. $D_f = \{4, 6, 12\}$
$D'_f = \{1, 2, 3\}$

8.3. $a \times b = 12 \Leftrightarrow a \times f(a) = 12 \Leftrightarrow f(a) = \frac{12}{a}$
Assim, $f(x) = \frac{12}{x}$.

9.

9.1. **a)** $f(0) = 3 \times 0 + 2 = 2$

b) $f(2) = 3 \times 2 + 2 = 8$

c) $f(-1) = 3 \times (-1) + 2 = -1$

9.2. $f(x) = 23 \Leftrightarrow 3x + 2 = 23 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7$
Assim, o objeto cuja imagem é 23 é 7.

10.

10.1. **a)** $g(1) = 2 \times 1^2 + 1 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $g(-2) = 2 \times (-2)^2 + (-2) - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$

c) $g(2a) = 2 \times (2a)^2 + 2a - 1 = 8a^2 + 2a - 1$

d) $g(1 - a) = 2 \times (1 - a)^2 + (1 - a) - 1 =$
$= 2 \times (1 - 2a + a^2) + 1 - a - 1 =$
$= 2 - 4a + 2a^2 - a =$
$= 2a^2 - 5a + 2$

10.2. **a)** $g(x) = -1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = -1$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x = 0$
$\Leftrightarrow x(2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = -1$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$

b) $g(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 2$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{4}$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{3}{2}$

c) $g(x) = -\frac{9}{8} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = -\frac{9}{8}$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x + \frac{1}{8} = 0$
$\Leftrightarrow 16x^2 + 8x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (4x + 1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

11.

11.1. $20 + 3{,}5 \times 15 = 72{,}5$
O cliente paga 72,5 euros por um serviço de 3 horas e 30 minutos.

11.2. $55 = 20 + 15 + 15 + 5$
$5 = \frac{1}{3} \times 15$ e $\frac{1}{3} \times 60 = 20$
Assim, se o cliente pagou 55 euros, então o serviço durou 2 horas e 20 minutos.

11.3. Sendo x a duração do serviço em horas e p o respetivo preço: $p = 20 + 15 \times x$.

12.

12.1. $D_a = \mathbb{R}$

12.2. $D_b = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

Cálculo auxiliar
$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

12.3. $D_c = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-3, 0\}$

Cálculo auxiliar
$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

12.4. $D_d = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

12.5. $D_e = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 2x^2 + x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$

Cálculo auxiliar
$x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x + 1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

12.6. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0\} = [-3, +\infty[$

Cálculo auxiliar
$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

12.7. $D_g = \{x \in \mathbb{R}: -x + 2 \geq 0\} =]-\infty, -2]$

Cálculo auxiliar
$-x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2$

12.8. $D_h = \mathbb{R}$

12.9. $D_i = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 1 > 0\} = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Cálculo auxiliar
$3x + 1 > 0 \Leftrightarrow 3x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

12.10. $D_j = \{x \in \mathbb{R}: -x + 1 \geq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\} =]-\infty, 1]\backslash\{-2\}$

Cálculo auxiliar
$-x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$

12.11. $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \geq 0 \wedge 4x + 5 > 0\} = [1, +\infty[$

Cálculo auxiliar
$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
$4x + 5 > 0 \Leftrightarrow 4x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{4}$

12.12. $D_l = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 3 \geq 0 \wedge -3x + 4 > 0\} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right[$

Cálculo auxiliar
$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$
$-3x + 4 > 0 \Leftrightarrow -3x > -4 \Leftrightarrow 3x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$

13.

13.1. O gráfico apresentado representa uma função, pois a cada valor de x corresponde um e um só valor de y.
$D_f = [-2, 3[$
$D'_f = [-2, 2]$

13.2. O gráfico apresentado representa uma função, pois a cada valor de x corresponde um e um só valor de y.
$D_f =]-2, 2[$
$D'_f =]-2, 3]$

13.3. O gráfico apresentado não representa uma função, pois existem valores de x aos quais corresponde mais do que um valor de y.

13.4. O gráfico apresentado representa uma função, pois a cada valor de x corresponde um e um só valor de y.
$D_f =]-4, +\infty[$
$D'_f =]-2, 1]$

14.

14.1. $D_f = [-5, 5]\backslash\{1\}$
$D'_f = [-2, 3]$

14.2. $f(-2) = 0$

14.3. $f(3) = 0$

14.4. $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = -5$
O objeto cuja imagem é 3 é –5.

14.5. $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -4$
A solução da equação é –4.

15.

15.1. $D_f = [-4, 6]$
$D'_f = [-2, 3]$

15.2. a) $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$
Os objetos cuja imagem é –1 são –3 e 3.

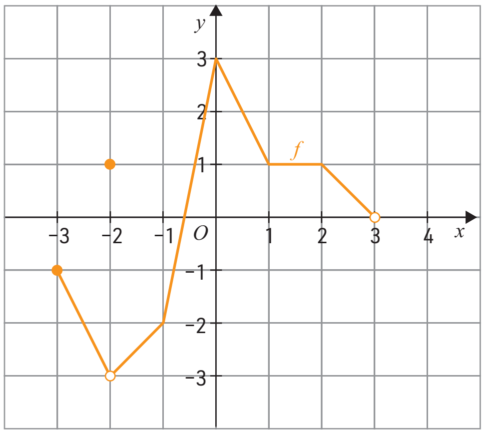
b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1] \cup \{4, 6\}$
Os objetos cuja imagem é 1 são os elementos do conjunto $[0, 1] \cup \{4, 6\}$.

15.3. Uma vez que $1 < \sqrt{3} < 2$, a equação $f(x) = \sqrt{3}$ tem duas soluções.

15.4. $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções para $k \in \{-1\} \cup]1, 3[$.

15.5. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in [-4, 0[\cup]1, 4[$
O conjunto-solução é $[-4, 0[\cup]1, 4[$.

16. Por exemplo:



17.
17.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$
Os zeros de f são -1 e 0.

17.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0] \cup \{2\}$
Os zeros de g são os elementos de $]-2, 0] \cup \{2\}$.

17.3. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$
Os zeros de h são -2 e 0.

17.4. $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
Os zeros de k são 0 e 3.

17.5. A função i não tem zeros.

17.6. $j(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4 \vee x = 7$
Os zeros de j são -2, 2, 4 e 7.

18.
18.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
O zero de f é $-\frac{1}{2}$.

18.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$
Condição impossível em $\mathbb{R}$.
A função g não tem zeros.

18.3. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$
Os zeros de h são -2 e 2.

18.4. $i(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$
O zero de i é 2.

18.5. $j(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$
$\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow 3x = 0 \vee x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
Os zeros de j são 0 e 2.

18.6. $k(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 5) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$
Os zeros de k são 0 e 5.

18.7. $l(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0$
$\Leftrightarrow x(x^2 + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{x^2 + 3 = 0}_{\text{Condição impossível em } \mathbb{R}}$
$\Leftrightarrow x = 0$
O zero de l é 0.

18.8. $m(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2\,(x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$
Os zeros de m são -3 e 0.

19.
19.1. Os zeros da função f são -5, 0 e 3.
A função f é positiva em $]-5, 0[\cup]3, 8[$.
A função f é negativa em $]0, 3[$.

19.2. Os zeros da função g são -3, -1, 1 e 4.
A função g é positiva em $]-\infty, -3[\cup]-1, 0[\cup]1, 4[$.
A função g é negativa em $]-3, -1[\cup]0, 1[\cup]4, 5[$.

19.3. Os zeros da função h são -6, 0 e 5.
A função h é positiva em $]-6, 0[\cup]0, 5[$.
A função h é negativa em $[-7, -6[\cup]5, +\infty[$.

19.4. Os zeros da função i são -2, -1, 1 e 2.
A função i é positiva em $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$.
A função i é negativa em $]-2, -1\,[\cup]1, 2[$.

19.5. O zero de j é 1.
A função j é positiva em $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
A função j é negativa em $]0, 1[$.

19.6. Os zeros da função k são -1 e 4.
A função k é positiva em $[-5, -1[\cup]0, 4[$.
A função k é negativa em $]-1, 0[\cup]4, +\infty[$.

20.
20.1. $D_f = \mathbb{R}$; $D'_f =]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$
$D_g = \mathbb{R}$; $D'_g = [-2, +\infty[$
$D_h = \mathbb{R}$; $D'_h = \mathbb{R} \backslash \{2\}$

20.2.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Variação de f	↘	2	→	-2	↘

A função f é decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é constante em $]-1, 1[$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Variação de g	↘	0	↗	-2	↗

A função g é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $]0, 2[$ e em $[2, +\infty[$.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Variação de h	↘	1	→	1	↘

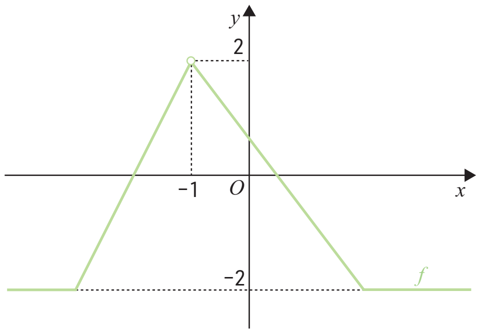
A função h é decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $]-2, +\infty[$ e é constante em $[-2, 2]$.

20.3. a) Por exemplo, $]-\infty, -1]$.

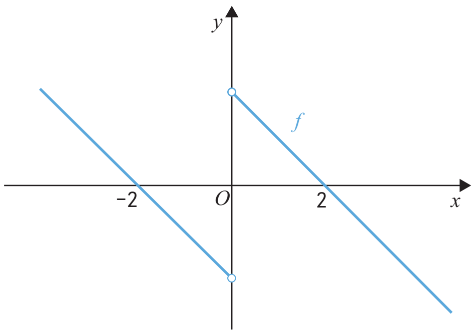
b) Por exemplo, $[2, 4[$.

21.

21.1. Por exemplo:



21.2. Por exemplo:



22. **A.** A afirmação é verdadeira, pois existe uma vizinhança de $x = -6$ na qual todos os objetos têm imagens superiores a $f(-6)$.

B. A afirmação é falsa, pois qualquer que seja a vizinhança de $x = -5$ que se considere existem sempre objetos nessa vizinhança cujas imagens são inferiores a $f(-5)$.

C. A afirmação é falsa, pois qualquer que seja a vizinhança de $x = -2$ que se considere existem sempre objetos nessa vizinhança cujas imagens são superiores a $f(-2)$.

D. A afirmação é falsa, pois há objetos do domínio cuja imagem é superior a $f(2)$.

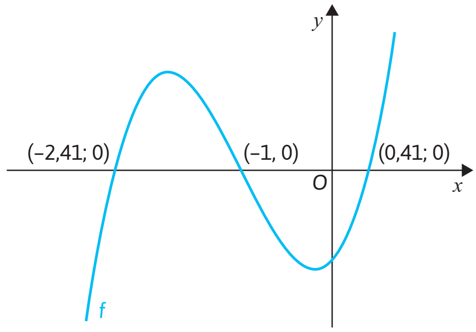
E. A afirmação é verdadeira, pois não há qualquer outro objeto do domínio cuja imagem seja inferior a $f(5)$.

F. A afirmação é falsa, pois 7 não pertence ao domínio da função.

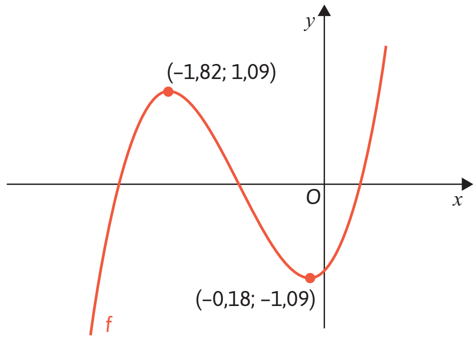
23. A função f tem mínimo relativo 0 para $x \in]-1, 1[$ e tem máximo relativo 0 para $x \in]-1, 1[$.
A função g tem mínimo relativo 0 para $x = 0$ e tem mínimo absoluto -2 para $x = 2$.
A função h tem mínimo relativo 1 para $x \in [-2, 2]$ e tem máximo relativo 1 para $x \in]-2, 2[$.

24.

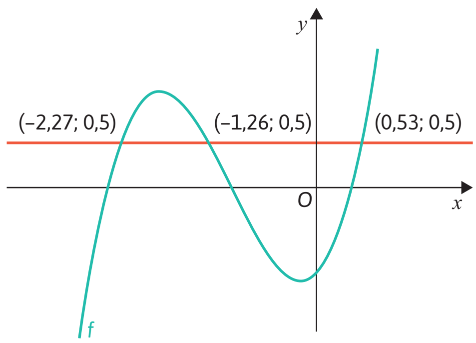
24.1. Os zeros de f são: $-2{,}41$; -1 e $0{,}41$.



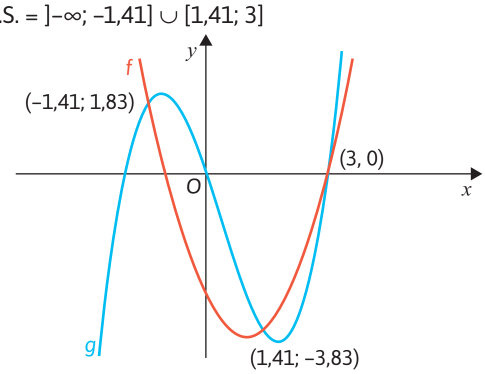
24.2. A função f tem máximo 1,09 para $x = -1{,}82$ e tem mínimo $-1{,}09$ para $x = -0{,}18$.



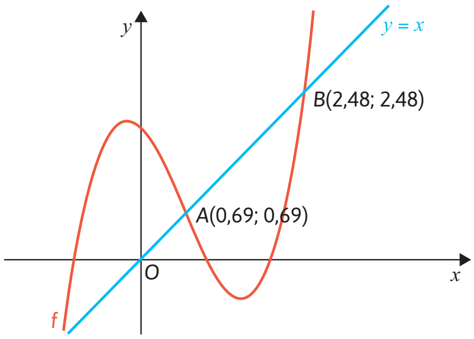
24.3. Os pontos do gráfico cuja ordenada é $\frac{1}{2}$ são os pontos de abcissas $-2{,}27$; $-1{,}26$ e $0{,}53$.



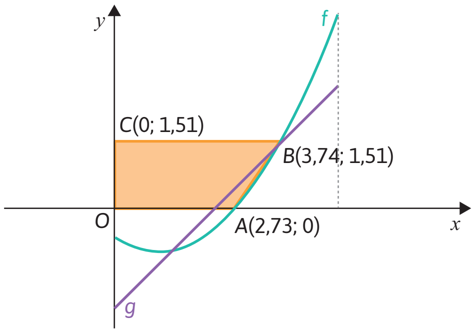
25. C.S. $=]-\infty; -1{,}41] \cup [1{,}41; 3]$



26. $d = \overline{AB} \approx \sqrt{(2{,}48 - 0{,}69)^2 + (2{,}48 - 0{,}69)^2} \approx 2{,}5$ u.c.



27. $A = \frac{(\overline{BC} + \overline{OA}) \times \overline{OC}}{2} \approx \frac{(3{,}74 + 2{,}73) \times 1{,}51}{2} \approx 4{,}9$ u.a.



Exercícios globais – páginas 57 a 60

28. Opção (B)
Uma reta paralela ao eixo Ox representa sempre uma função, já que a cada abcissa faz corresponder uma e uma só ordenada.
Já para cada um dos outros conjuntos de pontos indicados, existe sempre, pelo menos, uma abcissa à qual corresponde mais do que uma ordenada.

29. Opção (C)
No gráfico A, o contradomínio da função aí representada é $\mathbb{R}^-$.
No gráfico B, o contradomínio da função aí representada é $\mathbb{R}_0^+$.
No gráfico D, o domínio da função aí representada é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

30. Opção (D)
Nos gráficos A, B e C existem objetos cujas imagens são superiores a $f(0)$.

31. O gráfico da função *f* é o representado na opção (A).
A opção (B) não representa a função *f*, pois a distância entre o ponto *P* e a origem do referencial nunca é zero, ao contrário do que aí está representado.
A opção (C) não representa a função *f*, uma vez que o valor de x para o qual a distância entre o ponto *P* e a origem do referencial é menor é zero, o que não se encontra representado neste gráfico, já que aqui a menor distância ocorre para um valor de x positivo.
A opção (D) não representa a função *f*, já que não apresenta valores negativos de x e a abcissa de *P* pode tomar valores negativos, já que este ponto percorre toda a reta *r*.

32.

32.1. $D_f = D_g = [-5, 5]$
$D'_f = D'_g = [-2, 4]$

32.2. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
C.S. $= \{2\}$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = 5$
C.S. $= \{-3, 3, 5\}$

c) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [-2, 1]$
C.S. $= [-2, 1]$

d) $g(x) = -2 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 4$
C.S. $= \{-5, 4\}$

e) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$
C.S. $= \{-2, 4\}$

f) $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-5, 3]$
C.S. $= [-5, 3]$

g) $g(x) < 2 \Leftrightarrow x \in [-5, -1[\cup]2, 5]$
C.S. $= [-5, -1[\cup]2, 5]$

h) $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 3] \cup \{5\}$
C.S. $= [-3, 3] \cup \{5\}$

i) $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow x \in [-5, -2] \cup \{4\}$
C.S. $= [-5, -2] \cup \{4\}$

33.

33.1. $D_f =]-\infty, 9]$
$D'_f =]-\infty, 3] \cup \{4\}$

33.2. Os zeros de *f* são –2, 6 e 9.

33.3. A função *f* é crescente em $]-\infty, -1]$, em $]0, 3]$ e em $[8, 9]$ e é decrescente em $[-1, 0[$ e em $[3, 8]$.
A função *f* tem máximo relativo 1 para $x = -1$, tem máximo absoluto 4 para $x = 0$, tem máximo relativo 3 para $x = 3$ e tem máximo relativo 0 para $x = 9$.
A função *f* tem mínimo relativo –2 para $x = 8$.

33.4. A função *f* é negativa em $]-\infty, -2[\cup]6, 9[$ e é positiva em $]-2, 6[$.

33.5. a) C.S. $= \{0\} \cup]1, 5[$

b) C.S. $=]-\infty, -4] \cup \{8\}$

c) C.S. $=]-\infty, 0[\cup]0, 9]$

33.6. $f(x) = k$ tem pelo menos três soluções para $k \in]-2, 1]$.

34.

34.1. $D_g = [-2, +\infty[$
$D'_g = \{-2\} \cup]-1, +\infty[$

34.2. Interseção com o eixo Ox: (3, 0)
Interseção com o eixo Oy: (0, –2)

34.3. C.S. $=]-1, 2]$

34.4.

x	–2		–1		2		3	$+\infty$
$g(x)$	3	+	1	–	–2	–	0	+

34.5. A função g tem máximo relativo 3 para $x = -2$ e tem máximo relativo -2 para $x \in]-1, 2[$. A função g tem mínimo absoluto -2 para $x \in]-1, 2]$.

35.

35.1. $D'_f = [-3, -1] \cup [0, 2]$

35.2.

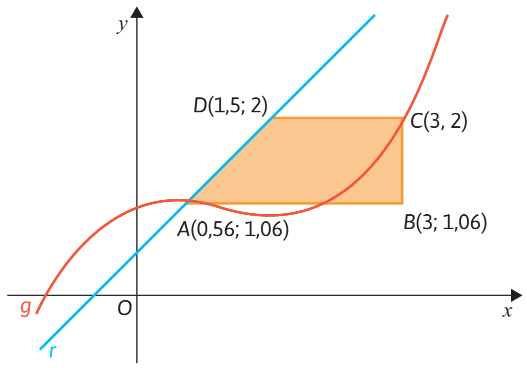
x	-4		-2		0		3		5		7		9
Variação de f	n.d.	↘	0	↗	n.d.	↘	0	→	2	↗	-1	↘	-3

A função f tem mínimo relativo 0 para $x = -2$ e para $x = 3$, tem mínimo relativo 2 para $x \in]3, 5[$, tem mínimo absoluto -3 para $x = 9$, tem máximo absoluto 2 para $x \in]3, 5]$, tem máximo relativo -1 para $x = 7$.

35.3. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-4, 0[\cup]0, 5]$

35.4. Por exemplo, $]-4, -2[$.

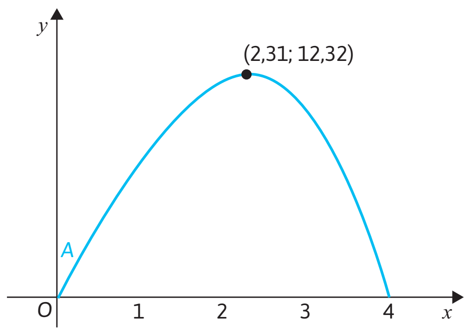
36. $A_{[ABCD]} \approx \dfrac{(3 - 0{,}56) + (3 - 1{,}5)}{2} \times (2 - 1{,}06) \approx 1{,}9$ u.a.



37. $B(x, f(x))$

$B\left(x, 8 - \dfrac{x^2}{2}\right)$

$A_{[OABC]} = x \times \left(8 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 8x - \dfrac{x^3}{2}$



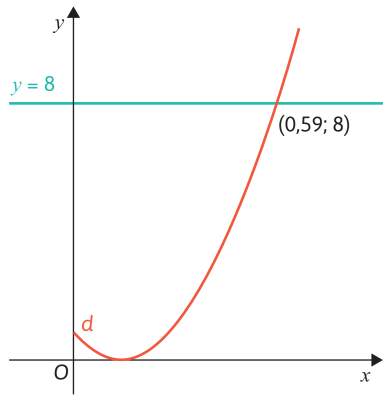
Assim, o valor da abcissa de B para o qual a área é máxima é 2,31.

38. $P(x, f(x)), x > 0, f(x) > 0$

$\overline{OP} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (f(x) - 0)^2} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 7x + 1)^2 = 8$

Seja $d(x) = x^2 + (x^2 - 7x + 1)^2$.



$P(0{,}59; 8)$

2. Funções polinomiais de grau não superior a dois

Exercícios – páginas 61 a 67

1.

1.1. $f(0) = 4$

$f(-2) = 0$

$a = \dfrac{4 - 0}{0 - (-2)} = \dfrac{4}{2} = 2$

Assim, $f(x) = 2x + 4$.

1.2. $g(0) = 1$

$g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$

$a = \dfrac{1 - 0}{0 - \dfrac{1}{3}} = -3$

Assim, $g(x) = -3x + 1$.

1.3. $h(x) = 1$

1.4. $i(0) = -2$

$i(-1) = 0$

$a = \dfrac{-2 - 0}{0 - (-1)} = -2$

Assim, $i(x) = -2x - 2$.

2.

2.1. Como f é crescente, então $a > 0$, por exemplo, $a = 1$.
Assim, $f(x) = x + b$.
$f(3) = 0 \Leftrightarrow 3 + b = 0 \Leftrightarrow b = -3$
Então, $f(x) = x - 3$, por exemplo.

2.2. Como f é negativa em $]2, +\infty[$, então $f(2) \leq 0$ e $a < 0$, por exemplo, $f(2) = 0$ e $a = -1$.
Assim, $f(x) = -x + b$.
$f(1) = 1 \Leftrightarrow -1 + b = 1 \Leftrightarrow b = 2$
Então, $f(x) = -x + 2$, por exemplo.

3.

3.1. $f(3) = 0 \Leftrightarrow (2k + 3) \times 3 + k = 0$

$\Leftrightarrow 6k + 9 + k = 0$

$\Leftrightarrow 7k = -9$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{9}{7}$

O valor de k é $-\dfrac{9}{7}$.

3.2. $f(-2) = 0 \wedge 2k + 3 > 0 \Leftrightarrow (2k + 3) \times 2 + k = 0 \wedge k > -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 4k + 6 + k = 0 \wedge k > -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 5k = -6 \wedge k > -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow k = -\frac{5}{6} \wedge k > -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow k = -\frac{5}{6}$

O valor de k é $-\frac{5}{6}$.

3.3. $f(-2) = 5 \Leftrightarrow (2k + 3) \times (-2) + k = 5$

$\Leftrightarrow -4k - 6 + k = 5$

$\Leftrightarrow -3k = 11$

$\Leftrightarrow k = -\frac{11}{3}$

O valor de k é $-\frac{11}{3}$.

3.4. $2k + 3 < 0 \Leftrightarrow 2k < -3 \Leftrightarrow k < -\frac{3}{2}$

Os valores de k são os elementos do conjunto $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$.

3.5. $f(0) = 3 \Leftrightarrow (2k + 3) \times 0 + k = 3 \Leftrightarrow k = 3$

O valor de k é 3.

4. $f(-1) = 45$

$f(3) = 35$

$a = \frac{45 - 35}{-1 - 3} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$

Assim, $f(x) = -\frac{5}{2}x + b$.

$f(-1) = 45 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \times (-1) + b = 45$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} + b = 45$

$\Leftrightarrow b = 45 - \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow b = \frac{85}{2}$

Logo, $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{85}{2}$.

5.

5.1.

x	**−2**	−1	$\frac{1}{2}$	2	**10**
$f(x)$	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{5}{4}}$	**2**	6

Cálculos auxiliares

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$
- $f(-1) = \frac{1}{2} \times (-1) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$
- $f(2) = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 1 + 1 = 2$
- $f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 5 \Leftrightarrow x = 10$

5.2. Uma vez que os gráficos de f e g são paralelos, então $g(x) = \frac{1}{2}x + b$.

$g(-2) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times (-2) + b = 5$

$\Leftrightarrow -1 + b = 5$

$\Leftrightarrow b = 6$

Logo, $g(x) = \frac{1}{2}x + 6$.

6.

6.1. $v(20) = 343{,}4 \Leftrightarrow 0{,}5 \times 20 + b = 343{,}4$

$\Leftrightarrow 10 + b = 343{,}4$

$\Leftrightarrow b = 333{,}4$

6.2. $v(10) = 0{,}5 \times 10 + 333{,}4 = 338{,}4$

Quando a temperatura do ar é 10 ºC, a velocidade do som é de 338,4 ms^{-1}.

6.3. $v(t) = 349{,}2 \Leftrightarrow 0{,}5t + 333{,}4 = 349{,}2$

$\Leftrightarrow 0{,}5t = 15{,}8$

$\Leftrightarrow t = 31{,}6$

No instante em que a velocidade do som é de 349,2 ms^{-1}, a temperatura do ar é de 31,6 ºC.

7.

7.1. O ponto A tem coordenadas (0; 77,46), o que significa que, em 2000, o preço médio de um apartamento, no Porto, era de 77,46 mil euros.

O ponto B tem coordenadas (19; 200,7), o que significa que, em 2019, o preço médio de um apartamento, no Porto, era de 200,7 mil euros.

7.2. $m = \frac{200{,}7 - 77{,}46}{19 - 0} \approx 6{,}49$

Este valor significa que entre 2000 e 2019 o preço médio de um apartamento, no Porto, aumentou, aproximadamente, 6490 euros por ano.

7.3. $y = 6{,}49x + b$

Como (0; 77,46) pertence ao gráfico da função tem-se $b = 77{,}46$.

Assim, $y = 6{,}49x + 77{,}46$.

7.4. $100 = 6{,}49x + 77{,}46 \Leftrightarrow 6{,}49x = 25{,}54$

Logo, $x \approx 3{,}47$.

Assim, o preço médio de um apartamento, no Porto, atingiu os 100 000 euros, em 2003.

7.5. $y = 6{,}49 \times 30 + 77{,}46 = 272{,}16$

Em 2030, o preço médio de um apartamento, no Porto, será de 272,16 mil euros.

8. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x + 3 = -x + 2$

$\Leftrightarrow 3x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$

Logo, $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Logo, $B\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

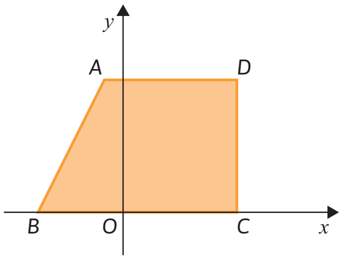
Logo, $C(2, 0)$.

Como D tem a mesma abcissa de C e a mesma ordenada de A, então $D\left(2, \frac{7}{3}\right)$.

$\overline{BC} = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$

$\overline{AD} = 2 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$

$\overline{CD} = \frac{7}{3}$



Assim:

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \text{CD} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{245}{36}$ u.a.

9.

9.1. $V(-1, -2)$

Eixo de simetria: $x = -1$

Concavidade voltada para cima.

$D'_f = [-2, +\infty[$

f é decrescente em $]-\infty, -1]$ e é crescente em $[-1, +\infty[$.

$f(x) = 2(x + 1)^2 - 2 = 2(x^2 + 2x + 1) - 2 =$
$= 2x^2 + 4x + 2 - 2 =$
$= 2x^2 + 4x$

Logo, $f(x) = 2x^2 + 4x$.

9.2. $V(1, 6)$

Eixo de simetria: $x = 1$

Concavidade voltada para baixo.

$D'_g =]-\infty, 6]$

g é crescente em $]-\infty, 1]$ e é decrescente em $[1, +\infty[$.

$g(x) = -3(x - 1)^2 + 6 = -3(x^2 - 2x + 1) + 6 =$
$= -3x^2 + 6x - 3 + 6 =$
$= -3x^2 + 6x + 3$

Logo, $g(x) = -3x^2 + 6x + 3$.

9.3. $V(2, -4)$

Eixo de simetria: $x = 2$

Concavidade voltada para cima.

$D'_h = [-4, +\infty[$

h é decrescente em $]-\infty, 2]$ e é crescente em $[2, +\infty[$.

$h(x) = (x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$

Logo, $h(x) = x^2 - 4x$.

9.4. $V(-3, 0)$

Eixo de simetria: $x = -3$

Concavidade voltada para baixo.

$D'_i =]-\infty, 0]$

i é crescente em $]-\infty, -3]$ e é decrescente em $[-3, +\infty[$.

$i(x) = -(x + 3)^2 = -(x^2 + 6x + 9) =$
$= -x^2 - 6x - 9$

Logo, $i(x) = -x^2 - 6x - 9$.

9.5. $V(0, 1)$

Eixo de simetria: $x = 0$

Concavidade voltada para cima.

$D'_j = [1, +\infty[$

j é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$.

Logo, $j(x) = x^2 + 1$.

9.6. $V(0, 4)$

Eixo de simetria: $x = 0$

Concavidade voltada para baixo.

$D'_k =]-\infty, 4]$

k é crescente em $]-\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty[$.

Logo, $k(x) = -x^2 + 4$.

10. **II.** $y = -2(x - 1)^2 + 3$

A parábola que representa esta função tem a concavidade voltada para baixo e vértice de coordenadas (1, 3). Logo, a função II corresponde ao gráfico *b*.

IV. $y = -(x + 1)^2 + 3$

A parábola que representa esta função tem a concavidade voltada para baixo e vértice de coordenadas (–1, 3). Logo, a função IV corresponde ao gráfico *d*.

I. $y = 2(x - 1)^2 + 3$

A parábola que representa esta função tem a concavidade voltada para cima e vértice de coordenadas (1, 3), a sua abertura é menor do que a da parábola que representa a função III. Logo, a função I corresponde ao gráfico *c*.

III. $y = (x - 1)^2 + 3$

A parábola que representa esta função tem a concavidade voltada para cima e vértice de coordenadas (1, 3), a sua abertura é maior do que a da parábola que representa a função I. Logo, a função III corresponde ao gráfico *a*.

11.

11.1. Como a parábola tem a concavidade voltada para cima, então $a > 0$. Uma vez que a parábola interseta o eixo Oy num ponto de ordenada negativa, então $c < 0$.

11.2. Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, então $a < 0$. Uma vez que a parábola interseta o eixo Oy num ponto de ordenada positiva, então $c > 0$.

11.3. Como a parábola tem a concavidade voltada para cima, então $a > 0$. Uma vez que a parábola interseta o eixo Oy num ponto de ordenada positiva, então $c > 0$.

11.4. Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, então $a < 0$. Uma vez que a parábola interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas (0, 0), então $c = 0$.

12.

12.1. $x_V = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$

$y_V = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$

Logo, $V(2, 1)$ e $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

12.2. $x_V = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$

$y_V = g(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 1 = -2$

Logo, $V(1, -2)$ e $g(x) = (x - 1)^2 - 2$.

12.3. $x_V = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = 3$

$y_V = h(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4$

Logo, $V(3, -4)$ e $h(x) = (x - 3)^2 - 4$.

12.4. $x_V = \dfrac{-(-4)}{2 \times (-1)} = -2$

$y_V = i(-2) = -(-2)^2 - 4 \times (-2) - 2 = 2$

Logo, $V(-2, 2)$ e $i(x) = -(x + 2)^2 + 2$.

12.5. $x_V = \dfrac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$

$y_V = j(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = -1$

Logo, $V(1, -1)$ e $j(x) = 2(x - 1)^2 - 1$.

12.6. $x_V = \dfrac{-(-12)}{2 \times (-3)} = -2$

$y_V = k(-2) = -3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) - 17 = -5$

Logo, $V(-2, -5)$ e $k(x) = -3(x + 2)^2 - 5$.

13.

13.1. $\begin{cases} f(-1) = -24 \\ f(2) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 14 = -24 \\ 4a + 2b - 14 = 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 10 \\ 4(b - 10) + 2b - 14 = 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 6b - 54 = 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 6b = 72 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 12 \end{cases}$

13.2. Ponto de interseção com o eixo Oy:

$f(0) = -14$

O ponto de interseção com o eixo Oy tem coordenadas $(0, -14)$.

13.3. $f(k) = -2k \Leftrightarrow 2k^2 + 12k - 14 = -2k + 2$

$\Leftrightarrow 2k^2 + 14k - 16 = 0$

$\Leftrightarrow k^2 + 7k - 8 = 0$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{-7 \pm 9}{2}$

$\Leftrightarrow k = 1 \vee k = -8$

14.

14.1. Uma vez que as coordenadas do vértice da parábola que representa a função são $\left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$, tem-se que $f(x) = a\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 5$.

Como a parábola interseta o eixo das abcissas em -2, então:

$f(-2) = 0 \Leftrightarrow a\left(-2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{25}{4}a + 5 = 0$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{4}{5}$

Assim:

$f(x) = -\dfrac{4}{5}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 5 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{5}\left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) + 5$

$\Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}x - \dfrac{1}{5} + 5$

$\Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}x + \dfrac{24}{5}$

14.2. Como o vértice da parábola que representa f é $V(-2, 3)$, então $f(x) = a(x + 2)^2 + 3$.

Uma vez que o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 5, tem-se:

$f(0) = 5 \Leftrightarrow a(0 + 2)^2 + 3 = 5 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Assim:

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x + 2)^2 + 3 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 3$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2 + 3$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

14.3. Como o contradomínio de f é $]-\infty, 2]$, então $f(x) = a(x - h)^2 + 2$.

Por outro lado, a parábola que representa a função f tem como eixo de simetria $x = 3$, portanto $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$.

Além disso:

$f(-2) = 1 \Leftrightarrow a(-2 - 3)^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow 25a = -1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{25}$

Assim:

$f(x) = -\dfrac{1}{25}(x - 3)^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{25}(x^2 - 6x + 9) + 2$

$\Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{6}{25}x - \dfrac{9}{25} + 2$

$\Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{6}{25}x + \dfrac{41}{25}$

15.

15.1. $f(-4) = f(2) = 2$, então $x_V = \dfrac{-4 + 2}{2} = -1$.

Logo, $f(x) = a(x + 1)^2 + k$.

Além disso, $f(0) = 4$.

Assim:

$\begin{cases} a(0 + 1)^2 + k = 4 \\ a(2 + 1)^2 + k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + k = 4 \\ 9a + k = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 - a \\ 9a + 4 - a = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 - a \\ 8a = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 + \dfrac{1}{4} \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{17}{4} \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Então, $f(x) = -\dfrac{1}{4}(x + 1)^2 + \dfrac{17}{4}$.

15.2. $D'_f = \left]-\infty, \dfrac{17}{4}\right]$

15.3. $g(x) = -f(x - 1) - 3 = -\left(-\dfrac{1}{4}(x - 1 + 1)^2 + \dfrac{17}{4}\right) - 3 =$

$= \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{17}{4} - 3 =$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{29}{4}$

Assim, $V_g\left(0, -\frac{29}{4}\right)$.

16.

16.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 25$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$
Os zeros de f são -5 e 5.

16.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6 = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{3x^2 = -6}_{\text{Condição impossível}}$
A função não tem zeros.

16.3. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x-5)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5$
O zero de h é 5.

16.4. $i(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 0$
$\Leftrightarrow 2x(x+3) = 0$
$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$
Os zeros de i são -3 e 0.

16.5. $j(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$
O zero de j é 3.

16.6. $k(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$
Os zeros de k são -2 e 1.

16.7. $l(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2}$
$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2$
Os zeros de l são -5 e 2.

16.8. $m(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{-2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{-2}$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$
Os zeros de m são -1 e 3.

16.9. $n(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18 + 24 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2}$
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$
Os zeros de n são 2 e 4.

16.10. $o(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-6)}}{-1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{-1}$
$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = -2$
Os zeros de o são -6 e -2.

17. $\Delta = 3^2 - 4 \times k \times 1 = 9 - 4k$

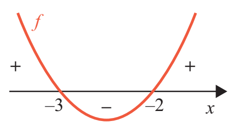
17.1. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 9 - 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{4}$
O valor de k é $\frac{9}{4}$.

17.2. $\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4k > 0 \Leftrightarrow -4k > -9 \Leftrightarrow 4k < 9 \Leftrightarrow k < \frac{9}{4}$
Além disso, uma vez que f é uma função quadrática, $k \neq 0$.
Os valores de k são os elementos do conjunto $]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{9}{4}\right[$.

17.3. $k > 0 \wedge \Delta < 0 \Leftrightarrow k > 0 \wedge 9 - 4k < 0$
$\Leftrightarrow k > 0 \wedge -4k < -9$
$\Leftrightarrow k > 0 \wedge k > \frac{9}{4}$
$\Leftrightarrow k > \frac{9}{4}$
Os valores de k são os elementos do conjunto $\left]\frac{9}{4}, +\infty\right[$.

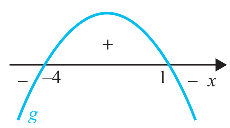
18.

18.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2}$
$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3$



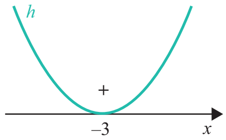
A função f é positiva em $]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$ e é negativa em $]-3, -2[$.

18.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4}}{2 \times (-1)}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{-2}$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$



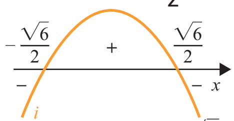
A função g é negativa em $]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$ e é positiva em $]-4, 1[$.

18.3. $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -3$



A função h é positiva em $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

18.4. $i(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 3$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

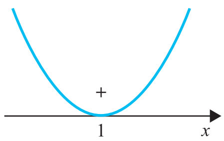


A função i é negativa em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$ e é positiva em $\left]-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$.

19.

19.1. $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 1$

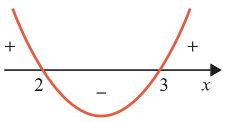
Cálculo auxiliar
$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



C.S. $=]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

19.2. $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 3$

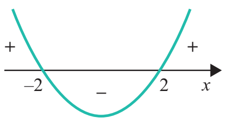
Cálculo auxiliar
$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$



C.S. $=]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

19.3. $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$

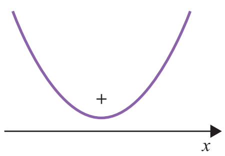
Cálculo auxiliar
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$



C.S. $=]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

19.4. $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

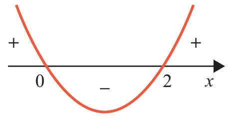
Cálculo auxiliar
$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
Condição impossível em $\mathbb{R}$.



C.S. $= \mathbb{R}$

19.5. $x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

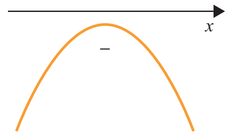
Cálculo auxiliar
$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$



C.S. $= [0, 2]$

19.6. $-x^2 - 2 \geq 0$

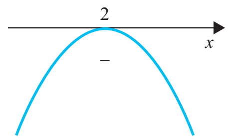
Cálculo auxiliar
$-x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$
Condição impossível em $\mathbb{R}$.



C.S. $= \varnothing$

19.7. $-(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 2$

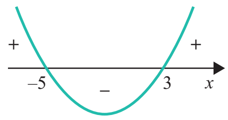
Cálculo auxiliar
$-(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$



C.S. $= \{2\}$

19.8. $x^2 + x - 3 \geq -x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -5 \vee x \geq 3$

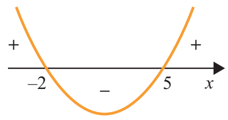
Cálculo auxiliar
$x^2 + 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 15}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$



C.S. $=]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$

19.9. $x(x - 3) < 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x < 5$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2}$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$



C.S. $=]-2, 5[$

20.

20.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x - 21 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-3, 7\}$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 10}{2}$
$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -3$

20.2. $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 11x + 30 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-6, -5\}$

Cálculo auxiliar
$x^2 + 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times 1 \times 30}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm 1}{2}$
$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = -5$

20.3. $D_h = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge x^2 - 2x + 1 \neq 0\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

20.4. $D_i = \{x \in \mathbb{R}: x + 2 \geq 0 \wedge x^2 - 3x - 18 \neq 0\} = [-2, 6[\cup]6, +\infty[$

Cálculos auxiliares

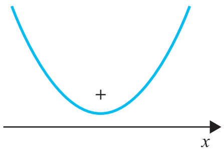
- $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$
- $x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-18)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 9}{2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -3$

20.5. $D_j = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 \geq 0\} = \mathbb{R}$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$

Condição impossível em $\mathbb{R}$.



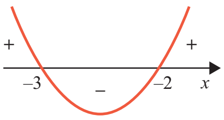
20.6. $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 6 \geq 0\} =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2}$

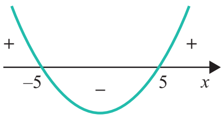
$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$



20.7. $D_l = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 25 \geq 0\} =]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$

Cálculo auxiliar

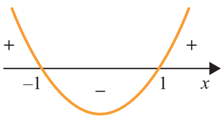
$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$



20.8. $D_m = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0 \} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Cálculo auxiliar

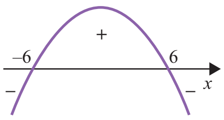
$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$



20.9. $D_n = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 36 > 0\} =]-6, 6[$

Cálculo auxiliar

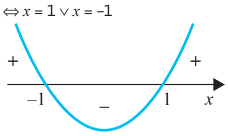
$-x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -6$



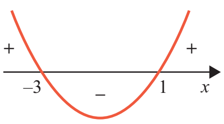
20.10. $D_o = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0 \wedge x^2 + 2x - 3 \geq 0 \} =$
$=]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$

Cálculos auxiliares

- $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$



- $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
- $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$



- $x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

Assim:
$(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[) =$
$=]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$

21.

21.1. $f(x) = a(x + 1)^2 - 3$

$f(-4) = 0 \Leftrightarrow a(-4 + 1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 9a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

Assim, $f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 - 3$.

21.2. A função f é decrescente em $]-\infty, -1]$ e é crescente em $[-1, +\infty[$. A função f tem mínimo absoluto -3 para $x = -1$.

21.3. Como o gráfico de f é uma parábola de vértice $(-1, 3)$ e concavidade voltada para cima, tem-se que $D'_f = [3, +\infty[$.

21.4. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -f(-2x) = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{3}(-2x + 1)^2 - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(4x^2 - 4x + 1) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

21.5. $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x + 1)^2 - 3 \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1) - 4 \geq 0$

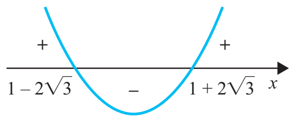
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 12 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 11 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 11}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{3} \vee x = 1 - 2\sqrt{3}$



Assim, C.S. $=]-\infty, 1 - 2\sqrt{3}] \cup [1 + 2\sqrt{3}, +\infty[$.

22.

22.1. Sabe-se que os pontos $A(-6, 0)$ e $B(2, 0)$ pertencem ao gráfico de f. Logo, os zeros de f são -6 e 2. Assim, $f(x) = a(x + 6)(x - 2)$.

Como o ponto $C(0, 6)$ também pertence ao gráfico da função:

$f(0) = 6 \Leftrightarrow a(0 + 6)(0 - 2) = 6$

$\Leftrightarrow -12a = 6$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Logo:

$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 6)(x - 2) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x - 12) =$

$= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6.$

22.2. a) $g(x) = f(x + 1) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 6 =$

$= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 2x - 2 + 6 =$

$= -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} - 2x - 2 + 6 =$

$= -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(x^2 + 6x) + \frac{7}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9) + \frac{7}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + \frac{9}{2} + \frac{7}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 8$

b) $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 8 \geq 0$

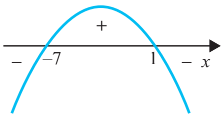
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2} \geq 0$

Cálculo auxiliar

$-\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow x = -7 \vee x = 1$



Assim, C.S. = [−7, 1].

22.3. a) $h(x) = -f(x) - 2 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 - 2 =$

$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 8$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-8)}}{2 \times \frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{1}$

$\Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{5}$

Os zeros de h são $-2 - 2\sqrt{5}$ e $-2 + 2\sqrt{5}$.

b) $h(x) < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 8 < -2$

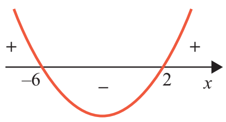
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 < 0$

Cálculo auxiliar

$\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-6)}}{2 \times \frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = -2 \pm 4$

$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$



Assim, C.S. =]−6, 2[.

23.

23.1. Seja y a medida da largura dos retângulos.

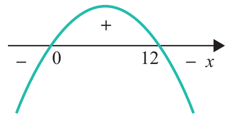
$2x + 2y = 24 \Leftrightarrow x + y = 12 \Leftrightarrow y = 12 - x$

Assim, $f(x) = x(12 - x)$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x(12 - x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 12[$

Cálculo auxiliar

$x(12 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$



Logo, $D_f =]0, 12[$.

23.2. $x_V = \frac{0 + 12}{2} = 6$

$y_V = f(6) = 6(12 - 6) = 36$

A área é máxima quando $x = 6$ e o seu valor é 36 cm^2.

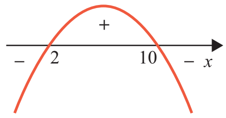
23.3. $f(x) \geq 20 \Leftrightarrow x(12 - x) \geq 20 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 20 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + 12x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times (-1) \times (-20)}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = 2$



$x \in [2, 10]$

23.4. $f(x) = (x + 2)^2 \Leftrightarrow x(12 - x) = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow -x^2 + 12x = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \vee x = 2 - \sqrt{2}$

24.

24.1. $x_V = \frac{-7{,}98}{2 \times (-5{,}7)} = 0{,}7$

$y_V = f(0{,}7) = -5{,}7 \times (0{,}7)^2 + 7{,}98 \times 0{,}7 \approx 2{,}8$

Assim, a altura máxima de um desses arcos é de 2,8 metros.

24.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -5{,}7x^2 + 7{,}98x = 0$

$\Leftrightarrow x(-5{,}7x + 7{,}98) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -5{,}7x + 7{,}98 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 5{,}7x = 7{,}98$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1{,}4$

Assim, as bases dos arcos distam entre si 1,4 metros.

24.3. $f(x) > 1{,}7 \Leftrightarrow -5{,}7x^2 + 7{,}98x > 1{,}7$

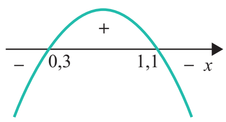
$\Leftrightarrow -5{,}7x^2 + 7{,}98x - 1{,}7 > 0$

Cálculo auxiliar

$-5{,}7x^2 + 7{,}98x - 1{,}7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7{,}98 \pm \sqrt{(7{,}98)^2 - 4 \times (-5{,}7) \times (-1{,}7)}}{2 \times (-5{,}7)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-7{,}98 \pm \sqrt{24{,}9204}}{-11{,}4}$

Logo, $x \approx 0{,}3 \vee x \approx 1{,}1$.



Assim, os valores de x para os quais a altura dos arcos é superior a 170 cm são os que pertencem ao intervalo]0,3; 1,1[, aproximadamente.

25.

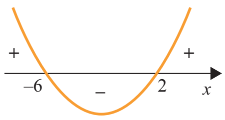
25.1. $\Delta < 0 \wedge 3 - k > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4(3-k) < 0 \wedge -k > -3$
$\Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 < 0 \wedge k < 3$
$\Leftrightarrow k \in]-6, 2[\cap]-\infty, 3[$
$\Leftrightarrow k \in]-6, 2[$

Cálculo auxiliar

$k^2 + 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 12}}{2}$

$\Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -6$



25.2. $\Delta > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4(3-k) > 0$
$\Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 > 0$
$\Leftrightarrow k \in]-\infty, -6[\cup]2, +\infty[$

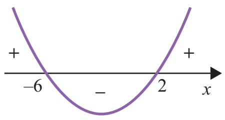
Além disso, uma vez que f é uma função quadrática, $k - 3 \neq 0$, ou seja, $k \neq 3$.
Assim, $k \in]-\infty, -6[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$.

Cálculo auxiliar

$k^2 + 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 12}}{2}$

$\Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -6$



25.3. $x_V = \frac{-k}{2(3-k)}$

$y_V = f(x_V) = (3-k) \times \left(\frac{-k}{2(3-k)}\right)^2 + k \times \left(\frac{-k}{2(3-k)}\right) + 1 =$

$= \frac{(3-k)k^2}{4(3-k)^2} - \frac{k^2}{2(3-k)} + 1 =$

$= \frac{k^2}{4(3-k)} - \frac{k^2}{2(3-k)} + 1 =$

$= \frac{k^2 - 2k^2 + 4(3-k)}{4(3-k)} =$

$= \frac{-k^2 - 4k + 12}{4(3-k)}$

Assim:

$3 - k < 0 \wedge \frac{-k^2 - 4k + 12}{4(3-k)} = 5$

$\Leftrightarrow -k < -3 \wedge -k^2 - 4k + 12 = 20(3-k)$

$\Leftrightarrow k > 3 \wedge -k^2 + 16k - 48 = 0$

$\Leftrightarrow k > 3 \wedge k = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \times 48}}{-2}$

$\Leftrightarrow k > 3 \wedge k = \frac{-16 \pm 8}{-2}$

$\Leftrightarrow k > 3 \wedge (k = 4 \vee k = 12)$

$\Leftrightarrow k = 4 \vee k = 12$

26.

26.1. $B(0, 3)$, já que a ordenada na origem em ambas as funções é 3.
Logo, $\overline{OB} = 3$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$\overline{CA} = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3$

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AC}}{-2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$.

$\overline{OG} = x$, logo $\overline{FG} = \overline{ED} = 2x$ $(x > 0)$.
$D(x, f(x))$, isto é, $D(x, -2x + 3)$.
Logo, $\overline{DG} = -2x + 3$.

Assim, $A_{[DEFG]} = \overline{FG} \times \overline{DG} = 2x \times (-2x + 3) = -4x^2 + 6x$.
Tem-se, então, que:

$A_{\text{sombreada}} = A_{[ABC]} - A_{[DEFG]} = \frac{9}{2} - (-4x^2 + 6x) =$

$= \frac{9}{2} + 4x^2 - 6x =$

$= 4x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

Como as coordenadas de D são positivas, então $x \in \left]0, \frac{3}{2}\right[$.

26.2. O valor de x para o qual a área é mínima é a abcissa do vértice da parábola que representa a função:

$x_V = \frac{-(-6)}{2 \times 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

O valor mínimo da área é:

$A\left(\frac{3}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6 \times \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$ u.a.

26.3. $A(x) > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{2} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 2 > 0$

Cálculo auxiliar

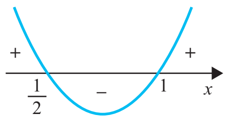
$4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$

$x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$



Como $D_A = \left]0, \frac{3}{2}\right[$, então $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right[$.

Exercícios globais – páginas 57 a 60

27.

```
def numerozeros()
a = float(input("valor de a: "))
b = float(input("valor de b: "))
c = float(input("valor de c: "))
d = b**2-4*a*c
if d>0:
   print("A função f tem dois zeros. d
   = ", d)
if d=0:
   print("A função f tem um zero. d = ", d)
if d<0:
   print("A função f não tem zeros. d
   = ", d)
```

28.

28.1. $D_f = \mathbb{R}$
$D'_f = \mathbb{R}$
$D_g = \mathbb{R}$

$x_V = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} - 10 = -\frac{49}{4}$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Logo, $D'_g = \left[-\frac{49}{4}, +\infty\right[$.

28.2. $f(x) = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 8$

28.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$

Os zeros de g são -2 e 5.

28.4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 3 = x^2 - 3x - 10$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{11} \vee x = 2 - \sqrt{11}$

29. Opção (D)

-2 é a ordenada na origem de todas as retas que representam qualquer função da família de funções indicada, logo o ponto de coordenadas $(0, -2)$ é comum aos gráficos de todas as funções desta família.

Para qualquer função desta família, tem-se:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow mx - 2 = 0 \Leftrightarrow mx = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{m}\ (m \neq 0)$

Ou seja, todas as funções desta família admitem um zero.

Como $m \neq 0$ e os gráficos destas funções são retas, então os gráficos destas funções são retas oblíquas.

Se $m > 0$, as funções desta família são crescentes, mas, se $m < 0$, então as funções desta família são decrescentes.

30. Opção (A)

$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Assim, $A(-3, 5)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Assim, $B(2, 0)$.

Então:

$m_{AB} = \frac{5 - 0}{-3 - 2} = -1$

Logo, AB: $y = -x + b$.

Como o ponto A pertence à reta AB:

$5 = -1 \times (-3) + b \Leftrightarrow 5 = 3 + b \Leftrightarrow b = 2$

Portanto, AB: $y = -x + 2$.

31. Opção (D)

$x_V = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = 3$

$y_V = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 8 = -1$

O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Logo, -1 é o mínimo absoluto de f.

$f(-1) = (-1)^2 - 6 \times (-1) + 8 = 15$

$f(4) = 4^2 - 6 \times 4 + 8 = 0$

Logo, o máximo absoluto da função f é 15.

Assim, $D'_f = [-1, 15]$.

32. Opção (A)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 6$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Assim, $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ e $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$.

$f(3) = 3 \times 3^2 - 6 = 21$

Logo, $\overline{BC} = 21$.

Então, $A_{[ABC]} = \frac{2\sqrt{2} \times 21}{2} = 21\sqrt{2}$ u.a.

33. Opção (B)

$f(x) = a(x - 3)^2 + 5$, com $a < 0$.

$g(x) = f(x - 2) + 1 = a(x - 3 - 2)^2 + 5 + 1 =$

$= a(x - 5)^2 + 6$, com $a < 0$

Assim, a função g admite máximo 6 para $x = 5$.

34. $f(x) = a(x - 6)^2 - 4$

$f(0) = 5 \Leftrightarrow a(0 - 6)^2 - 4 = 5$

$\Leftrightarrow 36a = 9$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

Logo:

$f(x) = \frac{1}{4}(x - 6)^2 - 4 =$

$= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 4 =$

$= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 5}}{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 2}{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 10$

Tem-se, então, $\overline{CD} = 8$.

$f(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = 5$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{4}x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$

Então, $\overline{AB} = 12$.

Logo, $A_{[ABCD]} = \frac{12 + 8}{2} \times 5 = 50$ u.a.

35.

35.1. a) $k^2 - 4(k - 1) \times (k - 1) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4(k^2 - 2k + 1) > 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 4k^2 + 8k - 4 > 0$

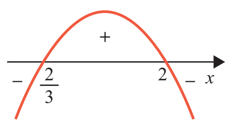
$\Leftrightarrow -3k^2 + 8k - 4 > 0$

Cálculo auxiliar

$-3k^2 + 8k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 3 \times 4}}{-6}$

$\Leftrightarrow k = \frac{8 \pm 4}{6}$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = \frac{2}{3}$



Logo, $k \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[\backslash \{1\}$.

b) $k - 1 < 0 \wedge k^2 - 4(k - 1) \times (k - 1) < 0$

$\Leftrightarrow k < 1 \wedge k^2 - 4(k^2 - 2k + 1) < 0$

$\Leftrightarrow k < 1 \wedge k^2 - 4k^2 + 8k - 4 < 0$

$\Leftrightarrow k < 1 \wedge -3k^2 + 8k - 4 < 0$

$\Leftrightarrow k < 1 \wedge \left(k < \frac{2}{3} \vee k > 2\right)$

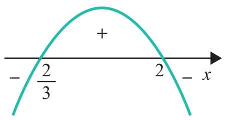
$\Leftrightarrow k < \frac{2}{3}$

Cálculo auxiliar

$-3k^2 + 8k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 3 \times 4}}{-6}$

$\Leftrightarrow k = \frac{8 \pm 4}{6}$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = \frac{2}{3}$



Logo, $k \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$.

35.2. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

a) $x_V = \frac{-\frac{3}{4}}{2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{2}$

$y_V = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

Assim, $V\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{16}\right)$.

b) $f(x) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 1 \geq 1$

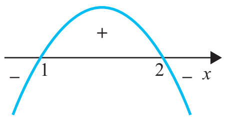
$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$



C.S. = [1, 2]

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

Logo, $A\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $B\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e

$\overline{AB} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$ u.c.

$f(0) = -\frac{1}{4} \times 0^2 + \frac{3}{4} \times 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

Logo, $C\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{5} \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8}$ u.a.

36. $x - 1 = x^2 - 5x - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$

Se $x = 7$, então $y = 7 - 1 = 6$.
Se $x = -1$, então $y = -1 - 1 = -2$.
Assim, $A(7, 6)$ e $B(-1, -2)$.
Então:

$\begin{cases} -2 \times 7^2 + b \times 7 + c = 6 \\ -2 \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -98 + 7b + c = 6 \\ -2 - b + c = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -7b + 104 \\ -b - 7b + 104 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -7b + 104 \\ -8b = -104 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -7 \times 13 + 104 \\ b = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 13 \\ b = 13 \end{cases}$

37.

37.1. $g(0) = 1$
1 milhar de girassóis são 1000 girassóis.
No dia 23 maio estavam abertos 1000 girassóis.
De 23 de maio a 23 de junho passam 31 dias.

$g(31) = -\frac{1}{128} \times 31^2 + 31 + 2 \approx 24{,}492$

No dia 23 de junho estavam abertos 24 492 girassóis.

37.2. $x_V = \frac{-1}{2 \times \left(-\frac{1}{128}\right)} = 64$

$y_V = g(64) = -\frac{1}{128} \times 64^2 + 64 + 1 = 33$

Assim, o número máximo de girassóis abertos aconteceu passados 64 dias e estavam abertos 33 000 girassóis.

37.3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{128}x^2 + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 128x + 128 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-128 \pm \sqrt{128^2 - 4 \times (-1) \times 128}}{-2}$

Logo, $x \approx -1 \vee x \approx 129$.
Após 129 dias já não deverão existir girassóis abertos.

37.4. $g(x) > 20 \Leftrightarrow -\frac{1}{128}x^2 + x + 1 > 20$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{128}x^2 + x - 19 > 0$

Cálculo auxiliar

$-\frac{1}{128}x^2 + x - 19 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 128x - 2432 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-128 \pm \sqrt{128^2 - 4 \times (-1) \times (-2432)}}{-2}$

Logo, $x \approx 23{,}2 \vee x \approx 104{,}8$.

A Sofia deverá visitar o campo de girassóis entre os dias 24 a 104 após o início da floração.

37.5. No dia 9 de agosto decorrem 78 dias desde o dia 23 de maio.
Assim, o vértice da parábola que representa a função tem coordenadas (78, 40).
Logo, $f(x) = a(x - 78)^2 + 40$.
Além disso:
$f(0) = 1 \Leftrightarrow a(0 - 78)^2 + 40 = 1$

$\Leftrightarrow 6084a = -39$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{156}$

Assim, $f(x) = -\dfrac{1}{156}(x - 78)^2 + 40$.

38.

38.1. $h(0) = -4{,}9 \times 0^2 + 19{,}6 \times 0 + 3{,}8 = 3{,}8$

No instante em que foi lançado, o homem-bala estava a 3,8 metros do solo.

38.2. $h(t) > 1{,}5 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 19{,}6t + 3{,}8 > 1{,}5$

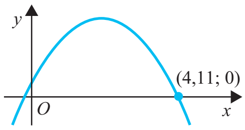
$\Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 19{,}6t + 2{,}3 > 0$

Cálculo auxiliar

$-4{,}9t^2 + 19{,}6t + 2{,}3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-19{,}6 \pm \sqrt{19{,}6^2 + 4 \times 4{,}9 \times 2{,}3}}{-2 \times 4{,}9}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-19{,}6 \pm \sqrt{428{,}64}}{-9{,}8}$

Logo, $t \approx -0{,}1 \vee t \approx 4{,}1$.



Como $t > 0$, então o homem-bala esteve no ar durante 4,1 segundos, aproximadamente.

38.3. $x_V = \dfrac{-19{,}6}{2 \times (-4{,}9)} = 2$

$y_V = h(2) = -4{,}9 \times 2^2 + 19{,}6 \times 2 + 3{,}8 = 23{,}4$

A altura máxima atingida pelo homem-bala foi de 23,4 metros.

38.4. $h(t + 3) - h(t) = 4$

$\Leftrightarrow -4{,}9(t + 3)^2 + 19{,}6(t + 3) + 3{,}8 + 4{,}9t^2 - 19{,}6t - 3{,}8 = 4$

$\Leftrightarrow -4{,}9t - 9{,}8t + 18{,}5 + 4{,}9t^2 - 19{,}6t - 3{,}8 = 4$

$\Leftrightarrow -29{,}4t + 14{,}7 = 4$

$\Leftrightarrow -29{,}4t + 10{,}7 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{10{,}7}{29{,}4}$

Logo, $t \approx 0{,}4$ s.

39. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx - 1 = -x^2 + 3x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + mx - 1 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x + 1 = 0$

Para que esta equação tenha apenas uma solução:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{6 \pm 4}{3}$

$\Leftrightarrow m = 5 \vee m = 1$

Se $m = 5$, então:

$x^2 + (5 - 3)x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

Tem-se $y = 5 \times (-1) - 1 = -6$.

Logo, se $m = 5$, o ponto de interseção tem coordenadas $(-1, -6)$.

Se $m = 1$, então:

$x^2 + (1 - 3)x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Tem-se $y = 1 \times 1 - 1 = 0$.

Logo, se $m = 1$, o ponto de interseção tem coordenadas $(1, 0)$.

40.

40.1.

Número de lugares ocupados	Número de lugares vazios	Valor pago por cada pessoa	Valor total arrecadado	Valor recebido pelo clube
1	49	65	65	–435
2	48	64	128	–372
3	47	63	189	–311
4	46	62	248	–252
5	45	61	305	–195
6	44	60	360	–140
7	43	59	413	–87
8	42	58	464	–36
9	41	57	513	13
10	40	56	560	60
…				
46	4	20	920	420
47	3	19	893	393
48	2	18	864	364
49	1	17	833	333
50	0	16	800	300

40.2. $p(x) = 16 + (50 - x) \times 1 \Leftrightarrow p(x) = 66 - x$

40.3. $r(x) = x \times (66 - x) - 500 \Leftrightarrow r(x) = -x^2 + 66x - 500$

40.4. a) O gráfico que representa a função r é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

$x_V = \dfrac{-66}{2 \times (-1)} = 33$

$y_V = r(33) = -33^2 + 66 \times 33 - 500 = 589$

O valor máximo arrecadado pelo clube é 589 euros, e para atingir esse valor deverão ir ao jantar 33 pessoas.

b) $r(50) = -50^2 + 66 \times 50 - 500 = 300$

$r(x) \geq 300 \Leftrightarrow -x^2 + 66x - 500 \geq 300$

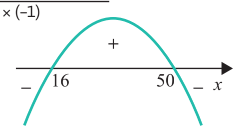
$\Leftrightarrow -x^2 + 66x - 800 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + 66x - 800 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-66 \pm \sqrt{66^2 - 4 \times (-1) \times 800}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-66 \pm 34}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 50 \vee x = 16$



C.S. = [16, 50]

O número mínimo de pessoas necessário para que o jantar se realize é 16.

41.

41.1. Relativamente à função f:

$m = \dfrac{-2 - 0}{4 - 3} = -2$

Logo, $f(x) = -2x + b$.

$f(4) = -2 \Leftrightarrow -2 \times 4 + b = -2 \Leftrightarrow b = 6$

Assim, $f(x) = -2x + 6$.

Relativamente à função g:

$m = \frac{3-0}{4-3} = 3$

Logo, $g(x) = 3x + b$.

$g(4) = 3 \Leftrightarrow 3 \times 4 + b = 3 \Leftrightarrow b = -9$

Assim, $g(x) = 3x - 9$.

41.2. a) Seja x a abcissa de P.

Como P se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico de f e 3 é um zero de f, então $x \in]0, 3[$.

b) $P(x, f(x))$, ou seja, $P(x, -2x + 6)$.

$Q(x, g(x))$, ou seja, $Q(x, 3x - 9)$.

Assim:

$\overline{PQ} = (-2x + 6) - (3x - 9) = -5x + 15 = d(x)$

c) $R(3, 0)$

Seja S o ponto de interseção da reta PQ com o eixo Ox.

$\overline{RS} = 3 - x$

$$h(x) = \frac{\overline{PQ} \times \overline{RS}}{2} = \frac{(-5x+15)(3-x)}{2} = \frac{-15x + 5x^2 + 45 - 15x}{2} = \frac{5x^2 - 30x + 45}{2}$$

42.

42.1. $f(x) = a(x+4)(x-6)$

$x_V = \frac{-4+6}{2} = 1$

$f(1) = 25 \Leftrightarrow a(1+4)(1-6) = 25 \Leftrightarrow -25a = 25 \Leftrightarrow a = -1$

Logo:

$f(x) = -(x+4)(x-6) \Leftrightarrow f(x) = -(x^2 - 2x - 24) \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 24$

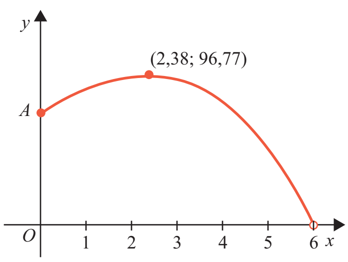
42.2. $A(6, 0)$

$B(x, f(x))$, ou seja, $B(x, -x^2 + 2x + 24)$ $(x > 0)$.

$$A(x) = \frac{\overline{OA} + \overline{BC}}{2} \times \overline{OC} = \frac{6+x}{2} \times (-x^2 + 2x + 24) = \frac{(6+x)(-x^2+2x+24)}{2}$$

$D_A =]0, 6[$

42.3.



Assim, $D'_A =]0; 96,77]$.

43.

43.1. As coordenadas do vértice da parábola são (h, k).

A abcissa de B é dada por $h - \frac{b}{2}$.

A ordenada de B é dada por $k + \frac{3}{2}b$.

$$f\left(h - \frac{b}{2}\right) = k + \frac{3}{2}b \Leftrightarrow a\left(h - \frac{b}{2} - h\right)^2 + k = k + \frac{3}{2}b$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab^2}{4} = \frac{3}{2}b \Leftrightarrow ab^2 = 6b \Leftrightarrow ab^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow b(ab - 6) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{b = 0}_{\text{Condição impossível}} \vee ab - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab = 6 \Leftrightarrow b = \frac{6}{a}$$

43.2. $a = 1$

$h = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$

$k = f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 6 = 1 - 2 - 6 = -7$

$b = \frac{6}{1} = 6$

Logo, $C\left(-1 - \frac{6}{2}, -7\right)$, ou seja, $C(-4, -7)$.

$D\left(-1 + \frac{6}{2}, -7\right)$, ou seja, $D(2, -7)$.

$B\left(-4, -7 + \frac{3}{2} \times 6\right)$, ou seja, $B(-4, 2)$.

$A(2, 2)$

43.3. a) $x_V = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$

$y_V = y_C = -1$

Logo, $V(4, -1)$ e $f(x) = a(x-4)^2 - 1$.

Como A pertence ao gráfico de f:

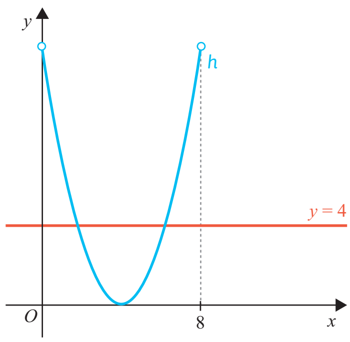
$f(8) = 12 \Leftrightarrow a(8-4)^2 - 1 = 12 \Leftrightarrow 16a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{16}$

Assim:

$$f(x) = \frac{13}{16}(x-4)^2 - 1 = \frac{13}{16}(x^2 - 4x + 16) - 1 = \frac{13}{16}x^2 - \frac{13}{2}x + 13 - 1 = \frac{13}{16}x^2 - \frac{13}{2}x + 12$$

b) $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{13}{16}x^2 - \frac{13}{2}x + 12 = 4$

Seja $h(x) = \frac{13}{16}x^2 - \frac{13}{2}x + 13$.



Assim, $x \approx 1,78$ ou $x \approx 6,22$.

3. Funções definidas por ramos

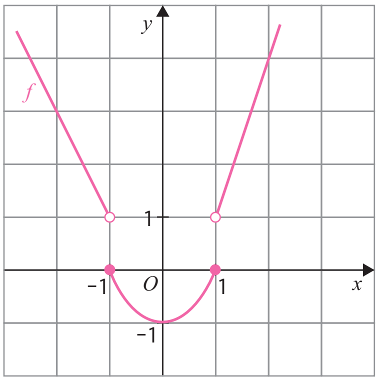
Exercícios – páginas 74 a 77

1.

1.1. $f(0) = 0^2 - 1 = -1$
$f(2) = 3 \times 2 - 2 = 4$
$f(-2) = -2 \times (-2) - 1 = 3$
$f(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 2$
$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

1.2. Se $x < -1$, então:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $(\notin]-\infty, 1[)$
Se $-1 \leq x \leq 1$, então:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$
Se $x > 1$, então:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ $(\notin]1, +\infty[)$
Assim, C.S. = $\{-1, 1\}$.

1.3.

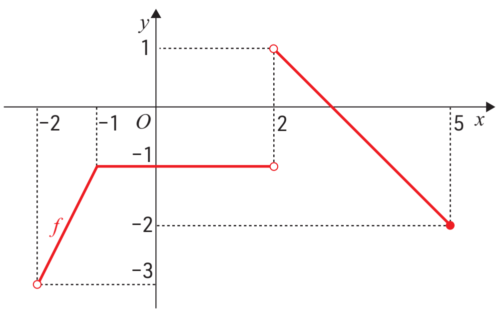


2.

2.1. $D_f =]-2, 2[\cup]2, 5]$

2.2. Se $-2 < x \leq -1$, então:
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$
Ou seja, $\forall x \in]-2, -1], f(x) < 0$.
Se $-1 < x < 2$, então:
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \geq 0$ Condição impossível
Ou seja, $\forall x \in]-1, 2[, f(x) < 0$.
Se $2 < x \leq 5$, então:
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow -x \geq -3$
$\Leftrightarrow x \leq 3$
Ou seja, $\forall x \in]2, 3], f(x) \geq 0$.
Assim, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]2, 3]$.

2.3.



2.4. $D'_f =]-3, 1[$

2.5. $f(x) = k$ tem exatamente uma solução para $k \in]-3, -2[\cup]-1, 1[$.

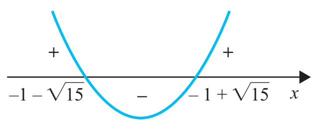
3.

3.1. Se $x \leq 1$, então:
$y = a(x + 1)^2 - \frac{9}{2}$
Assim:
$a(0 + 1) - \frac{9}{2} = -4 \Leftrightarrow a = -4 + \frac{9}{2}$
$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
Logo:
$y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - \frac{9}{2} =$
$= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} =$
$= \frac{1}{2}x^2 + x - 4$
Se $1 < x \leq 4$, então:
$m = \frac{7 - 1}{4 - 1} = 2$
Logo, $y = 2x + b$.
$2 \times 4 + b = 7 \Leftrightarrow b = -1$
Assim, $y = 2x - 1$.
Se $x > 4$, então:
$m = \frac{3 - 0}{4 - 7} = -1$
Logo, $y = -x + b$.
$-7 + b = 0 \Leftrightarrow b = 7$
Assim, $y = -x + 7$.
Tem-se, então, que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x - 4 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 4 \\ -x + 7 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

3.2. Se $x \leq 1$, então:
$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \geq 3$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x - 7 \geq 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 14 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1 - \sqrt{15}] \cup [-1 + \sqrt{15}, +\infty[$

Cálculo auxiliar
$x^2 + 2x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 14}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{15}}{2}$
$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{15} \vee x = -1 - \sqrt{15}$



Se $1 < x \leq 4$, então:
$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$
Assim, $x \in [2, 4]$.
Se $x > 4$, então:
$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow -x + 7 \geq 3 \Leftrightarrow -x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq 4$
Assim, neste intervalo, não há valores de x para os quais $f(x) \geq 3$.
C.S. = $]-\infty, -1 - \sqrt{15}] \cup [2, 4]$

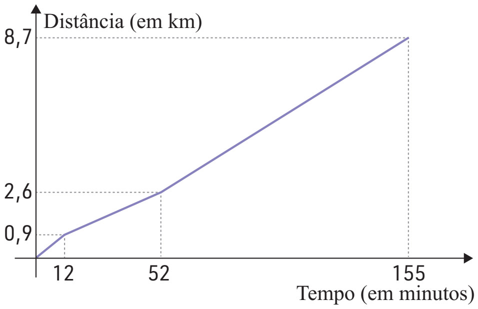
4.

4.1. Demoraram 12 minutos a percorrer a primeira parte, de acordo com o enunciado.

Para percorrer a segunda parte do percurso, precisaram de 40 minutos (52 – 12).
2 h 35 min correspondem a 155 minutos, pois $2 \times 60 + 23 = 155$.
O troço final foi percorrido em 103 minutos (155 – 52).

4.2. Segundo o enunciado, a distância percorrida no primeiro troço foi de 900 metros.
O segundo troço foi de 1700 metros (2600 – 900).
O troço final foi de 6100 metros (8700 – 2600).

4.3.



4.4. Se $0 \leq x \leq 12$:

$m = \dfrac{0{,}9 - 0}{12 - 0} = 0{,}075$

Logo, $d(x) = 0{,}075x + b$.

$d(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$

Assim, $d(x) = 0{,}075x$.

Se $12 < x \leq 52$:

$m = \dfrac{2{,}6 - 0{,}9}{52 - 12} = 0{,}0425$

Logo, $d(x) = 0{,}0425x + b$.

$$\begin{aligned} d(52) = 2{,}6 &\Leftrightarrow 0{,}0425 \times 52 + b = 2{,}6 \\ &\Leftrightarrow 2{,}21 + b = 2{,}6 \\ &\Leftrightarrow b = 0{,}39 \end{aligned}$$

Assim, $d(x) = 0{,}0425x + 0{,}39$.

Se $52 < x \leq 155$:

$m = \dfrac{8{,}7 - 2{,}6}{155 - 52} \approx 0{,}059$

Logo, $d(x) = 0{,}059x + b$.

$$\begin{aligned} d(155) = 8{,}7 &\Leftrightarrow 0{,}059 \times 155 + b = 8{,}7 \\ &\Leftrightarrow 9{,}145 + b = 8{,}7 \\ &\Leftrightarrow b = -0{,}445 \end{aligned}$$

Assim, $d(x) = 0{,}059x - 0{,}445$.

Então:

$$d(x) = \begin{cases} 0{,}075x & \text{se } x \leq 12 \\ 0{,}0425x + 0{,}39 & \text{se } 12 < x \leq 52 \\ 0{,}059x - 0{,}445 & \text{se } 52 < x \leq 155 \end{cases}$$

4.5. $d(90) = 0{,}059 \times 90 - 0{,}445 = 4{,}865$

Após 90 minutos, a Carla e a Andreia estavam a 4865 metros do início do percurso.

4.6. De acordo com o gráfico construído anteriormente:

$$\begin{aligned} d(x) = \frac{8{,}7}{2} &\Leftrightarrow 0{,}059x - 0{,}445 = 4{,}35 \\ &\Leftrightarrow 0{,}059x = 1{,}93575 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4{,}795}{0{,}059} \end{aligned}$$

Logo, $x \approx 81$.

$81 - 60 = 21$

As amigas percorreram metade do percurso em 1 hora e 21 minutos, aproximadamente.

5.

5.1. Se $x \leq 1$, então $f(x) = 3$.

Se $1 < x \leq 5$:

$m = \dfrac{4 - 1}{5 - 1} = \dfrac{3}{4}$

Assim, $y = \dfrac{3}{4}x + b$.

Como (5, 4) pertence ao gráfico de f:

$4 = \dfrac{3}{4} \times 5 + b \Leftrightarrow b = 4 - \dfrac{15}{4} \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{4}$

Logo, $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

Se $5 < x \leq 7$:

$m = \dfrac{0 - 3}{7 - 5} = -\dfrac{3}{2}$

Assim, $y = -\dfrac{3}{2}x + b$.

Como (7, 0) pertence ao gráfico de f:

$0 = -\dfrac{3}{2} \times 7 + b \Leftrightarrow b = \dfrac{21}{2}$

Logo, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2}$.

Então:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4} & \text{se } 1 < x \leq 5 \\ -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2} & \text{se } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

5.2. Se $x < 3$:

$f(x) = a(x - 2)^2 - 3$

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\Leftrightarrow a(0 - 2)^2 - 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4a = 4 \\ &\Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$.

Se $3 \leq x \leq 6$:

$x_V = \dfrac{3 + 5}{2} = 4$

Então, $f(x) = a(x - 4)^2 + k$.

Além disso:

$$\begin{cases} f(3) = 1 \\ f(6) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(3 - 4)^2 + k = 1 \\ a(6 - 4)^2 + k = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + k = 1 \\ 4a + k = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - a \\ 4a + 1 - a = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3a = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 + 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} f(x) &= -1(x - 4)^2 + 2 = -(x^2 - 8x + 16) + 2 = \\ &= -x^2 + 8x - 14 \end{aligned}$$

Se $x > 6$:

$m = \dfrac{8 - 6}{0 + 2} = 1$

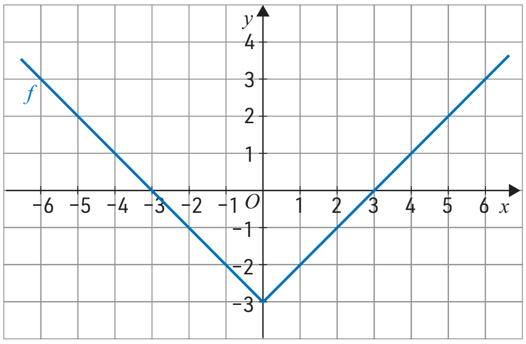
Logo, $f(x) = x + b$.
Como $f(8) = 0$, então $8 + b = 0 \Leftrightarrow b = -8$.
Assim, $f(x) = x - 8$.
Então:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1 & \text{se } x < 3 \\ -x^2 + 8x - 14 & \text{se } 3 \leq x \leq 6 \\ x - 8 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

6.

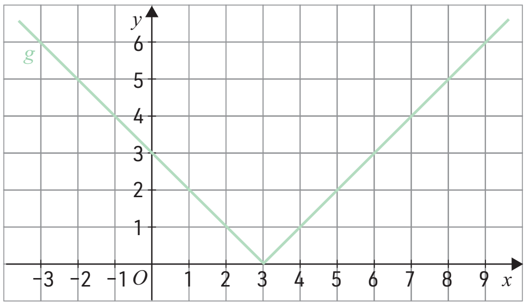
6.1. $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \leq 0 \\ -x - 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$D'_f = [-3, +\infty[$
Zeros: -3 e 3
f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$.

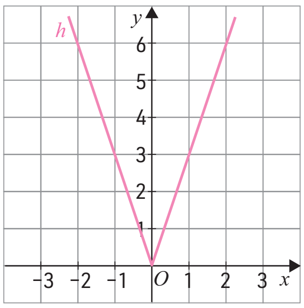
6.2. $g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -x + 3 & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$



$D'_g = [0, +\infty[$
Zero: 3
g é decrescente em $]-\infty, 3]$ e é crescente em $[3, +\infty[$.

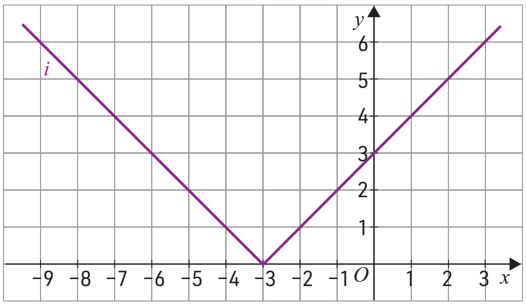
6.3. $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ -3x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



$D'_h = [0, +\infty[$
Zero: 0
h é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$.

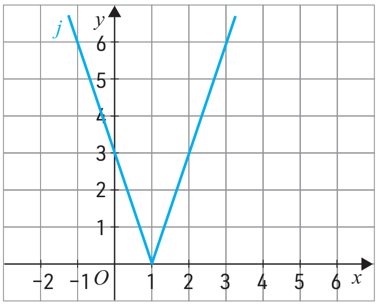
6.4. $i(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{se } -x - 3 \geq 0 \\ x + 3 & \text{se } -x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x - 3 & \text{se } x \leq -3 \\ x + 3 & \text{se } x > -3 \end{cases}$



$D'_i = [0, +\infty[$
Zero: -3
i é decrescente em $]-\infty, -3]$ e é crescente em $[-3, +\infty[$.

6.5. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

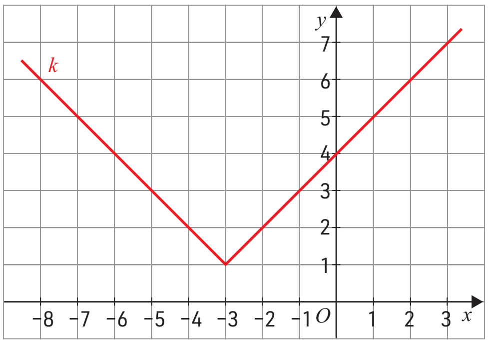
$$j(x) = \begin{cases} 3(x - 1) & \text{se } x \geq 1 \\ 3(-x + 1) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 3 & \text{se } x \geq 1 \\ -3x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



$D'_j = [0, +\infty[$
Zero: 1
j é decrescente em $]-\infty, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$.

6.6. $|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x + 3 \geq 0 \\ -x - 3 & \text{se } x + 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$

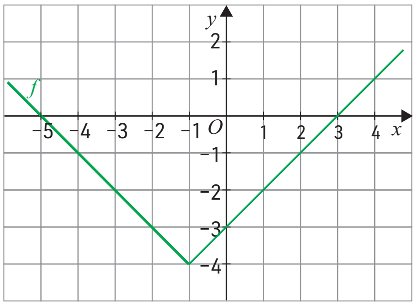
$$k(x) = \begin{cases} x + 3 + 1 & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 3 + 1 & \text{se } x < -3 \end{cases} = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 2 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

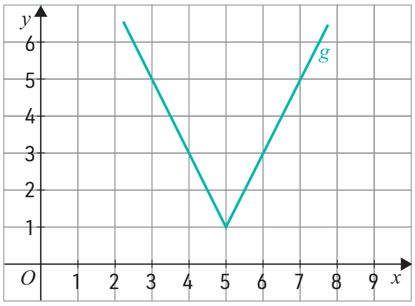


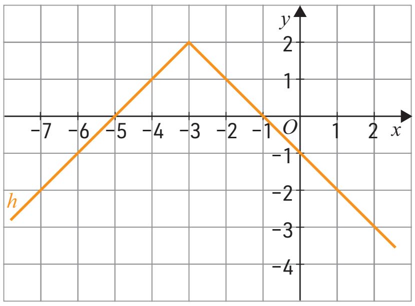
$D'_k = [0, +\infty[$
Zeros: não tem
k é decrescente em $]-\infty, -3]$ e é crescente em $[-3, +\infty[$.

7.

7.1.







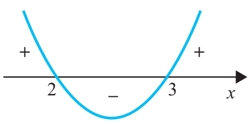
7.2. $V(-1, -4)$
Logo, $f(x) = a|x + 1| - 4$.
$f(0) = -3 \Leftrightarrow a|0 + 1| - 4 = -3$
$\Leftrightarrow a = 1$
Assim, $f(x) = |x + 1| - 4$.
$V(5, 1)$
Logo, $g(x) = a|x - 5| + 1$.
$g(4) = 3 \Leftrightarrow a|4 - 5| + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$
Assim, $g(x) = 2|x - 5| + 1$.
$V(-3, 2)$
Logo, $h(x) = a|x + 3| + 2$.
$h(-1) = 0 \Leftrightarrow a|-1 + 3| + 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2a = -2$
$\Leftrightarrow a = -1$
Assim, $h(x) = -|x + 3| + 2$.

8.

8.1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \leq 2 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$

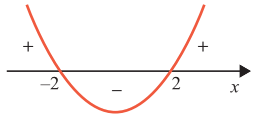
Cálculo auxiliar
$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$



8.2. $|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ -x^2 + 4 & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$



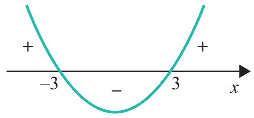
Assim:
$g(x) = \begin{cases} (x^2 - 4) + 2 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ (-x^2 + 4) + 2 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 + 6 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$

8.3. $|x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x^2 - 9 \geq 0 \\ -x^2 + 9 & \text{se } x^2 - 9 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 9 & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$



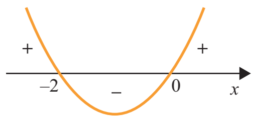
Assim:
$h(x) = \begin{cases} -2(x^2 - 9) & \text{se } x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ -2(-x^2 + 9) & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} -2x^2 + 18 & \text{se } x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ 2x^2 - 18 & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$

8.4. $|x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x^2 + 2x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & \text{se } x^2 + 2x < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & \text{se } -2 < x < 0 \end{cases}$

Cálculo auxiliar
$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$



Assim:
$i(x) = \begin{cases} 2(x^2 + 2x) - 1 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 0 \\ 2(-x^2 - 2x) - 1 & \text{se } -2 < x < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 2x^2 + 4x - 1 & \text{se } x \leq -2 \vee x \geq 0 \\ -2x^2 - 4x - 1 & \text{se } -2 < x < 0 \end{cases}$

Exercícios globais – páginas 78 a 81

9. Opção (D)
Se $x < 1$:
$m = \frac{-2 + 1}{1 - 0} = -1$

Como $(0, -1)$ pertence ao gráfico da função, então $f(x) = -x - 1$.
Logo, a opção correta seria a (A), a (C) ou a (D).
Como o declive da reta que representa a função para valores de $x \geq 1$ é positivo, então pode excluir-se a opção (C), uma vez que, nesse intervalo, o gráfico da função seria uma reta de declive negativo.
Como $f(1) = -2$, pode excluir-se a opção (A), já que, nesse caso, $f(1) = 0$.

10. Opção (B)
Se $x < 15$, o valor a pagar é dado por $12 + 0{,}75x$.
Se $x \geq 15$, então o valor a pagar é dado por:
$12 + 15 \times 0{,}75 + (x - 15) \times 2{,}5 = 23{,}25 + (x - 15) \times 2{,}5$

11.
11.1. Se $x \leq 1$:

$$m = \frac{-\frac{5}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 - 0} = \frac{1}{4}$$

Logo, $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.
Se $x > 1$:
$f(x) = a(x + 1)^2 + k$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1) = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2 + 1)^2 + k = 0 \\ a(1 + 1)^2 + k = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + k = 0 \\ 4a + k = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -9a \\ 4a - 9a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -9a \\ -5a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{9}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo, $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - \frac{9}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2$.
Assim:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

11.2. $$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Assim:

$$g(x) = \begin{cases} 3(x - 1) + 4 & \text{se } x \geq 1 \\ 3(-x + 1) + 4 & \text{se } x < 1 \end{cases} =$$

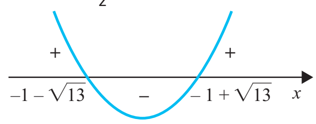
$$= \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -3x + 7 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

11.3. a) $f(x) < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} < -2 \Leftrightarrow x - 6 < -8$
$\Leftrightarrow x < -2$

C.S. $=]-\infty, -2[$

b) $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2 \geq 1$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \geq 4$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 \geq 0$

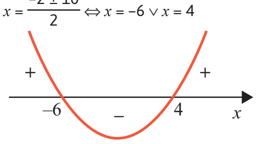
Cálculo auxiliar
$x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{13} \vee x = -1 + \sqrt{13}$



Assim:
C.S. $=]1, +\infty[\cap (]-\infty, -1 - \sqrt{13}] \cup [-1 + \sqrt{13}, +\infty[) =$
$= [-1 + \sqrt{13}, +\infty[$

c) $f(x) < g(1) \Leftrightarrow f(x) < 7 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2 < 4$
$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 6 < 0$

Cálculo auxiliar
$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 4$



Assim, C.S. $=]-6, 4[$.

12.
12.1. $f(x) = (x + 1)^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 - ax + b = x^2 + 2x + 1 - 9$
$\Leftrightarrow -ax + b = 2x - 8$
Logo, $a = -2$ e $b = -8$.

12.2. $$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Assim:

$$g(x) = \begin{cases} 2(x - 1) - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2(-x + 1) - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

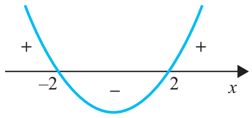
12.3. Se $x \geq 1$:
$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
Se $x < 1$:
$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Os zeros de g são $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

12.4. $f(x) = x^2 - ax + 1$
$h(x) = \frac{1}{x^2 - ax + 1}$
$D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - ax + 1 \neq 0\}$
Para que D_h seja igual a $\mathbb{R}$, $x^2 - ax + 1 \neq 0$ terá de ser uma condição universal, isto é, a condição $x^2 - ax + 1 = 0$ terá de ser impossível.
Assim:
$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-a)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0$

Cálculo auxiliar

$a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$



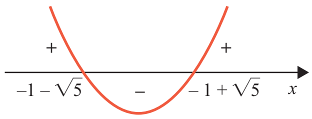
$a \in]-2, 2[$

12.5. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

a) $f(-x) - 4 < g(3) \Leftrightarrow (-x)^2 - 2(-x) + 3 - 4 < 2\,|3 - 1| - 1$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 < 3$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$
$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{5} \vee x = -1 - \sqrt{5}$



C.S. $=]-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}[$

b) A equação da reta que se procura é do tipo $y = 2x + b$.
$x^2 - 2x + 3 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - b = 0$
Para que esta equação tenha uma única solução:
$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \times (3 - b) = 0$
$\Leftrightarrow 16 - 12 + 4b = 0$
$\Leftrightarrow b = -1$
Assim, a reta pedida tem equação $y = 2x - 1$.
$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$
$y = 2 \times 2 - 1 = 3$
O ponto pedido tem coordenadas (2, 3).

13.

13.1. $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ -x + 4 & \text{se } x - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$

Assim:

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 3 \\ -x + 4 - 1 & \text{se } 3 < x < 4 \\ x - 4 - 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

$= \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 3 \\ -x + 3 & \text{se } 3 < x < 4 \\ x - 5 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

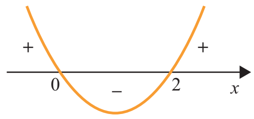
13.2. Se $x \leq 3$:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
Se $3 < x < 4$:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Como $3 \notin]3, 4[$, f não tem zeros neste intervalo.
Se $x \geq 4$:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
Assim, os zeros de f são 0, 2 e 5.

13.3.

x	$-\infty$	0		2		3		4		5	$+\infty$
Sinal de $f(x)$	+	0	−	0	+	6	−	−1	−	0	+

Cálculo auxiliar

$f(3) = 3^2 - 2 \times 3 = 3$
Se $x \leq 3$:



13.4.

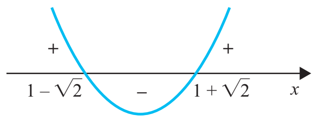
x	$-\infty$	1		3		4	$+\infty$
Variação de f	↘	−1	↗	3	↘	−1	↗

Vértice da parábola
$x_V = \frac{0 + 2}{2} = 1$
$y_V = f(1) = 1^2 - 2 = -1$
Assim, $V(1, -1)$.
A função f tem mínimo absoluto −1 para $x = 1$ e para $x = 4$, tem máximo relativo 3 para $x = 3$.

13.5. Em $]-\infty, 3[$:
$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$



Assim:
C.S. $=]-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, 3[$

14. Opção (C)

Seja $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$

Cálculos auxiliares

- Se $x \geq 1$:
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- Se $x < 1$:
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2}$
  $\Leftrightarrow \underbrace{x = 1}_{\notin]-\infty, 1[} \vee x = -3$

15.

15.1. A abcissa do vértice da parábola que representa a função f é $x_V = -\frac{1}{2}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$

Assim, $V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

Como a concavidade desta parábola está voltada para cima, vem que $D'_f = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[$.

15.2. $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

Assim:

$$g(x) = \begin{cases} 2(x+1) - 2 & \text{se } x \geq -1 \\ 2(-x-1) - 2 & \text{se } x < -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq -1 \\ -2x - 4 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

15.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

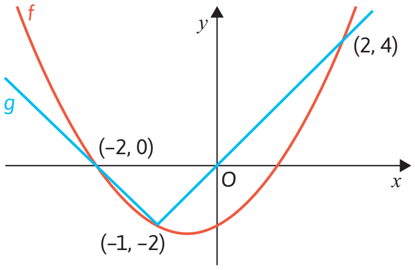
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

Os zeros de f são –2 e 1.

15.4.



Os pontos de interseção dos gráficos de f e g são os pontos de coordenadas (–2, 0), (–1, –2) e (2, 4).

16.

16.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -|x-3| + 2 = 0$

$\Leftrightarrow |x - 3| = 2$

$\Leftrightarrow x - 3 = 2 \vee x - 3 = -2$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$

Assim, a abcissa do ponto A é 1 e a abcissa do ponto C é 5, pelo que a abcissa do ponto B é 3 e, portanto, a abcissa de P varia entre 1 e 3, logo $D_g =]1, 3[$.

16.2. $\overline{SR} = (3 - x) \times 2 = 6 - 2x$

$$f(x) = -|x-3| + 2 = \begin{cases} -(x-3) + 2 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(-x+3) + 2 & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x + 5 & \text{se } x \geq 3 \\ x - 1 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Donde, as coordenadas de P são $(x, x - 1)$.

Logo, $\overline{PS} = x - 1$.

Tem-se, então:

$g(x) = \overline{SR} \times \overline{PS} = (6 - 2x) \times (x - 1) =$

$= 6x - 6 - 2x^2 + 2x =$

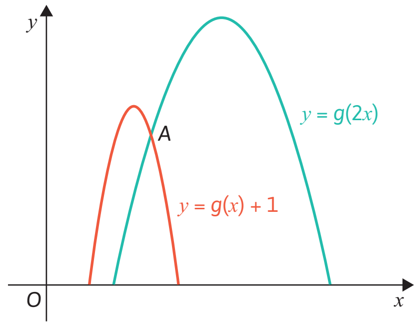
$= -2x^2 + 8x - 6$

16.3. $x_V = \dfrac{-8}{2 \times (-2)} = 2$

$y_V = g(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 6 = 2$

Assim, e uma vez que g corresponde à área do retângulo [ABCD], e como tal não pode ser negativa ou nula, tem-se que $D'_g =]0, 2]$.

16.4. $g(x) + 1 = g(2x)$



$x \approx 1{,}2$

17.

17.1. $f(0) = -\dfrac{1}{2}|0 - 4| + 5 = -2 + 5 = 3$

Logo, $A(0, 3)$.

B é o vértice do gráfico de f, logo $B(4, 5)$.

17.2.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(x-4) + 5 & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2}(-x+4) + 5 & \text{se } x - 4 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + 7 & \text{se } x \geq 4 \\ \dfrac{1}{2}x + 3 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(x-4) & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ \dfrac{1}{3}(-x+4) & \text{se } x - 4 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3} & \text{se } x \geq 4 \\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3} & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

17.3. $D_h = [0, 4[$

17.4. $C\left(x, \dfrac{1}{2}x + 3\right)$

$F\left(x, -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}\right)$

$\overline{CF} = \dfrac{1}{2}x + 3 - \left(-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{2}x + 3 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3} =$

$= \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{3}$

Seja G o ponto médio de [CD].

$\overline{CG} = 4 - x$

Assim, $\overline{CD} = 2(4 - x) = 8 - 2x$.

Então:

$h(x) = \overline{CD} \times \overline{CF} = (8 - 2x) \times \left(\dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{3}\right) =$

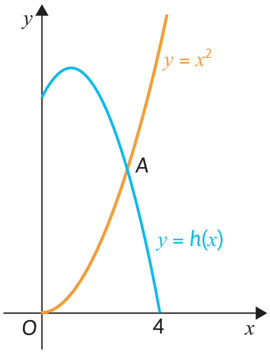
$= -\dfrac{5}{3}x^2 + \dfrac{10}{3}x + \dfrac{40}{3}$

17.5. O valor de x para o qual a área do retângulo é máxima é a abcissa do vértice da parábola que representa a função h.

$$x_V = \frac{-\dfrac{10}{3}}{2 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right)} = 1$$

Assim, $\overline{CF} = \frac{5}{6} + \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$ e $\overline{CD} = 8 - 2 = 6$.

17.6. $h(x) = x^2$



$x \approx 2{,}95$