Tema 5 – Geometria analítica

Recorda – páginas 6 a 9

1. Por exemplo:

a) $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{ED}$

c) $\overrightarrow{JG}$

d) $\overrightarrow{ED}$

2. Por exemplo:

a) $\overrightarrow{AK}$

b) $\overrightarrow{BQ}$

c) $\overrightarrow{IN}$

d) $\overrightarrow{AK}$

e) $\overrightarrow{AD}$

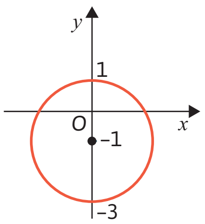
f) $\overrightarrow{ZV}$

g) $\overrightarrow{JO}$

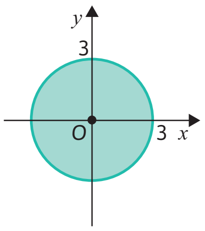
h) $\overrightarrow{VD}$

3.

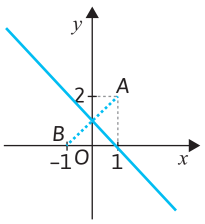
a)



b)



c)



Capítulo 1 – Geometria analítica no plano – páginas 10 a 43

1.

a) **i.** Para que o ponto A pertença ao eixo das abcissas a ordenada tem de ser zero:

$p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = 1$

ii. Para que o ponto A pertença ao 1.º quadrante a abcissa tem de ser positiva e a ordenada também:

$p > 0 \wedge p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 0 \wedge p > 1 \Leftrightarrow p > 1$

Assim, $p \in]1, +\infty[$.

iii. Para que o ponto A pertença ao 4.º quadrante a abcissa tem de ser positiva e a ordenada negativa:

$p > 0 \wedge p - 1 < 0 \Leftrightarrow p > 0 \wedge p < 1$

Assim, $p \in]0, 1[$.

b) Para que ponto B pertença ao 2.º quadrante a abcissa tem de ser negativa, o que se verifica pois $-2 < 0$ e a ordenada tem de ser positiva:

$k^2 - 5k + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee k > 3$

Assim, $k \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

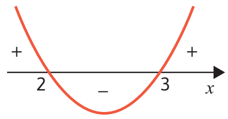
Cálculo auxiliar

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5+1}{2} \vee x = \dfrac{5-1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$



2. $A(1, 6)$, $B(-3, 4)$ e $C(0, 2)$.

a) $A'(1, -6)$, $B'(-3, -4)$ e $C'(0, -2)$

b) $A'(-1, 6)$, $B'(3, 4)$ e $C'(0, 2)$

c) $A'(-1, -6)$, $B'(3, -4)$ e $C'(0, -2)$

3. Opção (B)

O transformado de $A(2, -5)$ por uma reflexão de eixo Ox é o ponto de coordenadas $(2, 5)$.

Assim,

$k^2 + 1 = 2 \wedge k + 6 = 5 \Leftrightarrow k^2 = 1 \wedge k = -1$

$\Leftrightarrow (k = 1 \vee k = -1) \wedge k = -1$

$\Leftrightarrow k = -1$

4.

a) $A(2, 7)$ $B(6, 11)$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são:

$\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{7+11}{2}\right) = \left(\dfrac{8}{2}, \dfrac{18}{2}\right) = (4, 9)$

b) $A(1, \sqrt{5})$ $B(-2, 3\sqrt{5})$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são:

$\left(\dfrac{1+(-2)}{2}, \dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{4\sqrt{5}}{2}\right) =$

$= \left(-\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{5}\right)$

c) $A(a + 2, 3a - 1)$ $B(5a + 4, a - 3)$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são:

$\left(\dfrac{a+2+5a+4}{2}, \dfrac{3a-1+a-3}{2}\right) = \left(\dfrac{6a+6}{2}, \dfrac{4a-4}{2}\right) =$

$= (3a + 3, 2a - 2)$

5. $A(-3, 4)$ $B(1, 5)$

O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$:

$\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{4+5}{2}\right) = \left(-\dfrac{2}{2}, \dfrac{9}{2}\right) = \left(-1, \dfrac{9}{2}\right)$

6.

a) Para que $M(-1, 2)$ seja o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, as coordenadas de M têm de ser da forma $\left(\dfrac{2+a}{2}, \dfrac{-3+b}{2}\right)$.

Assim, $\dfrac{2+a}{2} = -1$ e $\dfrac{-3+b}{2} = 2$

Logo, $a = -4$ e $b = 7$, ou seja, $B(-4, 7)$.

b) Para que $M(-1, 2)$ seja o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, as coordenadas de M têm de ser da forma $\left(\dfrac{-1+a}{2}, \dfrac{4+b}{2}\right)$.

Assim, $\dfrac{-1+a}{2} = -1$ e $\dfrac{4+b}{2} = 2$

Logo, $a = -1$ e $b = 0$, ou seja, $B(-1, 0)$.

c) Para que $M(-1,2)$ seja o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, as coordenadas de M têm de ser da forma $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$.

Assim, $\frac{-3+a}{2} = -1$ e $\frac{-2+b}{2} = 2$

Logo, $a = 1$ e $b = 6$, ou seja, $B(1, 6)$.

d) Para que $M(-1, 2)$ seja o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, as coordenadas de M têm de ser da forma $\left(\frac{k+1+a}{2}, \frac{2k+b}{2}\right)$.

Assim, $\frac{k+1+a}{2} = -1$ e $\frac{2k+b}{2} = 2$

Logo, $a = -k - 3$ e $b = 4 - 2k$, ou seja, $B(-k - 3, 4 - 2k)$.

7. $A(-3, 4)$, $B(2, 2)$ e $C(-5, -3)$

Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$:

$M_1\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

Seja M_2 o ponto médio de $[AC]$:

$M_2\left(\frac{-3-5}{2}, \frac{4-3}{2}\right) = \left(-4, \frac{1}{2}\right)$

Equação da reta suporte da mediana $[M_1C]$:

O declive da reta suporte da mediana $[M_1C]$ é igual a

$$\frac{3-(-3)}{-\frac{1}{2}-(-5)} = \frac{6}{\frac{9}{2}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

A reta suporte da mediana $[M_1C]$ pode ser definida por uma equação do tipo $y = \frac{4}{3}x + b$.

Como o ponto $C(-5, -3)$ pertence à reta, tem-se:

$$-3 = \frac{4}{3} \times (-5) + b \Leftrightarrow -3 + \frac{20}{3} = b \Leftrightarrow b = \frac{11}{3}$$

A reta suporte da mediana $[M_1C]$ pode ser definida por $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$.

Determinemos agora uma equação da reta suporte da mediana $[M_2B]$:

O declive da reta suporte da mediana $[M_2B]$ é igual a

$$\frac{\frac{4}{3}-2}{-4-2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

A reta suporte da mediana $[M_2B]$ pode ser definida por uma equação do tipo $y = \frac{1}{4}x + b$.

Como o ponto $B(2, 2)$ pertence à reta, tem-se:

$$2 = \frac{1}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

A reta suporte da mediana $[M_2B]$ pode ser definida por $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Para determinar as coordenadas do baricentro de $[ABC]$ vamos então determinar a interseção das duas retas M_1C e M_2B:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \frac{4}{3}x + \frac{11}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{2} - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \frac{13}{12}x = -\frac{13}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ x = -\frac{12}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} \times (-2) + \frac{11}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-8+11}{3} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Logo, o baricentro do triângulo $[ABC]$ tem coordenadas $(-2, 1)$.

8. $d(A, B) = |3 - 1| = 2$

$d(B, C) = |4 - 1| = 3$

$d(A, D) = |-1 - 4| = 5$

$d(C, D) = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} =$
$= 2\sqrt{2}$

Perímetro $= 2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2} = 10 + \sqrt{2}$

9.

a) $A(1, -2)$ $\quad B(-3, 1)$

$d(A, B) = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} =$
$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

b) $C\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ $\quad O(0, 0)$

$d(C, O) = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} =$
$= \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

c) $D(2025, 5)$ $\quad E(2025, 4)$

$d(D, E) = \sqrt{(2025-2025)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} =$
$= \sqrt{1} = 1$

d) $F(0, \sqrt{2})$ $\quad G(1, \sqrt{2} - 3)$

$d(F, G) = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{2} - 3 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} =$
$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

e) $H(\sqrt{5}, 3)$ $\quad I(-\sqrt{3}, 0)$

$d(H, I) = \sqrt{(\sqrt{5} - (-\sqrt{3}))^2 + (3-0)^2} =$
$= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + 9} =$
$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 9} =$
$= \sqrt{5 + 2\sqrt{15} + 3 + 9} = \sqrt{17 + 2\sqrt{15}}$

f) $J(a, b)$ $\quad K(b, a)$

$d(J, K) = \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2(a-b)^2} = |a-b|\sqrt{2}$

10. $A(5, 3)$ $\quad B(3, 0)$ $\quad C(-1, -2)$ $\quad D(1, 1)$

$\overline{AB} = \sqrt{(3-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} =$
$= \sqrt{13}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} =$
$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{CD} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} =$
$= \sqrt{13}$

$\overline{DA} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} =$
$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Assim, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$ e, portanto, os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo.

11. $\overline{PQ} = d(P, Q) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-3)^2} =$
$= \sqrt{4^2 + (-1)^2} =$
$= \sqrt{17}$
$\overline{QR} = d(Q, R) = \sqrt{(0-1)^2 + \left(3 + 2\sqrt{2} - 2\right)^2} =$
$= \sqrt{1 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4\sqrt{2} + 8} =$
$= \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$
$\overline{PR} = d(P, R) = \sqrt{(0-(-3))^2 + (3 + 2\sqrt{2} - 3)^2} =$
$= \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 8} = \sqrt{17}$
Como $\overline{PQ} = \overline{PR}$, concluímos que o triângulo é isósceles.

12. $d(A, B) = \sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{(k-3-2)^2 + (1-k)^2} = \sqrt{26}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(k-5)^2 + (1-k)^2} = \sqrt{26}$
$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 - 10k + 25 + 1 - 2k + k^2} = \sqrt{26}$
$\Leftrightarrow 2k^2 - 12k + 26 = 26$
$\Leftrightarrow 2k^2 - 12k = 0$
$\Leftrightarrow 2k(k-6) = 0$
$\Leftrightarrow 2k = 0 \vee k - 6 = 0$
$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 6$

13. $P(2, 4)$

a) $y = x$
Substituindo y por 4 e x por 2 obtém-se $4 = 2$, o que é falso. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $y = x$.

b) $y = 4$
Substituindo y por 4 obtém-se $4 = 4$, o que é verdadeiro. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $y = 4$.

c) $x = 0$
Substituindo x por 0 obtém-se $2 = 0$, o que é falso. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $x = 0$.

d) $y = x^2$
Substituindo y por 4 e x por 2 obtém-se $4 = 2^2$, o que é verdadeiro. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $y = x^2$.

14. $P(-3, -1)$

a) $y \leq 0$
Substituindo y por -1 obtém-se $-1 \leq 0$, o que é verdadeiro. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $y \leq 0$.

b) $x > -3$
Substituindo x por -3 obtém-se $-3 > -3$, o que é falso. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $x > -3$.

c) $x \geq -3$
Substituindo x por -3 obtém-se $-3 \geq -3$, o que é verdadeiro. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $x \geq -3$.

d) $x > y$
Substituindo x por -3 e y por -1 obtém-se $-3 > -1$, o que é falso. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $x > y$.

15.

a) Equação da reta vertical que contém o ponto P:
$x = -3$
Assim, $k^2 - 5 = -3 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$
$k^2 - 5 = -6 \Leftrightarrow k^2 = -1$, que é uma equação impossível em $\mathbb{R}$. Logo, não existem valores reais de k nas condições pretendidas.

16.

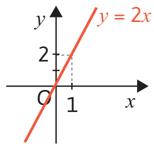
a) O conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é igual a -4 é uma reta vertical de equação $x = -4$.

b) O conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é maior do que 0 é um semiplano aberto à direita da reta de equação $x = 0$, ou seja, $x > 0$.

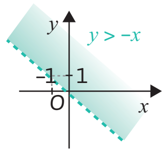
c) O conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é não superior a 5 é um semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 5$, ou seja, $x \leq 5$.

17.

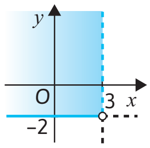
a) O conjunto dos pontos do plano cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa é a reta de equação $y = 2x$.



b) O conjunto dos pontos do plano cuja ordenada é superior ao simétrico da abcissa é o semiplano aberto à reta de equação $y = -x$.

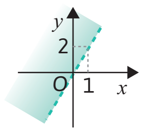


c) O conjunto dos pontos do plano cuja abcissa é inferior a 3 e cuja ordenada é superior ou igual a -2 é a interseção do semiplano definido pela condição $x < 3$ com o semiplano definido pela condição $y \geq -2$.

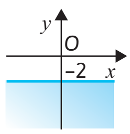


18.

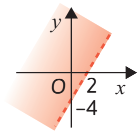
a) $y > 2x$



b) $y \leq -2$

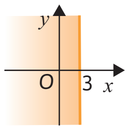


c) $2x - y < 4 \Leftrightarrow -y < -2x + 4 \Leftrightarrow y > 2x - 4$

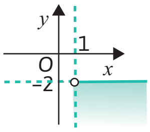


x	$y = 2x - 4$
0	-4
1	-2

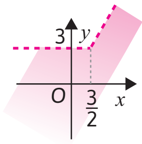
d) $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3$



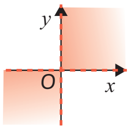
e) $y \leq -2 \;\wedge\; x > 1$



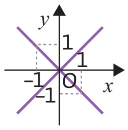
f) $y < 2x \;\vee\; x < 3$



g) $xy < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \;\vee\; (x > 0 \;\wedge\; y < 0)$



h) $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \;\vee\; x + y = 0$
$\Leftrightarrow x = y \;\vee\; x = -y$



19.

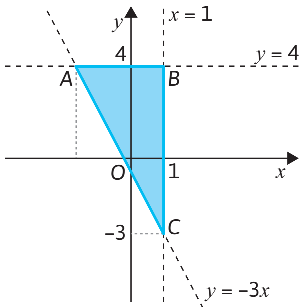
a) $x \leq -2 \;\vee\; x > 1$

b) $-1 < y < 1$

c) $-1 \leq x \leq 1 \;\wedge\; -2 \leq y \leq 3$

d) $-4 < y < 4 \;\vee\; y \leq x$

20. $-3x - y \leq 0 \;\wedge\; x \leq 1 \;\wedge\; 4 - y \geq 0$
$\Leftrightarrow -y \leq 3x \;\wedge\; x \leq 1 \;\wedge\; -y \geq -4$
$\Leftrightarrow y \geq -3x \;\wedge\; x \leq 1 \;\wedge\; y \leq 4$



Sejam A, B e C os vértices do triângulo representado na figura:

- A é o ponto de interseção das retas definidas por $y = 4$ e $y = -3x$:
  $A(x, 4)$ com $4 = -3x \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$
  Assim, $A\left(-\dfrac{4}{3}, 4\right)$.
- B é o ponto de interseção das retas definidas por $x = 1$ e $y = 4$. Logo, $B(1, 4)$.
- C é o ponto de interseção das retas definidas por $x = 1$ e $y = -3x$:
  $C(1, y)$ com $y = -3 \times 1 \Leftrightarrow y = -3$
  Assim, $C(1, -3)$.

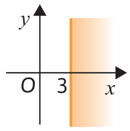
$$\text{Área} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{|4 - (-3)| \times \left|1 - \left(-\frac{4}{3}\right)\right|}{2} = $$

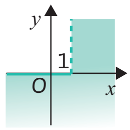
$$= \frac{7 \times \frac{7}{3}}{2} = \frac{49}{6} \text{ u.a.}$$

21.

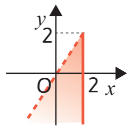
a) $\sim(x < 3) \Leftrightarrow x \geq 3$



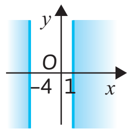
b) $\sim(x \leq 1 \;\wedge\; y > 0) \Leftrightarrow x > 1 \;\vee\; y \leq 0$



c) $\sim(x > 2 \;\vee\; y \geq x) \Leftrightarrow x \leq 2 \;\wedge\; y < x$



d) $\sim(-4 < x < 1) \Leftrightarrow \sim(x > -4 \;\wedge\; x < 1) \Leftrightarrow x \leq -4 \;\vee\; x \geq 1$



22. Opção (B)
$x < 0 \;\wedge\; y > 0 \;\wedge\; y < -x \;\wedge\; x \geq -2$
$\Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \;\wedge\; 0 < y < -x$

23. Por exemplo:

a) $A(0, 25)$ e $B(4, 25)$

b) $A(9, -1)$ e $B(9, -3)$

c) $A(12, 1)$ e $B(1, 12)$

d) $A(-16, 0)$ e $B(0, 16)$

24.

a) $A(-3, 2)$ $\quad$ $B(1, 0)$
$(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2$
$\Leftrightarrow -4y = -8x - 12$
$\Leftrightarrow y = 2x + 3$
Assim, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $y = 2x + 3$.

b) $A(1, 7)$ $\quad$ $B(4, 7)$
A e B pertencem à reta de equação $y = 7$, logo a mediatriz de $[AB]$ é a reta vertical que interseta $[AB]$ no seu ponto médio.
As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são $\left(\dfrac{1+4}{2}, \dfrac{7+7}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, 7\right)$.
Assim, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $x = \dfrac{5}{2}$.

c) $A(\pi, 1000)$ $\quad$ $B(\pi, 500)$

A e B pertencem à reta de equação $x = \pi$, logo a mediatriz de $[AB]$ é a reta horizontal que interseta $[AB]$ no seu ponto médio M.

$$M = \left(\frac{\pi + \pi}{2}, \frac{1000 + 500}{2}\right) = (\pi, 750).$$

Assim, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $y = 750$.

25. $P(2, 0)$ $\quad$ $Q(5, 1)$

a) $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (x + 5)^2 + (y - 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow 2y = 14x + 22$

$\Leftrightarrow y = 7x + 11$

Assim, uma equação da mediatriz de $[PQ]$ é $y = 7x + 11$.

b) Para que um ponto pertença à mediatriz de $[PQ]$, a distância entre esse ponto e P tem de ser igual à distância entre esse ponto e Q.

Assim:

$\sqrt{(1 - 2)^2 + (11 - 0)^2} = \sqrt{(1 + 5)^2 + (11 - 1)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + 11^2} = \sqrt{6^2 + 10^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 121} = \sqrt{36 + 100}$

$\Leftrightarrow \sqrt{122} = \sqrt{136}$, o que é falso.

Logo, o ponto não pertence à mediatriz de $[PQ]$.

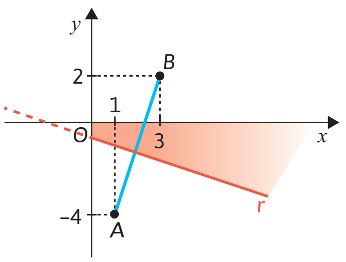
c) Da alínea **a)** vem que $y = 7x + 11$ é uma equação da mediatriz de $[PQ]$.

Se, por exemplo, $x = 0$, então $y = 7 \times 0 + 11 = 11$ e obtém-se o ponto de coordenadas $(0, 11)$, que pertence à mediatriz de $[PQ]$.

Se, por exemplo, $x = 1$, então $y = 7 \times 1 + 11 = 18$ e obtém-se o ponto de coordenadas $(1, 18)$, que pertence à mediatriz de $[PQ]$.

Se, por exemplo, $x = 2$, então $y = 7 \times 2 + 11 = 25$ e obtém-se o ponto de coordenadas $(2, 25)$, que pertence à mediatriz de $[PQ]$.

26.



$A(1, -4)$ $\quad$ $B(3, 2)$

r é a mediatriz de $[AB]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto de mediatriz de $[AB]$.

$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - y + 4$

$\Leftrightarrow 12y = -4x - 4$

$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{12}x - \frac{4}{12}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é então:

$$y \geq -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \;\wedge\; x \geq 0 \;\wedge\; y \leq 0$$

27. $A(1, -3)$ $\quad$ $B(-4, 2)$ $\quad$ $C(2, k)$, $k \in \mathbb{R}$

$\overline{CA} = \overline{CB}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2 - 1)^2 + (k - (-3))^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (k - 2)^2}$

$\Leftrightarrow 1^2 + (k + 3)^2 = 6^2 + (k - 2)^2$

$\Leftrightarrow 1 + k^2 + 6k + 9 = 36 + k^2 - 4k + 4$

$\Leftrightarrow 10k = 30$

$\Leftrightarrow k = 3$

28.

- Determinação da equação reduzida da reta s:

$O(0, 0)$

$A(2, 5)$

$P(x, y)$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$

$\Leftrightarrow 10y = -4x + 29$

$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{10}x + \frac{29}{10}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$

- Determinação das coordenadas do ponto B:

$0 = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{29}{10} \times \frac{5}{2}$

$B\left(\frac{29}{4}, 0\right)$

- Determinação das coordenadas do ponto C:

r: $y = -x$

s: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ -x = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ -10x = -4x + 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ -6x = 29 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{29}{6} \\ x = -\frac{29}{6} \end{cases} \qquad C\left(-\frac{29}{6}, \frac{29}{6}\right)$$

- Determinação da área A do triângulo $[OBC]$:

$$A = \frac{\overline{OB} \times y_C}{2} = \frac{\frac{29}{4} \times \frac{29}{6}}{48} = \frac{841}{48}$$

29. $A(2, 3)$ $\quad$ $B(0, 5)$ $\quad$ $C(-1, 4)$

a) **i.** $\overline{BC} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} =$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

Assim, uma equação da circunferência de centro A e raio $\overline{BC}$ é $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

ii. Uma circunferência de centro B e que passe em A tem raio igual a $\overline{BA}$.

$\overline{BC} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} =$

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Assim, uma equação da circunferência de centro B e que passe em A é $x^2 + (y - 5)^2 = 8$.

iii. Se a circunferência tem centro C e é tangente ao eixo das abcissas, então o seu raio vai ser a distância entre C e o eixo das abcissas, que é 4.
Assim, uma equação da circunferência de centro C e que é tangente ao eixo das abcissas é $(x+1)^2+(y-4)^2=16$.

b) $P(1, 2)$
Substituindo em cada uma das circunferências da alínea anterior x e y pela abcissa e pela ordenada de P, obtemos:

i. $(1-2)^2+(2-3)^2=2 \Leftrightarrow (-1)^2+(-1)^2=2$
$\Leftrightarrow 1+1=2$
$\Leftrightarrow 2=2$, o que é verdadeiro.
Logo, P pertence à circunferência de centro A e raio $\overline{BC}$.

ii. $1^2+(2-5)^2=8 \Leftrightarrow 1^2+(-3)^2=8$
$\Leftrightarrow 1+9=8$
$\Leftrightarrow 10=8$, o que é falso.
Logo, P não pertence à circunferência de centro B e que passa em A.

iii. $(1+1)^2+(2-4)^2=16 \Leftrightarrow 2^2+(-2)^2=16$
$\Leftrightarrow 4+4=16$
$\Leftrightarrow 8=16$, o que é falso.
Logo, P não pertence à circunferência de centro C e que é tangente ao eixo das abcissas.

30.

a) $C(-1, 3)$ e raio $\sqrt{5}$

b) Quando $x=1$, vem que: $(1+1)^2+(y-3)^2=5$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=5-4$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=1$
$\Leftrightarrow y-3=1 \vee y-3=-1$
$\Leftrightarrow y=4 \vee y=2$
Os pontos da circunferência de abcissa 1 são os pontos de coordenadas $(1, 4)$ e $(1, 2)$

c) Interseção com eixo das ordenadas:
Quando $x=0$, vem que: $(0+1)^2+(y-3)^2=5$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=5-1$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=4$
$\Leftrightarrow y-3=2 \vee y-3=-2$
$\Leftrightarrow y=5 \vee y=1$
Os pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas são os pontos de coordenadas $(0, 5)$ e $(0, 1)$.
Interseção com eixo das abcissas:
Quando $y=0$, vem que: $(x+1)^2+(0-3)^2=5$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=5-9$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=-4$ equação impossível em $\mathbb{R}$
Assim, a circunferência não interseta o eixo das abcissas.

31.

a) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$
Centro $(1, 2)$
Raio $=\sqrt{9}=3$

b) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(y-\sqrt{3})^2=2$
Centro $\left(-\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)$
Raio $=\sqrt{2}$

c) $x^2+y^2=1$
Centro $(0, 0)$
Raio $=\sqrt{1}=1$

d) $(2-x)^2+(1-y)^2=3$
Centro $(2, 1)$
Raio $=\sqrt{3}$

e) $(x+2)^2+(y-3)^2=5$
Centro $(-2, 3)$
Raio $=\sqrt{5}$

f) $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
Centro $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
Raio $=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

32.

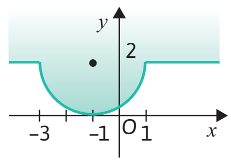
a) $(x-1)^2+(y+2)^2\leq 9$ define o círculo de centro $C(1, -2)$ e raio 3.

b) Substitui-se, na equação obtida na alínea anterior, x e y pelas coordenadas respetivas de cada ponto.

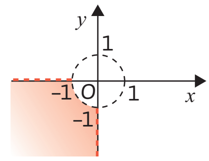
- $(0-1)^2+(3+2)^2\leq 9 \Leftrightarrow (-1)^2+5^2\leq 9 \Leftrightarrow 1+25\leq 9$
$\Leftrightarrow 26\leq 9$, o que é falso.
Logo, A não pertence ao círculo definido na alínea anterior.
- $(1-1)^2+(1+2)^2\leq 9 \Leftrightarrow 0^2+3^2\leq 9 \Leftrightarrow 9\leq 9$, o que é verdadeiro.
Logo, o ponto B pertence ao círculo definido na alínea anterior.
- $\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{3}+2\right)^2\leq 9 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2\leq 9$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{16}{9}\leq 9 \Leftrightarrow \frac{73}{36}\leq 9$, o que é verdadeiro.
Logo, o ponto D pertence ao círculo definido na alínea anterior.

33.

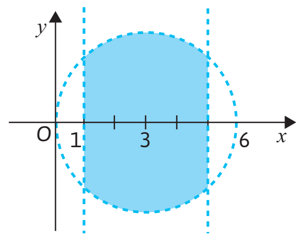
a) $(x+1)^2+(y-2)^2\leq 4 \vee y\geq 2$



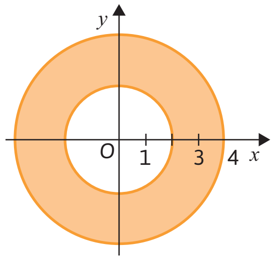
b) $x^2+y^2>1 \wedge x<0 \wedge y<0$



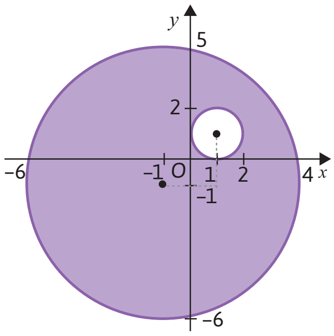
c) $(x-3)^2+y^2<9 \wedge 1<x<5$



d) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$



e) $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 25 \ \wedge \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1$



34.

a) $1 < x^2 + y^2 < 4 \ \wedge \ y \leq -x$

b) $(x-2)^2 + (y-4)^2 \geq 4 \ \wedge \ y \leq 5$

c) $(x^2 + y^2 \leq 36 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0) \ \vee \ (x^2 + y^2 \leq 36 \ \wedge \ x \leq -3)$

35.

a) Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:
$(x+2)^2 + (y-5)^2 \leq 9 \ \wedge \ x \geq -2 \ \wedge \ y \leq 5$

b) $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$
Como $r = 3$, vem que $A_{\text{círculo}} = 9\pi$ e, como a figura representa um quarto de círculo, pois as retas são paralelas aos eixos coordenados e passam no centro da circunferência, tem-se que a área pretendida é $\frac{9\pi}{4}$ u.a.

c) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$
Quando $y = -x$, vem que:
$x^2 + (-x)^2 + 4x - 10x \times (-x) + 20 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 4x + 10x + 20 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 20 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-7+3}{2} \ \vee \ x = \frac{-7-3}{2}$
$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = -5$
Os pontos de interseção são, $P_1\,(-2, 2)$ e $P_2\,(-5, 5)$.

36.

a) O conjunto de pontos do plano que distam igualmente de $A(3, -2)$ e de $B(-1, 2)$ é a mediatriz do segmento da reta $[AB]$.
Assim, $(x-3)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$
$\Leftrightarrow 8y = 8x - 8$
$\Leftrightarrow y = x - 1$

b) O conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto $C(1, -2)$ não excede 3 unidades é o círculo de centro C e raio 3:
$(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$

37.

a)
- Interseção da circunferência com o eixo Oy.

$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (y-1)^2 = 9 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = \sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = -\sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 - \sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases}$

Logo, $A(0, 1+\sqrt{5})$ e $B(0, 1-\sqrt{5})$.

- Interseção da circunferência com o eixo Ox.

$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + 1 = 9 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 8 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \sqrt{8} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -\sqrt{8} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{8} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 - \sqrt{8} \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$

Como D é o ponto de interseção com o semieixo negativo Ox, então $D(-2-2\sqrt{2}, 0)$.

b) $A_{[ABD]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{abcissa de } D|}{2} =$
$= \frac{|(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})| \times |-2-2\sqrt{2}|}{2} =$
$= \frac{\cancel{2}\sqrt{5}(2+2\sqrt{2})}{\cancel{2}} =$
$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$

c) **1.º Processo**
- Mediatriz de $[AB]$

$A(0, 1+\sqrt{5})$ e $B(0, 1-\sqrt{5})$
$y = \frac{1 + \cancel{\sqrt{5}} + 1 - \cancel{\sqrt{5}}}{2} \Leftrightarrow y = 1$

- Mediatriz de $[BD]$

$B(0, 1-\sqrt{5})$ e $D(-2-2\sqrt{2}, 0)$
$x^2 + (y - (1-\sqrt{5}))^2 = (x - (-2-2\sqrt{2}))^2 + y^2$
$\Leftrightarrow x^2 + (y - (1-\sqrt{5}))^2 = (x + (2+2\sqrt{2}))^2 + y^2$
$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2(1-\sqrt{5})y + (1-\sqrt{5})^2 =$
$= \cancel{x^2} + 2(2+2\sqrt{2})x + (2+2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2}$
$\Leftrightarrow (-2+2\sqrt{5})y + 1 - 2\sqrt{5} + 5 =$
$= (4+4\sqrt{2})x + 4 + 8\sqrt{2} + 8$
$\Leftrightarrow (-2+2\sqrt{5})y = (4+4\sqrt{2})x + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 6$

- Interseção das duas mediatrizes

$$\begin{cases}(-2+2\sqrt{5})y=(4+4\sqrt{2})x+8\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6\\ y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2+\cancel{2\sqrt{5}}=(4+4\sqrt{2})x+8\sqrt{2}+\cancel{2\sqrt{5}}+6\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8-8\sqrt{2}=(4+4\sqrt{2})x\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-8-8\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}}=x\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-2\cancel{(4+4\sqrt{2})}}{\cancel{4+4\sqrt{2}}}=x\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$$

O circuncentro é o ponto de coordenadas $(-2, 1)$.

2.º Processo

Por definição, o circuncentro de um triângulo é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.

Assim, o circuncentro de um triângulo é o ponto que está à mesma distância dos seus vértices, logo, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. De onde concluímos que é o ponto $C(-2, 1)$.

38.

a) O ponto pedido é o circuncentro do triângulo $[ABC]$. Para determinar as suas coordenadas basta determinar a interseção de duas das mediatrizes do triângulo.

- Comecemos por determinar uma equação da mediatriz de $[AB]$:

$$(x-1)^2+\cancel{(y-1)^2}=(x-11)^2+\cancel{(y-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-22x+121$$
$$\Leftrightarrow 20x=120$$
$$\Leftrightarrow x=6$$

- Determinemos uma equação da mediatriz de $[AC]$:

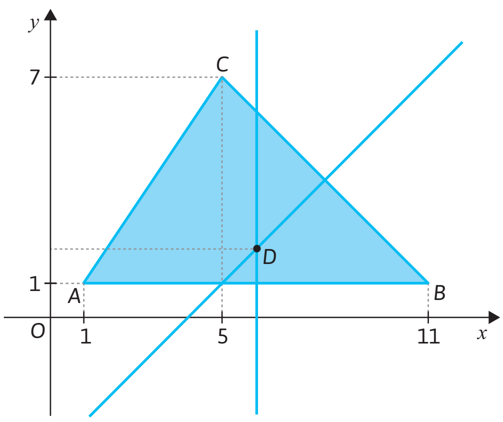
$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-7)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-10x+25+y^2-14y+49$$
$$\Leftrightarrow 12y=-8x+72$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+6$$

- Para determinar as coordenadas do circuncentro de $[ABC]$ vamos então determinar a interseção das duas mediatrizes:

$$y=-\frac{2}{3}x+6\wedge x=6\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}\times 6+6\wedge x=6$$
$$\Leftrightarrow y=2\wedge x=6$$

Logo, o supermercado deve ser construído no ponto de coordenadas $(6, 2)$.

b)



Aprende fazendo – páginas 46 a 57

1.

a) Para que o ponto $A(p+2, k-1)$ pertença ao eixo das abcissas tem que:
$k-1=0\Leftrightarrow k=1$ e $p\in\mathbb{R}$

b) Para que o ponto $B(3-p^2, k^2-1)$ pertença ao eixo das ordenadas tem que:
$3-p^2=0\Leftrightarrow p^2=3\Leftrightarrow p=\sqrt{3}\vee p=-\sqrt{3}$ e $k\in\mathbb{R}$

c) Para que o ponto $C(4-p, k)$ pertença ao primeiro quadrante tem que:
$4-p>0\wedge k>0\Leftrightarrow -p>-4\wedge k>0\Leftrightarrow p<4\wedge k>0$

d) Para que o ponto $D(5p, 6-k)$ pertença ao segundo quadrante tem que:
$5p<0\wedge 6-k>0\Leftrightarrow p<0\wedge -k<-6\Leftrightarrow p<0\wedge k>6$

2.

a) **i.** $(1, -7)$
ii. $(-1, 7)$
iii. $(-1, -7)$

b) $\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{7+k}{2}\right)=\left(-1, \frac{7+k}{2}\right)$ para que este seja o ponto de coordenadas $(-1, 10)$ temos que $\frac{7+k}{2}=10$.
Logo, $k=13$.

3.

a) $A(2, 4)$ $B(6, 15)$
$d(A, B)=\sqrt{(2-6)^2+(4-15)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-11)^2}=$
$=\sqrt{16+121}=\sqrt{137}$

b) $A(-2, 3)$ $B(6, -5)$
$d(A, B)=\sqrt{(-2-6)^2+(3-(-5))^2}=\sqrt{(-8)^2+8^2}=$
$=\sqrt{64+64}=\sqrt{128}$

c) $A(1, -4)$ $B(-2, 0)$
$d(A, B)=\sqrt{(1-(-2))^2+(-4-0)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=$
$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

d) $A(-2, -2)$ $B(-6, 5)$
$d(A, B)=\sqrt{(-2-(-6))^2+(-2-5)^2}=\sqrt{4^2+(-7)^2}=$
$=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

e) $A(0, 0)$ $B(1, -7)$
$d(A, B)=\sqrt{(0-1)^2+(0-(-7))^2}=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=$
$=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}$

f) $A(0, 1)$ $B(\sqrt{8}, 0)$
$d(A, B)=\sqrt{(0-\sqrt{8})^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-\sqrt{8})^2+1^2}=$
$=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$

4. Opção (A)
$A(4, 4)$ $B(-1, 5)$ $C(-2, 0)$
$d(A, B)=\sqrt{(4-(-1))^2+(4-5)^2}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=$
$=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$
$d(A, C)=\sqrt{(4-(-2))^2+(4-0)^2}=\sqrt{6^2+4^2}=$
$=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$
$d(B, C)=\sqrt{(-1-(-2))^2+(5-0)^2}=\sqrt{1^2+5^2}=$
$=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

Como $d(A, B)=d(B, C)\neq d(A, C)$, então o triângulo $[ABC]$ é isósceles e, portanto, a afirmação I é verdadeira.

$(d(A, C))^2 = (\sqrt{52})^2 = 52$

$(d(A, B))^2 + (d(B, C))^2 = (\sqrt{26})^2 + (\sqrt{26})^2 = 26 + 26 = 52$

Como $(d(A, C))^2 = (d(A, B))^2 + (d(B, C))^2$, então, pelo teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo, ou seja, a afirmação II é verdadeira.

Pode então concluir-se que ambas as afirmações são verdadeiras.

5.

a) $A(-2, -1)$ $B(-3, 1)$

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} =$

$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

b) $A(2, 2)$ $B(0, -5)$

$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4+49} =$

$= \sqrt{53}$

c) $\left(\frac{-2+(-3)}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e

$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+(-5)}{2}\right) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$

6. Sejam $A(1, -2)$, $B(6, -1)$, $C(9, 3)$ e $D(4, 2)$

$\overline{AB} = \sqrt{(1-6)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} =$

$= \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$\overline{BC} = \sqrt{(6-9)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} =$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{CD} = \sqrt{(9-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5^2+1} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$\overline{DA} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} =$

$= \sqrt{25} = 5$

Assim, como $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$, então o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.

7. Opção(D)

Uma vez que a ordenada de A é 3, este ponto pertence à reta de equação $y = 3$.

8. Opção(B)

Os pontos $(-3, 3)$ e $(3, -3)$ pertencem à reta de equação $y = -x$. Como se trata de um segmento de reta em que as ordenadas assumem valores entre -3 e 3, inclusive, tem-se que $-3 \leq y \leq 3$. Logo, o conjunto de pontos da figura pode ser definido pela condição $-3 \leq y \leq 3 \ \wedge \ y = -x$.

9.

a) $A(2, 4)$ $B(2, 15)$

Como A e B têm abcissa 2, então a mediatriz de $[AB]$ é a reta perpendicular à reta de equação $x = 2$ que contém o ponto médio de $[AB]$, M.

$M = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{4+15}{2}\right) = \left(2, \frac{19}{2}\right)$

Logo, a mediatriz de $[AB]$ é a reta de equação $y = \frac{19}{2}$.

b) $A(-2, 3)$ $B(6, 3)$

Como A e B têm ordenada 3, então a mediatriz de $[AB]$ é a reta perpendicular à reta de equação $y = 3$ que contém o ponto médio de $[AB]$, M.

$M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (2, 3)$

Logo, a mediatriz de $[AB]$ é a reta de equação $x = 2$.

c) $A(1, -2)$ $B(-2, 0)$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

$\Leftrightarrow 4y = 6x - 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ é uma equação da mediatriz de $[AB]$.

d) $A(-2, -2)$ $B(-1, 3)$

$(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$

$\Leftrightarrow 10y = -2x + 2$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ é uma equação da mediatriz de $[AB]$.

10. Opção(D)

$A(2, 5)$ $B(-2, 3)$

Seja $P(0, 8)$, então:

$d(A, P) = \sqrt{(0-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} =$

$= \sqrt{13}$

$d(B, P) = \sqrt{(0+2)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} =$

$= \sqrt{29}$

Logo, P não pertence à mediatriz de $[AB]$, porque $d(A, P) \neq d(B, P)$.

Seja $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, então:

$$d(A, Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-5\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{58}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Logo, Q não pertence à mediatriz de $[AB]$, porque $d(A, Q) \neq d(B, Q)$.

Seja $R(5, 2)$, então:

$d(A, R) = \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} =$

$= \sqrt{18}$

$d(B, R) = \sqrt{(5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} =$

$= \sqrt{50}$

Logo, R não pertence à mediatriz de $[AB]$, porque $d(A, R) \neq d(B, R)$.

Seja $S(0, 4)$, então:

$d(A, S) = \sqrt{(0-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} =$

$= \sqrt{5}$

$d(B, S) = \sqrt{(0+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Logo, S pertence à mediatriz de $[AB]$ porque $d(A, S) =$
$= d(B, S)$.

11.

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 3$

c) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 16$

d) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4}{25}$

12.

a) $r = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 26$

b) $r = \sqrt{(-3+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 29$

13.

a) $A(-2, -2) \qquad B(0, 3)$

$M\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$

$M\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ é o centro de circunferência

$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-2-0)^2 + (-2-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+25}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

Logo, $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$

b) $A(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \qquad B(-\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$

$M\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2}\right)$

$M(0, 2\sqrt{3})$ é o centro de circunferência

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{3})^2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{8+12}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{20}}{2} =$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{2} =$$
$$= \sqrt{5}$$

$x^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 5$

14. Opção (A)

$(x+\sqrt{2})^2 + (y-\pi)^2 = \frac{1}{2}$ é uma equação da circunferência de centro $(-\sqrt{2}, \pi)$ e raio $r = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. Sejam $A(1, \sqrt{3})$, $B(2, 2)$, $D(0, 0)$ e $C(2, 0)$

$d(A, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} =$
$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$d(B, C) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0+4} =$
$= \sqrt{4} = 2$

$d(D, C) = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+0} =$
$= \sqrt{4} = 2$

Assim, A, B e D encontram-se à mesma distância do ponto C, pelo que pertencem a uma circunferência de centro C.

16.

a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ é uma equação da circunferência de centro $(1, -1)$ e raio $\sqrt{4} = 2$.

b) $x^2 + (y+3)^2 = 8$ é uma equação da circunferência de centro $(0, -3)$ e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

c) $(x+4)^2 + (y-3)^2 \leq \frac{1}{4}$ é uma equação do círculo de centro $(-4, 3)$ e raio $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

d) $(x-5)^2 + y^2 > 20$ é uma equação do exterior da circunferência de centro $(5, 0)$ e raio $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

e) $(x+3)^2 + (y+5)^2 < 9$ é uma equação do interior da circunferência de centro $(-3, -5)$ e raio $\sqrt{9} = 3$.

f) $2 \leq (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 4$ é uma equação da coroa circular de centro $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, sendo 2 o raio da circunferência externa e $\sqrt{2}$ o raio da circunferência interna.

17. Opção (C)

C_1: $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

$\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ são as coordenadas do centro de C_2.

O raio de C_2 é dado por:

$$\sqrt{\left(-3+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

Assim, C_2: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Logo, a condição pedida é

$(x+3)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \wedge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$.

18.

a) $O(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ e $D(2, 2)$ são os vértices do trapézio.

O ponto médio de $[OB]$ é o ponto M_1 de coordenadas $(2, 0)$.

O ponto médio de $[BC]$ é o ponto M_2 de coordenadas $(4, 1)$.

O ponto médio de $[CO]$ é o ponto M_3 de coordenadas $(3, 2)$.

O ponto médio de $[DO]$ é o ponto M_4 de coordenadas $(1, 1)$.

b) **i.** $y = 2 \;\wedge\; 2 \leq x \leq 4$

ii. $x = 3$

iii. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$

iv. $0 \leq x \leq 4 \;\wedge\; 0 \leq y \leq 2 \;\wedge\; y \leq x$

19.

a) De acordo com a figura, $P(-2, -3)$ e $Q(3, 3)$.

$$d(P, Q) = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-3)^2} =$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} =$$
$$= \sqrt{25+36} =$$
$$= \sqrt{61}$$

b) As coordenadas do ponto médio de $[PQ]$ são $\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

c) Se o diâmetro da circunferência é $[PQ]$, então o ponto médio de $[PQ]$ é o centro da circunferência e o seu raio é igual a metade da distância entre P e Q. Assim, de acordo com as alíneas anteriores, uma equação da circunferência de diâmetro $[PQ]$ é $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{61}{4}$.

d) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$
$\Leftrightarrow 12y = -10x + 5$
$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{12}$, que é uma equação da mediatriz de $[PQ]$.

e) $(-2 \leq x \leq -1 \;\wedge\; -3 \leq y \leq 3) \;\vee\; (x \leq 3 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; y \leq x)$

20. Opção (B)
$A(3, -2-k)$ $\qquad$ $B(1, -5)$
$d(A, B) = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(3-1)^2 + (-2-k+5)^2} = \sqrt{13}$
$\Leftrightarrow 2^2 + (3-k)^2 = 13$
$\Leftrightarrow (3-k)^2 = 9$
$\Leftrightarrow 3 - k = 3 \;\vee\; 3 - k = -3$
$\Leftrightarrow k = 0 \;\vee\; k = 6$

21. O incentro do triângulo $[ABC]$ é o ponto de interseção das suas bissetrizes.
Assim, $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \;\wedge\; x = 1 \Leftrightarrow y = 2 \;\wedge\; x = 1$
Logo, $I(1, 2)$.
$d(A, I) = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

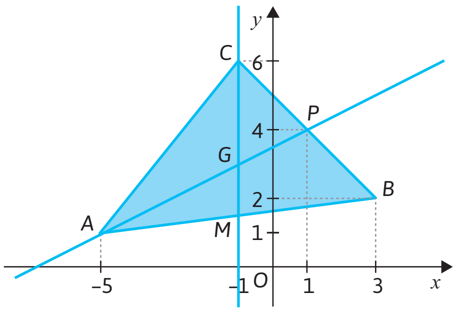
22.

a) O ponto pedido é o ponto médio de $[AB]$, ou seja, o ponto de coordenadas $\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

b) Como G é o centro de gravidade do triângulo, $d(G, C) = \frac{2}{3} d(C, M)$.
$d(C, M) = \sqrt{(-1+1)^2 + \left(6 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}$.
Logo, $d(G, C) = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} = 3$.

c) Sabemos que G pertence ao segmento de reta $[CM]$, logo a sua é -1. Como $d(G, C) = 3$, então a ordenada de G é 3. Logo, G tem coordenadas $(-1, 3)$.

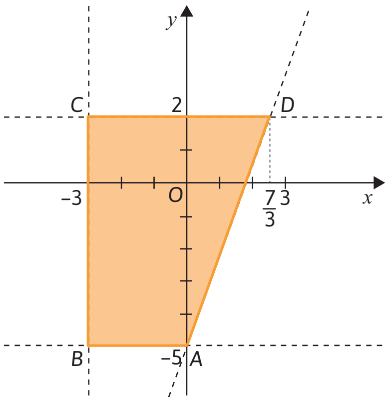
d)



23. $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, uma vez que a A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero. Assim:
$\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow \sqrt{(-5-(-3))^2 + \left(1 - (1 + 2\sqrt{3})\right)^2} =$
$= \sqrt{(-5-(-1))^2 + (1-y)^2}$
$\Leftrightarrow (-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = (-4)^2 + (1-y)^2$
$\Leftrightarrow 4 + 12 = 16 + (1-y)^2$
$\Leftrightarrow (1-y)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 1 - y = 0$
$\Leftrightarrow y = 1$
Logo, a ordenada de C é 1.

24. Opção (C)
A bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela equação $y = x$. Assim, para que A pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares:
$2k^2 + 9k = 5 \Leftrightarrow 2k^2 + 9k - 5 = 0$
$\Leftrightarrow k = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{4}$
$\Leftrightarrow k = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4}$
$\Leftrightarrow k = \frac{-9 \pm 11}{4}$
$\Leftrightarrow k = -5 \;\vee\; k = \frac{1}{2}$

25. $3x - y \leq 5 \;\wedge\; -x - 3 \leq 0 \;\wedge\; -5 \leq y \leq 2$
$\Leftrightarrow -y \leq -3x + 5 \;\wedge\; -x \leq 3 \;\wedge\; -5 \leq y \leq 2$
$\Leftrightarrow y \geq 3x - 5 \;\wedge\; x \geq -3 \;\wedge\; -5 \leq y \leq 2$



Cálculos auxiliares
$A(0, -5)$ $\quad$ $B(-3, -5)$ $\quad$ $C(-3, 2)$ $\quad$ $D\left(\frac{7}{3}, 2\right)$
Se $y = 2$, então:
$2 = 3x - 5 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$

$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{\left(\frac{7}{3} + 3\right) + 3}{2} \times 7 =$
$= \frac{\frac{16}{3} + 3}{2} \times 7 =$
$= \frac{25}{6} \times 7 =$
$= \frac{175}{6}$ u.a.

26. Opção (B)
$\sim(y < 0 \;\vee\; y \geq x) \Leftrightarrow y \geq 0 \;\wedge\; y < x$

27. Opção (B)

Como d(P, Q) = d(P, R), vem que:

$\sqrt{(k-1)^2+(k-1-2)^2}=\sqrt{(k+2)^2+(k-1+2)^2}$,

isto é:

$(k-1)^2+(k-3)^2=(k+2)^2+(k+1)^2$

$\Leftrightarrow k^2-2k+1+k^2-6k+9=k^2+4k+4+k^2+2k+1$

$\Leftrightarrow -8k-6k=5-10$

$\Leftrightarrow -14k=-5$

$\Leftrightarrow k=\frac{5}{14}$

28.

a) $x\leq 0 \ \wedge \ y\leq 5 \ \wedge \ y\geq -x$

b) $(-1\leq x\leq 0 \ \wedge \ -1\leq y\leq 0) \ \vee \ (0\leq x\leq 1 \ \wedge \ 0\leq y\leq 1)$

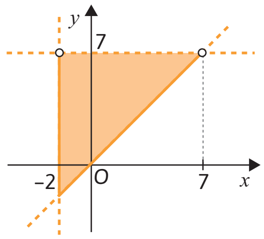
c) $(x-2)^2+(y-1)^2\leq 4 \ \wedge \ x\leq 1 \ \wedge \ y\leq x$

d) $(y>x \ \wedge \ x\geq 0) \ \vee \ (y<-x \ \wedge \ y\geq 0) \ \vee \ (y<x \ \wedge \ x\leq 0)$
$\vee \ (y>-x \ \wedge \ y\leq 0)$

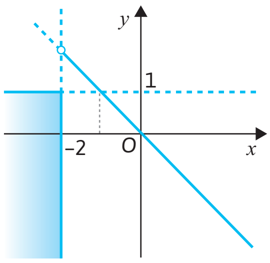
e) $x^2+(y-1)^2\geq 1 \ \wedge \ x^2+(y-2)^2\leq 4$

29.

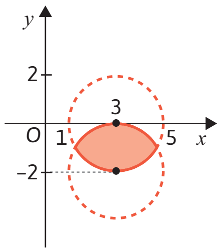
a) $y<7 \ \wedge \ x\geq -2 \ \wedge \ y\geq x$



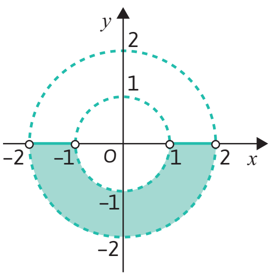
b) $(x\leq -2 \ \wedge \ y\leq 1) \ \vee \ (y=-x \ \wedge \ x>-2)$



c) $(x-3)^2+(y+2)^2\leq 4 \ \wedge \ (x-3)^2+y^2\leq 4$



d) $x^2+y^2>1 \ \wedge \ x^2+y^2<4 \ \wedge \ y\leq 0$



30. Opção (D)

A circunferência inscrita no quadrado definido pela condição $0\leq x\leq 5 \ \wedge \ 1\leq y\leq 6$ tem centro no ponto de coordenadas $\left(\frac{0+5}{2},\frac{1+6}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ e tem raio igual a $\frac{|5-0|}{2}=\frac{5}{2}$.

Portanto, uma condição que define a circunferência pedida é $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

31. Opção (B)

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \ \wedge \ x=-1$

$\Leftrightarrow (-1+3)^2+(y-2)^2=9$

$\Leftrightarrow 2^2+(y-2)^2=9$

$\Leftrightarrow (y-2)^2=5$

$\Leftrightarrow y-2=\sqrt{5} \ \vee \ y-2=-\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow y=2+\sqrt{5} \ \vee \ y=2-\sqrt{5}$

A interseção do plano definido por $x=1$ com a circunferência definida por $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ são os pontos de coordenadas $(-1, 2+\sqrt{5})$ e $(-1, 2-\sqrt{5})$.

32. Opção (C)

A circunferência da figura tem centro (0, 0) e raio 3. Como a região sombreada é uma parte do interior da circunferência incluindo a fronteira, a expressão que se procura vai conter a expressão $x^2+y^2\leq 9$. Por outro lado, a região sombreada é superior à reta de equação $y=x$ e é superior à reta de equação $y=-x$. Assim, a expressão que pode definir a região sombreada é $x^2+y^2\leq 9 \ \wedge \ y\geq x \ \wedge \ y\geq -x$.

33.

a) $x^2+y^2+2x-10y+14=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-10y+25=-14+1+25$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-5)^2=12$

Assim, o centro da circunferência é o ponto de coordenadas (–1, 5) e o raio é $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

b) Se, por exemplo, $x=1$, então:

$(1+1)^2+(y-5)^2=12 \Leftrightarrow (y-5)^2=8$

$\Leftrightarrow y-5=\sqrt{8} \ \vee \ y-5=-\sqrt{8}$

$\Leftrightarrow y=5+2\sqrt{2} \ \vee \ y=5-2\sqrt{2}$

Logo, os pontos de coordenadas $(1, 5+2\sqrt{2})$ e $(1, 5+2\sqrt{2})$ pertencem à circunferência.

c) Substituindo x e y pelas coordenadas de A no primeiro membro da equação da circunferência obtida na alínea **a)**, tem-se:

$(2+1)^2+(3-5)^2=3^2+(-2)^2=9+4=13$.

Ora, $13>12$, logo o ponto A encontra-se no exterior da circunferência.

Procedendo de forma análoga em relação a B, obtém-se:

$(-1+1)^2+(4-5)^2=0^2+(-1)^2=0+1=1$

Ora, $1<12$, logo o ponto B encontra-se no interior da circunferência.

d) Os pontos de interseção com o eixo Ox são da forma $(x, 0)$, onde x é um número real.

Assim, se $y=0$:

$(x+1)^2+(0-5)^2=12 \Leftrightarrow (x+1)^2+25=12$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=-13$, que é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

Logo, a circunferência não interseta o eixo das abcissas.
Os pontos de interseção com o eixo Oy são da forma $(0, y)$, onde y é um número real.
Assim, se $x = 0$:
$$(0+1)^2 + (y-5)^2 = 12 \Leftrightarrow 1 + (y-5)^2 = 12$$
$$\Leftrightarrow (y-5)^2 = 11$$
$$\Leftrightarrow y - 5 = \sqrt{11} \vee y - 5 = -\sqrt{11}$$
$$\Leftrightarrow y = 5 + \sqrt{11} \vee y = 5 - \sqrt{11}$$
Logo, os pontos de coordenadas $(0, 5 + \sqrt{11})$ e $(0, 5 - \sqrt{11})$ são os pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas.

e) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$
$\Leftrightarrow 2y = 6x + 4$
$\Leftrightarrow y = 3x + 2$ é uma equação da mediatriz de $[AB]$.

f) Substituindo, na equação obtida na alínea anterior, x e y pelas coordenadas do ponto, obtém-se:
$5 = 3 \times 1 + 2 \Leftrightarrow 5 = 3 + 2$, que é verdadeiro.
Logo, o ponto de coordenadas $(1, 5)$ pertence à mediatriz de $[AB]$.

34.

a) O conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de A e de B é a mediatriz de $[AB]$:
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$
$\Leftrightarrow 8y = 6x - 11$
$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{8}$, que é uma equação da mediatriz $[AB]$.

b) O conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto $C(-3, 0)$ é inferior a 5 é o interior do círculo de centro C e raio 5, que é definido pela equação $(x+3)^2 + y^2 < 25$.

c) Seja P um ponto cuja distância ao ponto $A(1, 3)$ é metade da distância ao ponto $B(1, 6)$, então:
$d(P, A) = \frac{1}{2} d(P, B)$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2}$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2}$
$\Leftrightarrow 4((x-1)^2 + (y-3)^2) = (x-1)^2 + (y-6)^2$
$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 12y + 36$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4y^2 - 24y + 40 = x^2 - 2x + y^2 - 12y + 37$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y = -3$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 1 + 4$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

35. Opção (D)
Sabemos que a circunferência de maior raio é definida por $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
A circunferência de menor raio é definida por $(x-3)^2 + y^2 = 1$. A reta vertical tangente à circunferência de menor raio é definida por $x = 2$.
A condição $(x-3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge x < 2 \wedge y > 0$ define a interseção do círculo de centro no ponto de coordenadas $(3, 0)$ e raio 3 com o semiplano aberto à esquerda da reta vertical definida por $x = 2$ e com o semiplano aberto superior à reta horizontal definida por $y = 0$.
A condição $1 \leq (x-3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge x > 2 \wedge y < 0$ define a interseção da coroa circular de centro no ponto de coordenadas $(3, 0)$ e raio 3 da circunferência externa e raio 1 da circunferência interna, com o semiplano aberto à direita da reta vertical definida por $x = 2$ e com o semiplano aberto inferior à reta horizontal definida por $y = 0$.
Assim, a condição pedida é:
$[(x-3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge x < 2 \wedge y > 0] \vee$
$[1 \leq (x-3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge x > 2 \wedge y < 0]$

36.

a)
- Mediatriz de $[PQ]$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + y^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2$
$\Leftrightarrow -4y = -4x - 4$
$\Leftrightarrow y = x + 1$
- Mediatriz de $[QR]$
$(x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2$
$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} - 6x + 9$
$\Leftrightarrow 4x = 8$
$\Leftrightarrow x = 2$
- Determinar o centro de circunferência
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \quad C(2, 3)$$
- Determinar o raio de circunferência
$r = d(Q, C) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
Logo, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

b)
- Mediatriz de $[PQ]$
$(x+5)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y+2)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4$
$\Leftrightarrow -6y = -6x - 18$
$\Leftrightarrow y = x + 3$
- Mediatriz de $[QR]$
$\cancel{(x+2)^2} + (y+2)^2 = \cancel{(x+2)^2} + (y+4)^2$
$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = y^2 - 8y + 16$
$\Leftrightarrow 12y = 12$
$\Leftrightarrow y = 1$
- Determinar o centro de circunferência
$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x + 3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \quad C(-2, 1)$$
- Determinar o raio de circunferência
$r = d(Q, C) = \sqrt{(-2+2)^2 + (1+2)^2} = 3$
Logo, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

37.

a) O ponto pedido é o circuncentro do triângulo $[P_1P_2P_3]$. Para determinar as suas coordenadas, basta determinar a interseção de duas das mediatrizes do triângulo.
- Comecemos por determinar uma equação da mediatriz de $[P_1P_2]$:
$(x+5)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = x^2 - 4x + 4$
$\Leftrightarrow 14x = -21$
$\Leftrightarrow x = -\frac{21}{14}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

- Determinemos uma equação da mediatriz de $[P_1P_3]$:

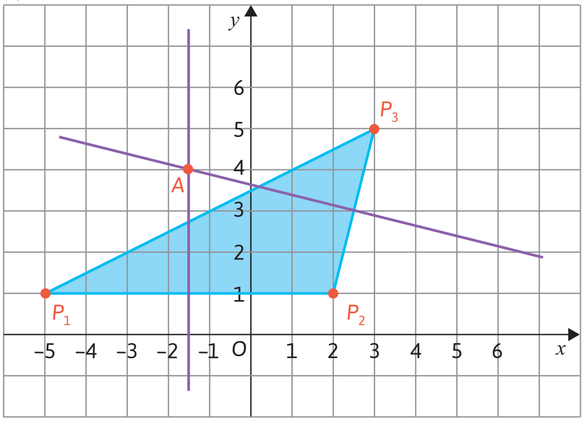
$$(x+5)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+10x+25+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-10y+25$$
$$\Leftrightarrow 8y=-16x+8$$
$$\Leftrightarrow y=-2x+1$$

- Para determinar as coordenadas do circuncentro de $[P_1P_2P_3]$ vamos então determinar a interseção das duas mediatrizes:

$$y=-2x+1 \wedge x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1 \wedge x=-\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow y=4 \wedge x=-\frac{3}{2}$$

Logo, o supermercado deve ser construído no ponto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$.

b)



38. B é tal que $x^2=8y \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{8}$. Logo, B é da forma $\left(x, \frac{x^2}{8}\right)$.

$$d(A, B)=\sqrt{(0-x)^2+\left(2-\frac{x^2}{8}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+\left(\frac{16-x^2}{8}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{8y+\left(\frac{16-x^2}{8}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{8y+\frac{256-256y+64y^2}{64}}=$$
$$=\sqrt{8y+4-4y+y^2}=$$
$$=\sqrt{y^2+4y+4}=$$
$$=\sqrt{(y+2)^2}=$$

$=y+2$, como queríamos demonstrar.

39. O triângulo $[ABC]$ é equilátero se e somente se $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-4)^2+(4-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$
$$\overline{AC}=\overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2-6x+9+y^2-8y+16$$
$$\Leftrightarrow 8y-4y=8x-6x-4+9$$
$$\Leftrightarrow 4y=2x+5$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$$

Logo, $C\left(x, \frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)$.

$$\overline{AC}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-2\right)^2}=\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)^2=5$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}=5$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-128x+256+4x^2-12x+9=80$$
$$\Leftrightarrow 20x^2-140x+185=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-28x+37=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\times4\times37}}{8}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{28\pm\sqrt{192}}{8}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{28\pm8\sqrt{3}}{8}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm2\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7+2\sqrt{3}}{2} \vee x=\frac{7-2\sqrt{3}}{2}$$

40. Seja P um ponto cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa, então as coordenadas de P são da forma $(x, 2x)$. Como P pertence à mediatriz de $[AB]$, então:

$d(P, A)=d(P, B)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2x-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(2x-3)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(2x-1)^2=(x-3)^2+(2x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+4x^2-4x+1=x^2-6x+9+4x^2-12x+9$$
$$\Leftrightarrow 12x=16$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

Logo, $P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

41.

a)

$$\begin{cases}(1-a)^2+(5-b)^2=2\\(1-a)^2+(7-b)^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)^2=2-(5-b)^2\\\cancel{2}-(5-b)^2+(7-b)^2=\cancel{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\\-25+10b-\cancel{b^2}+49-14b+\cancel{b^2}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\\-4b=-24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)^2=2-1\\b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)^2=1\\b=6\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-a=1\\b=6\end{cases} \vee \begin{cases}1-a=-1\\b=6\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=6\end{cases} \vee \begin{cases}a=2\\b=6\end{cases}$$

$(x-2)^2+(y-6)^2=2$ ou $x^2+(y-6)^2=2$

b)

$$\begin{cases}(3-a)^2+(2-b)^2=8\\(7-a)^2+(2-b)^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-b)^2=8-(3-a)^2\\(7-a)^2+\cancel{8}-(3-a)^2=\cancel{8}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\\49-14a+\cancel{a^2}-9+6a-\cancel{a^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\\-8a=-40\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2-b)^2=8-4\\a=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-b)^2=4\\\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-b=2 \\ a=5 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-b=-2 \\ a=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=5 \end{cases} \vee \begin{cases} b=4 \\ a=5 \end{cases}$

$(x-5)^2+y^2=8$ ou $(x-5)^2+(y-4)^2=8$

42. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ (x-6)^2+(y-8)^2=25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x^2-12x+36+y^2-16y+64=25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 25-12x-16y+75=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ -12x-16y+100=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ -12x=16y-100 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x=-\dfrac{4}{3}y+\dfrac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\dfrac{4}{3}y+\dfrac{25}{3}\right)^2+y^2=25 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{9}y^2-\dfrac{200}{9}y+\dfrac{625}{9}+y^2=25 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{25}{9}y^2-\dfrac{200}{9}y+\dfrac{400}{9}=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25y^2-200y+400=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-80y+16=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)^2=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ -12x-16\times 4+100=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ -12x+36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}$

Logo, $I(3, 4)$.

43. Opção (B)

$x^2+y^2+6y+9=0 \Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=0$, que representa o ponto $(0, -3)$.

44. $\begin{cases} (x+a)^2+(y-a)^2=2a^2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(y-a)^2=2a^2 \\ x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-a)^2=a^2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-a=a \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-a=-a \\ x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2a \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

Como A tem ordenada positiva, $A(0, 2a)$. Seja $P(x, -x)$, com $x<0$.

$A_{[OAP]}=4a \Leftrightarrow \dfrac{\overline{OA}\times |\text{abcissa de } P|}{2}=4a$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a\times(-x)}{2}=4a$

$\Leftrightarrow -ax=4a$

$\Leftrightarrow x=-4$

Logo, $P(-4, 4)$.

45. Opção (A)

$\overbrace{(x-1)^2+(y+1)^2\leq 2}^{\text{Círculo de centro } (-1,\,1) \text{ e raio } \sqrt{2}.} \;\wedge\; \underbrace{y\leq -x}_{\substack{\text{Semiplano fechado inferior, determinado} \\ \text{pela bissetriz dos quadrantes pares.}}}$

A área pretendida é, então, a área do semicírculo:

$\dfrac{\pi\times(\sqrt{2})^2}{2}=\pi.$

46. Opção (D)

Seja r o raio da circunferência e C o seu centro.

$C(1, -3)$ e $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Como se pretende que a interseção da circunferência com a reta vertical definida por $x=a$ tenha comprimento $4\sqrt{2}$, que é o dobro do raio, então o segmento de reta terá de ser um diâmetro e, portanto, a reta terá de passar pelo centro da circunferência.

Uma equação da reta pretendida é, então, $x=1$.

Assim, $a=1$.

47.

a) $x^2+y^2+10x-4y+k=0$

$\Leftrightarrow x^2+10x+25+y^2-4y+4=-k+25+4$

$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-2)^2=29-k$

Para que esta equação defina uma circunferência, $29-k>0 \Leftrightarrow k<29$.

b) Recorrendo à equação obtida na alínea anterior, para que a equação defina um ponto $29-k=0 \Leftrightarrow k=29$.

c) Recorrendo à equação obtida na alínea **a)**, para que a equação defina o conjunto vazio $29-k<0 \Leftrightarrow k>29$.

48.

a) O conjunto dos pontos do plano que distam igualmente da origem do referencial e de A é a mediatriz de $[OA]$:

$x^2+y^2=(x+3)^2+(y+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+6x+9+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow -6y=6x+18$

$\Leftrightarrow y=-x-3$, que é uma equação dessa mediatriz.

A cinrcunferência de centro A e tangente aos eixos coordenados tem raio 3 e é definida pela equação $(x+3)^2+(y+3)^2=9$.

Logo, a condição pretendida é

$y=-x-3 \;\wedge\; (x+3)^2+(y+3)^2=9$.

Intersetando a reta com a cinrcunferência:

$\begin{cases} y=-x+3 \\ (x+3)^2+(y+3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ (x+3)^2+(-x-3+3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x^2+6x+9+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 2x^2+6x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x(2x+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 2x+6=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 - 3 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -(-3) - 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Assim, outra concretização possível para definir o conjunto de pontos dado é:
$(x = 0 \wedge y = -3) \vee (x = -3 \wedge y = 0)$

b) O conjunto dos pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são a origem do referencial e cada um dos pontos da circunferência de centro *O* e raio 2 é uma circunferência de centro *O* e raio 1, definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

49. $(a, 2a + 1)$ é o centro da circunferência C_1.
$(b, 2b + 1)$ é o centro da circunferência C_2.
$|2a + 1|$ é o raio da circunferência C_1.
$|2b + 1|$ é o raio da circunferência C_2.

$$\begin{cases} (4 - a)^2 + (2 - 2a - 1)^2 = |2a + 1|^2 \\ (4 - b)^2 + (2 - 2b - 1)^2 = |2b + 1|^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 8a + a^2 + (1 - 2a)^2 = (2a + 1)^2 \\ 16 - 8b + b^2 + (1 - 2b)^2 = (2b + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 8a + a^2 + \cancel{1} - 4a + \cancel{4a^2} = \cancel{4a^2} + 4a + \cancel{1} \\ 16 - 8b + b^2 + \cancel{1} - 4b + \cancel{4b^2} = \cancel{4b^2} + 4b + \cancel{1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 16a + 16 = 0 \\ b^2 - 16b + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \times 16}}{2} \\ b = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \times 16}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{16 \pm 8\sqrt{3}}{2} \\ b = \dfrac{16 \pm 8\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \pm 4\sqrt{3} \\ b = 8 \pm 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$C_1(8 + 4\sqrt{3}, 16 + 8\sqrt{3} + 1)$, ou seja, $C_1(8 + 4\sqrt{3}, 17 + 8\sqrt{3})$.
$C_2(8 - 4\sqrt{3}, 16 - 8\sqrt{3} + 1)$, ou seja, $C_2(8 - 4\sqrt{3}, 17 - 8\sqrt{3})$.
Logo,
C_1: $(x - 8 - 4\sqrt{3})^2 + (y - 17 - 8\sqrt{3})^2 = (17 + 8\sqrt{3})^2$
C_2: $(x - 8 + 4\sqrt{3})^2 + (y - 17 + 8\sqrt{3})^2 = (17 - 8\sqrt{3})^2$

Capítulo 2 – Geometria analítica no espaço – páginas 58 a 78

1.
a) Ponto *B*
b) Ponto *F*
c) Ponto *A*
d) Ponto *C*
e) Ponto *D*

2.
a) $A(6, 0, 0)$; $B(6, 6, 0)$; $C(0, 6, 0)$; $D(0, 0, 0)$; $E(6, 6, 6)$; $F(0, 6, 6)$; $G(0, 0, 6)$; $H(6, 0, 6)$
b) $A(0, -6, 0)$; $B(0, 0, 0)$; $C(-6, 0, 0)$; $D(-6, -6, 0)$; $E(0, 0, 6)$; $F(-6, 0, 6)$; $G(-6, -6, 6)$; $H(0, -6, 6)$
c) $A(3, -3, -3)$; $B(3, 3, -3)$; $C(-3, 3, -3)$; $D(-3, -3, -3)$; $E(3, 3, 3)$; $F(-3, 3, 3)$; $G(-3, -3, 3)$; $H(3, -3, 3)$

3.
a) $x \in \mathbb{R} \wedge y = 0 \wedge z = 0$
b) $x = 0 \wedge y = 0 \wedge z < 0$
c) $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z = 0$
d) $x \in \mathbb{R} \wedge y = 0 \wedge z \in \mathbb{R}$
e) $x < 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$
f) $x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0$

4.
a) $A(3, -4, 2)$; $B(3, 4, 2)$; $C(0, 4, 2)$; $D(0, -4, 2)$; $E(3, -4, 0)$; $F(3, 4, 0)$
b) Pontos *F*, *I* e *C*. No plano xOy, o ponto *F* tem coordenadas (3, 4).
No plano xOz, o ponto *I* tem coordenadas (3, 2). No plano yOz, o ponto *C* tem coordenadas (4, 2).

5.

Ponto simétrico relativamente a	A(0, 5, 2)	B(3, 0, 1)	C(4, 2, 0)	D(1, 2, 3)
Origem	(0, –5, –2)	(–3, 0, –1)	(–4, –2, 0)	(–1, –2, –3)
Eixo Ox	(0, –5, –2)	(3, 0, –1)	(4, –2, 0)	(1, –2, –3)
Eixo Oy	(0, 5, –2)	(–3, 0, –1)	(–4, 2, 0)	(–1, 2, –3)
Eixo Oz	(0, –5, 2)	(–3, 0, 1)	(–4, –2, 0)	(–1, –2, 3)
Plano xOy	(0, 5, –2)	(3, 0, –1)	(4, 2, 0)	(1, 2, –3)
Plano xOz	(0, –5, 2)	(3, 0, 1)	(4, –2, 0)	(1, –2, 3)
Plano yOz	(0, 5, 2)	(–3, 0, 1)	(–4, 2, 0)	(–1, 2, 3)

6. Seja *C* o centro da superfície esférica de diâmetro [*AB*].
C é o ponto médio do segmento de reta [*AB*] e tem coordenadas $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{4+2}{2}, \dfrac{0+(-6)}{2}\right) = (-1, 3, -3)$.

7. Para que o ponto $B\left(-\dfrac{5}{2}, 3, 2\right)$ seja o ponto médio de [*AC*], as coordenadas de *B* têm de ser da forma $\left(\dfrac{2+1-k}{2}, \dfrac{-1+7}{2}, \dfrac{3+p^2}{2}\right)$, isto é, $\left(\dfrac{3-k}{2}, 3, \dfrac{3+p^2}{2}\right)$.
Como a ordenada é 3, igual à ordenada de *B*, falta apenas garantir que a abcissa seja $-\dfrac{5}{2}$ e a cota 2.
Assim, $\dfrac{3-k}{2} = -\dfrac{5}{2} \wedge \dfrac{3+p^2}{2} = 2$
$\Leftrightarrow 3 - k = -5 \wedge 3 + p^2 = 4$
$\Leftrightarrow k = 8 \wedge p^2 = 1$
$\Leftrightarrow k = 8 \wedge (p = 1 \vee p = -1)$

8.
a) $\overline{AB} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2 + (-6-(-6))^2} = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3$
b) $\overline{AE} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-0)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{0 + 0 + 100} = 10$
c) $\overline{AC} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (-6-(-6))^2} = \sqrt{9 + 9 + 0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

d) $\overline{AF} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{0+9+100} =$
$= \sqrt{109}$

e) $\overline{AG} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{9+9+100} =$
$= \sqrt{118}$

9.

a) $d(A, B) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-1)^2 + (4-4)^2} =$
$= \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5$

b) $d(C, O) = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (-3-0)^2} =$
$= \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

c) $d(D, E) = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{0+0+4} = 2$

d) $d(F, G) = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\sqrt{2} - (\sqrt{2}-3)\right)^2 + (2-(-1))^2} =$
$= \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$

e) $d(H, I) = \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{3(a-b)^2} =$
$= |a-b|\sqrt{3}$

10. $\overline{AB} = \sqrt{(-1-0)^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 + (3-1)^2} =$
$= \sqrt{1+4-4\sqrt{3}+3+4} = \sqrt{12-4\sqrt{3}}$
$\overline{BC} = \sqrt{(0-(-3))^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2 + (1-4)^2} =$
$= \sqrt{9+3+9} = \sqrt{21}$
$\overline{AC} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (2-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+4+1} =$
$= \sqrt{9} = 3$
Como $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$, o triângulo [*ABC*] é um triângulo escaleno.

11.

a) $d(A, B) = 5$

b) $d(A, B) = 3$

b) $d(A, B) = 7$

12.

a) O plano paralelo a yOz que passa no ponto *F* é $x = 3$.

b) O plano paralelo a xOy que passa no ponto *B* é $z = 2$.

c) O plano paralelo a xOz que passa no ponto *H* é $y = -4$.

d) O plano paralelo ao plano *ABC* que passa pelo ponto de coordenadas (3, 4, 5) é $z = 5$.

e) O plano que contém a face [*EFGH*] é $z = 0$.

13.

a) As coordenadas dos restantes vértices do prisma são *A*(3, 3, –6); *C*(0, 3, –6); *D*(0, 0, –6); *E*(3, 0, 4); *F*(3, 3, 4); *G*(0, 3, 4); *H*(0, 0, 4).

b) **i.** O plano que contém a face [*EFGH*] é $z = 4$.
ii. O plano *BCG* é definido por $y = 3$.
iii. A reta *AE* é definida por $x = 3 \wedge y = 0$.
iv. A reta *AB* é definida por $x = 3 \wedge z = -6$.

c) **i.** $x = 3 \wedge y = 3$ define a reta *BF*.
ii. $x = 0 \wedge z = 4$ define a reta *GH*.
iii. $y = 3 \wedge z = -6$ define a reta *BC*.
iv. $x = 0 \wedge y = 0$ define ao eixo Oz.

14. Por exemplo:

a) *A*(1, 0, 0) e *B*(3, 0, 0)

b) *A*(7, 0, 8) e *B*(7, –4, 8)

c) *A*(1, 1, 0) e *B*(1, 1, 10)

15. $\overline{AC} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-k)^2 + (-5-3)^2} =$
$= \sqrt{1+(2-k)^2+64} =$
$= \sqrt{65+(2-k)^2}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-k)^2 + (-4-3)^2} =$
$= \sqrt{1+(3-k)^2+49} =$
$= \sqrt{50+(3-k)^2}$
Como se pretende que o ponto *C* seja equidistante de *A* e de *B*:
$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(65+(2-k)^2} = \sqrt{50+(3-k)^2}$
$\Leftrightarrow 65 + (2-k)^2 = 50 + (3-k)^2$
$\Leftrightarrow 65 + 4 - 4k + k^2 = 50 + 9 - 6k + k^2$
$\Leftrightarrow 2k = -10$
$\Leftrightarrow k = -5$

16.

a) Sendo *A*(0, 1, 0) e *B*(3, 0, 4), a equação do plano mediador é:
$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 - 8z + 16$
$\Leftrightarrow 6x - 2y + 8z - 24 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - y + 4z - 12 = 0$

b) Sendo *A*(0, –2, 3) e $B(\sqrt{3}, 5, 3)$, a equação do plano mediador é:
$(x-0)^2 + (y+2)^2 + \cancel{(z-3)^2} = (x-\sqrt{3})^2 + (y-5)^2 + \cancel{(z-3)^2}$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 - 10y + 25$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 14y - 24 = 0$

c) Vejamos se (0, 4, 4) pertence ao plano definido por $3x - y + 4z - 12 = 0$:
$3 \times 0 - 4 + 4 \times 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 - 4 + 16 - 12 = 0$
$\Leftrightarrow -16 + 16 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, o que é verdadeiro.
Logo, o ponto (0, 4, 4) pertence ao plano definido na alínea **a)**.
Vejamos agora se (0, 4, 4) pertence ao plano definido por $2\sqrt{3}x + 14y - 24 = 0$:
$2\sqrt{3} \times 0 + 14 \times 4 - 24 = 0 \Leftrightarrow 0 + 56 - 24 = 0 \Leftrightarrow 32 = 0$, o que é falso.
Logo, o ponto (0, 4, 4) não pertence ao plano definido na alínea **b)**.

17.

a) $r = \overline{CA} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2} =$
$= \sqrt{4+1+1} =$
$= \sqrt{6}$

b) $r = \overline{CO} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (1-0)^2} =$
$= \sqrt{9+4+1} =$
$= \sqrt{14}$

c) $r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-2)^2 + (5-4)^2 + (7-6)^2} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{25+1+1} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{27} =$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$

18.

a) Uma equação da superfície esférica de centro *C*(1, 2, 3) e raio $\sqrt{6}$ é $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$.

b) Uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{14}$ é $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

c) O centro da superfície esférica de diâmetro [AB] é o ponto médio deste segmento de reta, ou seja, $\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{5+4}{2}, \frac{7+6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$. Assim, uma equação da superfície esférica de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$ e raio $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ é $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

19.

a) A superfície esférica tem centro (1, 2, –1) e raio $\sqrt{16} = 4$.

b) A superfície esférica tem centro $\left(-\frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}\right)$ e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

c) A superfície esférica tem centro (0, 0, 0) e raio $\sqrt{1} = 1$.

d) A superfície esférica tem centro (1, 2, –3) e raio $\sqrt{9} = 3$.

e) A superfície esférica tem centro (0, 0, 3) e raio $\sqrt{5}$.

20.

a) O centro da circunferência é o ponto médio de [PQ], ou seja, $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{5-2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, -3\right)$.

O raio da circunferência é $\frac{1}{2}\overline{PQ} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (5+2)^2 + (-2+4)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{0+49+4} = \frac{\sqrt{53}}{2}$.

b) **i.** $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z+3)^2 = \frac{53}{4} \wedge x = 1$

$\Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z+3)^2 = \frac{53}{4} \wedge x = 1$

ii. $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z+3)^2 = \frac{53}{4} \wedge z = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 = \frac{53}{4} \wedge z = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \wedge z = 0$

21. Opção (C)

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 7 \wedge x = a$

Para que a condição $(a-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 7 \wedge x = a$ represente uma circunferência de raio $\sqrt{6}$ tem de se verificar $(a-1)^2 = 1$, isto é:

$a - 1 = 1 \vee a - 1 = -1 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 0$

22. Opção (C)

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + 9 \leq 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

Esta condição define o círculo de centro em (2, 0, 0) e raio 4 contido no plano $z = 0$.

Logo, a sua área é igual a $\pi \times 4^2 = 16\pi$.

23.

a) A esfera de centro no ponto $(\pi, 0, -\sqrt{5})$ e raio $\frac{1}{3}$ é definida por $(x-\pi)^2 + y^2 + (z+\sqrt{5})^2 \leq \frac{1}{9}$.

b) A interseção da esfera de centro na origem do referencial e de raio 1 com o plano xOz é definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 \leq 1 \wedge y = 0$.

c) A interseção da esfera definida por $x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \leq 5$ com o plano $x = 2$ é definida por $x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \leq 5 \wedge x = 2$

$\Leftrightarrow 4 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \leq 5 \wedge x = 2$

$\Leftrightarrow (y-1)^2 + (z-3)^2 \leq 1 \wedge x = 2$

d) A parte da esfera de centro A(1, 2, 3) e raio 10 situada no 3.º octante é definida por:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 100 \wedge x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$

e) Os pontos de cota não positiva pertencentes à esfera de centro na origem e raio 7 são definidos por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 49 \wedge z \leq 0$.

24.

a) Seja B(0, –1, –2) o ponto médio de [AC].

Então, $\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{2+z}{2}\right) = (0, -1, -2)$.

Logo,

$$\begin{cases} \frac{-5+x}{2} = 0 \\ \frac{1+y}{2} = -1 \\ \frac{2+z}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+x = 0 \\ 1+y = -2 \\ 2+z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = -6 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto C são (5, –3, –6).

b) A esfera de diâmetro [AB] tem centro no ponto médio do segmento de reta [AB] e raio $\frac{\overline{AB}}{2}$.

Comecemos por determinar o ponto M, ponto médio de [AB]:

$\left(\frac{-5+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 0\right)$

Determinemos o raio da esfera:

$\overline{AB} = \sqrt{(0-(-5))^2 + (-1-1)^2 + (-2-2)^2} =$

$= \sqrt{25+4+16} =$

$= \sqrt{45}$

Logo, o raio da esfera de diâmetro [AB] é igual a $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{45}}{2}$.

Assim, a esfera é definida por:

$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{45}{4}$

c) A esfera de centro em A e raio 5 pode ser definida por $(x+5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 25$.

O 8.º octante é definido por $x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$.

Logo, a parte da esfera de centro em A e raio 5 que pertence ao 8.º octante pode ser definida por

$(x+5)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 25 \wedge x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$

25.

a) $d(L, S) = \sqrt{\left(\frac{9}{10}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{5}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{10}-0\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{86}{100}} \approx 0{,}93$ u.a.

b) **i.** $d(Sa, T) = \sqrt{(0,1-1)^2 + (0,1-0)^2 + (0,1-0)^2} =$
$= \sqrt{0,81 + 0,01 + 0,01} = \sqrt{0,84} \approx 0,92$
Logo, as coordenadas do satélite não podem ser (0,1; 0,1; 0,1).

ii. O lugar geométrico é a parte da circunferência cujo centro são as coordenadas da Terra, (1, 0, 0), e o raio é 0,1, situada no 1.º octante.
Assim:
$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 0,01 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0,01 \wedge x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$

26.

a) Opção (C)

- A afirmação I é verdadeira, pois o centro da superfície esférica de diâmetro [AB] é o ponto médio de [AB] de coordenadas $\left(\frac{1+0}{2}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{2}, \frac{\sqrt{12}+2\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$.
- A afirmação II é falsa, pois o raio é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$ e:
$\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{8})^2 + (\sqrt{12}-2\sqrt{3})^2} =$
$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2} =$
$= \sqrt{1 + (-\sqrt{2})^2 + 0} = \sqrt{3}$
Logo, o raio $= \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) **i.** O conjunto de pontos equidistantes de A e de B é o plano mediador de [AB].
Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador de [AB]. Então, $d(P, A) = d(P, B)$.
Logo:
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-\sqrt{12})^2} =$
$= \sqrt{x^2 + (y-\sqrt{8})^2 + (z-2\sqrt{3})^2}$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 + z^2 - 2\sqrt{12}z + 12 =$
$= x^2 + y^2 - 2\sqrt{8}y + 8 + z^2 - 4\sqrt{3}z + 12$
$\Leftrightarrow -2x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{8}y - 2\sqrt{12}z + 4\sqrt{3}z + 15 - 20 = 0$
$\Leftrightarrow -2x - 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}y - 4\sqrt{3}z + 4\sqrt{3}z - 5 = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 2\sqrt{2}y - 5 = 0$

ii. Raio = cota de B $= 2\sqrt{3}$
$(x-0)^2 + (y-\sqrt{8})^2 + (z-2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$
$\Leftrightarrow x^2 + (y-2\sqrt{2})^2 + (z-2\sqrt{3})^2 = 12$

iii. O conjunto de pontos do espaço que estão a uma distância do ponto A inferior ou igual a 3 unidades é uma esfera de centro em A e raio 3:
$(x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-\sqrt{12})^2 \leq 9$

Aprende fazendo – páginas 82 a 91

1.

a) As coordenadas dos vértices do cubo são A(7, 5, 9); B(7, 8, 9); C(4, 8, 9); D(4, 5, 9); E(7, 5, 6); F(7, 8, 6); G(4, 8, 6); H(4, 5, 6).

b) As coordenadas dos vértices do paralelepípedo retângulo são A(1, 0, 2); B(1, 6, 2); C(1, 6, –2); D(1, 0, –2); E(–1, 0, 2); F(–1, 6, 2); G(–1, 6, –2); H(–1, 0, –2).

c) $2A_{base} = 12 \Leftrightarrow A_{base} = 6 \Leftrightarrow \overline{BC} \times \overline{AB} = 6 \Leftrightarrow 3\overline{AB} = 6$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = 2$

$A_{lateral} = 50 \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{BF} + 2\overline{BC} \times \overline{CG} = 50$
$\Leftrightarrow 2 \times 2\overline{BF} + 2 \times 3\overline{BF} = 50$
$\Leftrightarrow 10\overline{BF} = 50$
$\Leftrightarrow \overline{BF} = 5$

Assim, as coordenadas dos vértices do paralelepípedo retângulo são A(–3, –2, 0); B(3, 0, 0); C(0, 0, 0); D(0, –2, 0); E(3, –2, 5); F(3, 0, 5); G(0, 0, 5); H(0, –2, 5).

2.

a) **i.** (7, 5, –6)
ii. (7, –5, 6)
iii. (–7, 5, 6)
iv. (7, –5, –6)
v. (–7, 5, –6)
vi. (–7, –5, 6)
vii. (–7, –5, –6)

3.

a) Opção (A)
I. Afirmação verdadeira, pois apresenta abcissa (2), ordenada (3) e cota (4) maiores do que zero.
II. Afirmação falsa, pois o simétrico de A relativamente ao plano xOy tem coordenadas (2, 3, –4).

b) Opção (C)
As coordenadas da projeção ortogonal de A sobre o plano xOy são (2, 3, 0).

4. P(–1, 2, 3)

a) Opção (C)
Um plano paralelo a xOy é definido por uma condição da forma $z = a$. Como a cota de P é 3, então o plano paralelo a xOy que passa pelo ponto P é definido pela condição $z = 3$.

b) Opção (B)
Um plano perpendicular ao eixo das ordenadas é definido por uma condição da forma $y = a$. Como a ordenada de P é 2, então o plano perpendicular ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto P é definido pela condição $y = 2$.

5. Opção (B)
Para que o ponto P pertença ao plano xOz, a sua ordenada tem de ser igual a zero, isto é, $k^2 - 8 = 0$.
$k^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 8$
$\Leftrightarrow k = -\sqrt{8} \vee k = \sqrt{8}$
$\Leftrightarrow k = -2\sqrt{2} \vee k = 2\sqrt{2}$

6.

a) $V_{sólido} = 252 \Leftrightarrow V_{pirâmide} + V_{cubo} = 252$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{a}{2} + a^3 = 252$
$\Leftrightarrow \frac{7}{6}a^3 = 252$
$\Leftrightarrow a^3 = 216$
$\Leftrightarrow a = 6$, sendo a a medida da aresta do cubo.

Assim, as coordenadas dos vértices do sólido são M(3, 3, 6); N(6, 0, 0); O(0, 0, 0); P(0, 6, 0); Q(6, 6, 0); R(6, 0, 6); S(0, 0, 6); T(0, 6, 6); U(6, 6, 6); V(3, 3, 9);

b) **i.** O plano que contém a face [*PQTU*] é definido por $y = 6$.

ii. A reta *RU* é definida por $x = 6 \wedge z = 6$.

iii. O plano paralelo a xOy que passa pelo ponto *V* é definido por $z = 9$.

iv. O plano mediador de [*UT*] é definido por $x = 3$.

v. A superfície esférica de centro em *V* que passa por *M* é definida por:

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 9)^2 = 9$

7. Opção (C)

$A(-2, 3, 1)$ $\quad B(2, -5, 0)$

O centro da esfera é o ponto médio do segmento de reta [*AB*]:

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3-5}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$$

O raio da esfera é:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2-2)^2 + (3+5)^2 + (1-0)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 + 1} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{81} =$$
$$= \frac{9}{2}$$

Logo, uma condição que define a esfera de diâmetro [*AB*] é $x^2 + (y + 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}$.

8.

a) **i.** $H'(6, -6, 6)$

ii. $H''(6, -6, -6)$

iii. $H'''(-6, -6, 6)$

iv. $H''''(-6, -6, -6)$

b) O ponto médio tem coordenadas $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, ou seja, $M(3, 3, 3)$.

c) O ponto *M* é o centro do cubo.

d) $d(M, H) = \sqrt{(3-6)^2 + (3-6)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{9 + 9 + 9} =$
$= \sqrt{27} \approx 5{,}2$

e) A superfície esférica tem centro no ponto *M* e raio igual a $\overline{MH}$.

Assim:

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = (\sqrt{27})^2$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 27$

9.

a) $\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 2^2 + 2^2$

$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 8$

$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{8}$

$\Leftrightarrow \overline{AD} = 2\sqrt{2}$, como se queria demonstrar.

b) As coordenadas dos vértices do cubo são $A(2, 0, 0)$; $B(4, 2, 0)$; $C(2, 4, 0)$; $D(0, 2, 0)$; $E(2, 0, 2\sqrt{2})$; $F(4, 2, 2\sqrt{2})$; $G(2, 4, 2\sqrt{2})$; $H(0, 2, 2\sqrt{2})$;

10.

a) $V_{cone} = 32\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \pi\overline{AO}^2 \times 6 = 32\pi$

$\Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 16$

$\Rightarrow \overline{AO} = 4$

Logo, $A(-4, 0, 0)$.

b) $B(4, 0, 0)$ e $C(0, 0, 6)$

$\overline{AC} = \sqrt{(-4-0)^2 - (0-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{16 + 0 + 36} =$
$= \sqrt{52}$

$\overline{BC} = \sqrt{(4-0)^2 - (0-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{16 + 0 + 36} =$
$= \sqrt{52}$

$\overline{AB} = 8$

Logo, o triângulo [*ABC*] é isósceles.

c) Como *P* pertence ao eixo Oz, então *P* é da forma $(0, 0, z)$.

Para que o triângulo [*ABP*] seja equilátero:

$\overline{AP} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{(0 - (-4))^2 + (0 - 0)^2 + (z - 0)^2} = 8$

$\Leftrightarrow 16 + z^2 = 64$

$\Leftrightarrow z^2 = 48$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{48} \vee z = -\sqrt{48}$

$\Leftrightarrow z = 4\sqrt{3} \vee z = -4\sqrt{3}$

Logo, $P(0, 0, 4\sqrt{3})$ ou $P(0, 0, -4\sqrt{3})$.

11. Opção (C)

A afirmação falsa é a da opção C, uma vez que o plano de equação $z = -1$ é paralelo ao plano xOy e não ao plano yOz.

12. Opção (B)

Como o ponto pertence ao eixo Oz, então:

$p^2 - 1 = 0 \wedge p^2 - p = 0$

$\Leftrightarrow (p = 1 \vee p = -1) \wedge (p = 1 \vee p = 0)$

$\Leftrightarrow p = 1 \vee (p = -1 \wedge p = 0)$

Logo, $p = 1$.

13. Opção (B)

$A\left(3, 2, \frac{1}{2}\right)$ $\quad C(3, -4, 2k)$

$$\overline{AC} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(3-3)^2 + (2+4)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2k\right)^2} = 10$$
$$\Leftrightarrow 0 + 36 + \left(\frac{1}{2} - 2k\right)^2 = 100$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - 2k\right)^2 = 64$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2k = 8 \vee \frac{1}{2} - 2k = -8$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{15}{4} \vee k = \frac{17}{4}$$

14. Opção (A)

- O centro da superfície esférica é o ponto médio de [*AB*]. Assim, as suas coordenadas são:

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{2}, \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{12}}{2}, \frac{\sqrt{5}+0}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Logo, a afirmação *p* é verdadeira.

- O raio da superfície esférica é $\frac{d(A, B)}{2}$.

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\sqrt{8} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{12} - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(0 - \sqrt{5}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(2\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{2 + 0 + 5} =$$

$= \sqrt{7} =$

$= 7^{\frac{1}{2}}$

Assim, o raio é $\frac{7^{\frac{1}{2}}}{2}$.

Logo, a proposição q é falsa.

15.

a) $C(2, 10, 0)$; $A(6, 2, 0)$; $B(6, 10, 0)$; $D(2, 2, 0)$; $E(2, 2, 4)$; $F(6, 2, 4)$

b) **i.** $z = 4$

ii. $E(2, 2, 4)$ $C(2, 10, 0)$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (x-2)^2 + (y-10)^2 + (z-0)^2$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = y^2 - 20y + 100 + z^2$

$\Leftrightarrow 16y - 8z - 80 = 0$

$\Leftrightarrow 2y - z - 10 = 0$

iii. $C(2, 10, 0)$ $A(6, 2, 0)$

Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M(4, 6, 0)$

Se a esfera é tangente ao plano xOz e tem centro em M, então o seu raio é 6.

Assim, a condição pedida é

$(x-4)^2 + (y-6)^2 + z^2 \leq 36$.

iv. O centro é F', que é o ponto simétrico de $F(6, 2, 4)$ em relação ao eixo das ordenadas, logo as coordenadas de F' são $(-6, 2, -4)$.

O raio é $d(A, F') = \sqrt{(-6-6)^2 + (2-2)^2 + (-4-0)^2} =$

$= \sqrt{144 + 0 + 16} =$

$= \sqrt{160}$

Logo, a superfície esférica que passa no ponto A e tem centro em F' pode ser definida por:

$(x-(-6))^2 + (y-2)^2 + (z-(-4))^2 = \left(\sqrt{160}\right)^2$, ou seja,

$(x+6)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 160$.

16. $A\left(3, 2, \frac{1}{2}\right)$ $B\left(2, -1, \frac{3}{2}\right)$

a) O conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto A é inferior ou igual a 3 é a esfera de centro A e raio 3, que pode ser definida por:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 9$

b) O conjunto dos pontos do espaço que são equidistantes de A e de B é o plano mediador de $[AB]$.

$(x-3)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 =$

$= (x-2)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - z + \frac{1}{4} =$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 3z + \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow -2x - 6y + 2z + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 6y - 2z - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - z - 3 = 0$, que é uma equação do plano mediador de $[AB]$.

c) O centro da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o ponto médio de $[AB]$ cujas coordenadas são

$\left(\frac{3+2}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

O seu raio é $\frac{1}{2}\overline{AB} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + 9 + 1} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Assim, uma equação desta superfície esférica é:

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{11}{4}$

17.

a) Opção (C)

Por observação da figura, e como o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$ e o cubo tem aresta 3, tem-se que o ponto de coordenadas $(3, 4, 0)$ é o ponto A e o ponto de coordenadas $(0, 7, 0)$ é o ponto C.

Note-se que ABC não é o plano mediador de $[AC]$, uma vez que A não é equidistante de A e C. ACE também não é o plano mediador de $[AC]$, uma vez que $d(E, A)$ é diferente de $d(E, C)$. O plano BCI não é o plano mediador de $[AC]$ pois C não é equidistante de A e de C.

Cada um dos pontos B, D e F é equidistante dos pontos A e C. Portanto, o plano mediador de $[AC]$ é o plano BDF.

b) **i.** $y = 4 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2}$

ii. $x = 0 \land z = 3$

iii. $F(3, 7, 3)$

$(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 \leq 4$

c) $V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} =$

$= 3^3 + \frac{1}{3} \times 3^2 \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$

$= 27 + 3 \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$

$= 27 + \frac{12\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} =$

$= 27 + \frac{12\sqrt{5}+12}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2} =$

$= 27 + \frac{12\sqrt{5}+12}{4} =$

$= 27 + 3\sqrt{5} + 3 =$

$= 30 + 3\sqrt{5}$

18.

a) $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 8 \land y = 3$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (z+1)^2 = 7 \land y = 3$, que define a circunferência de centro $(6, 3, -1)$ e raio $\sqrt{7}$ contida no plano de equação $y = 3$.

b) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 16 \land x = -1$

$\Leftrightarrow y^2 + (z-1)^2 \leq 16 \land x = -1$, que define o círculo de centro $(-1, 0, 1)$ e raio 4 contido no plano de equação $x = -1$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5 \land x = 0 \land y = 0$

$\Leftrightarrow z^2 \leq 5 \land x = 0 \land y = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5} \land x = 0 \land y = 0$, que define o segmento de reta de extremos $\left(0, 0, -\sqrt{5}\right)$ e $\left(0, 0, \sqrt{5}\right)$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \land z = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4 - 6x + 4y + 12 = 0 \land z = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = -12 + 9 \land z = 2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = -3$, que define o conjunto vazio.

19.

a) **i.** $x = 0 \wedge z = 3$

ii. $\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2} =$

$= \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2}$

$\Leftrightarrow (z-6)^2 = (z-3)^2$

$\Leftrightarrow z^2 - 12z + 36 = z^2 - 6z + 9$

$\Leftrightarrow -6z = -27$

$\Leftrightarrow z = \frac{9}{2}$

iii. $x = 3 \wedge 3 \leq y \leq 6 \wedge 3 \leq z \leq 6$

iv. $0 \leq x \leq 3 \wedge 3 \leq y \leq 6 \wedge 3 \leq z \leq 6$

b) Opção (C)

Uma equação da reta BG é $x = 0 \wedge y = 3$.

Assim:

$k^2 - \frac{1}{4} = 0 \wedge 2k^2 + 5k = 3$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \wedge 2k^2 + 5k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2} \wedge k = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4}$

$\Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2} \wedge k = \frac{-5 \pm 7}{4}$

$\Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2} \wedge \left(k = -3 \vee k = \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

c) Opção (D)

A superfície esférica tem centro no centro do cubo, que é, por exemplo, o ponto médio de BE:

$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+6}{2}, \frac{6+3}{2}\right)$, ou seja, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

O raio é $\frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{2}\sqrt{(0-3)^2 + (3-6)^2 + (6-3)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{9+9+9} =$

$= \frac{\sqrt{27}}{2}$

Assim, uma equação desta superfície esférica é:

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

d) O plano ACH é o plano mediador de $[GE]$.

Assim,

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2} =$

$= \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36$

$\Leftrightarrow 6x + 6y - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 6 = 0$

20. Opção (A)

$A(1, -5, 3)$ $B(-2, 4, 0)$

Para que o ponto $P(1, k, k^2)$ pertença ao plano mediador de $[AB]$ tem de se ter:

$\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (-5-k)^2 + (3-k^2)^2} =$

$= \sqrt{(-2-1)^2 + (4-k)^2 + (0-k^2)^2} =$

$\Leftrightarrow 0 + 25 + 10k + k^2 + 9 - 6k^2 + k^4 =$

$= 9 + 16 - 8k + k^2 + k^4$

$\Leftrightarrow -6k^2 + 18k + 9 = 0$

$\Leftrightarrow 2k^2 - 6k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{36+24}}{4}$

$\Leftrightarrow k = \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{4}$

$\Leftrightarrow k = \frac{3 - \sqrt{15}}{2} \vee k = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$

21. Opção (D)

$V = 24\sqrt{3} \Leftrightarrow a^3 = 24\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{24\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt[6]{3^3}$

$\Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$ (medida da aresta do cubo)

Assim, o centro da superfície esférica é o ponto C de coordenadas $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ e o seu raio é:

$d(O, C) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3+3} =$

$= \sqrt{9} = 3$

Logo, a superfície esférica que contém todos os vértices do cubo é definida por:

$(x - \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 9$

22.

a) Opção (B)

$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \wedge z = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3^2 = 25 \wedge z = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 \wedge z = 3$

Assim, obtém-se uma circunferência de raio $\sqrt{16} = 4$, pelo que o seu perímetro é 8π.

23.

a) Opção (B)

Se a esfera é tangente a $y = 4$ e a $y = -2$, então o seu diâmetro é 6 e o seu raio é 3. Além disso, a ordenada do seu centro é $4 - 3 = 1$.

Logo, uma condição que defina a esfera é da forma $(x-a)^2 + (y-1)^2 + (z-c)^2 \leq 9$, onde as coordenadas do seu centro são $(a, 1, c)$.

24.

a) Uma condição que define a superfície esférica com centro em $(2, 2, 2)$ e que é tangente ao plano de equação $y = 2 + \sqrt{6}$, ou seja, que tem raio $\sqrt{6}$, é $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 6$. Como A e B são pontos que têm as três coordenadas iguais e pertencem à superfície esférica, então:

$(x-2)^2 + (x-2)^2 + (x-2)^2 = 6$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{2} \vee x - 2 = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \vee x = 2 - \sqrt{2}$

Logo, $A(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, porque pertence ao primeiro octante, e $B(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$.

b) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas

$\left(\frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= (2, 2, 2)$

Este ponto é o centro da superfície esférica, logo a corda $[AB]$ é um diâmetro dessa superfície esférica.

25.

a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-10)^2 = 100$ define a superfície esférica de centro $(1, 1, 10)$ e raio 10.

A superfície esférica tem centro em V e contém os quatro vértices da base da pirâmide quadrangular regular $[OABCV]$, logo podemos concluir que V tem coordenadas $(1, 1, 10)$, que a altura da pirâmide é 10 e que o centro da base $[OABC]$ é o ponto de coordenadas $(1, 1, 0)$. Assim, a aresta da base mede 2 u.c.
Logo, o volume da pirâmide é $\frac{1}{3} \times 2^2 \times 10 = \frac{40}{3}$ u.v.

b) O plano DEF é da forma $z = k$, $k \in \mathbb{R}$.

$V_{[OABCV]} = \frac{40}{3}$

$V_{[DEFGV]} = \frac{1}{3} \times a^2 \times h_p$, onde a é o lado do quadrado $[DEFG]$ e h_p é a altura da pirâmide $[DEFGV]$, ambos em função de k.

Cálculo auxiliar

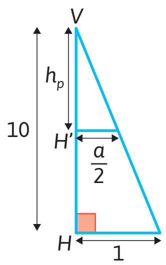
(1) $h_p = 10 - k$

(2) O ponto H é o centro da base $[OABC]$ e H' é o centro da base $[DEFG]$.

Como $\frac{1}{10} = \frac{\frac{a}{2}}{h_p}$, vem que $a = \frac{2}{10} h_p$,

isto é, $a = \frac{1}{5} h_p$.

Logo, de (1) tem-se que $a = \frac{1}{5}(10 - k)$.



Assim, de (1) e de (2), vem que:

$V_{[DEFGV]} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}(10 - k)\right)^2 \times (10 - k) = \frac{1}{75}(10 - k)^3$

Pretende-se então o valor de k tal que

$V_{[DEFGV]} = \frac{\frac{40}{3}}{2} = \frac{20}{3}$.

$\frac{1}{75}(10 - k)^3 = \frac{20}{3} \Leftrightarrow (10 - k)^3 = \frac{1500}{3}$

$\Leftrightarrow 10 - k = \sqrt[3]{500}$

$\Leftrightarrow k = 10 - 5\sqrt[3]{4}$

Assim, o plano DEF pode ser definido por $z = 10 - 5\sqrt[3]{4}$.

26.

a) Opção (B)

Os pontos que pertencem ao eixo das abcissas são da forma $(x, 0, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Assim:

$(x - 3)^2 + (0 + 1)^2 + (0 + 3)^2 = 34$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 1 + 9 = 34$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 24$

$\Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{24} \ \vee \ x - 3 = \sqrt{24}$

$\Leftrightarrow x = -2\sqrt{6} + 3 \ \vee \ x = 2\sqrt{6} + 3$

A superfície esférica S interseta o eixo das abcissas em dois pontos de coordenadas $\left(-2\sqrt{6} + 3, 0, 0\right)$ e $\left(2\sqrt{6} + 3, 0, 0\right)$, que são os extremos de um segmento de reta de comprimento $2\sqrt{6} + 3 - \left(-2\sqrt{6} + 3\right) = 2\sqrt{6} + 3 + 2\sqrt{6} - 3 = 4\sqrt{6}$.

b) **i.** O centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas $(3, -1, -3)$ e o raio é igual a $\sqrt{34}$.

Assim, o ponto da superfície esférica com maior ordenada é o ponto de coordenadas $\left(3, -1 + \sqrt{34}, -3\right)$ e o ponto com menor ordenada é o ponto de coordenadas $\left(3, -1 - \sqrt{34}, -3\right)$.

Então, se $k \in \left[-1 - \sqrt{34}, -1 + \sqrt{34}\right]$ o plano de equação $y = k$ interseta a superfície esférica S.

Para que a interseção seja o conjunto vazio, k tem de pertencer ao conjunto $\left]-\infty, -1 - \sqrt{34}\right[\cup \left]-1 + \sqrt{34}, +\infty\right[$.

ii. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 34 \ \wedge \ z = k$

Uma circunferência de perímetro 8π tem raio 4.

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (k + 3)^2 = 34 \ \wedge \ z = k$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 34 - (k + 3)^2 \ \wedge \ z = k$

Assim, para que esta condição represente uma circunferência de raio 4 tem de se verificar $34 - (k + 3)^2 = 4^2$.

$34 - (k + 3)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (k + 3)^2 = 18$

$\Leftrightarrow k + 3 = -\sqrt{18} \ \vee \ k + 3 = \sqrt{18}$

$\Leftrightarrow k = -3\sqrt{2} - 3 \ \vee \ k = 3\sqrt{2} - 3$

Capítulo 3 – Vetores no plano e no espaço – páginas 92 a 137

1.

a) Por exemplo:

i. $[A, B]$, $[B, A]$, $[B, C]$, $[C, B]$ e $[C, D]$

ii. $[A, B]$ e $[D, C]$

b) Para cada aresta é possível definir dois segmentos de reta orientados. Além disso, é possível definir dois segmentos de reta orientados para cada uma das diagonais.

Logo, é possível definir $4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$ segmentos de reta orientados.

c) É possível definir oito vetores: cada diagonal permite definir dois vetores $(2 \times 2 = 4)$, a aresta $[AB]$ e a aresta $[AD]$ permitem definir dois vetores cada uma $(2 \times 2 = 4)$, e as restantes arestas definem vetores iguais aos definidos pelas arestas $[AB]$ e $[AD]$.

2. Por exemplo:

a) $[A, D]$, $[D, B]$ e $[F, E]$

b) $[A, F]$ e $[C, F]$

c) $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DF}$

d) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DE}$

e) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{EF}$

3. Por exemplo:

a) $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, G]$, $[G, E]$ e $[D, F]$.

b) $[A, O]$ e $[B, C]$

c) $[A, O]$ e $[C, B]$

d) $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{FC}$

e) $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{GC}$

4.

a) $A + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AD} = D$

b) $D + \overrightarrow{BE} = D + \overrightarrow{DF} = F$

c) $C + (-\overrightarrow{DF}) = C + \overrightarrow{FD} = C + \overrightarrow{CE} = E$

d) $T_{\overrightarrow{AC}}(A) = A + \overrightarrow{AC} = C$

e) $T_{\overrightarrow{DF}}(B) = B + \overrightarrow{DF} = B + \overrightarrow{BE} = E$

5.

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DF}$

c) $\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{JG}$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$

e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

f) $\overrightarrow{EN} + (-\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{EO}$

g) $\overrightarrow{HM} + (-\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{JO} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{HQ}$

6.

a) $I + \overrightarrow{AC} = I + \overrightarrow{IK} = K$

b) $F + \overrightarrow{JL} = F + \overrightarrow{FH} = H$

c) $A + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AL} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = B + \overrightarrow{BK} = K$

d) $T_{\overrightarrow{IF}}(H) = H + \overrightarrow{IF} = H + \overrightarrow{HC} = C$

e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

f) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{DL}$

g) $\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LH} = \overrightarrow{JH}$

h) $\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HI} = \vec{0}$

i) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EG}$

j) $\overrightarrow{AI} + (-\overrightarrow{EK}) = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CE}$

k) $\overrightarrow{CK} + (-\overrightarrow{DH}) = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{CG}$

l) $(E - J) + (D - A) = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{JH}$

7. Opção (D)

I. A afirmação é falsa, pois $A + 2\overrightarrow{FG} = A + \overrightarrow{AM} = M$.

II. $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{AQ}$

Logo, a afirmação é verdadeira.

III. $2\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{RK}$

Logo, a afirmação é falsa.

8.

a) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$

b) $-3\overrightarrow{LM} = 3\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MI}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE}$

d) $-\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HE}$

9.

a) $I + 2\overrightarrow{JF} = I + \overrightarrow{IA} = A$

b) $F + \frac{1}{2}\overrightarrow{CK} = F + \overrightarrow{FJ} = J$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{IK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{JL}) = \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IL}$

d) $2\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$

10.

a) Opção (D)

Na opção (A) a afirmação é falsa, pois os vetores não têm a mesma direção e sentidos opostos.

A afirmação da opção (B) é falsa, pois a soma de um ponto com um vetor é um ponto e não um vetor. Neste caso, $D + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ} = C + \overrightarrow{IJ} = B$.

Na opção (C) a afirmação é falsa, pois $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{GH}$ são vetores não nulos e não são vetores simétricos, são vetores iguais, logo $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.

Na opção (D) a afirmação é verdadeira, pois, apesar de os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{JL}$ serem diferentes, a sua norma é igual à medida da diagonal facial dos cubos da figura.

b) Dadas as condições da figura, tem-se que $\overrightarrow{HE}$ é um vetor com a mesma direção de $\overrightarrow{DL}$, sentido contrário e metade da norma. Assim, $\overrightarrow{HE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DL}$.

11. $\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{1}{2}$. Como $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm sentidos opostos, então $\lambda = -\frac{1}{2}$.

12. $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{d}$ $\quad \vec{b} = -2\vec{d}$ $\quad \vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{d}$

13.

a) $2\vec{a} + \vec{b} = 2(2\vec{x} - \vec{y}) + (-3\vec{x} + 5\vec{y}) = 4\vec{x} - 2\vec{y} - 3\vec{x} + 5\vec{y} =$
$= \vec{x} + 3\vec{y}$

b) $-2\vec{a} + 3\vec{b} = -2(2\vec{x} - \vec{y}) + 3(-3\vec{x} + 5\vec{y}) =$
$= -4\vec{x} + 2\vec{y} - 9\vec{x} + 15\vec{y} =$
$= -13\vec{x} + 17\vec{y}$

14.

a) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP}$

b) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{EI} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EI}) = 2(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EI}) = 2\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AK}$

c) $2\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{PT}\right) = 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$

15.

a) $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{HT} = A + \overrightarrow{HP} = A + \overrightarrow{AI} = I$

b) $\overrightarrow{TH} - \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{TH} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{TP}$

c) $T + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{NC} = T + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{NC} = T + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{NC} = S + \overrightarrow{SJ} = J$

d) $F - 2\left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}\right) = F - 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IA}) = F - 2(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}) =$
$= F - 2\overrightarrow{IB} = F - \overrightarrow{QC} = F + \overrightarrow{CQ} = T$

e) $T_{\overrightarrow{BT}}(C) = C + \overrightarrow{BT} = C + \overrightarrow{CS} = S$

16.

a) $\sqrt{27}\,\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} + 2(\sqrt{3}\vec{v}) + \frac{11}{2}\vec{u} =$
$= -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{11}{2}\vec{u} + \sqrt{27}\,\vec{v} + 2\sqrt{3}\vec{v} =$
$= \frac{10}{2}\vec{u} + 3\sqrt{3}\vec{v} + 2\sqrt{3}\vec{v} =$
$= 5\vec{u} + 5\sqrt{3}\vec{v}$

b) $3\left(2\vec{v} - \frac{8}{3}\vec{u}\right) + 2(4\vec{u}) - \vec{v} = 6\vec{v} - 8\vec{u} + 8\vec{u} - \vec{v} = 5\vec{v}$

17. $-2(-\vec{x} + \vec{a}) + 2(3\vec{a}) = 3(\vec{a} + 2\vec{b})$
$\Leftrightarrow 2x - 2\vec{a} + 6\vec{a} = 3\vec{a} + 6\vec{b}$
$\Leftrightarrow 2x = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 6\vec{a} + 6\vec{b}$
$\Leftrightarrow 2x = -\vec{a} + 6\vec{b}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$

18.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CM} =$
$= 2\overrightarrow{AM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AM}$

b) $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CM} =$
$= 2\overrightarrow{PM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{PM}$

19.

a) **i.** Amigo *B*
ii. Amigo *G*
iii. Amigo *D*
iv. Amigo *C*

b) **i.** Primeiro quatro passos para oeste e depois dois passos para norte.
ii. Apenas quatro passos para sul.

20. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ $\quad \vec{c} = 2\vec{i} + 0\vec{j}$ $\quad \vec{d} = 0\vec{i} - \vec{j}$

21. $\vec{a} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}; \vec{a}(2, 2)$
$\vec{b} = 2\vec{e_1} - 2\vec{e_2}; \vec{b}(2, -2)$
$\vec{c} = 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2}; \vec{c}(2, 0)$
$\vec{d} = -2\vec{e_1} + 0\vec{e_2}; \vec{d}(-2, 0)$
$\vec{f} = -3\vec{e_1} - 3\vec{e_2}; \vec{f}(-3, -3)$
$\vec{g} = 0\vec{e_1} + 4\vec{e_2}; \vec{g}(0, 4)$

22. $\overrightarrow{OB} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 0\vec{e_3}; \overrightarrow{OB}(3, 4, 0)$
$\overrightarrow{OG} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3}; \overrightarrow{OG}(3, 4, 2)$
$\overrightarrow{EF} = 3\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 0\vec{e_3}; \overrightarrow{EF}(3, 0, 0)$
$\overrightarrow{ED} = 0\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 0\vec{e_3}; \overrightarrow{ED}(0, 4, 0)$
$\overrightarrow{FD} = -3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 0\vec{e_3}; \overrightarrow{FD}(-3, 4, 0)$

23.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (1, -3) + (-9, 4) = (1 - 9, -3 + 4) = (-8, 1)$

b) $\vec{a} + \vec{b} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + \left(1, \frac{3}{2}\right) = \left(-1 + 1, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) =$
$= \left(0, \frac{4}{2}\right) = (0, 2)$

c) $\vec{a} + \vec{b} = (\sqrt{2}, 0) + (\sqrt{8}, -5) = (\sqrt{2} + \sqrt{8}, 0 - 5) =$
$= (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}, -5) =$
$= (3\sqrt{2}, -5)$

24. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u} \Leftrightarrow (2k + 1, 3) + (2, p) = (-3, 8)$
$\Leftrightarrow (2k + 1 + 2, 3 + p) = (-3, 8)$
$\Leftrightarrow (2k + 3, 3 + p) = (-3, 8)$
$\Leftrightarrow 2k + 3 = -3 \wedge 3 + p = 8$
$\Leftrightarrow 2k = -6 \wedge p = 5$
$\Leftrightarrow k = -3 \wedge p = 5$

25. $\vec{u}(2, -3)$ $\quad \vec{v}(-1, 4)$ $\quad \vec{w}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2, -3) + (-1, 4) = (2 - 1, -3 + 4) = (1, 1)$

b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (2, -3) + (-1, 4) + \left(\frac{1}{3}, 0\right) =$
$= (1, 1) + \left(\frac{1}{3}, 0\right) =$
$= \left(1 + \frac{1}{3}, 1 + 0\right) =$
$= \left(\frac{4}{3}, 1\right)$

c) $\vec{u} - \vec{v} = (2, -3) - (-1, 4) = (2 + 1, -3 -4) = (3, -7)$

d) $\vec{v} - \vec{u} = (-1, 4) - (2, -3) = (-1 - 2, 4 + 3) = (-3, 7)$

e) $2\vec{u} + 4\vec{v} = 2(2, -3) + 4(-1, 4) = (4, -6) + (-4, 16) =$
$= (4 - 4, -6 + 16) =$
$= (0, 10)$

f) $-3\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u} = -3\left(\frac{1}{3}, 0\right) - \frac{1}{2}(2, -3) =$
$= (-1, 0) + \left(-1, \frac{3}{2}\right) =$
$= \left(-1 - 1, 0 + \frac{3}{2}\right) =$
$= \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

g) $3\left(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) = 3\left(-(2, -3) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, 0\right)\right) =$
$= 3\left((-2, 3) + \left(\frac{1}{6}, 0\right)\right) =$
$= 3\left(-2 + \frac{1}{6}, 3 + 0\right)$
$= 3\left(-\frac{11}{6}, 3\right) =$
$= \left(-\frac{33}{6}, 9\right) =$
$= \left(-\frac{11}{2}, 9\right)$

26. $A(-1, 2)$ $\quad B(2, -3)$ $\quad C(0, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -3) - (-1, 2) = (2 + 1, -3 - 2) = (3, -5)$
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(3, -5) = (-3, 5)$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 5) - (2, -3) = (0 - 2, 5 + 3) = (-2, 8)$

b) $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 5) - (-1, 2) = (0 + 1, 5 - 2) = (1, 3)$
Logo, $D = B + \overrightarrow{AC} = (2, -3) + (1, 3) = (2 + 1, -3 + 3) = (3, 0)$.
$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -(-2, 8) = (2, -8)$
Logo, $E = B - 2\overrightarrow{CB} = (2, -3) - 2(2, -8) =$
$= (2, -3) - (4, -16) =$
$= (2 - 4, -3 + 16) =$
$= (-2, 13)$

c) $\overrightarrow{AF} = (1, 7) \Leftrightarrow F - A = (1, 7) \Leftrightarrow F - (-1, 2) = (1, 7)$
$\Leftrightarrow F = (-1, 2) + (1, 7)$
$\Leftrightarrow F = (-1 + 1, 2 + 7)$
$\Leftrightarrow F = (0, 9)$

27. $\vec{u}(-2, 4)$ $\quad \vec{v}(1, -5)$ $\quad A(1, 3)$ $\quad B(2, -7)$

a) $||\vec{u}|| = ||(-2, 4)|| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) $||\vec{v}|| = ||(1, -5)|| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$

c) $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -7) - (1, 3) = (2 - 1, -7 - 3) = (1, -10)$
$||\overrightarrow{AB}|| = ||(1, -10)|| = \sqrt{1^2 + (-10)^2} = \sqrt{1 + 100} = \sqrt{101}$

d) $||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| = 2\sqrt{5} + \sqrt{26}$

e) $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||(-2, 4) + (1, -5)|| = ||(-2 + 1, 4 - 5)|| =$
$= ||(-1, -1)|| =$
$= \sqrt{(-1)^1 + (-1)^2} =$
$= \sqrt{1 + 1} =$
$= \sqrt{2}$

28. $\vec{u}(2, -3, 5)$ $\quad \vec{v}(k, 3, 1)$ $\quad \vec{w}(-2, -6, p^2 - 1)$
$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow (2, -3, 5) = (k, 3, 1) + (-2, -6, p^2 - 1)$
$\Leftrightarrow (2, -3, 5) = (k - 2, 3 - 6, 1 + p^2 - 1)$
$\Leftrightarrow (2, -3, 5) = (k - 2, -3, p^2)$
$\Leftrightarrow k - 2 = 2 \wedge -3 = -3 \wedge p^2 = 5$
$\Leftrightarrow k = 4 \wedge p = \pm\sqrt{5}$
Logo, $k = 4$ e $p = \sqrt{5}$ ou $k = 4$ e $p = -\sqrt{5}$.

29. $\vec{u}(2, -3, 4)$ $\quad \vec{v}(-1, 0, 3)$ $\quad A(1, 2, -3)$ $\quad B(0, 2, 0)$

a) $\vec{u} + 2\vec{v} = (2, -3, 4) + 2(-1, 0, 3) = (2, -3, 4) + (-2, 0, 6) =$
$= (0, -3, 10)$

b) $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\vec{v} = B - A - \frac{1}{3}\vec{v} =$

$= (0, 2, 0) - (1, 2, -3) - \frac{1}{3}(-1, 0, 3) =$

$= (-1, 0, 3) + \left(\frac{1}{3}, 0, -1\right) =$

$= \left(-\frac{2}{3}, 0, 2\right)$

c) $-\vec{u} + 4(2\vec{v}) = -(2, -3, 4) + 4(2(-1, 0, 3)) =$

$= (-2, 3, -4) + 4(-2, 0, 6) =$

$= (-2, 3, -4) + (-8, 0, 24) =$

$= (-10, 3, 20)$

d) $A + \frac{1}{2}\vec{u} = (1, 2, -3) + \frac{1}{2}(2, -3, 4) =$

$= (1, 2, -3) + \left(1, -\frac{3}{2}, 2\right) =$

$= \left(2, \frac{1}{2}, -1\right)$

e) $\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2, -3) - (0, 2, 0) = (1, 0, -3)$

Logo, são vetores colineares com $\overrightarrow{BA}$, por exemplo:

$2\overrightarrow{BA} = (2, 0, -6)$

$-2\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 6)$

$5\overrightarrow{BA} = (10, 0, -30)$

f) $-3\overrightarrow{AB} = 2\vec{w} + \vec{u} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BA} = 2\vec{w} + \vec{u}$

$\Leftrightarrow 3(1, 0, -3) = 2\vec{w} + (2, -3, 4)$

$\Leftrightarrow 2\vec{w} = (3, 0, -9) - (2, -3, 4)$

$\Leftrightarrow 2\vec{w} = (1, 3, -13)$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{2}(1, 3, -13)$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

30. Por exemplo:

a) $(-4, 6), (2, -3), (-20, 30), \left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

b) $(0, 1), (0, -1), (0, 2), (0, 10)$.

31.

a) $\vec{a}(1, -3)$ $\vec{b}(2, -6)$

$\vec{b} = 2\vec{a}$, logo os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

b) $\vec{a}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ $\vec{b}(4, -2)$

$\vec{b} = -4\vec{a}$, logo os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

c) $\vec{a}(-1, 9)$ $\vec{b}(10, 18)$

$\frac{10}{-1} = -10$ e $\frac{18}{9} = 2$. Como $-10 \neq 2$, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares.

d) $\vec{a}(0, 7)$ $\vec{b}(2, 14)$

$\frac{0}{2} = 0$ e $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Como $0 \neq \frac{1}{2}$, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares.

e) $\vec{a}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $\vec{b}\left(0, -\frac{9}{2}\right)$

$\vec{b} = -9\vec{a}$, logo os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

f) $\vec{a}(\sqrt{3}, -3)$ $\vec{b}(2\sqrt{3}, 0)$

$\vec{b} = 2\vec{a}$, logo os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

32. $\vec{u}(2, 4)$ $\vec{v}(3, 1-k)$ $\vec{w}\left(k, -\frac{2}{3}\right)$

Para que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{1-k} \Leftrightarrow 2(1-k) = 12 \Leftrightarrow 2 - 2k = 12 \Leftrightarrow 2k = -10$

$\Leftrightarrow k = -5$

Para que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam colineares:

$\frac{3}{k} = \frac{1-k}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = k(1-k) \Leftrightarrow -2 = k - k^2$

$\Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -1$

33. Seja $\vec{u} = (a, b)$. Para que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares, tem-se que $\vec{u} = k\vec{v}$, ou seja:

$(a, b) = k(-2, 1) \Leftrightarrow (a, b) = (-2k, k)$

Então, $\vec{u} = (-2k, k)$.

Por outro lado:

$||\vec{u}|| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + k^2} = 10$

$\Leftrightarrow (-2k)^2 + k^2 = 100$

$\Leftrightarrow 4k^2 + k^2 = 100$

$\Leftrightarrow 5k^2 = 100$

$\Leftrightarrow k^2 = 20$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{20} \vee k = -\sqrt{20}$

$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{5} \vee k = -2\sqrt{5}$

Logo, $\vec{u} = (-4\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ ou $\vec{u} = (4\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

34. O vetor é colinear com o vetor de coordenadas $(3, -4)$, logo é da forma $(3k, -4k)$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Tendo em conta que tem sentido contrário, então o valor de k é negativo.

Como a norma do vetor é 12, tem-se:

$\sqrt{(3k)^2 + (-4k)^2} = 12 \Leftrightarrow 9k^2 + 16k^2 = 144$

$\Leftrightarrow 25k^2 = 144$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{144}{25}$

$\Leftrightarrow k = \pm\frac{12}{5}$

Logo, o vetor pedido tem coordenadas $\left(-\frac{36}{5}, \frac{48}{5}\right)$.

35. $B\left(x, \frac{x}{2}\right), x > 0$

$\overrightarrow{AB} = \left(x, \frac{x}{2}\right) - (2, 0) = \left(x - 2, \frac{x}{2}\right)$

$||\overrightarrow{AB}|| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \frac{x^2}{4} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{5x^2}{4} - 4x = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 16x = 0$

$\Leftrightarrow x(5x - 16) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{16}{5}$

$B\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

$C = B + \overrightarrow{AO} = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right) + (-2, 0) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$

36.

a) $\vec{a}(1, -3, 7)$ $\vec{b}(2, -6, 14)$

$\vec{b} = 2\vec{a}$, logo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores colineares.

b) $\vec{a}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$ $\quad\quad$ $\vec{b}(0, 4, -1)$

$\vec{b} = -4\vec{a}$, logo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores colineares.

c) $\vec{a}(0, 0, 7)$ $\quad\quad$ $\vec{b}(0, 0, -1)$

$\vec{a} = -7\vec{b}$, logo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores colineares.

d) $\vec{a}(1, 4, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{b}(2, 8, 1)$

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \neq \frac{0}{1}$, logo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são vetores colineares.

37. $\vec{u}$ é colinear com $\vec{v}$, logo $\vec{u}(k, -2k, -k)$, para algum número real k não nulo.
Tendo em conta que $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$, então o valor de k terá de ser negativo.

$$\|\vec{u}\| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (-2k)^2 + (-k)^2} = 8$$
$$\Leftrightarrow k^2 + (-2k)^2 + (-k)^2 = 64$$
$$\Leftrightarrow k^2 + 4k^2 + k^2 = 64$$
$$\Leftrightarrow 6k^2 = 64$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{64}{6}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{8}{\sqrt{6}} \vee k = -\frac{8}{\sqrt{6}}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{4\sqrt{6}}{3} \vee k = -\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Como $k < 0$, tem-se que $\vec{u}\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}, \frac{8\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.

38. A reta r contém os pontos de coordenadas (0, 0) e (–3, –3).
Como (–3, –3) – (0, 0) = (–3, –3), então qualquer vetor diretor da reta r será colinear com (–3, –3), por exemplo $\vec{r}(1, 1)$.
A reta s contém os pontos de coordenadas (–3, 2) e (4, –1). Como (–3, 2) – (4, –1) = (–7, 3), então este é um vetor diretor da reta s.
A reta t é uma reta vertical, logo um seu vetor diretor é (0, 1).
A reta p é uma reta horizontal, logo um seu vetor diretor é (1, 0).

39.

a) Uma equação vetorial da reta que passa no ponto (10, 1) e tem a direção do vetor (–2, 1) é:
$(x, y) = (10, 1) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

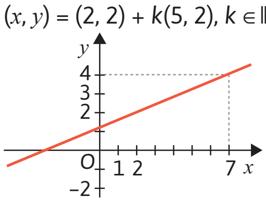
b) Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das abissas e que contém o ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ é:
$(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

c) Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém o ponto $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ é:
$(x, y) = \left(3, -\frac{1}{2}\right) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$

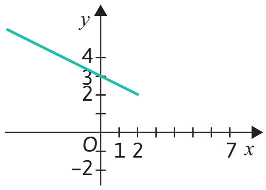
d) $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -5) - (1, 8) = (3 - 1, -5 - 8) = (2, -13)$
Assim, uma equação vetorial da reta que contém os pontos A e B é:
$(x, y) = (3, -5) + k(2, -13), k \in \mathbb{R}$

40.

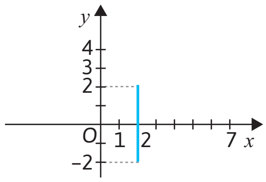
c) $(x, y) = (2, 2) + k(5, 2), k \in \mathbb{R}$



d) $(x, y) = (2, 2) + k(-2, 1), k \in [0, +\infty[$



e) $(x, y) = (2, 2) + k(0, -4), k \in [0, 1]$



41. $(x, y) = (1, -4) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

a) (1, –4) é um ponto da reta.
Se $k = 1$, obtém-se $(x, y) = (1, -4) + (-2, 1) = (-1, -3)$, que é um ponto da reta.
Se $k = -1$, obtém-se $(x, y) = (1, -4) - (-2, 1) = (3, -5)$, que é um ponto da reta.

b) (2, 5) pertence à reta se existir um valor de k tal que:

$$(2, 5) = (1, -4) + k(-2, 1) \Leftrightarrow (2, 5) = (1, -4) + (-2k, k)$$
$$\Leftrightarrow (2, 5) = (1 - 2k, -4 + k)$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2k = 2 \wedge -4 + k = 5$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \wedge k = 9$$

Logo, o ponto não pertence à reta.

c) Procuramos o ponto $(-2, y)$ da reta:

$$(-2, y) = (1, -4) + k(-2, 1) \Leftrightarrow (-2, y) = (1, -4) + (-2k, k)$$
$$\Leftrightarrow (-2, y) = (1 - 2k, -4 + k)$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2k = -2 \wedge -4 + k = y$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \wedge y = -4 + \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{5}{2}$$

Logo, o ponto da reta que tem abcissa –2 é $\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$.

d) Procuramos o ponto $(p - 1, 2)$ da reta:

$$(p - 1, 2) = (1, -4) + k(-2, 1)$$
$$\Leftrightarrow (p - 1, 2) = (1, -4) + (-2k, k)$$
$$\Leftrightarrow (p - 1, 2) = (1 - 2k, -4 + k)$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2k = p - 1 \wedge -4 + k = 2$$
$$\Leftrightarrow p = 2 - 2k \wedge k = 6$$
$$\Leftrightarrow p = -10 \wedge k = 6$$

Logo, o ponto $(p - 1, 2)$ pertence à reta se $p = -10$.

e) Um vetor diretor da reta é (–2, 1). Qualquer outro vetor diretor da reta é colinear com este. Verifiquemos então se $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ é colinear com (–2, 1).

$\frac{-2}{1} = -2$ e $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$, logo os vetores são colineares e, portanto, $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ é um vetor diretor da reta.

42. $A(2, -4)$ $\quad\quad$ $B(-1, 3)$

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 3) - (2, -4) = (-1 - 2, 3 + 4) = (-3, 7)$
Assim, uma equação vetorial da reta AB é
$(x, y) = (2, -4) + k(-3, 7), k \in \mathbb{R}$.

b) Interseção com o eixo Ox: $(x, 0)$

$(x, 0) = (2, -4) + k(-3, 7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3k \\ 0 = -4 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3k \\ k = \frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 \times \frac{4}{7} \\ k = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{12}{7} \\ k = \frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ k = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Logo, a interseção com o eixo Ox é $\left(\frac{2}{7}, 0\right)$.

Interseção com o eixo Oy: $(0, y)$

$(0, y) = (2, -4) + k(-3, 7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 - 3k \\ y = -4 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ y = -4 + 7 \times \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ y = -4 + \frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, a interseção com o eixo Oy é $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

43. Opção (C)

Das opções apresentadas, apenas o vetor de coordenadas $(0, 2025)$ tem a direção do eixo Oy.

Assim, a única equação que pode definir a reta r é $(x, y) = (3, 3) + k(0, 2025)$, $k \in \mathbb{R}$.

44.

a) Uma equação vetorial da reta r, que tem a direção de $\vec{v}$ e que passa em A é:

$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + k(0, 1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

b) O ponto $(-1, 1, -3)$ pertence à reta se existir um k tal que:

$(-1, 1, -3) = (-1, 3, 1) + k(0, 1, 2)$

$\Leftrightarrow (-1, 1, -3) = (-1, 3, 1) + (0, k, 2k)$

$\Leftrightarrow (-1, 1, -3) = (-1, 3 + k, 1 + 2k)$

$\Leftrightarrow -1 = -1 \wedge 3 + k = 1 \wedge 1 + 2k = -3$

$\Leftrightarrow k = -2 \wedge 2k = -4$

$\Leftrightarrow k = -2 \wedge k = -2$

Logo, $k = -2$, o que significa que o ponto B pertence à reta r.

c) $P(x, 0, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$, uma vez que se trata de um ponto do plano xOz.

Assim:

$(x, 0, z) = (-1, 3, 1) + k(0, 1, 2)$

$\Leftrightarrow (x, 0, z) = (-1, 3, 1) + (0, k, 2k)$

$\Leftrightarrow (x, 0, z) = (-1, 3 + k, 1 + 2k)$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge 3 + k = 0 \wedge 1 + 2k = z$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge k = -3 \wedge z = 1 - 6$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge k = -3 \wedge z = -5$

Logo, $P(-1, 0, -5)$.

45.

a) A reta HE é paralela à reta DA, logo, $\overrightarrow{DA}$ é um vetor diretor de HE.

$\overrightarrow{DA} = A - D = (4, 6, 4) - (-2, 4, 7) = (6, 2, -3)$

Assim, uma equação vetorial da reta HE pode ser:

$(x, y, z) = (-4, 1, 1) + k(6, 2, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

b) $||\overrightarrow{CE}|| = ||\overrightarrow{DA}||$

$||\overrightarrow{DA}|| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

$||\overrightarrow{CE}|| = 7 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2 + (-a)^2 + (-2a)^2} = 7$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + a^2 + 4a^2} = 7$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{49}{9}a^2} = 7$

$\Leftrightarrow \frac{7}{3}|a| = 7$

$\Leftrightarrow |a| = 3$

$\Leftrightarrow a = 3 \vee a = -3$

- $a = 3$

  $\overrightarrow{CG} = (-2, -3, -6)$

- $a = -3$

  $\overrightarrow{CG} = (2, 3, 6)$, o que é absurdo pois, por observação da figura, concluímos que as coordenadas de $\overrightarrow{CG}$ não podem ser positivas.

  Logo, $a = 3$.

46.

a) $\overrightarrow{FE} = (-1, 2, 2)$

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC que passa em E pode ser:

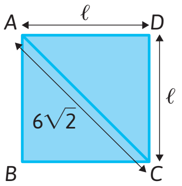
$(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(-1, 2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

b) $V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times h$

$F = E + \overrightarrow{EF} = (-3, 3, 1) + (1, -2, -2) = (-2, 1, -1)$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (-2, 1, -1) - (-2, -2, 2) = (0, 3, -3)$

$||\overrightarrow{AF}|| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



$\ell^2 + \ell^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\ell^2 = 72$

$\Leftrightarrow \ell^2 = 36$

A área do quadrado $[ABCD]$ é 36 u.a.

$h = ||\overrightarrow{FE}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$ u.v.

c) $E' = F + \overrightarrow{EF} = (-2, 1, -1) + (1, -2, -2) = (-1, -1, -3)$

O plano mediador de $[EE']$ pode ser definido por:

$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2} =$

$= \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 =$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 6z + 9$

$\Leftrightarrow 6x - 2x - 6y - 2y - 2z - 6z + 9 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 8y - 8z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$

47. r: $(x, y) = (-1, 4) + k(2, 5)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta que contém o ponto de coordenadas $(-1, 4)$ e tem a direção do vetor $(2, 5)$. Esta equação é equivalente a:

$(x, y) = (-1, 4) + (2k, 5k), k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (x, y) = (2k - 1, 5k + 4), k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x = 2k - 1 \wedge y = 5k + 4, k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow k = \frac{x+1}{2} \wedge k = \frac{y-4}{5}$
$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{5}$, que é uma equação cartesiana da reta r.
Por sua vez, esta equação é equivalente a:
$5x + 5 = 2y - 8 \Leftrightarrow 2y = 5x + 13 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}$, que é a equação reduzida da reta r.

48. Os pontos (2, 2) e (7, 4) pertencem à reta a. Logo, $m_a = \frac{2-4}{2-7} = \frac{2}{5}$.
Os pontos (0, 3) e (2, 2) pertencem à reta b. Logo, $m_b = \frac{3-2}{0-2} = -\frac{1}{2}$.
A reta c é uma reta horizontal. Logo, $m_c = 0$.

49.
a) $y = \frac{2}{7}x - \sqrt{2}$
O declive da reta é $\frac{2}{7}$ e, então, um vetor diretor da reta é (7, 2).
b) $y = -x$
O declive da reta é –1 e, então, um vetor diretor da reta é (–1, 1).
c) $y = 9$
O declive da reta é 0 e, então, um vetor diretor da reta é (1, 0).
d) $6x + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{1}{3}$
O declive da reta é –2 e, então, um vetor diretor da reta é (1, –2).

50.
a) $(x, y) = (0, 9) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$
Como (2, 3) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $\frac{3}{2}$. Como (0, 9) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 9. Assim, a equação reduzida desta reta é $y = \frac{3}{2}x + 9$.
b) $(x, y) = (-1, 5) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}$
Como (–1, 3) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $\frac{3}{-1} = -3$. Logo, a equação reduzida desta reta é da forma $y = -3x + b$. Uma vez que (–1, 5) é um ponto da reta, então $5 = -3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 2$.
Assim, a equação reduzida desta reta é $y = -3x + 2$.
c) $(x, y) = (-1, \sqrt{3}) + k(8, 0), k \in \mathbb{R}$
Como (8, 0) é um vetor diretor da reta, trata-se de uma reta horizontal. Uma vez que $(-1, \sqrt{3})$ é um ponto da reta, então a sua equação reduzida é $y = \sqrt{3}$.

51.
a) $y = \frac{1}{5}x - 2$
O declive da reta é $\frac{1}{5}$, logo um vetor diretor da reta é (5, 1). Como a ordenada na origem é –2, tem-se que (0, –2) é um ponto da reta. Assim, uma equação vetorial da reta é:
$(x, y) = (0, -2) + k(5, 1), k \in \mathbb{R}$
b) $y = 5x$
O declive da reta é 5, logo um vetor diretor da reta é (1, 5). Como a ordenada na origem é 0, tem-se que (0, 0) é um ponto da reta. Assim, uma equação vetorial da reta é:
$(x, y) = (0, 0) + k(1, 5), k \in \mathbb{R}$
c) $y = 5$
Trata-se de uma reta horizontal, logo um vetor diretor da reta é (1, 0). O ponto (0, 5) é um ponto da reta. Assim, uma equação vetorial da reta é:
$(x, y) = (0, 5) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

52.
a) $y = -2x + 8$ é uma equação reduzida da reta que tem declive –2 e passa no ponto de coordenadas (0, 8).
b) Como um vetor diretor da reta é (2, 5), então o seu declive é $\frac{5}{2}$. Logo, a equação reduzida da reta é da forma $y = \frac{5}{2}x + b$.
Como o ponto (1, 3) pertence à reta, então:
$3 = \frac{5}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$
A equação reduzida da reta é $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$.
c) O declive da reta é $\frac{5-0}{2-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$. Logo, a equação reduzida da reta é da forma $y = \frac{10}{3}x + b$. Como o ponto (2, 5) pertence à reta, então $5 = \frac{10}{3} \times 2 + b$ $\Leftrightarrow b = -\frac{5}{3}$.
A equação reduzida da reta é $y = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}$.
d) $-4x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 4x + 5$
Logo, o declive da reta é 4. A equação reduzida da reta é, então, da forma $y = 4x + b$. Como o ponto (–3, 0) pertence à reta, então $0 = 4 \times (-3) + b \Leftrightarrow b = 12$.
A equação reduzida da reta é $y = 4x + 12$.

53.
a) $(x, y) = (1, -9) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}$
Como (3, 1) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $\frac{1}{3}$. Como (0, 1) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{3}x + 1$.
b) $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$
Um ponto genérico da reta é $(2 + k, -1 + 6k), k \in \mathbb{R}$.
$k = 0 \rightarrow A(2, -1)$
$k = 1 \rightarrow B(3, 5)$
$\overrightarrow{AB} = (3, 5) - (2, -1) = (1, 6)$
Como (1, 6) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é 6. Como (0, 1) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = 6x + 1$.

c) $\frac{x+1}{2} = -\frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x + 3 = -2y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

O declive da reta é $-\frac{3}{2}$. Como (0, 1) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

d) $y = \pi$

Trata-se de uma reta horizontal, portanto o seu declive é 0. Como (0, 1) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = 1$.

54. Comecemos por definir a reta *AB*:

$m = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$ (declive de *AB*)

$b = 1$ (ordenada na origem)

AB: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Como a reta *CD* é paralela à reta *AB*, então tem o mesmo declive: $-\frac{1}{2}$

CD: $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Como o ponto $D\left(a, \frac{a}{3}\right)$ pertence à reta *CD*, vem que:

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{2}a + 5 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{a}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{6}a = 5$$
$$\Leftrightarrow a = 6$$

Logo, $a = 6$.

55.

a) Coordenadas do ponto médio de [*PQ*]:

$$\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Coordenadas de um vetor diretor da bissetriz dos quadrantes pares: (–1, 1)

Equação vetorial da reta pretendida:

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + k(-1, 1),\ k \in \mathbb{R}$$

b) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, -2) - (1, 2) = (-3, -4)$

$m = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3}x + b$

Como *P* pertence à reta *PQ*, então $2 = \frac{4}{3} \times 1 + b$.

Logo, $b = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Equação reduzida da reta *PQ*: $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

c) **i.** PQ: $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

Para que $R(k, k-1)$ pertença à reta *PQ*, tem de se verificar:

$$k - 1 = \frac{4}{3} \times k + \frac{2}{3} \Leftrightarrow k - \frac{4}{3}k = \frac{2}{3} + 1$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}k = \frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow k = -5$$

ii. Para que $R(k, k-1)$ pertença à mediatriz de [*PQ*], tem de se verificar $d(R, P) = d(R, Q)$.

Temos que:

$$d(R, P) = d(R, Q)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(k-1)^2 + (k-1-2)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-1+2)^2}$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + k^2 - 6k + 9 = k^2 + 4k + 4 + k^2 + 2k + 1$$
$$\Leftrightarrow -8k + 10 = 6k + 5$$
$$\Leftrightarrow -14k = -5$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{14}$$

Logo, o valor de *k* para o qual *R* pertence à mediatriz de [*PQ*] é $\frac{5}{14}$.

d) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -4)$

Para o vetor ser colinear com $\overrightarrow{PQ}$, tem de ser da forma $\lambda\overrightarrow{PQ}$, isto é, $(-3\lambda, -4\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para que tenha norma $\sqrt{15}$:

$$\sqrt{(-3\lambda)^2 + (-4\lambda)^2} = \sqrt{15} \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 16\lambda^2 = 15$$
$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 15$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{15}{25}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{15}{25}}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{15}}{5} \lor \lambda = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{PQ}$, tem-se que $\lambda = -\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Assim, o vetor nas condições pretendidas tem coordenadas $\left(\frac{3\sqrt{15}}{5}, \frac{4\sqrt{15}}{5}\right)$.

56.

a) Opção (D)

I. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 29$

O centro da circunferência é o ponto de coordenadas (2, 5). Como este ponto não pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pois não verifica a condição $y = x$, a afirmação é falsa.

II. Determinação das coordenadas do ponto *A*: $A(x, 7)$

Como *A* pertence à circunferência, vem que:

$$(x-2)^2 + (7-5)^2 = 29 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4 = 29$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = 5 \lor x - 2 = -5$$
$$\Leftrightarrow x = 7 \lor x = -3$$

Como *A* pertence ao 2.º quadrante, tem-se que $x < 0$.

Logo, $x = -3$ e, portanto, $A(-3, 7)$.

$\overrightarrow{OA}$ é um vetor diretor da reta *r* e $\overrightarrow{OA} = A - O = (-3, 7)$.

Logo, a equação reduzida é do tipo $y = -\frac{7}{3}x + b$.

Como a reta passa na origem, vem que $y = -\frac{7}{3}x$.

A reta *t*, definida por $(x, y) = (\pi, \sqrt{2}) + (6, -14)$, $k \in \mathbb{R}$, tem como vetor diretor $\vec{u}(6, -14)$ (por exemplo) e o seu declive é, então, $-\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$.

Como os declives das retas *r* e *t* são iguais, as retas são paralelas (não são retas coincidentes pois, por exemplo, o ponto da reta *t* de coordenadas $(\pi, \sqrt{2})$ não pertence à reta *r*, já que $\sqrt{2} \neq -\frac{7}{3}\pi$.

Assim, a afirmação apresentada é verdadeira.

b) $((x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \land y \geq 7) \lor$

$$\lor \left((x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \land y \leq -\frac{7}{3}x\right)$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \land \left(y \geq 7 \lor y \leq -\frac{7}{3}x\right)$$

Aprende fazendo – páginas 144 a 161

1. Opção (C)

I. A afirmação é falsa, pois apesar de serem vetores com sentidos opostos, não têm o mesmo comprimento.

II. A afirmação é verdadeira, pois são vetores com a mesma direção.

III. A afirmação é verdadeira, pois um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros e, portanto, os lados têm todos o mesmo comprimento.

2. Opção (C)

Relativamente à opção (A), $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ porque não têm a mesma direção.

Quanto à opção (B), $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$.

Em relação à opção (C), $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Na opção (D), $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.

3. Opção (B)

Na opção (A), $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{LC} \neq \vec{0}$.

Quanto à opção (B), $||\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{JF}|| = ||\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}|| = ||\overrightarrow{IB}|| = ||\overrightarrow{LD}||$.

Na opção (C), $F + \overrightarrow{JH} = F + \overrightarrow{FD} = D \neq \overrightarrow{FD}$.

Relativamente à opção (D), $||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|| = ||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}|| = 0$ e $||\overrightarrow{GE}|| \neq 0$.

4.

a) $\overrightarrow{NH} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NH} + \overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{NQ}$

b) $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{AM}$

c) $2\overrightarrow{QH} - \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{SH}$

d) $(B - N) + (C - K) = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{SN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{RO} - \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RT}$

g) $L + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = L + \overrightarrow{LT} = T$

h) $D + \overrightarrow{PS} = D + \overrightarrow{DI} = I$

i) $H - \overrightarrow{CP} = H + \overrightarrow{HL} = L$

j) $E + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{EN} = E + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DM} = D + \overrightarrow{DM} = M$

5. $\vec{a} = -2\vec{x} + \vec{y}$ $\quad \vec{b} = 4\vec{x} - 3\vec{y}$

a) $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2(-2\vec{x} + \vec{y} + 4\vec{x} - 3\vec{y}) = 2(2\vec{x} - 2\vec{y}) = 4\vec{x} - 4\vec{y}$

b) $-3\vec{a} - \vec{b} = -3(-2\vec{x} + \vec{y}) - (4\vec{x} - 3\vec{y}) = 6\vec{x} - 3\vec{y} - 4\vec{x} + 3\vec{y} = 2\vec{x}$

c) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{2}(-2\vec{x} + \vec{y}) - \frac{1}{3}(4\vec{x} - 3\vec{y}) =$

$= -\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{4}{3}\vec{x} + \vec{y} = -\frac{7}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$

6. $\vec{a}(-1, 3)$ $\quad \vec{b}(5, 2)$

a) $\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(-1, 3) + 2(5, 2) = (-2, 6) + (10, 4) = (8, 10)$

b) $\vec{d} = \frac{1}{5}\vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{5}(5, 2) - (-1, 3) = \left(1, \frac{2}{5}\right) - (-1, 3) =$

$= \left(2, -\frac{13}{5}\right)$

c) $\frac{1}{3}\vec{a} = 2\vec{e} - \vec{b} \Leftrightarrow 2\vec{e} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}\right)$

$\Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(-1, 3) + (5, 2)\right)$

$\Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{3}, 1\right) + (5, 2)\right)$

$\Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}, 3\right)$

$\Leftrightarrow \vec{e} = \left(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}\right)$

7. Opção (B)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 1) - (1, 2, -2) = (1, -1, 3)$

$\vec{u} = (a, b, -1)$

Para que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam colineares tem de se verificar $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{-1}{3}$, ou seja, $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

8. Opção (C)

$A(-1, 2)$ $\quad B(3, 0)$ $\quad C(1, -5)$

$d(A, B) = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$d(A, C) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} =$

$= \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

$d(B, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-(-5))^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Logo, A, B e C não são vértices de um triângulo equilátero nem de um triângulo isósceles, porque $d(A, B) \neq d(A, C) \neq d(B, C)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0) - (-1, 2) = (4, -2)$

$\overrightarrow{CB} = B - C = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5)$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = (4, -2) + (2, 5) = (6, 3)$

$||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|| = ||(6, 3)|| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} =$

$= 3\sqrt{5}$

9. Opção (D)

$E(1, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$, logo:

$||\overrightarrow{EC}|| = ||(0, 1, 1) - (1, 0, 0)|| = ||(-1, 1, 1)|| =$

$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \neq \sqrt{2}$

$D + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ é o ponto médio de $[DC]$ e não de $[AB]$.

Os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ não são colineares porque não têm a mesma direção.

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = (0, 0, -1) + (-1, 0, 0) = (-1, 0, -1)$

10.

a) $E + \overrightarrow{HG} = E + \overrightarrow{EF} = F$

b) $B + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = B + \overrightarrow{BI} = I$

c) $I - \overrightarrow{JF} = I + \overrightarrow{IC} = C$

d) $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = K$

e) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$

f) $2\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GF}$

g) $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE}$

h) $\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KI} - \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{HF}$

11. $\vec{u}(2, 0, -4)$ $\quad \vec{v}(-1, 2, 3)$ $\quad A(-1, -2, 3)$ $\quad B(0, 2, 5)$

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(2, 0, -4) - 3(-1, 2, 3)$

$= (4, 0, -8) + (3, -6, -9)$

$= (7, -6, -17)$

b) $\frac{1}{4}\vec{u} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(2, 0, -4) + ((0, 2, 5) - (-1, -2, 3))$

$= \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) + (1, 4, 2)$

$= \left(\frac{3}{2}, 4, 1\right)$

c) $2\overrightarrow{BA} - \vec{u} + 4\vec{v} =$

$= 2((-1, -2, 3) - (0, 2, 5)) - (2, 0, -4) + 4(-1, 2, 3) =$

$= 2(-1, -4, -2) - (2, 0, -4) + (-4, 8, 12) =$

$= (-2, -8, -4) - (2, 0, -4) + (-4, 8, 12) =$

$= (-4, -8, 0) + (-4, 8, 12) =$

$= (-8, 0, 12)$

d) $A - \vec{v} = (-1, -2, 3) - (-1, 2, 3) = (0, -4, 0)$

e) $B + \frac{1}{2}\vec{u} = (0, 2, 5) + \frac{1}{2}(2, 0, -4) = (0, 2, 5) + (1, 0, -2) =$
$= (1, 2, 3)$

f) $\overrightarrow{AB} = 5\vec{w} - \vec{u} + 2\vec{v}$

$\Leftrightarrow 5\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} - 2\vec{v}$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \vec{u} - 2\vec{v})$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}((0, 2, 5) - (-1, -2, 3) + (2, 0, -4) - 2(-1, 2, 3))$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}((1, 4, 2) + (2, 0, -4) + (2, -4, -6))$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}(5, 0, -8)$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \left(1, 0, -\frac{8}{5}\right)$

12.

a) $A(2, 0, 0)$ e $G(0, 2, 2)$
Assim, $\overrightarrow{AG} = (0, 2, 2) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 2)$.
Logo, uma equação vetorial da reta que contém a diagonal espacial $[AG]$ é:
$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(-2, 2, 2), k \in \mathbb{R}$

b) Se uma reta é paralela ao eixo das abcissas, então um seu vetor diretor é $(1, 0, 0)$. Logo, uma equação vetorial da reta que passa no ponto $B(2, 2, 0)$ e é paralela ao eixo das abcissas é:
$(x, y, z) = (2, 2, 0) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

c) A reta AE é paralela ao eixo Oz, logo um seu vetor diretor é $(0, 0, 1)$.
Assim, uma equação vetorial da reta AE é:
$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

d) Uma equação vetorial da aresta $[AE]$ é:
$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in [0, 1]$.

e) $\overrightarrow{BE} = (2, 0, 2) - (2, 2, 0) = (0, -2, 2)$
Assim, uma equação vetorial da reta que passa no ponto G e tem a direção do vetor $\overrightarrow{BE}$ é:
$(x, y, z) = (0, 2, 2) + k(0, -2, 2), k \in \mathbb{R}$

f) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $(2, 1, 0)$, uma vez que $A(2, 0, 0)$ e $B(2, 2, 0)$.
Assim, uma equação vetorial da reta que passa no ponto médio de $[AB]$ e tem a direção de $\vec{u}(-1, -2, 5)$ é $(x, y, z) = (0, 2, 2) + k(-1, -2, 5), k \in \mathbb{R}$.

13. $A(1, -2, 3)$ e $\vec{u}(-2, -1, 4)$

a) Uma equação vetorial da reta r é:
$(x, y, z) = (1, -2, 3) + k(-2, -1, 4), k \in \mathbb{R}$

b) Para que o ponto $(0, -1, 5)$ pertença à reta r, tem de existir um k tal que:

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2k \\ -1 = -2 - k \\ 5 = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = -1 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto não pertence à reta r.

c) Para que o ponto $\left(2p, -\frac{3}{2}, p\right)$ pertença à reta r:

$$\begin{cases} 2p = 1 - 2k \\ -\frac{3}{2} = -2 - k \\ p = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ k = -\frac{1}{2} \\ p = 3 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \\ p = 1 \end{cases}$$

Logo, $p = 1$.

14. $O(0, 0, 0)$ $R(0, 5, -5)$

a) Opção (D)
Uma reta é paralela ao eixo das cotas se o seu vetor diretor for colinear com o vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$.
Se uma reta é paralela ao eixo das cotas e passa pelo ponto P, então também passa pelo ponto Q de coordenadas $(5, 0, -5)$.

b) Sendo V o vértice da pirâmide, as coordenadas de V são da forma $\left(\frac{5}{2}, y, -\frac{5}{2}\right), y < 0$.
Seja h a altura da pirâmide.
$V_{\text{sólido}} = V_{\text{pirâmide}} + V_{\text{cubo}}$

$150 = \frac{1}{3} \times 5^2 \times h + 5^3 \Leftrightarrow 150 = \frac{25}{3}h + 125$

$\Leftrightarrow \frac{25}{3}h = 25$

$\Leftrightarrow h = 3$

Assim, $V\left(\frac{5}{2}, -3, -\frac{5}{2}\right)$.
A superfície esférica pretendida tem centro em V e raio h.
Logo, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = 9$

15. Opção (D)
$(x, y) = (1, 0) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$
Como um vetor diretor da reta é $(-1, 2)$, então o seu declive é $\frac{2}{-1} = -2$, o que significa que a reta é paralela à reta de equação $y = -2x$.

16.

a) Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(-1, \pi)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(-8, 3)$ é:
$(x, y) = (-1, \pi) + k(-8, 3), k \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\sqrt{8}, -4\right) - \left(\sqrt{2}, 1\right) =$

$= \left(2\sqrt{2}, -4\right) - \left(\sqrt{2}, 1\right) =$

$= \left(\sqrt{2}, -5\right)$

Uma equação vetorial da reta DE é:
$(x, y) = \left(\sqrt{2}, 1\right) + k\left(\sqrt{2}, -5\right), k \in \mathbb{R}$

c) Um vetor diretor da reta é (1, 0), porque se trata de uma reta paralela ao eixo das abcissas. Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das abcissas e que contém o ponto $\left(7, -\frac{1}{2}\right)$ é:
$(x, y) = \left(7, -\frac{1}{2}\right) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

d) Um vetor diretor da reta é (0, 1), porque se trata de uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém o ponto $(9, \sqrt{3})$ é:
$(x, y) = (9, \sqrt{3}) + k(0, 1) \in \mathbb{R}$

17. $P(2, 1)$ $Q(5, -7)$

a) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5, -7) - (2, 1) = (3, -8)$
Uma equação vetorial da reta PQ é:
$(x, y) = (2, 1) + k(3, -8), k \in \mathbb{R}$

b) Uma equação vetorial do segmento de reta $[PQ]$ é:
$(x, y) = (2, 1) + k(3, -8), k \in [0, 1]$

c) Uma equação vetorial da semirreta $\dot{P}Q$ é:
$(x, y) = (2, 1) + k(3, -8), k \in [0, +\infty[$

d) Uma equação vetorial da semirreta $\dot{Q}P$ é:
$(x, y) = (5, -7) + k(-3, 8), k \in [0, +\infty[$

18. Opção (B)
Os pontos (2, 0) e (0, 8) pertencem à reta s. Logo, a ordenada na origem desta reta é 8 e o seu declive é $\frac{0-8}{2-0} = -4$. Assim, a equação reduzida da reta s é $y = -4x + 8$.

19. Opção (B)
Como os pontos A e B são os pontos de interseção da reta AB com os eixos coordenados, e a reta AB tem equação $y = -4x + 8$, então:
$A(x, 0)$: $0 = -4x + 8 \Leftrightarrow x = 2$
Logo, $A(2, 0)$.
$B(0, 8)$, pois 8 é a ordenada na origem da reta AB.
Como M é o ponto médio de $[AB]$, então as coordenadas de M são $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = (1, 4)$.
Assim, a região a sombreado pode ser definida pela condição:
$y \leq -4x + 8 \ \wedge \ y \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$

20. r é uma reta horizontal, logo r: $y = 2$. (v)
Como u é uma reta com declive negativo, então u: $y = -x + 3$. (iii)
t é uma reta com ordenada na origem positiva, logo t: $y = x + 3$. (ii)
v e s são ambas retas com declive positivo e têm a mesma ordenada na origem. No entanto, o declive de v é maior do que o declive de s, logo v: $y = 2x - 2$ (i) e s: $y = x - 2$. (iv)

21.

a) A equação reduzida da reta com declive −3 e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2 é $y = -3x + 2$.

b) Como a reta tem a direção do vetor $\vec{u}(5, 1)$, o seu declive é $\frac{1}{5}$. Assim, a equação reduzida da reta é da forma $y = \frac{1}{5}x + b$. Como $A(-1, 2)$ pertence à reta, tem-se que $2 = \frac{1}{5} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{5}$.
Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$.

c) $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\frac{3}{2}, -6\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (1, -7)$
Logo, o declive da reta é −7 e a sua equação reduzida é da forma $y = -7x + b$. Como $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ pertence à reta, tem-se que $1 = -7 \times \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{2}$.
Logo, a equação reduzida da reta é $y = -7x + \frac{9}{2}$.

d) Um vetor diretor da reta é (2, 3), pelo que o seu declive é $\frac{3}{2}$ e a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{3}{2}x + b$. Como o ponto (1, −4) pertence à reta, tem-se que $-4 = \frac{3}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{2}$. Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$.

e) Trata-se de uma reta horizontal que passa no ponto $(7, \sqrt{2})$, logo a sua equação reduzida é $y = \sqrt{2}$.

f) $-7x + 2y + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{6}$
Assim, o declive da reta é $\frac{7}{2}$ e, como o ponto (0, 0) pertence à reta, a sua equação reduzida é $y = \frac{7}{2}x$.

22.

a) (2, 3) é um ponto pertencente à reta r. Se, por exemplo, $x = 1$, então:

$$\begin{aligned}(1, y) = (2, 3) + k(-1, 2) &\Leftrightarrow (1, y) = (2, 3) + (-k, 2k)\\ &\Leftrightarrow (1, y) = (2 - k, 3 + 2k)\\ &\Leftrightarrow 2 - k = 1 \wedge 3 + 2k = y\\ &\Leftrightarrow k = 1 \wedge y = 5\end{aligned}$$

Logo, o ponto (1, 5) também pertence à reta r.
O ponto $(1, \sqrt{2})$ pertence à reta s. Se, por exemplo, $x = 2$, então:

$$\begin{aligned}(2, y) = (1, \sqrt{2}) + k(1, -2) &\Leftrightarrow (2, y) = (1, \sqrt{2}) + (k, -2k)\\ &\Leftrightarrow (2, y) = (1 + k, \sqrt{2} - 2k)\\ &\Leftrightarrow 2 = 1 + k \ \wedge \ y = \sqrt{2} - 2k\\ &\Leftrightarrow k = 1 \ \wedge \ y = \sqrt{2} - 2\end{aligned}$$

Logo, o ponto $(2, \sqrt{2} - 2)$ também pertence à reta s.
O ponto (0, 4) pertence à reta t. Se, por exemplo, $x = 3$, então $y = \frac{1}{3} \times 3 + 4 = 5$.
Logo, o ponto (3, 5) também pertence à reta t.

b) O vetor (−1, 2) é um vetor diretor da reta r. Fazendo, por exemplo, $2 \times (-1, 2)$ obtém-se o vetor (−2, 4), que também é um vetor diretor da reta r.
O vetor (1, −2) é um vetor diretor da reta s. Fazendo, por exemplo, $10 \times (1, -2)$ obtém-se o vetor (10, −20), que também é um vetor diretor da reta s.
Como o declive da reta t é $\frac{1}{3}$, o vetor (3, 1) é um vetor diretor da reta t, bem como o seu simétrico (−3, −1).

c) O declive da reta r é $\frac{2}{-1} = -2$.

O declive da reta s é $\frac{-2}{1} = -2$.

O declive da reta t é $\frac{1}{3}$.

Logo, as retas r e s são paralelas e a reta t não é paralela a nenhuma delas.

d) Qualquer ponto que pertença ao eixo das ordenadas é da forma $(0, y)$, onde y é um número real.

Assim, no que respeita à reta r:

$$(0, y) = (2, 3) + k(-1, 2) \Leftrightarrow (0, y) = (2, 3) + (-k, 2k)$$
$$\Leftrightarrow (0, y) = (2 - k, 3 + 2k)$$
$$\Leftrightarrow 2 - k = 0 \wedge y = 3 + 2k$$
$$\Leftrightarrow k = 2 \wedge y = 7$$

Logo, o ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas é $(0, 7)$.

Para a reta s:

$$(0, y) = \left(1, \sqrt{2}\right) + k(1, -2) \Leftrightarrow (0, y) = \left(1, \sqrt{2}\right) + (k, -2k)$$
$$\Leftrightarrow (0, y) = \left(1 + k, \sqrt{2} - 2k\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 + k = 0 \wedge y = \sqrt{2} - 2k$$
$$\Leftrightarrow k = -1 \wedge y = \sqrt{2} + 2$$

Logo, o ponto de interseção da reta s com o eixo das ordenadas é $(0, \sqrt{2} + 2)$.

O ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas é $(0, 4)$.

23.

a) O centro da circunferência é $(1, 2)$ e o seu raio é $\overline{CO} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Logo, uma equação da circunferência é:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

A reta OC tem como vetor diretor o vetor $\overrightarrow{OC}(1, 2)$, logo o declive da reta é $\frac{2}{1} = 2$. Assim, a equação da reta OC é $y = 2x$.

Então, uma condição que representa o conjunto de pontos a sombreado é:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \wedge y \leq 2x \wedge 0 \leq y \leq 2$

b) D é um ponto de interseção da reta de equação $y = 2$ com a circunferência, logo:

$$(x-1)^2 + (2-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{5} \vee x - 1 = -\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5} \vee x = 1 - \sqrt{5}$$

Como D tem abissa positiva, então as coordenadas de D são $\left(1 + \sqrt{5}, 2\right)$.

c) A reta paralela a OC tem declive 2, tal como OC, e é da forma $y = 2x + b$. Como D é um ponto dessa reta, $2 = 2\left(1 + \sqrt{5}\right) + b \Leftrightarrow b = 2 - 2 - 2\sqrt{5} \Leftrightarrow b = -2\sqrt{5}$.

Assim, a equação reduzida é $y = 2x - 2\sqrt{5}$.

d) $A_{[OCD]} = \frac{\overline{CD} \times h}{2} = \frac{\sqrt{5} \times 2}{2} = \sqrt{5}$ u.a.

24.

a) Quando $x = 0$:

$$(0-2)^2 + (y-5)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + (y-5)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow (y-5)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow y - 5 = \pm\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow y = 5 + \sqrt{5} \vee y = 5 - \sqrt{5}$$

Assim, $B\left(0, 5 - \sqrt{5}\right)$ e $D\left(0, 5 + \sqrt{5}\right)$.

$d(C, B) = d(C, D) = 3$ (raio da circunferência)

$d(B, D) = \left|\left(5 + \sqrt{5}\right) - \left(5 - \sqrt{5}\right)\right| = 2\sqrt{5}$, ou seja, $\overline{CB} = \overline{CD}$, mas $\overline{BD} \neq \overline{CB}$.

Conclui-se, então, que o triângulo é isósceles, pois tem dois lados iguais, mas não é equilátero.

b) Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto da mediatriz de $[BC]$:

$$d(B, P) = d(C, P)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \left(5 - \sqrt{5}\right)\right)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\left(5 - \sqrt{5}\right)y + \left(5 - \sqrt{5}\right)^2 =$$
$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$
$$\Leftrightarrow -10y + 2\sqrt{5}y + 25 - 10\sqrt{5} + 5 = -4x - 10y + 29$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5}y = -4x + 10\sqrt{5} - 1$$
$$\Leftrightarrow y = -\underbrace{\frac{4}{2\sqrt{5}}}_{(\times\sqrt{5})}x + \underbrace{\frac{10\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}}_{(\times\sqrt{5})}$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{50 - \sqrt{5}}{10}$$

A equação reduzida da reta paralela à mediatriz do segmento de reta $[BC]$ que passa em C é do tipo $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + b$.

Como $C(2, 5)$ pertence à reta vem que:

$$5 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \times 2 + b \Leftrightarrow 5 + \frac{4\sqrt{5}}{5} = b \Leftrightarrow b = \frac{25 + 4\sqrt{5}}{5}$$

A equação reduzida da reta paralela à mediatriz do segmento de reta $[BC]$ que passa em C é:

$$y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{25 + 5\sqrt{5}}{5}$$

25.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -4)$

Para $\vec{u}$ ser colinear com $\overrightarrow{AB}$, tem de ser da forma $(-4k, -4k)$, $k \in \mathbb{R}$, e para ter norma igual a $\sqrt{11}$, tem que:

$$\sqrt{(-4k)^2 + (-4k)^2} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \sqrt{16k^2 + 16k^2} = \sqrt{11}$$
$$\Leftrightarrow 32k^2 = 11$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{11}{32}$$
$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{11}{32}}$$

Para $\vec{u}$ ter sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$:

$$k = -\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{32}} = -\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{11} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \times \sqrt{2}} =$$
$$= -\frac{\sqrt{22}}{4 \times 2} =$$
$$= -\frac{\sqrt{22}}{8}$$

Cálculo auxiliar

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Assim, $\vec{u} = \left(-4 \times \left(-\frac{\sqrt{22}}{8}\right), -4 \times \left(-\frac{\sqrt{22}}{8}\right)\right) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{\sqrt{22}}{2}\right).$$

b) **i.** Circunferência de centro em A e raio $\overline{OA}$:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

Cálculo auxiliar

$\overline{OA} = d(O, A) =$

$= \sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2} =$

$= \sqrt{5}$

Condição que define o conjunto de pontos pretendido:
$(x-1)^2 + (y-2)^2 < 5 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ y < 0$

ii. Equação da reta AB:
$\overrightarrow{AB} = (-4, -4)$

$m_{AB} = \frac{-4}{-4} = 1$

$y = x + b$

$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$

AB: $y = x + 1$

Interseção da circunferência com a reta AB:
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \ \wedge \ y = x + 1$

Assim:

$$(x-1)^2 + (x+1-2)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (x-1)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1 \ \vee \ x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \ \vee \ x = -\frac{\sqrt{10}}{2} + 1$$

Coordenadas dos pontos de interseção:
$\left(\frac{\sqrt{10}}{2} + 1, \frac{\sqrt{10}}{2} + 2\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{10}}{2} + 2\right)$

26. Opção (D)
$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{MG}$, logo os vetores $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{MG}$ não são simétricos, porque não têm o mesmo comprimento, e a afirmação I é falsa.

$\overrightarrow{ML} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, logo a afirmação II é verdadeira.

27. Opção (D)
Para que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares:

$$\frac{-3}{2p+3} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow 3 = -4p - 6 \Leftrightarrow 4p = -9$$
$$\Leftrightarrow p = -\frac{9}{4}$$

28. Opção (C)
$\vec{u}(4, -3, 1) \qquad \vec{v}(2, -6, 8)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 36 + 64} = \sqrt{104} =$
$= 2\sqrt{26}$

Logo, $\|\vec{u}\| = \frac{1}{2}\|\vec{v}\|$ e, portanto, a afirmação I é verdadeira.

$\frac{4}{2} \neq \frac{-3}{-6} \neq \frac{1}{8}$, logo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e a afirmação II é falsa.

29. Se $\vec{u}$ é colinear com $\vec{v}(2, -6)$, então existe um número real k tal que $\vec{u}(2k, -6k)$. Como $\vec{u}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$, então $k > 0$.

$$\|\vec{u}\| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (-6k)^2} = 8$$
$$\Leftrightarrow 4k^2 + 36k^2 = 64$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{64}{40}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{8}{2\sqrt{10}} \vee k = -\frac{8}{2\sqrt{10}}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{10}}{5} \vee k = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Como $k > 0$, então $\vec{u}\left(2 \times \frac{2\sqrt{10}}{5}, -6 \times \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) =$
$= \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}, \frac{-12\sqrt{10}}{5}\right)$.

30. Se $\vec{u}$ é colinear com $\vec{v}(1, 5)$, então existe um número real k tal que $\vec{u}(k, 5k)$. Como $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$, então $k < 0$.

$$\|\vec{u}\| = 12 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (5k)^2} = 12$$
$$\Leftrightarrow k^2 + 25k^2 = 144$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{144}{26}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{12}{\sqrt{26}} \ \vee \ k = -\frac{12}{\sqrt{26}}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{6\sqrt{26}}{13} \ \vee \ k = -\frac{6\sqrt{26}}{13}$$

Como $k < 0$, então $\vec{u}\left(-\frac{6\sqrt{26}}{13}, 5 \times \left(-\frac{6\sqrt{26}}{13}\right)\right) =$
$= \left(-\frac{6\sqrt{26}}{13}, -\frac{30\sqrt{26}}{13}\right)$.

31. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, -1) - (1, 2, 3) = (-1, 0, -4)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right) - (0, 2, -1) = \left(\frac{1}{2}, -2, 3\right)$

$\frac{-1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{-4}{3}$, logo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são colineares e, portanto, os pontos A, B e C não pertencem todos a uma mesma reta.

32. Opção (A)
$\vec{r}(0, 1, 0)$ é um vetor diretor da reta r.
A reta definida na opção (A) também admite $(0, 1, 0)$ como vetor diretor.
A reta definida na opção (B) admite $\vec{s}(0, 0, 1)$ como vetor diretor e este vetor não é colinear com $\vec{r}$.
A reta definida na opção (C) admite $\vec{t}(1, 2, 3)$ como vetor diretor e este vetor não é colinear com $\vec{r}$.
A reta definida na opção (D) admite $\vec{v}(1, 0, 1)$ como vetor diretor e este vetor não é colinear com $\vec{r}$.

33.
a) As coordenadas dos vértices do poliedro são $O(0, 0, 0)$; $A(2, 0, 0)$; $B(2, 2, 0)$; $C(0, 2, 0)$; $D(2, 0, 2)$; $E(2, 2, 2)$; $F(0, 2, 2)$; $G(0, 0, 2)$; $H(1, 1, 4)$; $I(1, 1, -2)$.

b) A afirmação é falsa. O ponto I pertence ao oitavo octante e não ao quarto, uma vez que as suas coordenadas são $(1, 1, -2)$, ou seja, tem abcissa positiva, ordenada positiva e cota negativa, tal como qualquer outro ponto no oitavo octante.

c) **i.** O plano que contém a face $[ABDE]$ é definido por $x = 2$.

ii. A reta HI é definida por $x = 1 \ \wedge \ y = 1$.

iii. O plano paralelo a xOy que passa pelo ponto I é definido por $z = -2$.

iv. Uma reta perpendicular ao eixo Oz e que passa pelo ponto F é definida, por exemplo, por $x = 0 \wedge z = 2$.

v. A esfera tangente a todas as faces do cubo tem centro (1, 1, 1) e o seu raio é 1, logo é definida por $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \le 1$.

d) **i.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{ID}$

ii. $C-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DG}=C+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=O+\overrightarrow{OA}=A$, logo $A+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=C$.

iii. $\|\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{AD}\|=4$

iv. $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\|=\|\overrightarrow{AF}\|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

e) **i.** Como $D(2, 0, 2)$ e $E(2, 2, 2)$, uma equação do plano mediador de $[DE]$ é $y=1$.

ii. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-4z+4=$

$=x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-8z+16$

$\Leftrightarrow -2x-2y+4z-6=0$

$\Leftrightarrow x+y-2z+3=0$, que é uma equação do plano mediador de $[EH]$.

f) O raio da superfície esférica de centro I e que passa no ponto E é:

$\overline{IE}=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{1+1+16}=$

$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Logo, uma equação desta superfície esférica é $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=18$.

g) $\overrightarrow{AF}=F-A=(0, 2, 2)-(2, 0, 0)=(-2, 2, 2)$

Logo, como $\vec{u}$ é colinear com $\overrightarrow{AF}$, então é da forma $(-2k, 2k, 2k)$.

$\|\vec{u}\|=12 \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2+(2k)^2+(2k)^2}=12$

$\Leftrightarrow 4k^2+4k^2+4k^2=144$

$\Leftrightarrow 12k^2=144$

$\Leftrightarrow k^2=12$

$\Leftrightarrow k=\sqrt{12} \ \vee \ k=-\sqrt{12}$

$\Leftrightarrow k=2\sqrt{3} \ \vee \ k=-2\sqrt{3}$

34.

a) As coordenadas dos restantes vértices do prisma são $D(0, -3, 0)$, $E(3, 0, 7)$, $G(-3, 0, 7)$ e $H(0, -3, 7)$.

b) $\overrightarrow{EC}=C-E=(-3, 0, 0)-(3, 0, 7)=(-6, 0, -7)$

$\overrightarrow{GB}=B-G=(0, 3, 0)-(-3, 0, 7)=(3, 3, -7)$

$\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{GB}=(-6, 0, 7)+(3, 3, -7)=(-3, 3, -14)$

$\|\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{GB}\|=\|(-3, 3, -14)\|=\sqrt{(-3)^2+3^2+(-14)^2}=$

$=\sqrt{9+9+196}=\sqrt{214}$

c) $\overrightarrow{FD}=D-F=(0, -3, 0)-(0, 3, 7)=(0, -6, -7)$

Como $\vec{u}$ é colinear com $\overrightarrow{FD}$, então $\vec{u}(0, -6k, -7k)$.

$\|\vec{u}\|=5 \Leftrightarrow \sqrt{0^2+(-6k)^2+(-7k)^2}=5$

$\Leftrightarrow 36k^2+49k^2=25$

$\Leftrightarrow 85k^2=25$

$\Leftrightarrow k^2=\frac{25}{85}$

$\Leftrightarrow k=\frac{5}{\sqrt{85}} \ \vee \ k=-\frac{5}{\sqrt{85}}$

$\Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{85}}{17} \ \vee \ k=-\frac{\sqrt{85}}{17}$

Como $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{FD}$, então $k<0$, logo $\vec{u}\left(0, \frac{6\sqrt{85}}{17}, \frac{7\sqrt{85}}{17}\right)$.

d) O ponto médio de $[BF]$ é $M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right)=$

$=\left(0, 3, \frac{7}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0, 3, 0)-(3, 0, 0)=(-3, 3, 0)$

Assim, uma equação vetorial da reta que passa em M e tem a direção de $\overrightarrow{AB}$ é:

$(x, y, z)=\left(0, 3, \frac{7}{2}\right)+k(-3, 3, 0),\ k\in\mathbb{R}$

e) Um vetor diretor de qualquer reta paralela ao eixo das abcissas é (1, 0, 0). Logo, uma equação vetorial da reta que passa em F e é paralela ao eixo das abcissas pode ser $(x, y, z)=(0, 3, 7)+k(1, 0, 0),\ k\in\mathbb{R}$.

f) O centro da superfície esférica que passa em todos os vértices do prisma é o centro do prisma $\left(0, 0, \frac{7}{2}\right)$.

O raio desta superfície esférica é igual à distância entre o centro do prisma e qualquer um dos seus vértices, por exemplo, o vértice A:

$\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2+\left(\frac{7}{2}-0\right)^2}=\sqrt{9+0+\frac{49}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{85}{4}}$.

Logo, uma condição que define a superfície esférica que passa em todos os vértices do prisma é:

$x^2+y^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{85}{4}$

35.

a) Opção (B)

Dadas as condições do enunciado e da figura, os pontos de abcissa 6 e cota 0 são os pontos da reta AB.

A reta AB pode então ser definida pela condição $x=6 \ \wedge \ z=0$.

Observe-se que:

- reta AF: $x=6 \ \wedge \ y=2$
- reta AD: $y=2 \ \wedge \ z=0$
- plano ABC: $z=0$

b)
- O ponto E tem a mesma ordenada que o ponto A. Logo, $y=2$. E, como pertence à reta EC, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $(x, 2, z)=(2, -6, 8)+k(0, 4, -2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+0k \\ 2=-6+4k \\ z=8-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ k=2 \\ z=4 \end{cases}$

Logo, as coordenadas de E são (2, 2, 4).

- O ponto C tem cota 0 e também pertence à reta EC. Assim, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $(x, y, 0)=(2, -6, 8)+k(0, 4, -2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+0k \\ y=-6+4k \\ 0=8-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10 \\ z=4 \end{cases}$

Logo, as coordenadas de C são (2, 10, 0).

c) O conjunto de pontos P do espaço equidistantes de C e de E é o plano mediador de $[CE]$ e pode ser definido por $d(C, P)=d(E, P)$.

$\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2+(z-0)^2}=$

$=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2-20y+100+z^2=$

$=(x-2)^2+y^2-4y+4+z^2-8z+16$

$\Leftrightarrow -16y+8z+80=0$

$\Leftrightarrow -2y+z+10=0$

Uma condição pretendida é $-2y+z+10=0$.

d) Seja V o volume do prisma:
$V_{prisma} = \text{Área}_{base} \times \text{altura} =$
$= \frac{\overline{AF} \times \overline{AB}}{2} \times \overline{AD} =$
$= \frac{4 \times |10-2|}{2} \times |6-2| =$
$= \frac{4 \times 8}{2} \times 4 =$
$= 64$ u.v.

e) $B(6, 10, 0)$ $E(2, 2, 4)$
$\overrightarrow{BE} = (-4, -8, 4)$
reta BE: $(x, y, z) = (2, 2, 4) + k(-4, -8, 4), k \in \mathbb{R}$

f) Centro: $C + \overrightarrow{BF} = E$ e $E(2, 2, 4)$
Com centro em E, para ser tangente ao plano xOz tem raio 2. Assim, uma condição pode ser:
$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$

36.

a) Um ponto da reta r é $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$. Como o declive da reta r é $\frac{3}{4}$, então um seu vetor diretor é $(4, 3)$.

b) O ponto de interseção da reta r com o eixo Ox é da forma $(x, 0)$, sendo x um número real. Assim,
$0 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 0 = 3x - 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.
Ou seja, o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox é $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$. O ponto de interseção da reta r com o eixo Oy é $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$.

c) O ponto $(1, 5)$ pertence à reta s se existir um $k \in \mathbb{R}$ tal que:
$(1, 5) = (1, 2) + k(-4, 3) \Leftrightarrow (1, 5) = (1, 2) + (-4k, 3k)$
$\Leftrightarrow (1, 5) = (1 - 4k, 2 + 3k)$
$\Leftrightarrow 1 - 4k = 1 \wedge 2 + 3k = 5$
$\Leftrightarrow k = 0 \wedge k = 1$
Logo, o ponto $(1, 5)$ não pertence à reta s.

d) Um vetor diretor da reta s é $(-4, 3)$, logo o seu declive é $\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ e a sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{3}{4}x + b$. Como $(1, 2)$ é um ponto da reta s, tem-se que $2 = -\frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{4}$.
Assim, a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

e) O declive da reta r é $\frac{3}{4}$ e o declive da reta s é $-\frac{3}{4}$, logo as retas não são paralelas.

f) Igualando os segundos membros das equações reduzidas das retas r e s, obtém-se:
$\frac{3}{4}x - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \Leftrightarrow 3x - 7 = -3x + 11$
$\Leftrightarrow 6x = 18$
$\Leftrightarrow x = 3$
Como $x = 3$, então $y = \frac{3}{4} \times 3 - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$. Logo, o ponto de interseção das retas r e s é o ponto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

g) Qualquer reta paralela à reta r tem equação reduzida da forma $y = \frac{3}{4}x + b$. Como $(4, -5)$ é um ponto da reta cuja equação se pretende determinar, então
$-5 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -8$.
Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{3}{4}x - 8$.

h) Para que A pertença à reta r:
$5p = \frac{3}{4} \times 10 - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 5p = \frac{23}{4} \Leftrightarrow p = \frac{23}{20}$

i) Uma equação da circunferência de centro $\left(1, -\frac{7}{4}\right)$ e raio 1 é $(x-1)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = 1$.
Os pontos de interseção da reta r com esta circunferência são da forma $\left(x, \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right)$, onde x é um número real. Assim:
$(x-1)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{7}{4} + \frac{7}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 = 1$
$\Leftrightarrow 25x^2 - 32x = 0$
$\Leftrightarrow x(25x - 32) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{32}{25}$
Se $x = 0$, então $y = -\frac{7}{4}$ e obtém-se o ponto $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$.
Se $x = \frac{32}{25}$, então $y = \frac{3}{4} \times \frac{32}{25} - \frac{7}{4} = -\frac{79}{100}$ e obtém-se o ponto $\left(\frac{32}{25}, -\frac{79}{100}\right)$.

37.

a) A equação vetorial da reta que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}(1, 1, -3)$ é:
$(x, y, z) = (-2, 1, 0) + k(1, 1, -3), k \in \mathbb{R}$
Como o ponto pertence ao plano yOz, então é da forma $(0, y, z)$. Para que pertença à reta:
$$\begin{cases} 0 = -2 + k \\ y = 1 + k \\ z = -3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 1 + 2 \\ z = -3 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 3 \\ z = -6 \end{cases}$$
Logo, as coordenadas do ponto de interseção do plano yOz com a reta que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$ é $(0, 3, -6)$.

b) $B = A + 2\vec{u} = (-2, 1, 0) + 2(1, 1, -3) =$
$= (-2, 1, 0) + (2, 2, -6) = (0, 3, -6)$
O ponto médio de $[AB]$ é o centro da esfera e as suas coordenadas são:
$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{0-6}{2}\right) = (-1, 2, -3)$
O raio da esfera é:
$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2 + (0-(-6))^2} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 36} = \frac{1}{2}\sqrt{44} = \sqrt{11}$
Logo, uma condição que define a esfera de diâmetro $[AB]$ é $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \leq 11$.

38. Opção (C)
Um vetor diretor da reta r é $(3, 1, -4)$, que não é colinear com $(3, 1, 4)$, pelo que este não é um vetor diretor da reta r.

Para que o ponto (1, 3, 10) pertença à reta r tem de existir um $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$(1, 3, 10) = (-5, 1, 2) + k(3, 1, -4),\ k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow 1 = -5 + 3k \ \wedge\ 3 = 1 + k \ \wedge\ 10 = 2 - 4k$
$\Leftrightarrow 6 = 3k \ \wedge\ 2 = k \ \wedge\ 8 = -4k$
$\Leftrightarrow k = 2 \ \wedge\ k = 2 \ \wedge\ k = -2$

Logo, o ponto não pertence à reta.
O ponto de interseção da reta r com o eixo das cotas, se existir, é da forma $(0, 0, z)$, onde z é um número real. Assim:

$(0, 0, z) = (-5, 1, 2) + k(3, 1, -4),\ k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow 0 = -5 + 3k \ \wedge\ 0 = 1 + k \ \wedge\ z = 2 - 4k$
$\Leftrightarrow 5 = 3k \ \wedge\ -1 = k \ \wedge\ z = 2 - 4k$
$\Leftrightarrow k = \frac{5}{3} \ \wedge\ k = -1 \ \wedge\ k = 2 - 4k$

Logo, a reta não interseta o eixo das cotas.
O ponto de interseção da reta r com o plano xOz, se existir, é da forma $(x, 0, z)$, onde x e z são números reais. Assim:

$(x, 0, z) = (-5, 1, 2) + k(3, 1, -4),\ k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x = -5 + 3k \ \wedge\ 0 = 1 + k \ \wedge\ z = 2 - 4k$
$\Leftrightarrow x = -5 + 3k \ \wedge\ k = -1 \ \wedge\ z = 2 - 4k$
$\Leftrightarrow x = -8 \ \wedge\ k = -1 \ \wedge\ z = 6$

Logo, a reta interseta o plano xOz no ponto de coordenadas $(-8, 0, 6)$.

39. Opção (A)

$(x, y, z) = (4, 5, 6) + k(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x = 4 \ \wedge\ y = 5 \ \wedge\ z = 6 + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 5$

40. O ponto de interseção da reta s com o eixo Ox é da forma $(x, 0)$, onde x é um número real. Assim:

$(x, 0) = (2, 3) + k(-1, 2) \Leftrightarrow (x, 0) = (2, 3) + (-k, 2k)$
$\Leftrightarrow (x, 0) = (2 - k, 3 + 2k)$
$\Leftrightarrow x = 2 - k \ \wedge\ 3 + 2k = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 - k \ \wedge\ k = -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \ \wedge\ k = -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \ \wedge\ k = -\frac{3}{2}$

O ponto de interseção da reta s com o eixo Ox é o ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$. Um vetor diretor da reta r é $(-2, 5)$, logo o seu declive é $-\frac{5}{2}$ e, portanto, qualquer reta paralela à reta r tem equação reduzida da forma $y = -\frac{5}{2}x + b$. Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ pertence à reta cuja equação se pretende determinar, tem-se $0 = -\frac{5}{2} \times \frac{7}{2} + b$
$\Leftrightarrow b = \frac{35}{4}$.

Assim, a equação reduzida da reta paralela à reta r e que interseta o eixo Ox no mesmo ponto que a reta s é $y = -\frac{5}{2}x + \frac{35}{4}$.

41.

a) O raio da circunferência é $\overline{AO} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ e o seu centro é a origem do referencial.
Assim, uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 10$.

Um vetor diretor da reta AC é:
$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 10) - (3, 1) = (-3, 9)$

Assim, o seu declive é $\frac{9}{-3} = -3$ e, portanto, a equação reduzida da reta AC é $y = -3x + 10$.
A reta BC é simétrica de AC relativamente ao eixo Oy, logo a sua equação reduzida é $y = 3x + 10$.
A região sombreada é então definida pela condição $x^2 + y^2 \geq 10 \ \wedge\ y \leq -3x + 10 \wedge\ y \leq 3x + 10$.

b) Uma equação da circunferência interna é:
$(x-1)^2 + y^2 = 1$
Uma equação da circunferência externa é:
$(x-2)^2 + y^2 = 4$
Para determinar a equação reduzida da reta AB é necessário determinar as coordenadas de B, que é o ponto da circunferência externa cuja abcissa é 3:

$(3-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow 1^2 + y^2 = 4$
$\Leftrightarrow y^2 = 3$
$\Leftrightarrow y = \sqrt{3} \ \vee\ y = -\sqrt{3}$

Como a ordenada de B é positiva, tem-se que $B(3, \sqrt{3})$.
Então, $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, \sqrt{3}) - (1, 0) = (2, \sqrt{3})$. Logo, o declive da reta AB é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e a sua equação reduzida é da forma $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + b$. Como A pertence a esta reta, obtém-se $0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, a equação reduzida de AB é $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:
$(x-1)^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge\ y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge$
$\wedge\ y \geq 0$

c) Uma equação da circunferência da esquerda é $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Uma equação da circunferência da direita é $(x-1)^2 + y^2 = 1$. A reta da esquerda passa nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, -3)$, logo o seu declive é $\frac{0+3}{-2-0} = -\frac{3}{2}$ e a sua equação reduzida é $y = -\frac{3}{2}x - 3$. A reta da direita passa nos pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(0, -3)$, logo o seu declive é $\frac{0+3}{2-0} = \frac{3}{2}$ e a sua equação reduzida é $y = \frac{3}{2}x - 3$.
Logo, uma condição que define a região sombreada é:
$((x+1)^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ y \geq 0) \ \vee ((x-1)^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ y \geq 0) \ \vee$
$\vee \ \left(y \geq -\frac{3}{2}x - 3 \ \wedge\ y \geq \frac{3}{2}x - 3 \ \wedge\ y \leq 0\right)$

42.

a) O centro do quadrado definido pela condição $0 \leq x \leq 5 \ \wedge\ 1 \leq y \leq 6$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{0+5}{2}, \frac{1+6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.
Como a reta é paralela à bissetriz dos quadrantes pares tem declive -1.
Assim, a sua equação reduzida é da forma $y = -x + b$.
Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ pertence à reta, tem-se que $\frac{7}{2} = -\frac{5}{2} + b$. Logo, $b = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$ e a equação pretendida é $y = -x + 6$.

b) • Verifica-se que o ponto de coordenadas (0, 7) pertence à reta r e é o ponto de interseção desta reta com o eixo das ordenadas. Este ponto não pertence ao quadrado definido por $0 \leq x \leq 5 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 6$, visto que $y = 7$, o que não satisfaz a condição.
Logo, a afirmação *a* é falsa.

• A reta r tem declive $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, que é diferente de zero, logo a reta r não é paralela ao eixo das abcissas.
Logo, a afirmação *b* é falsa.

• A reta r tem declive $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, que é igual a

$$\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1.$$

Como os declives das retas são iguais, as retas são paralelas (não são retas coincidentes, pois, por exemplo, o ponto de coordenadas (0, 7) pertence à reta r e não pertence à reta definida por $y = (\sqrt{3}+1)x$, já que $7 \neq (\sqrt{3}+1) \times 0$).
Logo, a afirmação *c* é verdadeira.

43.

a) Determinemos as coordenadas do ponto A:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ 4 + (y-1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ y - 1 = \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ y - 1 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Note-se que os pontos de abcissa 0 que pertencem à circunferência são A e B, sendo que $A(0, 1+\sqrt{5})$ e $B(0, 1-\sqrt{5})$.
Seja D o centro da circunferência, $D(-2, 1)$.
$\overrightarrow{DA} = A - D = (0, 1+\sqrt{5}) - (-2, 1) = (2, \sqrt{5})$
A reta r pode ser definida vetorialmente por:
$(x, y) = (0, 1+\sqrt{5}) + k(2, \sqrt{5}),\ k \in \mathbb{R}$
A equação reduzida da reta paralela à reta r que passa na origem do referencial é $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

b) Sabemos que $C(c, 0)$, com $c \in \mathbb{R}$ e que C é um ponto da reta r.
Assim:

$$(c, 0) = (0, 1+\sqrt{5}) + k(2, \sqrt{5}) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2k \\ 0 = 1 + \sqrt{5} + k\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ k\sqrt{5} = -1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ k = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ k = \dfrac{-\sqrt{5}-5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{-2\sqrt{5}-10}{5} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Logo, $C\left(\dfrac{-2\sqrt{5}-10}{5}, 0\right)$.

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{abcissa de } C|}{2} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5}+(-1+\sqrt{5})) \times \dfrac{2\sqrt{5}+10}{5}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5} \times \dfrac{2\sqrt{5}+10}{5}}{2} =$$

$$= \frac{10 + 10\sqrt{5}}{5} =$$

$$= 2 + 2\sqrt{5} \text{ u.a.}$$

44.

a) Opção (A)

I. Afirmação verdadeira.
(1, –1) é um vetor diretor da reta AB, logo o seu declive é $\dfrac{-1}{1} = -1$, que é igual ao declive da bissetriz dos quadrantes pares (reta de equação $y = -x$).

II. Afirmação falsa.
Para que o ponto de coordenadas $(\sqrt{32}, 10)$ seja um ponto da reta AB, tem de existir $k \in \mathbb{R}$ tal que:
$(\sqrt{32}, 10) = (2\sqrt{2}, 5) + k(-1, 1)$
$\Leftrightarrow (4\sqrt{2}, 10) = (2\sqrt{2} - k, 5 + k)$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - k \ \wedge \ 10 = 5 + k$
$\Leftrightarrow k = -2\sqrt{2} \ \wedge \ k = 5$, o que é impossível.
Logo, o ponto de coordenadas $(\sqrt{32}, 10)$ não é um ponto da reta AB.

b) A reta CD é paralela à reta AB, logo têm declives iguais. Assim, a equação reduzida da reta CD é da forma $y = -x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Como C, centro da circunferência, tem coordenadas (2, 3) e pertence à reta CD, vem que:
$3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$
Assim, a equação reduzida da reta CD é $y = -x + 5$.

c) • Condição que define o exterior do círculo:
$(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4$

• Equação reduzida da reta CD: $y = -x + 5$

• Equação reduzida da reta AB: $y = -x + 5 + 2\sqrt{2}$

> **Cálculo auxiliar**
> $y = -x + b$ e $(2\sqrt{2}, 5) \in AB$
> Logo:
> $5 = -2\sqrt{2} + b \Leftrightarrow b = 5 + 2\sqrt{2}$

• Equação reduzida da reta EG: $y = 3 - \sqrt{2}$

> **Cálculo auxiliar**
> O ponto E é um dos pontos da interseção da circunferência com a reta CD:
> $$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \ \wedge \ y = -x + 5$$
> Assim:
> $(x-2)^2 + (-x+5-3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 4$
> $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)^2 = 4$
> $\Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 4$
> $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$
> $\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2}$
> $\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \ \vee \ x = 2 - \sqrt{2}$
> Como E é o ponto de interseção com maior abcissa, então $x = 2 + \sqrt{2}$.
> Logo, $y = -(2+\sqrt{2}) + 5 \Leftrightarrow y = 3 - \sqrt{2}$.

Condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira:
$(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4 \ \wedge y \leq -x + 5 + 2\sqrt{2} \ \wedge$
$\wedge \ y \geq -x + 5 \wedge y \geq 3 - \sqrt{2} \ \wedge \ x \geq 0$

45.

a) Opção (D)

Como a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares (reta de equação $y = -x$) tem o mesmo declive, ou seja, –1. Assim, um vetor diretor da reta AB é o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (1, –1), o que exclui as opções (A) e (C), pois não apresentam na respetiva equação vetorial um vetor diretor colinear com $\vec{u}$.

Como a reta AB passa pelo centro da circunferência, ponto de coordenadas (2, 2), verifiquemos se o ponto pertence às retas cujas equações se encontram nas opções (B) e (D):

$$(2, 2) = (3, 3) + k(1, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 + k \\ 2 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Condição impossível, logo o ponto de coordenadas (2, 2) não pertence a esta reta, o que exclui a opção (B).

$$(2, 2) = (1, 3) + k(1, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + k \\ 2 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

O ponto de coordenadas (2, 2) pertence a esta reta, logo a opção verdadeira é a (D).

b) Os vértices do quadrado são os pontos $O(0, 0)$, A, B e C.

- O ponto A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Oy:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \wedge x = 0$$
$$\Leftrightarrow 0^2 + y^2 - 0 - 4y = 0 \wedge x = 0$$
$$\Leftrightarrow y(y - 4) = 0 \wedge x = 0$$
$$\Leftrightarrow (y = 0 \vee y = 4) \wedge x = 0$$

Assim, $A(0, 4)$.

- O ponto B é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \wedge y = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 0^2 - 4x - 0 = 0 \wedge y = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \wedge y = 0$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 4) \wedge y = 0$$

Assim, $B(4, 0)$.

- O ponto C tem a mesma abcissa do ponto B e a mesma ordenada do ponto A, logo as coordenadas de C são (4, 4).

c) Equação reduzida da reta AB: $y = -x + 4$

Equação reduzida da reta DE: $y = -x + 6$

> **Cálculo auxiliar**
>
> D é o ponto médio de [AC], logo as coordenadas de D são (2, 4). Assim, $y = -x + b$ e $4 = -2 + b \Leftrightarrow b = 6$.

A condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira, é:

$(y \leq -x + 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (y \geq -x + 6 \wedge x \leq 4 \wedge$
$\wedge\ y \leq 4)$

46. Opção (A)

Substituindo x e y pelas coordenadas de P na equação da reta, tem-se:

$$k^2 = -5k - 6 \Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = -2 \vee k = -3$$

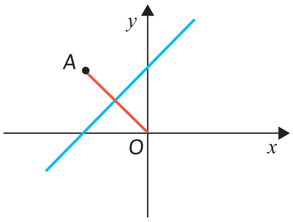
47. Opção (B)

$ax - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = ax - 2$

Um vetor diretor da reta $(x, y) = (1, 5) + k(2, -3)$, $k \in \mathbb{R}$ é (2, –3) e, portanto, o seu declive é $-\frac{3}{2}$. Para que as retas sejam paralelas, tem-se então que $a = -\frac{3}{2}$.

48. Opção (A)

Observe-se a figura, que representa a situação descrita no enunciado. Como se pode observar, a mediatriz de [OA] tem declive positivo e a ordenada na origem também é positiva.



49. Opção (B)

O raio da circunferência é $\frac{3}{2}$, porque é metade da distância entre o eixo Oy e a reta de equação $x = 3$, que são tangentes à circunferência. O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Assim, uma equação da circunferência é:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$$

A reta representada na figura tem a direção do vetor $\overrightarrow{OC}\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, logo o seu declive é $\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$. Além disso, esta reta contém a origem do referencial. Assim, uma equação da reta é $y = \frac{4}{3}x$.

Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 \leq \frac{9}{4} \wedge y \geq \frac{4}{3}x$.

50.

$$2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} =$$
$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

51.

a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{GM}$

b)

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GA} =$$
$$= 2\overrightarrow{GM} + \vec{0} + \overrightarrow{GA} =$$
$$= 2\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GA}$$
$$= 2 \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} =$$
$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} =$$
$$= \vec{0}$$

52.

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} =$$
$$= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} =$$
$$= 4\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} =$$
$$= 4\overrightarrow{PE} + \vec{0} + \vec{0} =$$
$$= 4\overrightarrow{PE}$$

53. O ponto de interseção da reta com o eixo Ox é da forma $(x, 0)$, onde x é um número real.

$2x + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Assim, esse ponto é $A(6, 0)$.

O ponto de interseção da reta com o eixo Oy é da forma $(0, y)$, onde y é um número real.

$0 + 3y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 4$

Assim, esse ponto é $B(0, 4)$.

Então, o centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$: $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$

O raio da circunferência é:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(6-0)^2 + (0-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+16} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{52} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$$

Logo, uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

54. Para que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares $k^2 - 5k + 6 = 0$. Assim:

$k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = 3$

Se $k = 2$, então $\vec{u}(0, 4, 2)$ e $\vec{v}(0, -3, -2)$, mas $\frac{4}{-3} \neq \frac{2}{-2}$, logo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

Se $k = 3$, então $\vec{u}(0, 9, 3)$ e $\vec{v}(0, -3, -1)$ e, uma vez que $\vec{u} = -3\vec{v}$, então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares. Logo, $k = 3$.

55.

a) Opção (B)

$\overrightarrow{AE} = (-2, -3, -6)$

AE: $(x, y, z) = (3, 5, 4) + k(-2, -3, -6)$, $k \in \mathbb{R}$

Procuramos um ponto da reta AE e do plano xOy, isto é, um ponto da reta AE com cota igual a zero:

$$\begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 5 - 3k \\ 0 = 4 - 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 \times \frac{2}{3} \\ y = 5 - 3 \times \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \frac{4}{3} \\ y = 5 - 2 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 3 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto pedido são $\left(\frac{5}{3}, 3, 0\right)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (5-11)^2 + (4-2)^2} =$

$= \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$d(D, A) = 7$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-k-3)^2 + (k-5)^2 + (k+4-4)^2} = 7$

$\Leftrightarrow k^2 + 6k + 9 + k^2 - 10k + 25 + k^2 = 49$

$\Leftrightarrow 3k^2 - 4k - 15 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3 \times (-15)}}{6}$

$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm 14}{6}$

$\Leftrightarrow k = 3 \vee k = -\frac{5}{3}$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = 3$.

c) BF é paralela a AE, logo $\overrightarrow{AE} = (-2, -3, -6)$ é um vetor diretor de BF.

Assim, BF: $(x, y, z) = (0, 11, 2) + k(-2, -3, -6)$, $k \in \mathbb{R}$.

d) O centro da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é o ponto médio do segmento de reta $[DF]$.

$F = B + \overrightarrow{AE} = (0, 11, 2) + (-2, -3, -6) = (-2, 8, -4)$

$D(-3, 3, 7)$

Seja M o ponto médio de $[DF]$:

$M\left(\frac{-3-2}{2}, \frac{3+8}{2}, \frac{7-4}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$r = d(M, A) =$

$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{147}{4}}$$

Assim, $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$ é a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

e) O plano CAE é o plano mediador de $[DB]$:

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2} =$

$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 14z + 49 =$

$= x^2 + y^2 - 22y + 121 + z^2 - 4z + 4$

$\Leftrightarrow 6x + 16y - 10z - 58 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 8y - 5z - 29 = 0$

56.

a) As coordenadas dos vértices do prisma são $A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $D(4, 0, 8)$, $E(4, 4, 8)$, $F(0, 4, 8)$ e $G(0, 0, 8)$.

b) $\overrightarrow{AF} = F - A = (0, 4, 8) - (4, 0, 0) = (-4, 4, 8)$

Como $\vec{v}$ é colinear a $\overrightarrow{AF}$, então $\vec{v}(-4k, 4k, 8k)$, $k \in \mathbb{R}$.

$\|\vec{v}\| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(-4k)^2 + (4k)^2 + (8k)^2} = 6$

$\Leftrightarrow 16k^2 + 16k^2 + 64k^2 = 36$

$\Leftrightarrow 96k^2 = 36$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{36}{96}$

$\Leftrightarrow k = \frac{6}{\sqrt{96}} \vee k = -\frac{6}{\sqrt{96}}$

$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{96}}{16} \vee k = -\frac{\sqrt{96}}{16}$

$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{6}}{4} \vee k = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

Como a direção de $\vec{v}$ é contrária à de $\overrightarrow{AF}$, então $k < 0$.

Logo, $\vec{v}\left(-4 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right), 4 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right), 8 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\right) =$

$= \left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\right)$.

Então:

$(-a^2b + 4ab, -6ab, 6a^2b) = \left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2b + 4ab = \sqrt{6} \\ -6ab = -\sqrt{6} \\ 6a^2b = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2b + 4ab = \sqrt{6} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a^2b = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + 4\frac{\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a \times ab = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a \times \frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = \sqrt{6} \\ -2b = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = \sqrt{6} \\ b = -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ a = -2 \end{cases}$$

57.

a) $\overrightarrow{BC} = C - B = (11, -10, 7) - (13, -4, 4) = (-2, -6, 3)$

Assim, $D = A + \overrightarrow{BC} = (10, -6, -2) + (-2, -6, 3) = (8, -12, 1)$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (22, -12, -6) - (10, -6, -2) = (12, -6, -4)$

Logo, $F = B + \overrightarrow{AE} = (13, -4, 4) + (12, -6, -4) = (25, -10, 0)$.

$G = C + \overrightarrow{AE} = (11, -10, 7) + (12, -6, -4) = (23, -16, 3)$

$H = D + \overrightarrow{AE} = (8, -12, 1) + (12, -6, -4) = (20, -18, -3)$

b) $\|\overrightarrow{BC}\| = \|(-2, -6, 3)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \|(12, -6, -4)\| = \sqrt{12^2 + (-6)^2 + (-4)^2} =$

$= \sqrt{144 + 36 + 16} = \sqrt{196} = 14$

Logo, $V_{prisma} = 7 \times 7 \times 14 = 686$ u.v.

c) O ponto médio de $[AE]$ é o centro da superfície esférica e as suas coordenadas são:

$\left(\frac{10 + 22}{2}, \frac{-6 - 12}{2}, \frac{-2 - 6}{2}\right) = (16, -9, -4)$.

O raio da superfície esférica é $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AE}\| = 7$.

Logo, uma condição que define a superfície esférica de diâmetro $[AE]$ é:

$(x - 16)^2 + (y + 9)^2 + (z + 4)^2 = 49$

d) DBF é o plano mediador de $[AC]$:

$(x - 10)^2 + (y + 6)^2 + (z + 2)^2 =$

$= (x - 11)^2 + (y + 10)^2 + (z - 7)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 + 12y + 36 + z^2 + 4z + 4 =$

$= x^2 - 22x + 121 + y^2 + 20y + 100 + z^2 - 14z + 49$

$\Leftrightarrow 2x - 8y + 18z - 130 = 0$

$\Leftrightarrow x - 4y + 9z - 65 = 0$

58.

a) Seja V o volume do prisma e h a altura do prisma:

$V = 784$

$A_{base} \times h = 784 \Leftrightarrow 98 \times h = 784$

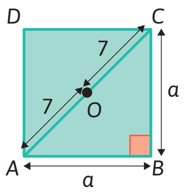
$\Leftrightarrow h = 8$

Assim, o plano EFG pode ser definido pela condição $z = 8$.

Cálculo auxiliar

$a^2 + a^2 = 14^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 196$

$\Leftrightarrow a^2 = 98$



b) $B(0, 7, 0)$ $H(0, -7, 8)$

$\overrightarrow{BH} = H - B = (0, -14, 8)$

Uma equação vetorial da reta BH é:

$(x, y, z) = (0, 7, 0) + k(0, -14, 8), k \in \mathbb{R}$

c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 49 \wedge x = 0$

$\Leftrightarrow (-1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 49 \wedge x = 0$ é uma condição que define uma circunferência.

Como $(-1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 49 \wedge x = 0$

$\Leftrightarrow (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 48 \wedge x = 0$

tem-se que o raio desta circunferência é $\sqrt{48}$.

Assim, o seu perímetro é $2\pi \times \sqrt{48} \approx 43{,}53$ unidades de comprimento.

59.

a) $F = V + \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{EF} = (1, 1, 10) + (1, -1, -3) + (0, 2, 0) =$

$= (2, 2, 7)$

Uma equação vetorial da reta que passa no ponto F e é paralela ao eixo das ordenadas pode ser $(x, y, z) = (2, 2, 7) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$.

b) $G = V + \overrightarrow{VG} = (1, 1, 10) + (-1, 1, -3) = (0, 2, 7)$

$\|\overrightarrow{EF}\| = \|(0, 2, 0)\| = 2$

Logo, $A_{[EFGH]} = 2 \times 2 = 4$ u.a.

Assim, $\frac{A_{[ABCD]}}{A_{[EFGH]}} = \frac{36}{4} = 9$, o que significa que a razão de semelhança entre os comprimentos dos lados dos dois quadrados é 3, o mesmo acontecendo com os comprimentos das arestas das pirâmides $[VABCD]$ e $[VEFGH]$.

Como $\overrightarrow{VF} = F - V = (2, 2, 7) - (1, 1, 10) = (1, 1, -3)$ e $\|\overrightarrow{VB}\| = 3\|\overrightarrow{VF}\| = 3\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = 3\sqrt{11}$, então o diâmetro é $3\sqrt{11}$, logo o raio é $\frac{3\sqrt{11}}{2}$.

Então, a equação da esfera pretendida é:

$x^2 + (y - 2)^2 + (z - 7)^2 \leq \frac{99}{4}$

60.

a) $(x, -4) = (3, -2) + k(5, -1), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 3 + 5k \\ -4 = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ k = 2 \end{cases}$$

Logo, $P(13, -4)$.

Para que a circunferência tenha centro no ponto P, de coordenadas $(13, -4)$, e seja tangente à reta r definida por $x = -2$, o raio tem de ser $13 + |-2| = 15$.

Uma equação da circunferência pedida é, então:

$(x - 13)^2 + (y + 4)^2 = 15^2$

b) **i.** • s: $y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5}$

Cálculo auxiliar

$7x + 10y = 0 \Leftrightarrow 10y = -7x \Leftrightarrow y = -\frac{7}{10}x$

r: $x = -2$

$y = -\frac{7}{10} \times (-2) + \frac{13}{5} \Leftrightarrow y = \frac{14}{10} + \frac{26}{10}$

$\Leftrightarrow y = \frac{40}{40}$

$\Leftrightarrow y = 4$

Logo, $A(-2, 4)$.

• t: $(x, y) = (3, -2) + k(5, -1), k \in \mathbb{R}$

r: $x = -2$

$$\begin{cases} -2 = 3 + 5k \\ y = -2 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Logo, $B(-2, -1)$.

- s: $y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5}$

  t: $(x, y) = (3, -2) + k(5, -1)$, $k \in \mathbb{R}$

  Equação reduzida da reta t: $y = -\frac{1}{5}x + b$

  Como $(3, -2)$ pertence à reta t, tem-se:

  $-2 = -\frac{1}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{3}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{7}{5}$

  Assim, t: $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$.

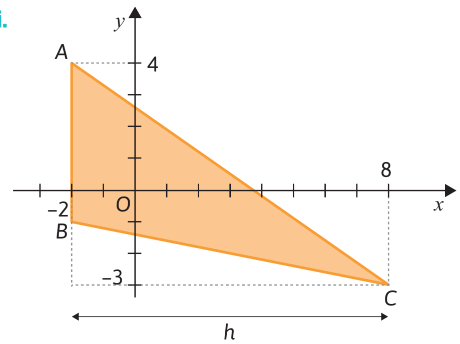
$$\begin{cases} y = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5} \\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5} = -\frac{7}{10}x + \frac{13}{5} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{10}x + \frac{7}{10}x = \frac{13}{5} + \frac{7}{5} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{10}x = \frac{20}{5} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 4 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{5} \times 8 - \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -3 \end{cases}$$

Logo, $C(8, -3)$.

ii.



$\overline{AB} = 4 + |-1| = 5$

$h = 8 + |-2| = 10$

$A = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{5 \times 10}{2} = 25$ u.a.

Teste final – páginas 163 a 165

1. Opção (D)

As retas r e s são paralelas se e só se os seus declives forem iguais.

$8ax + a^2y - 3 = 0 \Leftrightarrow a^2y = -8ax + 3$

$\Leftrightarrow y = -\frac{8}{a}x + \frac{3}{a^2}$

Assim, o declive da reta r é igual a $-\frac{8}{a}$ e o declive da reta s é igual a $\frac{-a^2}{2a} = -\frac{a}{2}$.

Então, para que as retas r e s sejam paralelas, tem-se que:

$-\frac{8}{a} = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 16 = a^2$

$\Leftrightarrow a = \pm 4$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

2.

a) Sabemos que $A(-2, 2)$ e $B(-5, 5)$.

Comecemos por determinar uma condição da mediatriz do segmento de reta $[AB]$:

$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-5)^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = (x+5)^2 + (y-5)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 10y + 25$

$\Leftrightarrow 10y - 4y = 10x - 4x + 50 - 8$

$\Leftrightarrow 6y = 6x + 42$

$\Leftrightarrow y = x + 7$

Como o ponto P pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e a sua ordenada é igual ao dobro da abcissa, vem que:

$$\begin{cases} y = x + 7 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 7 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 14 \end{cases}$$

Assim, $P(7, 14)$.

b) A bissetriz dos quadrantes pares é definida pela condição $y = -x$.

$\overline{OA} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$

$\overline{OB} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

A rotação da semirreta $\dot{O}A$ de 180º em torno da origem define uma semicoroa circular de centro O.

Assim, uma condição que define a região plana pretendida pode ser:

$(\sqrt{8})^2 \le (x-0)^2 + (y-0)^2 \le (\sqrt{50})^2 \ \wedge \ y \le -x$

$\Leftrightarrow 8 \le x^2 + y^2 \le 50 \ \wedge \ y \le -x$

3.

a) Opção (C)

A equação da reta que passa nos pontos de coordenadas $(3, 0)$ e $(0, -1)$ é $y = mx + b$, onde:

- $m = \frac{-1 - 0}{0 - 3} = \frac{1}{3}$
- $b = -1$

Assim, $y = \frac{1}{3}x - 1$.

b) Seja C_1 a circunferência de centro $(3, 0)$ e raio 4 e C_2 a circunferência de centro $(3, 0)$ e raio r, com $r < 4$.

C_1 tem área $\pi \times 4^2 = 16\pi$.

C_2 tem área $\pi \times r^2$.

Para que 7π seja a área da coroa circular tem de se verificar $16\pi - \pi \times r^2 = 7\pi$, logo $\pi \times r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = 9$, ou seja, $r = 3$.

A equação de C_2 é $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

- Sejam P_1 e P_2 os pontos da interseção de C_1 com a bissetriz dos quadrantes pares:

  $(x-3)^2 + y^2 = 16 \wedge y = -x$

  Assim:

  $(x-3)^2 + (-x)^2 = 16$

  $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 16 = 0$

  $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 7 = 0$

  $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 2 \times (-7)}}{4}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{92}}{4}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{23}}{4}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{23}}{2} \ \vee \ x = \frac{3 - \sqrt{23}}{2}$

  Logo, $P_1\left(\frac{3+\sqrt{23}}{2}, -\frac{3+\sqrt{23}}{2}\right)$ e

  $P_2\left(\frac{3-\sqrt{23}}{2}, -\frac{3-\sqrt{23}}{2}\right)$.

- Sejam P_3 e P_4 os pontos da interseção de C_2 com a bissetriz dos quadrantes pares:

$$(x-3)^2+y^2=9 \wedge y=-x \Leftrightarrow (x-3)^2+(-x)^2=9$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+x^2-9=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-6x=0$$
$$\Leftrightarrow 2x(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=0 \ \vee \ x-3=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=3$$

Logo, $P_3(0, 0)$ e $P_4(3, -3)$.

4. Opção (D)

$$\begin{cases} x=4 \\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ (4-1)^2+y^2+(z+1)^2=25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 9+y^2+(z+1)^2=25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y^2+(z+1)^2=16 \end{cases}$$

Logo, a interseção da superfície esférica com o plano é uma circunferência de centro de coordenadas (4, 0, –1) e raio igual a 4.

5.

a) **i.** $x = 3$

ii. $\overline{VB} = \overline{VC}$, pois a pirâmide [ABCDV] é quadrangular regular.

$\overline{VC} = \sqrt{(3-0)^2+(-1+1)^2+(2-2)^2} = 3$

Logo, uma condição da superfície esférica de centro em V e que passa em B é:

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

iii. W(3, –1, –2), pois é o simétrico de V em relação a xOy.

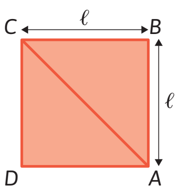
Uma condição que define [VW] é:

$x=3 \ \wedge \ y=-1 \ \wedge \ -2 \leq z \leq 2$

b) O plano DVB é o plano mediador do segmento de reta [AC]:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2} =$$
$$= \sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = x^2+(y+1)^2+(z-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2 =$$
$$= x^2+y^2+2y+1+z^2-4z+4$$
$$\Leftrightarrow -4x-2y-2y+4z+4+1-1-4=0$$
$$\Leftrightarrow -4x-4y+4z=0$$
$$\Leftrightarrow -x-y+z=0$$

c) Comecemos por determinar a área da base (quadrado):



$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(2-0)^2+(1+1)^2+(0-2)^2} =$$
$$= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

$$\overline{AC}^2 = \ell^2+\ell^2 \Leftrightarrow 12 = 2\ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 = 6$$

Seja E o ponto médio do segmento de reta [AC]:

$$E\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

A altura da pirâmide é igual a $\overline{EV}$:

$$\overline{EV} = d(E, V) = \sqrt{(3-1)^2+(-1-0)^2+(2-1)^2} =$$
$$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Logo, o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3} \times 6 \times \sqrt{6} =$ $= 2\sqrt{6}$ unidades de volume.

6.

a) Opção (D)

Comecemos por determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [PQ]:

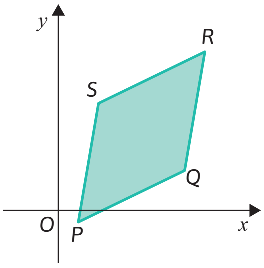
$$\left(\frac{2+12}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(7, \frac{3}{2}\right)$$

O raio da circunferência é igual à distância do ponto médio do segmento de reta [PQ] ao ponto P:

$$\sqrt{(7-2)^2+\left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \sqrt{25+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}}$$

Assim, a equação pedida é $(x-7)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

b) Opção (B)



$S = P + \overrightarrow{QR}$, pois [PQRS] é um losango.

$\overrightarrow{QR} = R - Q = (14, 15) - (12, 4) = (2, 11)$

Logo, $S = (2, -1) + (2, 11) = (4, 10)$.

c) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (12, 4) - (2, -1) = (10, 5)$

Um vetor colinear com $\overrightarrow{PQ}$ é $(10k, 5k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Como pretendemos que o vetor tenha norma 5, vem que:

$$\sqrt{(10k)^2+(5k)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{100k^2+25k^2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{125k^2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{125}\,|k| = 5$$
$$\Leftrightarrow 5\sqrt{5}\,|k| = 5$$
$$\Leftrightarrow |k| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

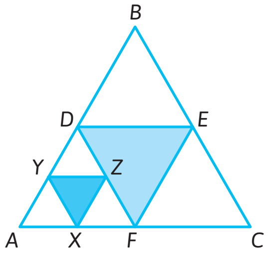
Como pretendemos um vetor de sentido contrário ao de $\overrightarrow{PQ}$, então $k = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

As coordenadas do vetor pedido são $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

7. Os triângulos [ADF], [DEF], [FEC] e [DBE] são geometricamente iguais e também são equiláteros.

- $X = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{ED} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{CF}$, logo X é o ponto médio do segmento de reta [AF].

- $Y = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, logo Y é o ponto médio do segmento de reta $[AD]$.
- $Z = F + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$, logo Z é o ponto médio do segmento de reta $[FD]$.



O triângulo $[XYZ]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{4}$.

Logo, o perímetro do triângulo $[XYZ]$ é igual a $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ unidades de comprimento.