# Tema 5 – Geometria analítica

## 1. Geometria analítica no plano

### Exercícios – páginas 82 a 90

**1.**

**1.1.** $A(-3, 2)$; $B(2, -1)$; $C(3, 4)$

**1.2.** $D(-3, -2)$

**1.3.** $E(-2, -1)$

**1.4.** $F(-3, -4)$

**2.**

**2.1.** Para que $A$ pertença ao eixo $Ox$:

$-3 - 2k = 0 \Leftrightarrow -2k = 3 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$

Logo, o valor de $k$ é $-\frac{3}{2}$.

**2.2.** Para que $A$ pertença ao eixo $Oy$:
$2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -2$
Logo, o valor de $k$ é $-2$.

**2.3.** Para que $A$ pertença ao primeiro quadrante:

$2 + k > 0 \wedge -3 - 2k > 0 \Leftrightarrow k > -2 \wedge -2k > 3$

$\Leftrightarrow k > -2 \wedge k < -\frac{3}{2}$

Assim, $k \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

**2.4.** Para que $A$ pertença ao segundo quadrante:

$2 + k < 0 \wedge -3 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < -2 \wedge -2k > 3$

$\Leftrightarrow k < -2 \wedge k < -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow k < -2$

Assim, $k \in \left]-\infty, -2\right[$.

**2.5.** Para que $A$ pertença ao terceiro quadrante:

$2 + k < 0 \wedge -3 - 2k < 0 \Leftrightarrow k < -2 \wedge -2k < 3$

$\Leftrightarrow k < -2 \wedge k > -\frac{3}{2}$

Assim, não existe qualquer valor de $k$ para o qual $A$ seja um ponto do terceiro quadrante.

**2.6.** Para que $A$ pertença ao quarto quadrante:

$2 + k > 0 \wedge -3 - 2k < 0 \Leftrightarrow k > -2 \wedge -2k < 3$

$\Leftrightarrow k > -2 \wedge k > -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow k > -\frac{3}{2}$

Assim, $k \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

**3.** $A(3, -2)$
O ponto $B$ pertence ao eixo $Ox$ e tem a mesma abcissa que o ponto $A$, logo $B(3, 0)$.
O ponto $C$ é simétrico do ponto $B$ relativamente ao eixo $Oy$, logo $C(-3, 0)$.
Para que $[ABCD]$ seja um retângulo, então $D(-3, -2)$.

**4.** $P_{\text{hexágono}} = 12 \Leftrightarrow 6 \times \overline{AB} = 12 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2$
Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.
Pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2 \Leftrightarrow 2^2 = \overline{OM}^2 + 1^2$

$\Leftrightarrow \overline{OM}^2 = 4 - 1$

$\Leftrightarrow \overline{OM}^2 = 3$

Logo, $\overline{OM} = \sqrt{3}$.

Assim:
$A(-1, -\sqrt{3})$; $B(1, -\sqrt{3})$; $C(2, 0)$; $D(1, \sqrt{3})$; $E(-1, \sqrt{3})$; $F(-2, 0)$

**5.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.

**5.1.** $M = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{2-7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

**5.2.** $M = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

**5.3.** $M = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{-5-7}{2}\right) = (-1, -6)$

**5.4.** $M = \left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (1, -1)$

**6.** Seja $C$ o centro da circunferência de diâmetro $[AB]$.
$C$ é o ponto médio de $[AB]$.

$C = \left(\frac{2+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{2}\right) =$

$= (2\sqrt{2}, 1)$

**7.** $A(-2, 1)$; $B(1, -1)$; $C(6, 4)$; $D(3, 6)$

**7.1.** Sejam $M$ o ponto médio da diagonal $[AC]$ e $N$ o ponto médio da diagonal $[BD]$.

$M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$

$N = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+6}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$

**7.2.** As diagonais do paralelogramo intersetam-se no respetivo ponto médio. Logo, cada uma das diagonais bisseta a outra.

**8.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.

**8.1.** $M = \left(\frac{\sqrt{20}+\sqrt{180}}{2}, \frac{\sqrt{48}+\sqrt{108}}{2}\right) =$

$= \left(\frac{2\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{2}, \frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= (4\sqrt{5}, 5\sqrt{3})$

**8.2.** $M = \left(\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{4+\sqrt{12}}{2}}{2}, \frac{\frac{2+\sqrt{12}}{4}+\frac{6-\sqrt{3}}{4}}{2}\right) =$

$= \left(\frac{6-\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{4}, \frac{8+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8}\right) =$

$= \left(\frac{6+\sqrt{3}}{4}, \frac{8+\sqrt{3}}{8}\right) =$

$= \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}, 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

**9.** $\left(\frac{(x+1)^2+2}{2}, \frac{y-3+3}{2}\right) = (5, -3)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2+2x+1+2}{2}, \frac{y}{2}\right) = (5, -3)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2+2x+3}{2}, \frac{y}{2}\right) = (5, -3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+3}{2}=5 \\ \dfrac{y}{2}=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+3=10 \\ y=-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-7=0 \\ y=-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4\times 7}}{2} \\ y=-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2\pm\sqrt{32}}{2} \\ y=-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2\pm 4\sqrt{2}}{2} \\ y=-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2\sqrt{2} \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1-2\sqrt{2} \\ y=-6 \end{cases}$

Assim, $x=-1+2\sqrt{2}$ ou $x=-1-\sqrt{2}$ e $y=-6$.

**10.** $\overline{AB}=\sqrt{(-1-4)^2+(-1-1)^2}=$
$=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=$
$=\sqrt{25+4}=$
$=\sqrt{29}$

Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.

$M=\left(\dfrac{-1+4}{2},\dfrac{-1+1}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},0\right)$

$\overline{CM}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2+(5-0)^2}=$
$=\sqrt{(-2)^2+5^2}=$
$=\sqrt{4+25}=$
$=\sqrt{29}$

Logo:

$A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CM}}{2}=\dfrac{\sqrt{29}\times\sqrt{29}}{2}=\dfrac{29}{2}$ u.a.

**11.** Seja $D(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^+$

Uma vez que $[ABCD]$ é um paralelogramo, então as suas diagonais, $[AC]$ e $[BD]$, bissetam-se, logo o ponto médio de $[AC]$ coincide com o ponto médio de $[BD]$.

Logo:

$\left(\dfrac{-1+8}{2},\dfrac{1+2}{2}\right)=\left(\dfrac{5+x}{2},\dfrac{0+y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{5+x}{2},\dfrac{0+y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{2}=\dfrac{5+x}{2} \\ \dfrac{3}{2}=\dfrac{y}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Assim, $D(2, 3)$.

**12.**

**12.1.** $d(A, B)=\sqrt{(3-5)^2+(2-(-2))^2}=$
$=\sqrt{(-2)^2+4^2}=$
$=\sqrt{4+16}=$
$=\sqrt{20}=$
$=2\sqrt{5}$

**12.2.** $d(C, D)=\sqrt{(-1-(-3))^2+(5-3)^2}=$
$=\sqrt{2^2+2^2}=$
$=\sqrt{8}=$
$=2\sqrt{2}$

**12.3.** $d(E, F)=\sqrt{(-2-6)^2+(-3-5)^2}=$
$=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=$
$=\sqrt{64+64}=$
$=\sqrt{128}=$
$=8\sqrt{2}$

**13.** $d(A, B)=\sqrt{(2-3)^2+(1-(-1))^2}=$
$=\sqrt{(-1)^2+2^2}=$
$=\sqrt{1+4}=$
$=\sqrt{5}$

Assim, o raio da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ u.c.

**14.** $d(A, B)=5 \Leftrightarrow \sqrt{(-1-2)^2+(y-3)^2}=5$
$\Leftrightarrow \sqrt{9+(y-3)^2}=5$
$\Leftrightarrow 9+(y-3)^2=25$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=16$
$\Leftrightarrow y-3=4 \vee y-3=-4$
$\Leftrightarrow y=7 \vee y=-1$

Assim, $y=7$ ou $y=-1$.

**15.** $A$ é um ponto pertencente ao eixo $Oy$, logo $A(0, y)$.

$d(A, B)=d(A, C)$
$\Leftrightarrow \sqrt{(0-4)^2+(y-(-2))^2}=\sqrt{(0-(-2))^2+(y-6)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{16+(y+2)^2}=\sqrt{4+(y-6)^2}$
$\Leftrightarrow 16+(y+2)^2=4+(y-6)^2$
$\Leftrightarrow 16+y^2+4y+4=4+y^2-12y+36$
$\Leftrightarrow 16y=20$
$\Leftrightarrow y=\dfrac{20}{16}$
$\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{4}$

Assim, $A\left(0,\dfrac{5}{4}\right)$.

**16.** $d(A, B)=\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-2))^2}=$
$=\sqrt{(-2)^2+4^2}=$
$=\sqrt{4+16}=$
$=\sqrt{20}$

$d(A, C)=\overline{AC}=\sqrt{(1-(-5))^2+(2-3)^2}=$
$=\sqrt{6^2+(-1)^2}$
$=\sqrt{36+1}=$
$=\sqrt{37}$

$d(B, C)=\overline{BC}=\sqrt{(3-(-5))^2+(-2-3)^2}=$
$=\sqrt{8^2+(-5)^2}=$

$= \sqrt{64 + 25} =$

$= \sqrt{89}$

Como $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$, então o triângulo [*ABC*] é escaleno.

**17.** $d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(8-3)^2 + (7-(-6))^2} =$

$= \sqrt{5^2 + 13^2} =$

$= \sqrt{25 + 169} =$

$= \sqrt{194}$

$d(A, C) = \overline{AC} = \sqrt{(8-21)^2 + (7-2)^2} =$

$= \sqrt{(-13)^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{169 + 25} =$

$= \sqrt{194}$

$d(B, C) = \overline{BC} = \sqrt{(3-21)^2 + (-6-2)^2} =$

$= \sqrt{(-18)^2 + (-8)^2} =$

$= \sqrt{324 + 64} =$

$= \sqrt{388}$

Assim, os catetos do triângulo retângulo [*ABC*] são [*AB*] e [*AC*].

Logo:

$A_{[ABC]} = \dfrac{\sqrt{194} \times \sqrt{194}}{2} = \dfrac{194}{2} = 97$ u.a.

**18.**

**18.1.** $\overline{AB} = \sqrt{(-6-2)^2 + (-2-(-3))^2} =$

$= \sqrt{(-8)^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{64 + 1} =$

$= \sqrt{65}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-0)^2} =$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} =$

$= \sqrt{16 + 9} =$

$= \sqrt{25} =$

$= 5$

$\overline{CD} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (0-1)^2} =$

$= \sqrt{8^2 + (-1)^2} =$

$= \sqrt{64 + 1} =$

$= \sqrt{65}$

$\overline{DA} = \sqrt{(-2-(-6))^2 + (1-(-2))^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{16 + 9} =$

$= \sqrt{25} =$

$= 5$

$\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$, logo [*ABCD*] é um paralelogramo.

**18.2.** $\overline{AC} = \sqrt{(-6-6)^2 + (-2-0)^2} =$

$= \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} =$

$= \sqrt{144 + 4} =$

$= \sqrt{148}$

$\overline{BD} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-3-1)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + (-4)^2} =$

$= \sqrt{16 + 16} =$

$= \sqrt{32}$

O comprimento da maior diagonal do paralelogramo [*ABCD*] é $\sqrt{148}$ u.c.

**19.** $C(x, x^2)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Como *C* é equidistante de *A* de *B*, tem-se:

$\overline{AC} = \overline{BC}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (2-x^2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (x^2-3)^2}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (2-x^2)^2 = (x+2)^2 + (x^2-3)^2$

$\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 + 4 - 4x^2 + x^4 = x^2 + 4x + 4 + x^4 - 6x^2 + 9$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$

Assim, $C(-1, 1)$ ou $C(4, 16)$.

**20.** Uma vez que [*ABC*] é um triângulo equilátero, tem-se:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC} \\ \overline{BC} = \overline{AC} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-5)^2 + (a-1-(-2))^2} = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-2-4)^2} \\ \sqrt{(5-(-1))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(a-(-1))^2 + (a-1-4)^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-5)^2 + (a+1)^2 = 6^2 + (-6)^2 \\ 6^2 + (-6)^2 = (a+1)^2 + (a-5)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 10a + 25 + a^2 + 2a + 1 = 36 + 36 \\ 36 + 36 = a^2 + 2a + 1 + a^2 - 10a + 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 8a - 46 = 0 \\ 2a^2 - 8a - 46 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a - 23 = 0$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 23}}{2}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{4 \pm \sqrt{108}}{2}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{4 \pm 6\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow a = 2 \pm 3\sqrt{3}$

Assim, $a = 2 - 3\sqrt{3}$ ou $a = 2 + 3\sqrt{3}$.

**21.**

**21.1.** $3 = 3$ Proposição verdadeira.

*A* pertence ao conjunto de pontos definido por $x = 3$.

**21.2.** $-2 = 2$ Proposição falsa.

*A* não pertence ao conjunto de pontos definido por $y = 2$.

**21.3.** $-2 = -3$ Proposição falsa.

*A* não pertence ao conjunto de pontos definido por $y = -x$.

**21.4.** $-2 < 3$ Proposição verdadeira.

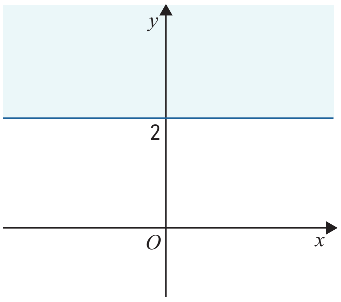
*A* pertence ao conjunto de pontos definido por $y < x$.

**21.5.** $(-2)^2 > 3^2 \Leftrightarrow 4 > 9$ Proposição falsa.

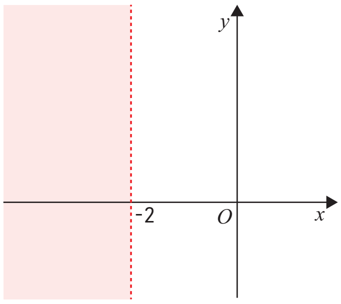
*A* não pertence ao conjunto de pontos definido por $y^2 \geq x^2$.

**21.6.** $3 > 2$ Proposição verdadeira.
*A* pertence ao conjunto de pontos definido por $x > -y$.

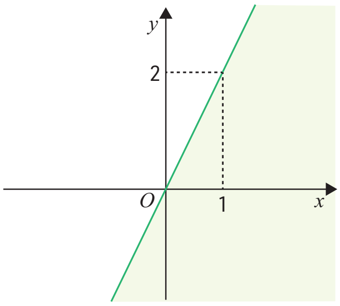
**22.**
**22.1.**



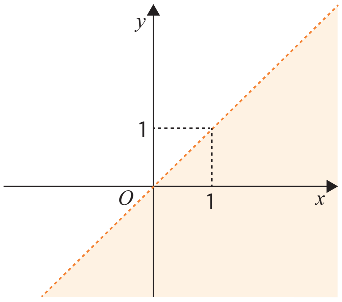

**22.2.**



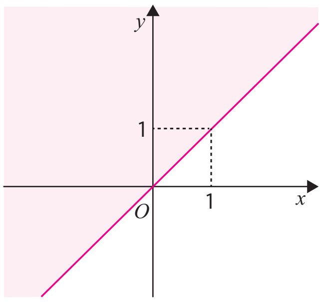

**22.3.**



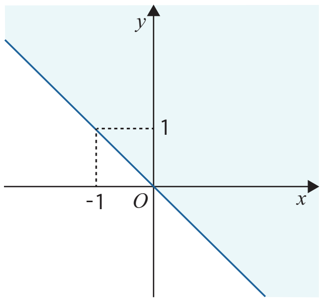

**22.4.** $x - y > 0 \Leftrightarrow -y > -x \Leftrightarrow y < x$




**22.5.** $-x + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x$




**22.6.** $x + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$




**23.**
**23.1.** $x \geq 3$

**23.2.** $x < 3$

**23.3.** $y > 2$

**23.4.** $y \leq 2$

**23.5.** $y \leq x$

**23.6.** $y > -x$

**24.**
**24.1.** $-5 > 3 \vee 3 < 5$ Proposição verdadeira.
*B* pertence a este conjunto de pontos.

**24.2.** $-5 > 3 \wedge 3 < 5$ Proposição falsa.
*B* não pertence a este conjunto de pontos.

**24.3.** $-5 \leq -5 \wedge 3 > 2$ Proposição verdadeira.
*B* pertence a este conjunto de pontos.

**24.4.** $-5 < -5 \vee 3 < 2$ Proposição falsa.
*B* não pertence a este conjunto de pontos.

**24.5.** $\sim(-5 > 2) \wedge 3 < 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2 \wedge 3 < 5$ Proposição verdadeira.
*B* pertence a este conjunto de pontos.

**24.6.** $-5 \geq 2 \vee \sim(3 \leq 5) \Leftrightarrow -5 \geq 2 \vee 3 > 5$ Proposição falsa.
*B* não pertence a este conjunto de pontos.

**25.**
**25.1.** $x > 4$

**25.2.** $x \leq 0$

**25.3.** $y = \frac{x}{2}$

**25.4.** $x = y^2$

**25.5.** $x = -y$

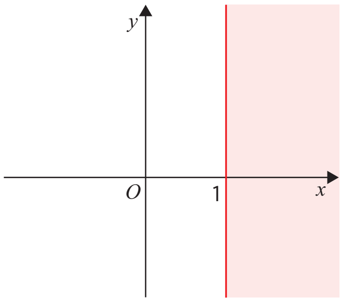
**25.6.** $x = y + 3$

**25.7.** $x < 0 \wedge y > 0$

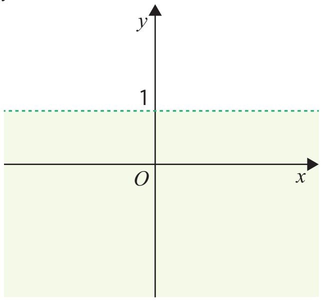
**25.8.** $(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

**26.**

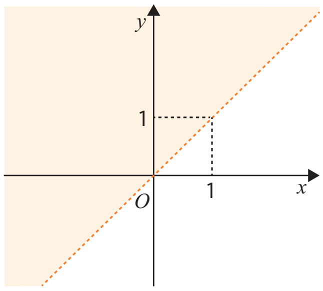
**26.1.** $x \geq 1$



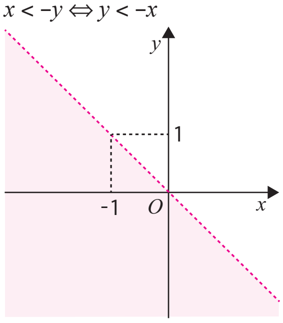

**26.2.** $y < 1$



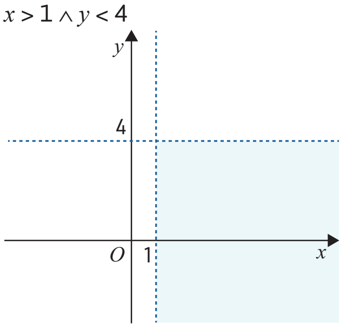

**26.3.** $x < y \Leftrightarrow y > x$




**26.4.** $x < -y \Leftrightarrow y < -x$

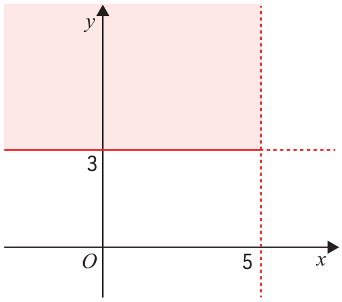



**26.5.** $x > 1 \wedge y < 4$

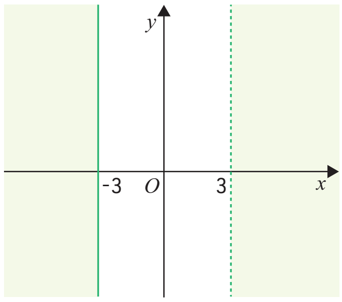



**27.**

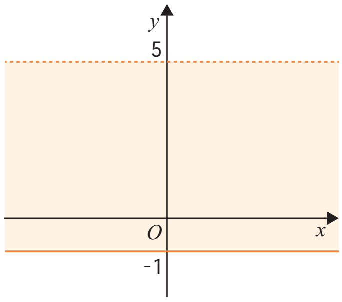
**27.1.**




**27.2.**

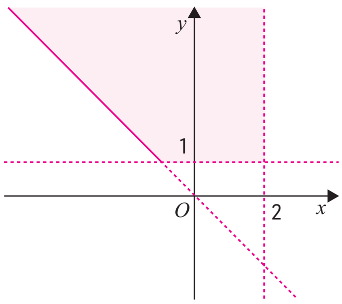



**27.3.**

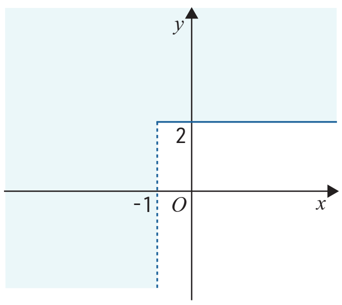



**27.4.**

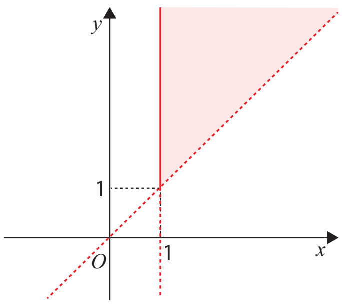
| **Cálculo auxiliar** |
| --- |
| $x + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$ |



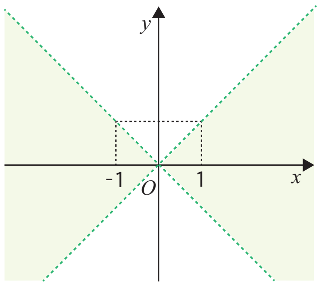

**27.5.** $\sim(x + 1 \geq 0 \wedge y < 2) \Leftrightarrow x + 1 < 0 \vee y \geq 2$
$\Leftrightarrow x < -1 \vee y \geq 2$



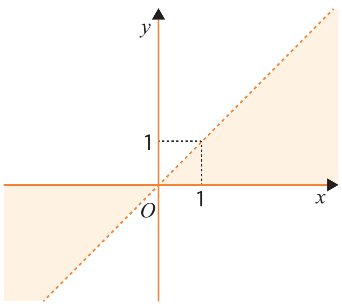
**27.6.** $\sim(y \leq x \vee x < 1) \Leftrightarrow y > x \wedge x \geq 1$




**27.7.**




**27.8.**




**28.**

**28.1.** $y < -2 \vee y \geq 1$

**28.2.** $-1 \leq x \leq 1$

**28.3.** $x < 1 \wedge y \leq 1$

**28.4.** $x \geq -2 \vee y > 1$

**28.5.** $x \leq 0 \wedge y \geq x$

**28.6.** $y \geq 0 \vee y > -x$

**28.7.** $-1 \leq x \leq 1 \wedge -2 \leq y \leq 2$

**28.8.** $(x \geq 1 \wedge y \leq 2) \vee (x \leq 1 \wedge y \geq 2)$

**28.9.** $(y \geq x \wedge y \geq -x \wedge y \leq 1) \vee (y \leq x \wedge y \leq -x \wedge y \geq -1)$

**29.**

**29.1.** d(P, A) = d(P, B)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+(y-5)^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+4x+4+y^2-10y+25$

$\Leftrightarrow 6y = 10x+16$

$\Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}$

**29.2.** d(P, C) < d(P, D)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} < \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-4)^2 < (x+1)^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-8y+16 < x^2+2x+1+y^2-6y+9$

$\Leftrightarrow -2y < -4x-15$

$\Leftrightarrow y > 2x + \frac{15}{2}$

**29.3.** $d(P, E) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = 3$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2 = 9$

**29.4.** $d(P, F) \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} \leq 5$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2 \leq 25$

**30.**

**30.1.** $y = 1$

**30.2.** Uma condição que define a reta que passa em $B$ e é perpendicular ao eixo $Oy$ é $y = -1$.
Assim:

$2 + \frac{k}{3} = -1 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = -3 \Leftrightarrow k = -9$

Logo, o valor de $k$ é $-9$.

**30.3.** $-2 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 1$

**30.4.** $P$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo $P(x, x), x \in \mathbb{R}$.

d(P, A) = d(P, B)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(x-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(x-1)^2 = (x-2)^2+(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+x^2-2x+1 = x^2-4x+4+x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 4x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Logo, $P(0, 0)$.

**31.**

**31.1.** $(x-3)^2+(y-4)^2 = (x-2)^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16 = x^2-4x+4+y^2+2y+1$

$\Leftrightarrow -10y = 2x-20$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + 2$

**31.2.** $(x+3)^2+(y+2)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2+4y+4 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow 6y = -10x-8$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$

**31.3.** $(x-3)^2+(y+4)^2 = (x-5)^2+(y+4)^2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9 = x^2-10x+25$

$\Leftrightarrow 4x = 16$

$\Leftrightarrow x = 4$

**314.** $(x+4)^2+(y-6)^2 = (x+4)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow y^2-12y+36 = y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow -10y = -35$

$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}$

**32.**

**32.1.** Seja M o ponto médio de [AB].

$M = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{5-6}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Substituindo em $r$:

$$3\times\frac{9}{2}-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=16\Leftrightarrow\frac{27}{2}+\frac{5}{2}=16$$
$$\Leftrightarrow\frac{32}{2}=16$$
$\Leftrightarrow 16=16$ Proposição verdadeira.

Logo, o ponto $M$ pertence à reta $r$.

**32.2.** A reta $r$ é definida por:
$$3x-5y=16\Leftrightarrow -5y=-3x+16$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{16}{5}$$
A mediatriz de $[AB]$ é definida por:
$$(x-2)^2+(y-5)^2=(x-7)^2+(y+6)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-10y+25$$
$$\Leftrightarrow x^2-14x+49+y^2+12y+36$$
$$\Leftrightarrow -22y=-10x+56$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{5}{11}x-\frac{28}{11}$$
As equações $y=\frac{3}{5}x-\frac{16}{5}$ e $y=\frac{5}{11}x-\frac{28}{11}$ não representam a mesma reta, logo a reta $r$ não é a mediatriz de $[AB]$.

**33.**

**33.1.** Seja $B(x, y)$, com $x, y\in\mathbb{R}$.
$$(-2,-3)=\left(\frac{3+x}{2},\frac{5+y}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-2=\frac{3+x}{2}\\-3=\frac{5+y}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3+x=-4\\5+y=-6\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\y=-11\end{cases}$$
Assim, $B(-7, -11)$.

**33.2.** A mediatriz de $[AB]$ é definida por:
$$(x-3)^2+(y-5)^2=(x+7)^2+(y+11)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-10y+25=x^2+14x+49+y^2+22y+121$$
$$\Leftrightarrow -32y=20x+136$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{5}{8}x-\frac{17}{4}$$

**33.3.** A mediatriz de $[AB]$ é definida por $y=-\frac{5}{8}x-\frac{17}{4}$.

Então:
$$-3-k=-\frac{5}{8}(3+k)-\frac{17}{4}\Leftrightarrow -3-k=-\frac{15}{8}-\frac{5k}{8}-\frac{17}{4}$$
$$\Leftrightarrow -24-8k=-15-5k-34$$
$$\Leftrightarrow -3k=-25$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{25}{3}$$
Logo, o valor de $k$ é $\frac{25}{3}$.

**34.**

**34.1.** A mediatriz de $[AB]$ é definida por:
$$(x+2)^2+(y+2)^2=(x-7)^2+(y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+4y+4=x^2-14x+49+y^2-2y+1$$
$$\Leftrightarrow 6y=-18x+42$$
$$\Leftrightarrow y=-3x+7$$

**34.2.** $M$ é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.
$$M=\left(\frac{-2+7}{2},\frac{-2+1}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

**34.3.** $C$ pertence ao eixo $Oy$, logo $C(0, y)$, com $y\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação da reta $r$:
$$y=-3\times 0+7\Leftrightarrow y=7$$
Logo, $C(0, 7)$.

**34.4.**
$$\overline{CM}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-7\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{15}{2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{225}{4}}=$$
$$=\sqrt{\frac{250}{4}}=$$
$$=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-7)^2+(-2-1)^2}=$$
$$=\sqrt{(-9)^2+(-3)^2}=$$
$$=\sqrt{81+9}=$$
$$=\sqrt{90}=$$
$$=3\sqrt{10}$$
Assim:
$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{CM}}{2}=\frac{\frac{5\sqrt{10}}{2}\times 3\sqrt{10}}{2}=\frac{15\times 10}{4}=\frac{75}{2}\text{ u. a.}$$

**35.** O centro da circunferência que passa em $A$, $B$ e $C$ é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos de reta definidos por estes pontos.

A mediatriz de $[AB]$ é definida por:
$$(x-2)^2+(y+3)^2=(x-3)^2+(y+2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=x^2-6x+9+y^2+4y+4$$
$$\Leftrightarrow 2y=-2x$$
$$\Leftrightarrow y=-x$$
A mediatriz de $[AC]$ é definida por:
$$(x-2)^2+(y+3)^2=(x-2)^2+(y-6)^2$$
$$\Leftrightarrow y^2+6y+9=y^2-12y+36$$
$$\Leftrightarrow 18y=27$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$$
Assim, $-x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Logo, o centro da circunferência que passa em $A$, $B$ e $C$ tem coordenadas $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

**36.**

**36.1.**
$$\overline{AB}=\sqrt{(3+4)^2+(-2-2)^2}=$$
$$=\sqrt{7^2+(-4)^2}=$$
$$=\sqrt{49+16}=$$
$$=\sqrt{65}$$
Logo, uma equação da circunferência de centro $A$ e que passa em $B$ é $(x-3)^2+(y+2)^2=65$.

**36.2.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.
$$M=\left(\frac{3-4}{2},\frac{-2+2}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$$
$\overline{AB}=\sqrt{65}$ (de acordo com os cálculos efetuados na alínea anterior.)

Assim, o raio da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$.

Logo, uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{65}{4}$.

**36.3.** Se a circunferência tem centro em $B$ e é tangente ao eixo das ordenadas, então o seu raio é 4.
Logo, uma equação da circunferência que tem centro em $B$ e é tangente ao eixo das ordenadas é $(x+4)^2+(y-2)^2=16$.

**37.**

**37.1.** $x^2+y^2\leq 4 \wedge (x-2)^2+y^2\leq 1$

**37.2.** $(x-1)^2+y^2\geq 1 \wedge (x-1)^2+(y-1)^2\leq 9$

**37.3.** $(x-1)^2+(y-1)^2\geq 4 \vee x^2+(y+1)^2\geq 1$

**38.**

**38.1.** Centro $(0, 1)$
Raio $=\sqrt{25}=5$

**38.2.** Centro $(-2, -3)$
Raio $=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

**38.3.** $x^2-2x+1+y^2=24 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=24$
Centro $(1, 0)$
Raio $=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

**38.4.** $x^2+4x+4+y^2-6y+9=4 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$
Centro $(-2, 3)$
Raio $=\sqrt{4}=2$

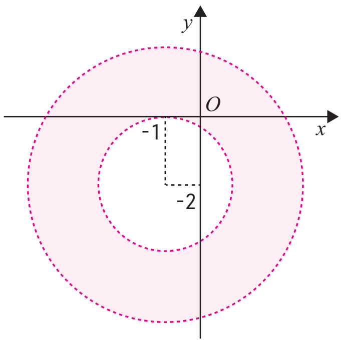
**39.** $x^2+10x+25+y^2-6y+9=34-k$
$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-3)^2=34-k$

**39.1.** Para que a equação dada represente um ponto:
$34-k=0 \Leftrightarrow k=34$

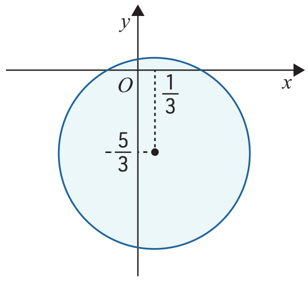
**39.2.** Para que a equação dada represente uma circunferência de raio 6:
$34-k=6^2 \Leftrightarrow -k=36-34 \Leftrightarrow k=-2$
Logo, o valor de $k$ é $-2$.

**40.**

**40.1.** $4<(x+1)^2+(y+2)^2<16$




**40.2.** Seja $P(x, y)$, $x, y\in\mathbb{R}$.
$d(P, A)\geq 2d(P, B)$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}\geq 2\sqrt{x^2+(y+1)^2}$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2\geq 4(x^2+(y+1)^2)$
$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1\geq 4(x^2+y^2+2y+1)$
$\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y+2\geq 4x^2+4y^2+8y+4$
$\Leftrightarrow 3x^2-2x+3y^2+10y+2\leq 0$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y\leq -\frac{2}{3}$
$\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}\leq -\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{25}{9}$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2\leq\frac{20}{9}$




## Exercícios globais – páginas 91 a 93

**41.**

**41.1.** Como a reta $AC$ é paralela a $Oy$, então $AC$: $x=6$
Como a reta $BD$ é paralela a $Ox$, então $BD$: $y=2$
$C$ pertence à reta $AC$, logo $C(6, y)$.
$C$ é o ponto simétrico de $A$ em relação à reta $BD$, $C(6, -2)$.
$D$ pertence à reta $BD$, logo $D(x, 2)$.
$D$ é o ponto simétrico de $B$ em relação à reta $AC$, logo $D(12, 2)$.

**41.2.** $(x-6)^2+(y-6)^2=x^2+(y-2)^2$
$\Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2-12y+36=x^2+y^2-4y+4$
$\Leftrightarrow -8y=12x-68$
$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{17}{2}$

**41.3.** Opção (D)
Seja $M$ o ponto médio de $[AC]$.
$M=\left(\frac{6+6}{2}, \frac{6-2}{2}\right)=(6, 2)$
Como $A(6, 6)$, então $\overline{AM}=4$.
Assim, $(x-6)^2+(y-2)^2=16$ é uma equação da circunferência cujo centro coincide com o centro do losango e que passa no ponto $A$.

**42.**

**42.1.** $A(2, 0)$ é o ponto médio de $[OD]$ e $D$ pertence ao eixo $Ox$, logo $D(4, 0)$.
A reta $BC$ é a mediatriz de $[AD]$ e é paralela ao eixo $Oy$, logo $BC$: $x=3$.
A equação da circunferência representada é $(x-2)^2+y^2=4$.
Os pontos $B$ e $C$ são os pontos de interseção da circunferência com a reta $BC$.
Assim:
$(3-2)^2+y^2=4 \Leftrightarrow 1+y^2=4$
$\Leftrightarrow y^2=3$
$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$
Logo, $B(3, -\sqrt{3})$ e $C(3, \sqrt{3})$.

**42.2.** $d(C, D)=\sqrt{(3-4)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=$
$=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=$

$= \sqrt{1+3} =$

$= \sqrt{4} =$

$= 2$ u.c.

**42.3.** Opção (A)

Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.

$M = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{-\sqrt{3}+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**42.4.** $\overline{AB} = \overline{CD} = 2$

Assim, o raio da circunferência é $\frac{\overline{AB}}{2} = 1$ e o seu centro é $M\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Logo, uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

**42.5.** Opção (C)

$(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge ((x \leq 3 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 3 \wedge y \geq 0))$

**42.6.** $B(3, -\sqrt{3})$ e $C(3, \sqrt{3})$, logo $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$.

Seja $E(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{cases} \overline{BC} = \overline{CE} \\ \overline{BC} = \overline{BE} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2} \\ 2\sqrt{3} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 = (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \\ 12 = (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - (x-3)^2 = (y-\sqrt{3})^2 \\ 12 - (x-3)^2 = (y+\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - (x-3)^2 = (y-\sqrt{3})^2 \\ (y-\sqrt{3})^2 = (y+\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - (x-3)^2 = (y-\sqrt{3})^2 \\ y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - (x-3)^2 = (y-\sqrt{3})^2 \\ 4\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - (x-3)^2 = (0-\sqrt{3})^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 3 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3 = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, $E(0, 0)$ ou $E(6, 0)$.

**43.**

**43.1.** $y \leq x \wedge x \leq 7 \wedge 0 \leq y \leq 3$

**43.2.** $C$ é o ponto de interseção da reta $s$: $y = 3$ com a reta $r$: $y = x$, logo $C(3, 3)$.

$A$ é o ponto de interseção do eixo $Ox$ com a reta $t$: $x = 7$, logo $A(7, 0)$.

$\overline{AC} = \sqrt{(3-7)^2 + (3-0)^2} =$

$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{16+9} =$

$= 5$

Uma equação da circunferência de centro em $A$ e que passa em $C$ é $(x-7)^2 + y^2 = 25$.

**43.3.** Seja $D(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$(3, 3) = \left(\frac{x+7}{2}, \frac{y+0}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+7}{2} = 3 \\ \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7 = 6 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Logo, $D(-1, 6)$.

**43.4.** $B(7, 3)$

$d(E, B) = d(E, O)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(k-1-7)^2 + (k+3-3)^2} = \sqrt{(k-1-0)^2 + (k+3-0)^2}$

$\Leftrightarrow (k-8)^2 + k^2 = (k-1)^2 + (k+3)^2$

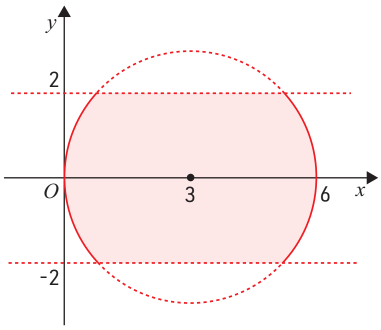
$\Leftrightarrow k^2 - 16k + 64 + k^2 = k^2 - 2k + 1 + k^2 + 6k + 9$

$\Leftrightarrow -20k = -54$

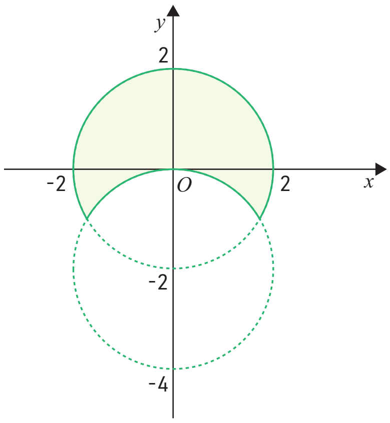
$\Leftrightarrow k = \frac{27}{10}$

**44.**

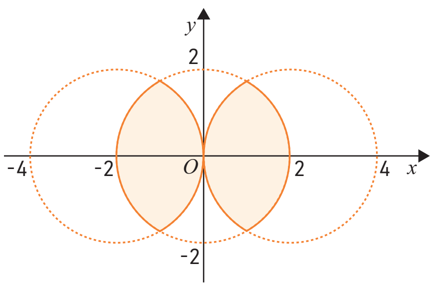
**44.1.**




**44.2.**




**44.3.**



**45.**

**45.1.** $(x-2)^2+(y+2)^2=3$

Logo, $A(2, -2)$.

**45.2.** $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 6 \wedge (x-2)^2+(y+2)^2 \geq 3 \wedge y \leq x$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 6 \wedge (x-2)^2+(y+2)^2 \geq 3 \wedge y \leq x$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 6 \wedge (x-2)^2+(y+2)^2 \geq 3 \wedge y \leq x$

**45.3.** $C_1$: $(x-1)^2+(y-1)^2=6$

$C$ e $D$ pertencem ao eixo $Ox$: $y=0$

$$(x-1)^2+(0-1)^2=6 \Leftrightarrow (x-1)^2+1=6$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=5$$
$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{5} \vee x-1=-\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{5} \vee x=1-\sqrt{5}$$

Assim, $C(1-\sqrt{5}, 0)$ e $D(1+\sqrt{5}, 0)$.

**45.4.** $C_1$: $(x-1)^2+(y-1)^2=6$

Substituindo $(x, y)$ por $(-1, 1+\sqrt{2})$:

$$(-1-1)^2+(1+\sqrt{2}-1)^2=6 \Leftrightarrow (-2)^2+(\sqrt{2})^2=6$$
$$\Leftrightarrow 4+2=6$$
$$\Leftrightarrow 6=6 \text{ Proposição verdadeira.}$$

Logo, o ponto $E$ pertence à circunferência $C_1$.

Procedendo de forma análoga em relação ao ponto $F$, temos:

$$(3-1)^2+(1-\sqrt{2}-1)^2=6 \Leftrightarrow 2^2+(-\sqrt{2})^2=6$$
$$\Leftrightarrow 4+2=6$$
$$\Leftrightarrow 6=6 \text{ Proposição verdadeira.}$$

Logo, o ponto $F$ pertence à circunferência $C_1$.

Além disso:

$$\overline{EF}=\sqrt{(-1-3)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}=$$
$$=\sqrt{(-4)^2+(2\sqrt{2})^2}=$$
$$=\sqrt{16+8}=$$
$$=\sqrt{24}=$$
$$=2\sqrt{6}$$

Ou seja, $\overline{EF}$ é o dobro do raio de $C_1$.

Então, $[EF]$ é um diâmetro da circunferência.

**46.**

**46.1.** $$\overline{AB}=\sqrt{(2+3)^2+(1-2)^2}=$$
$$=\sqrt{5^2+(-1)^2}=$$
$$=\sqrt{25+1}=$$
$$=\sqrt{26}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(1+4)^2}=$$
$$=\sqrt{1^2+5^2}=$$
$$=\sqrt{1+25}=$$
$$=\sqrt{26}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-3-1)^2+(2+4)^2}=$$
$$=\sqrt{(-4)^2+6^2}=$$
$$=\sqrt{16+36}=$$
$$=\sqrt{52}$$
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(\sqrt{26})^2+(\sqrt{26})^2=26+26=52$$
$$\overline{BC}^2=(\sqrt{52})^2=52$$

Assim, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$, logo, pelo teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

**46.2.** O triângulo $[ABC]$ é retângulo em $A$ e está inscrito na circunferência, logo $[BC]$ é um diâmetro da circunferência.

Assim, o raio da circunferência é $\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}=$
$=\frac{2\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$.

Seja $M$ o ponto médio de $[BC]$.

$$M=\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2-4}{2}\right)=(-1, -1)$$

Assim, uma equação da circunferência que passa nos pontos $A$, $B$ e $C$ é $(x+1)^2+(y+1)^2=13$.

**46.3.** Seja $E$ o ponto cujas coordenadas se pretende determinar.

$M(-1, -1)$ é o ponto médio de $[AE]$.

Então:

$$(-1, -1)=\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{2}=1 \\ \frac{y+1}{2}=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-2 \\ y+1=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$$

Logo, $E(-4, -3)$.

**47.**

**47.1.** $A(-x, x)$ e $B(0, x)$, com $x \in \mathbb{R}^+$.

$\overline{AB}=x=\overline{OB}$

$$A_{[ABC]}=8 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}\times\overline{OB}}{2}=8 \Leftrightarrow \frac{x \times x}{2}=8 \Leftrightarrow x^2=16$$

Logo, $x=4$, porque $x \in \mathbb{R}^+$.

Assim, $A(-4, 4)$ e $B(0, 4)$.

**47.2.** Mediatriz de $[AB]$: $x=-2$

Mediatriz de $[AC]$:

$$(x+4)^2+(y-4)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+8x+16+y^2-8y+16=x^2-2x+1+y^2+2y+1$$
$$\Leftrightarrow -10y=-10x-30$$
$$\Leftrightarrow y=x+3$$

Intersetando as duas retas, obtém-se:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Assim, o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(-2, 1)$.

Seja $E(-2, 1)$.

$$\overline{AE}=\sqrt{(-4+2)^2+(4-1)^2}=$$
$$=\sqrt{(-2)^2+3^2}=$$
$$=\sqrt{4+9}=$$
$$=\sqrt{13}$$

Logo, o raio da circunferência é $\sqrt{13}$.

Então, uma equação da circunferência que passa nos pontos $A$, $B$ e $C$ é $(x+2)^2+(y-1)^2=13$.

**47.3.** $(x+2)^2+(y-1)^2 \leq 13 \wedge y \geq -x \wedge y \leq 4$

**47.4.** $D(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$

$$d(A, D)=8 \Leftrightarrow \sqrt{(-4-x)^2+(4-0)^2}=8$$
$$\Leftrightarrow (-4-x)^2+4^2=64$$

$\Leftrightarrow 16 + 8x + x^2 + 16 = 64$
$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 32 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \times 32}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 8\sqrt{3}}{2}$
$\Leftrightarrow x = -4 \pm 4\sqrt{3}$

Logo, $D(-4 - 4\sqrt{3}, 0)$ ou $D(-4 + 4\sqrt{3}, 0)$.

## 2. Geometria analítica no espaço

**Exercícios – páginas 94 a 103**

**1.**

**1.1.** $O(0, 0, 0)$; $A(3, 3, 6)$; $B(-3, 3, 6)$; $C(-3, -3, 6)$; $D(3, -3, 6)$

**1.2.** **a)** $(3, 3, -6)$
**b)** $(3, 3, 6)$
**c)** $(3, -3, -6)$
**d)** $(3, 3, 6)$

**2.**

**2.1.** $\overline{AE} = 2$
$\overline{EM} = \overline{MH} = 3$, logo $\overline{EH} = 6$.
$\overline{HG} = 2\overline{EH} = 12$
$M(0, 0, 4)$
Tem-se, então:
$A(3, 0, 2)$; $B(3, 12, 2)$; $C(-3, 12, 2)$; $D(-3, 0, 2)$; $E(3, 0, 4)$; $F(3, 12, 4)$; $G(-3, 12, 4)$; $H(-3, 0, 4)$

**2.2.** $\overline{OE} = \overline{FB} = 3$
$\overline{EF} = 2\overline{OE} = 6$
Tem-se, então:
$A(3, 0, -3)$; $B(3, 6, -3)$; $C(0, 6, -3)$; $D(0, 0, -3)$; $E(3, 0, 0)$; $F(3, 6, 0)$; $G(0, 6, 0)$; $O(0, 0, 0)$

**2.3.** $\overline{OA} = \overline{AE} = 4$
$\overline{AB} = \overline{AD} = 5$
Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{OD}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 = 5^2 - 4^2$
$\Leftrightarrow \overline{OD}^2 = 9$
Logo, $\overline{OD} = 3$.
Tem-se, então:
$A(4, 0, 0)$; $B(4, 5, 0)$; $C(0, 8, 0)$; $D(0, 3, 0)$; $E(4, 0, 4)$; $F(4, 5, 4)$; $G(0, 8, 4)$; $H(0, 3, 4)$

**2.4.** $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{OB} = 4$
$\overline{OE} = 2\overline{AB} = 8$
Sendo $h$ a altura do triângulo $[OAB]$, pelo teorema de Pitágoras:
$h^2 + \left(\frac{\overline{OB}}{2}\right)^2 = \overline{OA}^2 \Leftrightarrow h^2 = 4^2 - 2^2$
$\Leftrightarrow h^2 = 12$
Logo, $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Tem-se, então:
$A(2\sqrt{3}, 2, 0)$; $B(0, 4, 0)$; $C(2\sqrt{3}, 2, 8)$; $D(0, 4, 8)$; $E(0, 0, 8)$; $O(0, 0, 0)$

**3.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$.

**3.1.** $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

**3.2.** $M = \left(\frac{4-1}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$

**4.** $(-3, -1, 1) = \left(\frac{2+2a-3b}{2}, \frac{-1+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = \frac{2+2a-3b}{2} \\ -1 = \frac{-1+a}{2} \\ 1 = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 2+2a-3b \\ -2 = -1+a \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 2 + 2\times(-1) - 3\times 2 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 2-2-6 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

**5.**

**5.1.** Seja $M$ o ponto médio de $[AG]$.
$M = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{2-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Assim, a reta perpendicular ao plano $xOy$ e que passa por $M$ é definida por $x = \frac{7}{2} \wedge y = \frac{5}{2}$.

**5.2.** $I\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$; $J\left(\frac{7}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$; $K\left(5, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $L\left(\frac{7}{2}, 4, \frac{1}{2}\right)$; $M\left(2, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$

**6.**

**6.1.** $A_{base} = 64 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 64$, logo $\overline{AB} = 8$.
Assim, $A(4, 4, 0)$ e $D(4, -4, 0)$, pelo que $M(4, 0, 0)$.
$\overline{EM} = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2 + (12-0)^2} =$
$= \sqrt{16 + 144} =$
$= \sqrt{160} =$
$= 4\sqrt{10}$ u.c.

**6.2.** Seja $N$ o ponto médio de $[AE]$:
$N\left(\frac{4+0}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+12}{2}\right) = (2, 2, 6)$
Uma equação cartesiana que defina o plano que passa pelo ponto médio de $[AE]$ e é paralelo ao plano $xOy$ é $z = 6$.

**7.**

**7.1.** Seja $a$ a medida da aresta da base do prisma.
$V_{prisma} = 54 \Leftrightarrow a \times a \times 2a = 54$
$\Leftrightarrow 2a^3 = 54$
$\Leftrightarrow a^3 = 27$

$\Leftrightarrow a = 3$

Assim, $H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 6\right)$.

**7.2.** $A(3, 0, 0)$; $B(3, 3, 0)$

Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$: $M\left(3, \frac{3}{2}, 0\right)$

$$\overline{HM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (6-0)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 36} =$$
$$= \sqrt{\frac{153}{4}} =$$
$$= \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 3 \times 3 + 4 \times \frac{3 \times \frac{3\sqrt{17}}{2}}{2} =$$
$$= \left(9 + 9\sqrt{17}\right) \text{ u.a.}$$

**8.**

**8.1.** $d(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2 + (1+3)^2} =$
$= \sqrt{9 + 16 + 16} =$
$= \sqrt{41}$

**8.2.** $d(C, D) = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-2)^2 + (-1-5)^2} =$
$= \sqrt{9 + 25 + 36} =$
$= \sqrt{70}$

**9.** $\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2 + (4+1)^2 + (1-2)^2} =$
$= \sqrt{36 + 25 + 1} =$
$= \sqrt{62}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-4+2)^2 + (4-5)^2 + (1-0)^2} =$
$= \sqrt{4 + 1 + 1} =$
$= \sqrt{6}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-5)^2 + (2-0)^2} =$
$= \sqrt{16 + 36 + 4} =$
$= \sqrt{56}$

Como $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$, então o triângulo $[ABC]$ é escaleno.

$\overline{AB}^2 = \left(\sqrt{62}\right)^2 = 62 = 6 + 56 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{56}\right)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

Logo, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

**10.**

**10.1.** Uma vez que C pertence ao eixo das cotas, tem-se $C(0, 0, z)$, com $z \in \mathbb{R}$.

$\overline{AC} = \overline{BC}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2 + (4-z)^2} =$
$= \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2 + (3-z)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4 + 9 + (4-z)^2} = \sqrt{1 + 4 + (3-z)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{13 + (4-z)^2} = \sqrt{5 + (3-z)^2}$

$\Leftrightarrow 13 + (4-z)^2 = 5 + (3-z)^2$

$\Leftrightarrow 13 + 16 - 8z + z^2 = 5 + 9 - 6z + z^2$

$\Leftrightarrow -2z = -15$

$\Leftrightarrow z = \frac{15}{2}$

Assim, $C\left(0, 0, \frac{15}{2}\right)$.

**10.2.** Uma vez que C pertence ao plano $xOy$ e tem abcissa igual à ordenada, tem-se $C(x, x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$.

$\overline{BC} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (x+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + 9 = 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

Assim, $C(-2, -2, 0)$ ou $C(-1, -1, 0)$.

**11.**

**11.1.** Seja $a$ a medida da aresta do cubo.

$A_{\text{cubo}} = 54 \Leftrightarrow 6 \times a^2 = 54 \Leftrightarrow a^2 = 9$

Logo, $a = 3$.

Além disso, $\overline{PB} = \frac{1}{2}\overline{PC} \Leftrightarrow 2\overline{PB} = PC$.

Assim:

$\overline{PB} + \overline{PC} = 3 \Leftrightarrow \overline{PB} + 2\overline{PB} = 3$

$\Leftrightarrow 3\overline{PB} = 3$

$\Leftrightarrow \overline{PB} = 1$

Logo: $A(1, 1, 0)$; $B(1, 4, 0)$; $C(-2, 4, 0)$; $D(-2, 1, 0)$; $E(1, 1, 3)$; $F(1, 4, 3)$; $G(-2, 4, 3)$; $H(-2, 1, 3)$

**11.2.** $\overline{GH} = 3$

$\overline{GP} = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-4)^2 + (3-0)^2} =$
$= \sqrt{4 + 9} =$
$= \sqrt{13}$

$\overline{HP} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-4)^2 + (3-0)^2} =$
$= \sqrt{4 + 9 + 9} =$
$= \sqrt{22}$

Ora:

$\overline{GH}^2 + \overline{GP}^2 = 3^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 9 + 13 = 22 = \left(\sqrt{22}\right)^2 = \overline{HP}^2$

Logo, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, o triângulo $[GHP]$ é retângulo em $G$.

**11.3.** $A_{[HGP]} = \frac{\overline{GH} \times \overline{GP}}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$ u.a.

**12.** Seja $a$ a medida da aresta da base do prisma.

Como a base do prisma é um hexágono, tem-se:

$a = \frac{1}{2}\overline{AB} \Leftrightarrow = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

Seja b a medida do apótema da base do prisma.

Pelo teorema de Pitágoras:

$b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + 2^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow b^2 + 4 = 16$

$\Leftrightarrow b^2 = 12$

Logo, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Assim, $A_{\text{base}} = 6 \times \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ u.a.

A altura do prisma é:

$\overline{AC} = \sqrt{(10-14)^2 + (-1-5)^2 + (2-0)^2} =$
$= \sqrt{16 + 36 + 4} =$
$= \sqrt{56} =$
$= 2\sqrt{14}$

Assim:

$V_{\text{prisma}} = 24\sqrt{3} \times 2\sqrt{14} = 48\sqrt{42}$ u.v.

**13.** Para que $[ABC]$ seja um triângulo equilátero, tem-se:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AB} = \overline{BC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2+(-1-1)^2} = \\ \quad = \sqrt{(1-2k-2)^2+(2-k)^2+(-1-0)^2} \\ \sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2+(-1-1)^2} = \\ \quad = \sqrt{(3-2k-2)^2+(-2-k)^2+(1-0)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+16+4 = (-2k-1)^2+(2-k)^2+1 \\ 4+16+4 = (-2k+1)^2+(-2-k)^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24 = 4k^2+4k+1+4-4k+k^2+1 \\ 24 = 4k^2-4k+1+4+4k+k^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5k^2-18=0 \\ 5k^2-18=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{18}{5}} \vee k = -\sqrt{\frac{18}{5}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \vee k = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3\sqrt{10}}{5} \vee k = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

**14.**

**14.1.** $A(4, 6, 0)$; $B(4, 10, 0)$; $C(0, 10, 0)$; $E(0, 6, 4)$; $F(4, 6, 4)$; $G(4, 10, 4)$; $H(0, 10, 4)$

**14.2. a)** $x = 4$
**b)** $y = 6$

**14.3. a)** $CDE$, por exemplo.
**b)** $EFG$, por exemplo.

**15.**

**15.1.** $A_{base} = 9 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OC} = 9$
$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 9$

Logo, $\overline{OA} = 3$.

$V_{prisma} = 63 \Leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OC} \times \overline{OG} = 63$
$\Leftrightarrow 9 \times \overline{OG} = 63$
$\Leftrightarrow \overline{OG} = 7$

Assim:
$A(3, 0, 0)$; $B(3, 0, 3)$; $C(0, 0, 3)$; $D(0, 7, 3)$; $E(3, 7, 3)$; $F(3, 7, 0)$; $G(0, 7, 0)$

**15.2. a)** $z = 3$
**b)** $y = 7$
**c)** $x = -2$
**d)** $y = 0$

**16.** Para que $A$ pertença ao plano $xOy$: $a = 0$
Para que $A$ pertença ao plano de equação $y = 5$:
$b^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2 \vee b = -2$
Assim, $a = 0$ e $b = 2$ ou $b = -2$ e $A(-1, 5, 0)$.

**17.**

**17.1.** $ABC$: $z = 0$
$DEF$: $z = 2$
$OCD$: $y = 0$
$ABE$: $y = -4$
$OAD$: $x = 0$
$BCG$: $x = -3$

**17.2.** $OA$: $x = 0 \wedge z = 0$
$DE$: $x = 0 \wedge z = 2$
$FG$: $x = -3 \wedge z = 2$
$BC$: $x = -3 \wedge z = 0$
$OC$: $y = 0 \wedge z = 0$
$DG$: $y = 0 \wedge z = 2$
$AB$: $y = -4 \wedge z = 0$
$EF$: $y = -4 \wedge z = 2$
$OD$: $x = 0 \wedge y = 0$
$CG$: $x = -3 \wedge y = 0$
$AE$: $x = 0 \wedge y = -4$
$BF$: $x = -3 \wedge y = -4$

**18.**

**18.1.** $y = 2$

**18.2.** $x = 4$

**18.3.** $y = 2 \wedge z = -3$

**18.4.** $x = 4 \wedge y = -4$

**19.**

**19.1.** Seja $a = \overline{AB}$.

$V_{prisma} = 8 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times \overline{BF} = 8$
$\Leftrightarrow \frac{a \times a}{2} \times 2a = 8$
$\Leftrightarrow a^3 = 8$
$\Leftrightarrow a = 2$

$A(0, 2, 0)$; $B(2, 2, 0)$; $C(2, 4, 0)$; $D(2, 4, 4)$; $E(0, 2, 4)$; $F(2, 2, 4)$

**19.2. a)** Plano $DEF$
**b)** Reta $BF$
**c)** Reta $EF$
**d)** Ponto $D$

**19.3.** $x = 2 \wedge 2 \leq y \leq 4 \wedge z = 4$

**19.4.** $x = 2 \wedge 2 \leq y \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 4$

**20.**

**20.1.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + z^2 - 2z + 1 = x^2 - 6x + 9 + z^2 + 2z + 1$
$\Leftrightarrow 4x - 4z - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x - z - 2 = 0$

**20.2.** $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 =$
$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$
$\Leftrightarrow 2x - 8y - 4z + 3 = 0$

**21.**

**21.1.** O plano de equação $z = 2$ é o plano mediador de $[BG]$, $[AF]$, $[OE]$ e $[CD]$.

**21.2.** $N(2, -4, 4)$; $C(4, 0, 0)$

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=(x-4)^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+8y+16+z^2-8z+16=$

$=x^2-8x+16+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow 4x+8y-8z+20=0$

$\Leftrightarrow x+2y-2z+5=0$

**21.3.** $M(0, -2, 4)$; $N(2, -4, 4)$

Plano mediador de $[MN]$:

$x^2+(y+2)^2+(z-4)^2=(x-2)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4y+4=x^2-4x+4+y^2+8y+16$

$\Leftrightarrow 4x-4y-16=0$

$\Leftrightarrow x-y-4=0$

Como $P$ pertence ao eixo $Ox$, tem-se $P(x, 0, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$.

Assim:

$x-0-4=0 \Leftrightarrow x=4$

Logo, $P(4, 0, 0)$.

**21.4.** $C(4, 0, 0)$, $N(2, -4, 4)$, $M(0, -2, 4)$

$\overline{MN}=\sqrt{(2-0)^2+(-4+2)^2+(4-4)^2}=$

$=\sqrt{4+4+0}=$

$=2\sqrt{2}$

$\overline{CM}=\sqrt{(4-0)^2+(0+2)^2+(0-4)^2}=$

$=\sqrt{16+4+16}=$

$=\sqrt{36}=$

$=6$

$\overline{CN}=\sqrt{(4-2)^2+(0+4)^2+(0-4)^2}=$

$=\sqrt{4+16+16}=$

$=\sqrt{36}=$

$=6$

$P_{[CMN]}=6+6+2\sqrt{2}=\left(12+2\sqrt{2}\right)$ u.c.

**22.**

**22.1.** $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2=$

$=x^2+y^2+2y+1+z^2-4z+4$

$\Leftrightarrow -4x-4y+4z=0$

$\Leftrightarrow x+y-z=0$

**22.2.** Plano mediador de $[AV]$:

$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-3y+1+z^2=$

$=x^2-6x+9+y^2+2y+1+z^2-4z+4$

$\Leftrightarrow 2x-4y+4z-9=0$

Para que $P$ seja equidistante de $A$ e de $V$, $P$ tem de pertencer ao plano mediador de $[AV]$.

Assim:

$2(k^2-1)-4k+4\times 2k-9=0$

$\Leftrightarrow 2k^2-2-4k+8k-9=0$

$\Leftrightarrow 2k^2+4k-11=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+88}}{4}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-4\pm\sqrt{104}}{4}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{26}}{4}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-2+\sqrt{26}}{2} \vee k=\dfrac{-2-\sqrt{26}}{2}$

**22.3.** Seja $M$ o ponto médio de $[AC]$.

$M=\left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{1-1}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right)=(1, 0, 1)$

$\overline{MV}=\sqrt{(1-3)^2+(0+1)^2+(1-2)^2}=$

$=\sqrt{4+1+1}=$

$=\sqrt{6}$

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AB}^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(2-0)^2+(1+1)^2+(0-2)^2}\right)^2=2\overline{AB}^2$

$\Leftrightarrow 4+4+4=2\overline{AB}^2$

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=6$

Então, $V_{\text{pirâmide}}=\dfrac{1}{3}\times 6\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ u.v.

**23.**

**23.1.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$:

$M=\left(\dfrac{4+10}{2}, \dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)=(7, 2, 0)$

O plano que contém o ponto $M$ e que é paralelo ao plano $xOz$ é definido por $y=2$.

**23.2.** $(x-4)^2+(y+1)^2+z^2=(x-10)^2+(y-5)^2+z^2$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2+2y+1=x^2-20x+100+y^2-10y+25$

$\Leftrightarrow 12x+12y-108=0$

$\Leftrightarrow x+y-9=0$

**23.3.** Como $C$ pertence ao plano $xOy$, tem-se $C(x, y, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Uma vez que $\overline{AC}=\overline{BC}$, então $C$ pertence ao plano mediador de $[AB]$ cuja equação é $x+y-9=0$, de acordo com a alínea anterior.

Além disso, $\overline{AC}=6$.

Assim:

$\begin{cases} x+y-9=0 \\ \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2+(0-0)^2}=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ (x-4)^2+(9-x+1)^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ (x-4)^2+(10-x)^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ x^2-8x+16+100-20x+x^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ 2x^2-28x+80=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ x^2-14x+40=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ x=\dfrac{14\pm\sqrt{196-160}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ x=\dfrac{14\pm 6}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=10 \end{cases} \vee \begin{cases} y=5 \\ x=4 \end{cases}$

Logo, $C(10, -1, 0)$ ou $C(4, 5, 0)$.

**24.**

**24.1.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 \leq 5$

**24.2.** $\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+(0+1)^2+(1-2)^2}=$
$=\sqrt{16+1+1}=$
$=\sqrt{18}$
A condição pedida é $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=18$.

**24.3.** $\overline{DE}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1+3)^2+(1+1)^2}=$
$=\sqrt{16+4+4}=$
$=\sqrt{24}$
Logo, o raio da superfície esférica é $\frac{\overline{DE}}{2}=\sqrt{6}$.
Seja $M$ o ponto médio de $[DE]$:
$M=\left(\frac{-2+2}{2},\frac{-1-3}{2},\frac{1-1}{2}\right)=(0,-2,0)$
A condição pedida é $x^2+(y+2)^2+z^2=6$.

**25.**

**25.1.** $\overline{BD}=2$
A condição pedida é $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \leq 4$.

**25.2.** Seja $M$ o ponto médio de $[BD]$. Tem-se $M(1, 1, 1)$.
O raio da superfície esférica é $\frac{\overline{BD}}{2}=1$.
A condição pedida é $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

**26.**

**26.1.** O centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas $(2, -1, 3)$ e raio 3.

**26.2.** $y=-1-3 \Leftrightarrow y=-4$
$y=-1+3 \Leftrightarrow y=2$
Os planos tangentes à superfície esférica e paralelos ao plano $xOz$ têm equações $y=-4$ e $y=2$.

**26.3.** $\begin{cases} x=3 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (3-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (y+1)^2+(z-3)^2=8 \end{cases}$

A interseção da superfície esférica com o plano de equação $x=3$ é uma circunferência de centro $(3, -1, 3)$ e raio $2\sqrt{2}$ contida no plano de equação $x=3$.

**26.4.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ (0-2)^2+(0+1)^2+(z-3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 4+1+(z-3)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ (z-3)^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z-3=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z-3=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$

Os pontos de interseção da superfície esférica com o eixo $Oz$ têm coordenadas $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, 5)$.

**27.** Como a esfera é tangente aos planos de equação $x=-3$ e $x=5$, tem-se que a abcissa do seu centro é $\frac{-3+5}{2}=1$ e o seu raio é $\frac{5-(-3)}{2}=4$.
Uma vez que a esfera é tangente aos planos de equação $y=2$ e $y=10$, então a ordenada do seu centro é $\frac{2+10}{2}=6$.
Se a esfera é tangente ao plano de equação $z=0$ e tem raio 4, então a cota do seu centro é 4 ou $-4$.
Assim, há dois pontos possíveis como centros desta esfera, que são os pontos de coordenadas $(4, 6, 4)$ e $(4, 6, -4)$.
A condição pedida é $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-4)^2 \leq 16$ ou $(x-4)^2+(y-6)^2+(z+4)^2 \leq 16$.

**28.**

**28.1.** $(x+1)^2+(a-3)^2+(z-2)^2 \leq 16$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(z-2)^2 \leq 16-(a-3)^2$
Então:
$16-(a-3)^2=(\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow (a-3)^2=9$
$\Leftrightarrow a-3=3 \vee a-3=-3$
$\Leftrightarrow a=6 \vee a=0$

**28.2.** $(b+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 \leq 16$
$\Leftrightarrow (y-3)^2+(z-2)^2 \leq 16-(b+1)^2$
Então:
$16-(b+1)^2=0 \Leftrightarrow (b+1)^2=16$
$\Leftrightarrow b+1=4 \vee b+1=-4$
$\Leftrightarrow b=3 \vee b=-5$

## Exercícios globais – páginas 104 a 107

**29.**

**29.1** $y=3$

**29.2** $x=4$

**29.3** Opção (B)
$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=(x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2$
$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9+z^2+4z+4=$
$=x^2-8x+16+y^2+8y+16+z^2-6z+9$
$\Leftrightarrow 4x-14y+10z-24=0$
$\Leftrightarrow 2x-7y+5z-12=0$

**29.4** $\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(3+4)^2+(-2-3)^2}=$
$=\sqrt{4+49+25}=$
$=\sqrt{78}$

Assim, uma condição que define a superfície esférica de centro em $A$ e que passa em $B$ é $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=78$.
Para que $C$ pertença a esta superfície esférica:
$(3-2)^2+(-1-3)^2+(k+2)^2=78$
$\Leftrightarrow 1+16+(k+2)^2=78$
$\Leftrightarrow (k+2)^2=61$
$\Leftrightarrow k+2=\sqrt{61} \vee k+2=-\sqrt{61}$
$\Leftrightarrow k=-2+\sqrt{61} \vee k=-2-\sqrt{61}$

**30.**

**30.1.** Tem-se que $\overline{OC}=2\overline{OA}$ e $\overline{OE}=2\overline{OC}=4\overline{OA}$, logo:
$V_{prisma}=216 \Leftrightarrow \overline{OA}\times\overline{OC}\times\overline{OE}=216$
$\Leftrightarrow \overline{OA}\times 2\overline{OA}\times 4\overline{OA}=216$
$\Leftrightarrow 8\overline{OA}^3=216$
$\Leftrightarrow \overline{OA}^3=27$
$\Leftrightarrow \overline{OA}=3$
Assim: $O(0, 0, 0)$; $A(3, 0, 0)$; $B(3, 6, 0)$; $C(0, 6, 0)$; $D(0, 6, 12)$; $E(0, 0, 12)$; $F(3, 0, 12)$; $G(3, 6, 12)$

**30.2.** **a)** $y=6$
**b)** $x=3 \wedge z=12$

**30.3.** **a)** Aresta $[DG]$
**b)** Face $[OAFE]$

**30.4.** Opção (D)
A aresta $[BG]$ pode definir-se pela condição $x=3 \wedge y=6 \wedge 0 \leq z \leq 12$, logo o ponto de coordenadas $(3, 6, 6)$ pertence a esta aresta.

**30.5.** Opção (A)
Seja $M$ o ponto médio de $[OG]$.
$M=\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+12}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, 3, 6\right)$
$\overline{OG}=\sqrt{(3-0)^2+(6-0)^2+(12-0)^2}=$
$=\sqrt{9+36+144}=$
$=\sqrt{189}$
Assim, a superfície esférica que contém todos os vértices do prisma é definida por:
$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-6)^2=\left(\frac{\sqrt{189}}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z-6)^2=\frac{189}{4}$

**31.**

**31.1.** $A(2, 1, 2)$; $C(0, 3, 2)$; $D(0, 1, 2)$; $E(0, 1, 4)$; $F(2, 1, 4)$; $G(2, 3, 4)$; $H(0, 3, 4)$

**31.2.** **a)** $x=0 \wedge y=3 \wedge 2 \leq z \leq 4$
**b)** $0 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 3 \wedge 2 \leq z \leq 4$

**31.3.** $[AF]$: $x=2 \wedge y=1 \wedge 2 \leq z \leq 4$
Assim:
$2a=2 \wedge a=1 \wedge b-3 \geq 2 \wedge b-3 \leq 4$
$\Leftrightarrow a=1 \wedge b \geq 5 \wedge b \leq 7$
$\Leftrightarrow a=1 \wedge 5 \leq b \leq 7$
Logo, $a=1$ e $b \in [5, 7]$.

**31.4.** $H'(0, 3, -4)$; $B'(2, 0, 0)$
$\overline{H'B'}=\sqrt{(0-2)^2+(3-0)^2+(-4-0)^2}=$
$=\sqrt{4+9+16}=$
$=\sqrt{29}$
Assim, a superfície esférica de centro $H'$ e que contém $B'$ é definida por $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=29$.

**31.5.** $M$ é o ponto médio de $[BE]$:
$M=\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)=(1, 2, 3)$
O plano mediador de $[OM]$ é definido por:
$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9$
$\Leftrightarrow 2x+4y+6z-14=0$
$\Leftrightarrow x+2y+3z-7=0$

**31.6.** A esfera inscrita no cubo tem centro no ponto $M(1, 2, 3)$ definido na alínea anterior.
O raio desta esfera é igual a metade da medida da aresta do cubo, ou seja, 1.
Assim, a esfera inscrita no cubo está definida por $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \leq 1$.

**32.**

**32.1.** $\overline{AD}=\sqrt{(3+3)^2+(5-3)^2+(3-6)^2}=$
$=\sqrt{36+4+9}=$
$=\sqrt{49}=$
$=7$
Assim, $V_{cubo}=7^3=343$ u.v.

**32.2.** Seja $M$ o ponto médio de $[AD]$:
$M=\left(\frac{3-3}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{3+6}{2}\right)=\left(0, 4, \frac{9}{2}\right)$
Então, uma equação do plano que passa pelo ponto médio de $[AD]$ e é paralelo ao plano $xOy$ é $z=\frac{9}{2}$.

**33.**

**33.1.** O centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas $(2, 3, 5)$ e o seu raio é $\sqrt{38}$.

**33.2.** Interseção com o eixo $Ox$:
$(x-2)^2+(0-3)^2+(0-5)^2=38$
$\Leftrightarrow (x-2)^2=38-9-25$
$\Leftrightarrow (x-2)^2=4$
$\Leftrightarrow x-2=2 \vee x-2=-2$
$\Leftrightarrow x=4 \vee x=0$
Logo, $B(4, 0, 0)$.
Interseção com o eixo $Oy$:
$(0-2)^2+(y-3)^2+(0-5)^2=38$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=38-4-25$
$\Leftrightarrow (y-3)^2=9$
$\Leftrightarrow y-3=3 \vee y-3=-3$
$\Leftrightarrow x=6 \vee y=0$
Logo, $C(0, 6, 0)$.
Interseção com o eixo $Oz$:
$(0-2)^2+(0-3)^2+(z-5)^2=38$
$\Leftrightarrow (z-5)^2=38-4-9$
$\Leftrightarrow (z-5)^2=25$
$\Leftrightarrow z-5=5 \vee z-5=-5$
$\Leftrightarrow z=10 \vee z=0$
Logo, $D(0, 0, 10)$.

**33.3.** $\overline{BC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-6)^2+(0-0)^2}=$
$=\sqrt{16+36}=$

$= \sqrt{52} =$

$= 2\sqrt{13}$

$\overline{CD} = \sqrt{(0-0)^2 + (6-0)^2 + (0-10)^2} =$

$= \sqrt{36 + 100} =$

$= \sqrt{136} =$

$= 2\sqrt{34}$

$\overline{BD} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-10)^2} =$

$= \sqrt{16 + 100} =$

$= \sqrt{116} =$

$= 2\sqrt{29}$

Então, $P_{[BCD]} = \left(2\sqrt{13} + 2\sqrt{34} + 2\sqrt{29}\right)$ u.c.

**33.4.** Se $[BE]$ é um diâmetro da superfície esférica, então o centro desta é o ponto médio de $[BE]$.
Seja $E(x, y, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.
Assim:

$(2, 3, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{0+z}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4+x}{2} = 2 \\ \frac{0+y}{2} = 3 \\ \frac{0+z}{2} = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + x = 4 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$

Logo, $E(0, 6, 10)$.

**33.5.** Seja $M$ o centro da superfície esférica.

$\overline{FM} = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2 + (-1-5)^2} =$

$= \sqrt{1 + 1 + 36} =$

$= \sqrt{38}$

Como $\overline{FM}$ é igual ao raio da superfície esférica, então $F$ é um ponto da superfície esférica.

**34.**

**34.1.** $\overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{AB} = \frac{2}{5} \times 5 = 2$

Assim, $P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$, $Q(0, 5, 0)$, $R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$.

**34.2. a)** $y = 5 \wedge z = 5$

**b)** $z = 5$

**c)** $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \wedge 0 \leq y \leq 5 \wedge 0 \leq z \leq 5$

**34.3.** $y = 5 \wedge z = 3$

**34.4.** $BCG$: $y = 5$
Assim, $-k = 5 \Leftrightarrow k = -5$.
Logo, $S(25, 5, -5)$.

**34.5.** $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 4y + 4 + z^2 =$

$= x^2 + 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 6z + 9$

$\Leftrightarrow -10x + 6y + 6z - 30 = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 3y - 3z + 15 = 0$

**34.6.** $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + (2-5)^2 + (0-0)^2} =$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$

$= \frac{\sqrt{61}}{2}$

$\overline{PR} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + (2-5)^2 + (0-3)^2} =$

$= \sqrt{25 + 9 + 9} =$

$= \sqrt{43}$

$\overline{QR} = \sqrt{\left(0 + \frac{5}{2}\right)^2 + (5-5)^2 + (0-3)^2} =$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$

$= \frac{\sqrt{61}}{2}$

Como $\overline{PQ} = \overline{QR}$, então o triângulo $[PQR]$ é isósceles.
Seja $M$ o ponto médio de $[PR]$:

$M = \left(\frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{2}, \frac{2+5}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\overline{MQ} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{7}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{18}{4}} =$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Então:

$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PR} \times \overline{MQ}}{2} = \frac{\sqrt{43} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{86}}{4}$ u.a.

**35.**

**35.1.** $A(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}^+$
O triângulo $[OAB]$ é retângulo em $B$, pois está inscrito numa semicircunferência de diâmetro $[OA]$.

$\overline{OB} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} =$

$= \sqrt{16 + 4} =$

$= \sqrt{20}$

$\overline{OA} = x$

$\overline{AB} = \sqrt{(x-4)^2 + (0-2)^2 + (0-0)^2} =$

$= \sqrt{(x-4)^2 + 4}$

Pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-4)^2 + 4}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 = 20 + x^2 - 8x + 16 + 4$

$\Leftrightarrow 8x = 40$

$\Leftrightarrow x = 5$

Assim, $A(5, 0, 0)$.

**35.2.** $B(4, 2, 0)$
O plano perpendicular à reta $OA$ e que passa no ponto $B$ pode ser definido por $x = 4$.

**35.3.** A superfície esférica de centro em $C$ e que é tangente ao plano $xOz$ tem raio igual a 2. Logo, uma condição que a define pode ser:
$(x-4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=2^2$
$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=4$

**35.4.** $V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{5\times 2}{2}\times 6 = 30$ u.v.

**35.5.** $F(4, -2, 0)$; $G(4, -2, 6)$
$FG$: $x=4 \wedge y=-2$

**35.6.** $H(-4, -2, -6)$
$\overline{CO}=\sqrt{4^2+2^2+6^2}=\sqrt{16+4+36}=\sqrt{56}$
Logo, uma equação da superfície esférica de diâmetro $[CH]$ é $x^2+y^2+z^2=56$.

**35.7.** $E(5, 0, 6)$
Para que o ponto $P$ pertença ao plano mediador do segmento $[BE]$, tem de se ter:
$\overline{BP}=\overline{EP}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2+(0-3)^2}=$
$=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2+(6-3)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{9+1+9}=\sqrt{16+1+9}$
$\Leftrightarrow \sqrt{19}=\sqrt{26}$
Como esta afirmação é falsa, então o ponto $P$ não pertence ao plano mediador de $[BE]$.

**36.**
**36.1.** $x^2-8x+y^2-12y+z^2+6z-28=0$
$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-12y+36+z^2+6z+9=$
$=28+16+36+9$
$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=89$
Logo, $A(4, 6, -3)$.
$H$ é um ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo $Oy$.
$(0-4)^2+(y-6)^2+(0+3)^2=89$
$\Leftrightarrow 16+(y-6)^2+9=89$
$\Leftrightarrow (y-6)^2=64$
$\Leftrightarrow y-6=8 \vee y-6=-8$
$\Leftrightarrow y=14 \vee y=-2$
Como a ordenada de $H$ é negativa, então $H(0, -2, 0)$.
Os restantes vértices são:
$B(0, 6, -3)$; $C(0, -2, -3)$; $D(4, -2, -3)$; $E(4, -2, 0)$; $F(4, 6, 0)$; $G(0, 6, 0)$; $V(0, 0, 3)$

**36.2.** Seja $M$ o ponto médio de $[VF]$:
$M=\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{3+0}{2}\right)=\left(2, 3, \frac{3}{2}\right)$
O plano que passa pelo ponto médio de $[VF]$ e é perpendicular ao eixo $Ox$ tem equação $x=2$.

**36.3.** A diagonal espacial do paralelepípedo que tem o ponto $D$ como um dos seus extremos é $[DG]$.
O plano mediador de $[DG]$ é:
$(x-4)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=x^2+(y-6)^2+z^2$
$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2+4y+4+z^2+6z+9=$
$=x^2+y^2-12y+36+z^2$
$\Leftrightarrow -8x+16y+6z-7=0$

**36.4.** $EFG$: $z=0$
$(x-4)^2+(y-6)^2+(0+3)^2=89 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-6)^2=80$
A interseção da superfície esférica dada com o plano $EFG$ é uma circunferência de raio $\sqrt{80}$.
O perímetro desta circunferência é $2\pi\sqrt{80}=$
$=2\times 4\sqrt{5}\times\pi=8\sqrt{5}\pi$ u.c.

**36.5.** Seja $a$ a medida do lado do quadrado cuja diagonal é $[AP]$.
Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{AP}^2=a^2+a^2$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(4-4)^2+(k^2+2-6)^2+(k^2-7+3)^2}\right)^2=2a^2$
$\Leftrightarrow (k^2-4)^2+(k^2-4)^2=2a^2$
$\Leftrightarrow 2(k^2-4)^2=2a^2$
$\Leftrightarrow a^2=(k^2-4)^2$
$\Leftrightarrow a^2=k^4-8k^2+16$
Logo, a área de um quadrado que tenha $[AP]$ como diagonal é dada em função de $k$ por $k^4-8k^2+16$.

**36.6.** $V_{\text{sólido}}=8\times 4\times 3+\frac{1}{3}\times 8\times 4\times 3=128$
Seja $n$ a distância do ponto $F$ ao ponto de interseção do plano $z=a$ com a reta $AF$.
Então:
$8\times 4\times n+\frac{1}{3}\times 8\times 4\times 3=\frac{128}{2} \Leftrightarrow 32n+32=64$
$\Leftrightarrow 32n=32$
$\Leftrightarrow n=1$
Logo, $a=-1$.

**37.**
**37.1.** $S_1$: $x^2+y^2+z^2=16$
$S_2$: $x^2+(y-4)^2+z^2=16$
A interseção das duas superfícies esféricas é dada por:
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+(y-4)^2+z^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=16-y^2 \\ (y-4)^2+16-y^2=16 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=16-y^2 \\ y^2-8y+16-y^2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=16-y^2 \\ -8y+16=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=16-y^2 \\ y=2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=12 \\ y=2 \end{cases}$$
A interseção das duas superfícies esféricas é a circunferência de centro $(0, 2, 0)$ e raio $2\sqrt{3}$ contida no plano de equação $y=2$.

**37.2.** A superfície esférica $S_1$ tem diâmetro 8, logo a medida da diagonal espacial de um cubo nela inscrito é 8.
Seja $a$ a medida da aresta e seja $d$ a medida da diagonal facial desse cubo.
Pelo teorema de Pitágoras:
$a^2+a^2=d^2 \Leftrightarrow d^2=2a^2$
Também, pelo teorema de Pitágoras:
$8^2=a^2+d^2 \Leftrightarrow 64=a^2+2a^2$
$\Leftrightarrow 3a^2=64$
$\Leftrightarrow a^2=\frac{64}{3}$

Logo, $a = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Assim, $V_{cubo} = a^3 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{512\sqrt{3}}{9}$ u.v.

## 3. Vetores no plano e no espaço

### Exercícios – páginas 108 a 119

**1.**

**1.1.** **a)** Por exemplo, $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{JH}$.
**b)** Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AF}$.
**c)** Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{KM}$.
**d)** Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AG}$.
**e)** Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{FE}$.

**1.2.** **a)** $D + \overrightarrow{EF} = D + \overrightarrow{DO} = O$
**b)** $K - \overrightarrow{BE} = K + \overrightarrow{EB} = K + \overrightarrow{KM} = M$
**c)** $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{AL}$, por exemplo.
**d)** $\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{HA}$, por exemplo.
**e)** $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{PD}$, por exemplo.
**f)** $\overrightarrow{HM} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{HN}$, por exemplo.

**1.3.** **a)** $||\overrightarrow{AD}|| = 3||\overrightarrow{AG}|| = 3||\overrightarrow{AE}|| = 3 \times 2 = 6$
**b)** Pelo teorema de Pitágoras:
$||\overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{AC}||^2 = 6^2 + 6^2$
$\Leftrightarrow ||\overrightarrow{AC}||^2 = 72$
Logo, $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
**c)** $||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}|| = 6 + 6 = 12$

**2.**

**2.1.** Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{CB}$.

**2.2.** **A.** Afirmação verdadeira.
$\overrightarrow{NT}$ e $\overrightarrow{AN}$ são vetores com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, logo $\overrightarrow{NT} = \overrightarrow{AN}$.
**B.** Afirmação falsa.
$\overrightarrow{JR}$ e $\overrightarrow{RP}$ não têm a mesma direção, logo não podem ser vetores simétricos, isto é, $\overrightarrow{JR} \neq -\overrightarrow{RP}$.
**C.** Afirmação verdadeira.
$\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{SN}$ são vetores com a mesma direção e o mesmo comprimento, mas com sentidos contrários, logo são vetores simétricos, isto é, $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{SN}$.
**D.** Afirmação falsa.
$A + \overrightarrow{BI} = A + \overrightarrow{AN} = N$
**E.** Afirmação verdadeira.
$T - \overrightarrow{BA} = T + \overrightarrow{AB} = T + \overrightarrow{TS} = S$
**F.** Afirmação verdadeira.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$, pela regra do triângulo.
**G.** Afirmação falsa.
$\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JR} = \overrightarrow{NR} \neq \overrightarrow{JR}$
**H.** Afirmação falsa.
$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{NG} \neq \overrightarrow{OT}$

**3.**

**3.1.** $B - 2\overrightarrow{FA} = B + 2\overrightarrow{AF} = B + \overrightarrow{BE} = E$

**3.2.** $E + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = E + \overrightarrow{FG} = E + \overrightarrow{ED} = D$

**3.3.** $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$, por exemplo.

**3.4.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FD}$, por exemplo.

**3.5.** $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$

**3.6.** $\overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FD}$, por exemplo.

**4.**

**4.1.** **a)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$L + \vec{x} = B \Leftrightarrow \vec{x} = B - L \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{LB}$, por exemplo.
**b)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$C - \vec{x} = H \Leftrightarrow \vec{x} = C - H \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{HC}$, por exemplo.
**c)** Seja $X$ o ponto que se pretende encontrar.
$X + \overrightarrow{OM} = F \Leftrightarrow X = F - \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow X = F + \overrightarrow{MO}$
$\Leftrightarrow X = F + \overrightarrow{FH} \Leftrightarrow X = H$
**d)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$\vec{x} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{LJ} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{LJ} - \overrightarrow{FB} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{BF}$
$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{LI}$, por exemplo.
**e)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$\overrightarrow{NL} + \vec{x} = \overrightarrow{CH} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{NL} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{LN}$
$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HJ} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{CJ}$, por exemplo.
**f)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$\overrightarrow{OP} - \vec{x} = \overrightarrow{EM} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EM} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ME}$
$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{OH}$, por exemplo.

**4.2.** **a)** $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH}$, por exemplo.
**b)** $2\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{GF}$, por exemplo.
**c)** $-3\vec{u} + 2\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BK}$, por exemplo.
**d)** $2(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} - 2\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{KF}$, por exemplo.
**e)** $2(\vec{u} + \vec{v}) - 3\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{u} + \vec{v} = -\vec{u} + 3\vec{v} =$
$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}$, por exemplo.
**f)** $-2(2\vec{u}) - (\vec{v} - \vec{u}) = -4\vec{u} - \vec{v} + \vec{u} = -3\vec{u} - \vec{v} =$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{JA}$, por exemplo.

**4.3.** **a)** $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{LN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AE} = k \times 2\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$
**b)** $(2k - 3)\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KN} \Leftrightarrow (2k - 3)\,\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow 2k - 3 = 3$
$\Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$
**c)** $k\overrightarrow{NM} + 3\overrightarrow{GH} = k\overrightarrow{JH} \Leftrightarrow k(-\overrightarrow{AE}) + 3\overrightarrow{AE} = k(-2\overrightarrow{AE})$
$\Leftrightarrow -k\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AE} = -2k\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow -k + 3 = -2k \Leftrightarrow k = -3$
**d)** $\overrightarrow{GL} - k^2\,\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} + k^2\,\overrightarrow{HI} = 3\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}$
$\Leftrightarrow k^2\,\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$

**5.**

**5.1.** **a)** $A + \overrightarrow{CF} = A + \overrightarrow{AE} = E$
**b)** $B - \overrightarrow{DE} = B + \overrightarrow{ED} = B + \overrightarrow{BC} = C$
**c)** Seja $M$ o centro do quadrado $[ABCD]$.
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$, por exemplo.
**d)** $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BF}$, por exemplo.
**e)** $\overrightarrow{FB} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FD}$, por exemplo.
**f)** $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}$, por exemplo.

**5.2.** **a)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$E + \overrightarrow{AC} + \vec{x} = C \Leftrightarrow \vec{x} = C - E - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{EA}$, por exemplo.
**b)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$\vec{x} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FB} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BF}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{EF}$, por exemplo.

**c)** Seja $\vec{x}$ o vetor que se pretende encontrar.
$\overrightarrow{AD} - \vec{x} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FB}$
$\Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FB} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{BA}$, por exemplo.

**5.3.** **a)** $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$

**b)** $\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} =$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} =$
$= \vec{b} + \vec{d} + \vec{0} =$
$= \vec{b} + \vec{d}$

**6.** Por um lado:
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
Por outro lado:
$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
Logo, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

**7.** $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) =$
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) =$
$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) =$
$= \overrightarrow{BD} + \vec{0} =$
$= \overrightarrow{BD}$

**8.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, logo os segmentos de reta [AB] e [DC] são paralelos.
Além disso:
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC} =$
$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}$
Logo, os segmentos de reta [DA] e [CE] são paralelos.
Assim, [AECD] é um paralelogramo.

**9.** $\vec{a}(2, 2)$; $\vec{b}(-2, 3)$; $\vec{c}(0, -3)$; $\vec{d}(1, -3)$; $\vec{e}(4, 1)$; $\vec{f}(3, 0)$; $\vec{g}(-3, -1)$; $\vec{h}(3, -1)$

**10.**
**10.1.** $\overrightarrow{OA}(3, 0, 0)$
**10.2.** $\overrightarrow{OC}(0, 6, 0)$
**10.3.** $\overrightarrow{OD}(0, 0, 2)$
**10.4.** $\overrightarrow{OB}(3, 6, 0)$
**10.5.** $\overrightarrow{FE}(0, -6, 0)$
**10.6.** $\overrightarrow{FD}(-3, -6, 0)$
**10.7.** $\overrightarrow{CF}(3, 0, 2)$
**10.8.** $\overrightarrow{CD}(0, -6, 3)$

**11.**
**11.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3) - (1, 2) = (-3, 1)$

**11.2.** $2\vec{u} + \overrightarrow{AB} = 2(-1, -5) + (-3, 1) = (-2, -10) + (-3, 1) = (-5, -9)$

**11.3.** $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = -2(-1, -5) + \frac{1}{2}(2, -1) = (2, 10) + \left(1, -\frac{1}{2}\right) =$
$= \left(3, \frac{19}{2}\right)$

**11.4.** $2(\vec{u} + \overrightarrow{AB}) = 2((-1, -5) + (-3, 1)) = 2(-4, -4) = (-8, -8)$

**11.5.** $\vec{v} - 2\overrightarrow{AB} = (2, -1) - 2(-3, 1) = (2, -1) + (6, -2) = (8, -3)$

**11.6.** $3\left(\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}\right) = 3\left(\frac{1}{2}(-1, -5) - 2(2, -1)\right) =$
$= 3\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) + (-4, 2)\right) = 3\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{27}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

**12.**
**12.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -1, 6) - (2, 1, 4) = (2, -2, 2)$

**12.2.** $\vec{u} - 2\overrightarrow{AB} = (3, 5, -1) - 2(2, -2, 2) = (3, 5, -1) + (-4, 4, -4) =$
$= (-1, 9, -5)$

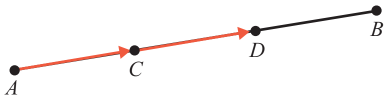
**12.3.** $-2\vec{u} + \vec{v} = -2(3, 5, -1) + (0, -3, 2) = (-6, -10, 2) + (0, -3, 2) =$
$= (-6, -13, 4)$

**12.4.** $2\left(\vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = 2\left((3, 5, -1) + \frac{1}{2}(2, -2, 2)\right) =$
$= 2((3, 5, -1) + (1, -1, 1)) = 2(4, 4, 0) = (8, 8, 0)$

**12.5.** $2\vec{v} - \overrightarrow{AB} = 2(0, -3, 2) - (2, -2, 2) = (0, -6, 4) - (2, -2, 2) =$
$= (-2, -4, 2)$

**12.6.** $2\left(\frac{1}{3}\vec{u} - \vec{v}\right) = 2\left(\frac{1}{3}(3, 5, -1) - (0, -3, 2)\right) =$
$= 2\left(\left(1, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (0, -3, 2)\right) = 2\left(1, \frac{14}{3}, -\frac{7}{3}\right) =$
$= \left(2, \frac{28}{3}, -\frac{14}{3}\right)$

**13.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (9, -10) - (-6, 8) = (15, -18)$




Sejam C e D os pontos cujas coordenadas se pretende determinar.
$C = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-6, 8) + \frac{1}{3}(15, -18) = (-6, 8) + (5, -6) =$
$= (-1, 2)$
$D = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-6, 8) + \frac{2}{3}(15, -18) = (-6, 8) + (10, -12) =$
$= (4, -4)$

**14.**
**14.1.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -(-5, 3) + (4, 6) = (9, 3)$

**14.2.** **a)** $B = A + \overrightarrow{AB} = (3, -1) + (-5, 3) = (-2, 2)$
$C = A + \overrightarrow{AC} = (3, -1) + (4, 6) = (7, 5)$
**b)** $D = C + \overrightarrow{BA} = (7, 5) + (5, -3) = (12, 2)$

**15.** $\overrightarrow{AE} = E - A = (0, -1) - (-2, -4) = (2, 3)$
$C = A + 2\overrightarrow{AE} = (-2, -4) + 2(2, 3) = (-2, -4) + (4, 6) = (2, 2)$
$\overrightarrow{BE} = E - B = (0, -1) - (3, -3) = (-3, 2)$
$D = B + 2\overrightarrow{BE} = (3, -3) + 2(-3, 2) = (3, -3) + (-6, 4) = (-3, 1)$

**16.**
**16.1.** $\overrightarrow{BA} = A - B = (-2, -2, 2) - (2, 2, 0) = (-4, -4, 2)$
$D = C + \overrightarrow{BA} = (-2, 4, -4) + (-4, -4, 2) = (-6, 0, -2)$

**16.2.** $\overline{BA} = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} =$
$= \sqrt{36} = 6$
$V = 36 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 6^2 \times \overline{EF} = 36$
$\Leftrightarrow 12\,\|\overrightarrow{EF}\| = 36$

$\Leftrightarrow ||\overrightarrow{EF}|| = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{1^2 + k^2 + k^2} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2k^2} = 3$

$\Leftrightarrow 1 + 2k^2 = 9$

$\Leftrightarrow 2k^2 = 8$

$\Leftrightarrow k^2 = 4$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$

Como $k \in \mathbb{R}^-$, então $k = -2$.

**16.3.** O ponto $F$ é o ponto médio de [AC], logo:

$F = \left(\frac{-2-2}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (-2, 1, -1)$

Então:

$E = F - \overrightarrow{EF} = (-2, 1, -1) - (1, -2, -2) = (-3, 3, 1)$

**17.**

**17.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (10, 1, 9) - (12, -2, 3) = (-2, 3, 6)$

$C = D + \overrightarrow{AB} = (6, 0, 0) + (-2, 3, 6) = (4, 3, 6)$

$G = H + \overrightarrow{AB} = (9, 6, -2) + (-2, 3, 6) = (7, 9, 4)$

$\overrightarrow{DH} = H - D = (9, 6, -2) - (6, 0, 0) = (3, 6, -2)$

$E = A + \overrightarrow{DH} = (12, -2, 3) + (3, 6, -2) = (15, 4, 1)$

$F = B + \overrightarrow{DH} = (10, 1, 9) + (3, 6, -2) = (13, 7, 7)$

**17.2.** $\overline{AB} = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} =$

$= \sqrt{49} = 7$

$V_{[ABCDEFGH]} = 7^3 = 343$ u.v.

**18.** $P = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = F + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG}) =$

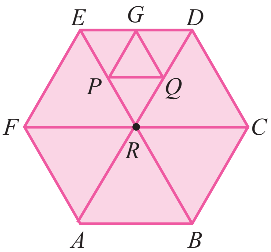
$= F + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD}) = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$: ponto médio de [EG]

$Q = B - \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{CD}) = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD} =$

$= B + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = B + \overrightarrow{BG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = G + \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$:

ponto médio de [DG]

$R = E + \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = E + \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = G$




Assim, $A_{[PQR]} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times 18 = \frac{3}{4}$ u.a.

**19.**

**19.1.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{v}$.

**19.2.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois a segunda coordenada de $\vec{u}$ é nula, mas a segunda coordenada de $\vec{v}$ não é.

**19.3.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois $\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2}$.

**19.4.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2}$.

**19.5.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois a segunda coordenada de $\vec{v}$ é nula, mas a segunda coordenada de $\vec{u}$ não é.

**19.6.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \neq \frac{\frac{2}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{27}$.

**20.**

**20.1.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois a terceira coordenada de $\vec{v}$ é nula, mas a terceira coordenada de $\vec{u}$ não é.

**20.2.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e as primeiras coordenadas de ambos os vetores são nulas.

**20.3.** $\vec{u}$ e v são colineares, pois $\vec{u} = \frac{2}{\pi}\vec{v}$.

**20.4.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{2}$.

**20.5.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, pois a terceira coordenada de $\vec{u}$ é nula, mas a terceira coordenada de $\vec{v}$ não é.

**20.6.** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, pois $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$.

**21.**

**21.1.** $\frac{3}{-2} = \frac{-1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

Logo, o valor de $k$ é $\frac{2}{3}$.

**21.2.** $\frac{k}{4} = \frac{2}{k} \Leftrightarrow k^2 = 8 \Leftrightarrow k = \sqrt{8} \vee k = -\sqrt{8}$

$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{2} \vee k = -2\sqrt{2}$

Logo, os valores de $k$ são $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.

**21.3.** $\frac{2}{k+1} = \frac{k-1}{4} \Leftrightarrow (k+1)(k-1) = 8 \Leftrightarrow k^2 - 1 = 8$

$\Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3$

Logo, os valores de $k$ são $-3$ e 3.

**21.4.** $\frac{k-1}{2} = \frac{5}{k+2} \Leftrightarrow (k-1)(k+2) = 10 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 10$

$\Leftrightarrow k^2 + k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$

$\Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow k = -4 \vee k = 3$

Logo, os valores de $k$ são $-4$ e 3.

**22.**

**22.1.** $\frac{1}{2} = \frac{k}{2} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow k = 1$

Logo, o valor de $k$ é 1.

**22.2.** $\frac{k}{-1} = \frac{-2}{k} \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$

Logo, os valores de $k$ são $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

**22.3.** $\frac{k}{2} = \frac{k}{2} = \frac{4}{2k} \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \frac{4}{2k} \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \Leftrightarrow k^2 = 4$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$

Logo, os valores de $k$ são $-2$ e 2.

**22.4.** $k \in \mathbb{R}$

Logo, $k$ pode ser qualquer número real.

**23.**

**23.1.** $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = (-2, 1) - 2(2, 3)$

$\Leftrightarrow \vec{x} = (-2, 1) + (-4, -6) \Leftrightarrow \vec{x} = (-6, -5)$

Assim, $\vec{x} = (-6, -5)$.

**23.2.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -2) - (-1, 0) = (2, -2)$

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{y} - \vec{u} \Leftrightarrow 2\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \vec{u})$

$\Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}((2, -2) + (-2, 1)) \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}(0, -1)$

$\Leftrightarrow \vec{y} = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Assim, $\vec{y} = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

**23.3.** Uma vez que $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são colineares, tem-se:

$\vec{w} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{w} = k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (-2k, k), k \in \mathbb{R}$

$\|\vec{w}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + k^2} = 5$

$\Leftrightarrow 4k^2 + k^2 = 25$

$\Leftrightarrow 5k^2 = 25$

$\Leftrightarrow k^2 = 5$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{5} \vee k = -\sqrt{5}$

Se $k = \sqrt{5}$, então $\vec{w}(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Se $k = -\sqrt{5}$, então $\vec{w}(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

**23.4.** Uma vez que $\vec{t}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares, tem-se:

$\vec{t} = k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{t} = k(2, -2), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{t} = (2k, -2k), k \in \mathbb{R}$

$\|\vec{t}\| = \sqrt{32} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (-2k)^2} = \sqrt{32}$

$\Leftrightarrow 4k^2 + 4k^2 = 32$

$\Leftrightarrow 8k^2 = 32$

$\Leftrightarrow k^2 = 4$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -2$

Como $\vec{t}$ tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$, então $k = -2$, logo $\vec{t}(-4, 4)$.

**24.**

**24.1.** Uma vez que $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são vetores colineares, tem-se:

$\vec{w} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{w} = k(1, 2, -1), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (k, 2k, -k), k \in \mathbb{R}$

$\|\vec{w}\| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (2k)^2 + (-k)^2} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4k^2 + k^2} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{6k^2} = 6$

$\Leftrightarrow 6k^2 = 36$

$\Leftrightarrow k^2 = 6$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{6} \vee k = -\sqrt{6}$

Como $\vec{u}$ e $\vec{w}$ têm o mesmo sentido, então $k = \sqrt{6}$, logo $\vec{w}(\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

**24.2.** Uma vez que $\vec{w}$ e $\vec{v}$ são vetores colineares, tem-se:

$\vec{w} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{w} = k(2, 1, -3), k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{w} = (2k, k, -3k), k \in \mathbb{R}$

$\|\vec{w}\| = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + k^2 + (-3k)^2} = 2\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + k^2 + 9k^2} = 2\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{14k^2} = 2\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow 14k^2 = 28$

$\Leftrightarrow k^2 = 2$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$

Como $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm sentidos contrários, então $k = -\sqrt{2}$, logo $\vec{w}(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

**25.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (-5, k) - (2, -3) = (-7, k + 3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, -2) - (2, -3) = (2, 1)$

Para que os pontos $A$, $B$ e $C$ sejam colineares, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm de ser colineares, logo:

$-\frac{7}{2} = \frac{k + 3}{1} \Leftrightarrow 2k + 6 = -7 \Leftrightarrow k = -\frac{13}{2}$

Logo, o valor de $k$ é $-\frac{13}{2}$.

**26.**

**26.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, b, -1) - (1, -2, 4) = (2, b + 2, -5)$

Para que $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam vetores colineares:

$\frac{2}{a} = \frac{b + 2}{10} \wedge \frac{2}{a} = \frac{-5}{-a - 2b}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20 = ab + 2a \\ -2a - 4b = -5a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab + 2a = 20 \\ 4b = 3a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \times \frac{3}{4}a + 2a = 20 \\ b = \frac{3}{4}a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}a^2 + 2a - 20 = 0 \\ b = \frac{3}{4}a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{\frac{3}{2}} \\ b = \frac{3}{4}a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2 \pm 8}{\frac{3}{2}} \\ b = \frac{3}{4}a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{20}{3} \\ b = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{20}{3}\right) \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{3}{4} \times 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{20}{3} \\ b = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Assim, $a = -\frac{20}{3}$ e $b = -5$ ou $a = 4$ e $b = 3$.

**26.2.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, b, -1) - (1, -2, 4) = (2, b + 2, -5)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{41} \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (b + 2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4 + b^2 + 4b + 4 + 25} = \sqrt{41}$

$\Leftrightarrow \sqrt{b^2 + 4b + 41} = \sqrt{41}$

$\Leftrightarrow b^2 + 4b + 41 = 41$

$\Leftrightarrow b^2 + 4b = 0$

$\Leftrightarrow b(b + 4) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0 \vee b = -4$

Como $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então $b = -4$.

Uma vez que $b = -4$, tem-se $\vec{u}(a, 10, -a + 8)$.

$\|\vec{u}\| = 2\sqrt{33} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 10^2 + (-a + 8)^2} = 2\sqrt{33}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 100 + a^2 - 16a + 64} = 2\sqrt{33}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 - 16a + 164} = 2\sqrt{33}$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 16a + 164 = 132$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 16a + 32 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (a - 4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 4$

Assim, $a = 4$ e $b = -4$.

**27.** Se $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$, então $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{PB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

Tem-se que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AN}$.

Então:

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AM} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} =$

$= 2\overrightarrow{AM} + \frac{2}{5}(-2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AN}) = 2\overrightarrow{AM} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AM} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AN} =$

$= \frac{6}{5}\overrightarrow{AM} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AN} = \frac{6}{5}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$

Logo, $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ são vetores colineares.

**28.** Tem-se que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{FC}$, logo $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Além disso, $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Então:

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

e

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} =$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

ou seja, $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{FE}$, o que significa que os vetores $\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{FE}$ são colineares, logo os pontos $B$, $F$ e $E$ são colineares.

**29.** $A(5, -2)$; $B(-1, 1)$; $C(4, 6)$

Um vetor diretor da reta $AB$ é, por exemplo:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 1) - (5, -2) = (-6, 3)$

Logo, uma equação vetorial da reta $AB$ é, por exemplo:

$AB$: $(x, y) = (5, -2) + k(-6, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

O declive da reta $AB$ é dado por:

$m_{AB} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

Logo, a equação reduzida da reta $AB$ é da forma:

$AB$: $y = -\frac{1}{2}x + b$

Como $A \in AB$, então:

$-2 = -\frac{1}{2} \times 5 + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

Assim:

$AB$: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Um vetor diretor da reta $AC$ é, por exemplo:

$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 6) - (5, -2) = (-1, 8)$

Logo, uma equação vetorial da reta $AC$ é, por exemplo:

$AC$: $(x, y) = (5, -2) + k(-1, 8)$, $k \in \mathbb{R}$

O declive da reta $AC$ é dado por:

$m_{AC} = \frac{8}{-1} = -8$

Logo, a equação reduzida da reta $AC$ é da forma:

$AC$: $y = -8x + b$

Como $A \in AC$, então:

$-2 = -8 \times 5 + b \Leftrightarrow b = -2 + 40 \Leftrightarrow b = 38$

Assim:

$AC$: $y = -8x + 38$

Um vetor diretor da reta $BC$ é, por exemplo:

$\overrightarrow{BC} = C - B = (4, 6) - (-1, 1) = (5, 5)$

Logo, uma equação vetorial da reta $BC$ é, por exemplo:

$BC$: $(x, y) = (-1, 1) + k(5, 5)$, $k \in \mathbb{R}$

O declive da reta $BC$ é dado por:

$m_{BC} = \frac{5}{5} = 1$

Logo, a equação reduzida da reta $AC$ é da forma:

$BC$: $y = x + b$

Como $B \in BC$, então:

$1 = -1 + b \Leftrightarrow b = 1 + 1 \Leftrightarrow b = 2$

Assim:

$BC$: $y = x + 2$

**30.**

**30.1.** Uma equação vetorial da reta $r$ é, por exemplo:

$r$: $(x, y) = (-1, -2) + k(1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

O declive da reta $r$ é dado por:

$m_r = \frac{3}{1} = 3$

Logo, $r$: $y = 3x + b$.

Como $(-1, -2) \in r$, então:

$-2 = 3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = -2 + 3 \Leftrightarrow b = 1$

Assim, a equação reduzida da reta $r$ é:

$r$: $y = 3x + 1$

**30.2.** Uma equação vetorial da reta $r$ é, por exemplo:

$r$: $(x, y) = (5, -7) + k(1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

Como a reta $r$ é horizontal e passa no ponto $R(5, -7)$, então a sua equação reduzida é $y = -7$.

**30.3.** Um vetor diretor da reta $r$ é:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -1) - (2, 3) = (2, -4)$

Assim, uma equação vetorial da reta $r$ é, por exemplo:

$r$: $(x, y) = (2, 3) + k(2, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

O declive da reta $r$ é dado por:

$m_r = -\frac{4}{2} = -2$

Logo, $r$: $y = -2x + b$.

Como $A \in r$, então:

$3 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 3 + 4 \Leftrightarrow b = 7$

Assim, a equação reduzida da reta $r$ é:

$r$: $y = -2x + 7$

**31.**

**31.1. a)** $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1, 2) - (1, 2, -1) = (2, -3, 3)$

$AB$: $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(2, -3, 3)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**b)** $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(2, 5, -2)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**c)** $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(1, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**d)** $(x, y, z) = (3, -1, 2) + k(0, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**e)** $(x, y, z) = (3, -1, 2) + k(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**31.2.** $(1 - p, 2p, -2p + 1) = (1, 2, -1) + k(2, -3, 3)$

$\Leftrightarrow (1 - p, 2p, -2p + 1) = (1 + 2k, 2 - 3k, -1 + 3k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - p = 1 + 2k \\ 2p = 2 - 3k \\ -2p + 1 = -1 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -2k \\ 2 \times (-2k) = 2 - 3k \\ -2 \times (-2k) + 1 = -1 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -2k \\ -4k = 2 - 3k \\ 4k + 1 = -1 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -2k \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ k = -2 \end{cases}$$

Assim, o valor de $p$ é 4 e o valor de $k$ é $-2$.

**32.**

**32.1.** $3 \times 2 + a \times (-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow 6 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow 8 - a = 0 \Leftrightarrow a = 8$

**32.2.** $3x + ay + 2 = 0 \Leftrightarrow ay = -3x - 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{a}x - \frac{2}{a}$

Uma vez que se pretende que o declive da reta $r$ seja 3, então:

$-\frac{3}{a} = 3 \Leftrightarrow -3 = 3a \Leftrightarrow a = -1$

O valor de $a$ é $-1$.

**32.3.** Tem-se que $m_s = -\frac{5}{4}$.

Para que as retas $r$ e $s$ sejam paralelas têm de ter o mesmo declive, logo:

$-\frac{3}{a} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{12}{5}$

O valor de $a$ é $\frac{12}{5}$.

**33.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$

$m_{AB} = \frac{3}{2}$

$A \in AB$: $2 = \frac{3}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

Logo, $AB$: $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 3) - (1, 2) = (-2, 1)$

$m_{AC} = -\frac{1}{2}$

$A \in AC$: $2 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$

Logo, $AC$: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 3) - (3, 5) = (-4, -2)$

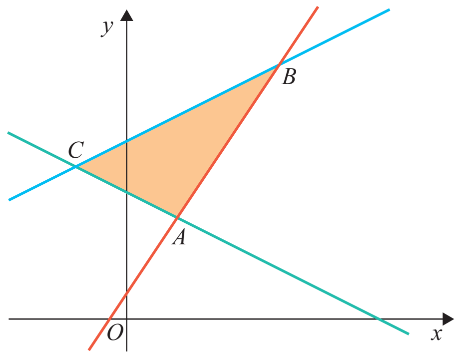
$m_{BC} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$

$B \in BC$: $5 = \frac{1}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 5 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{7}{2}$

Logo, $BC$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

O triângulo $[ABC]$ é definido pela condição:

$y \geq \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \wedge y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \wedge y \leq \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$




**34.**

**34.1.** A equação reduzida da bissetriz dos quadrantes pares é $y = -x$, pelo que qualquer ponto desta reta é da forma $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação da reta $r$, tem-se:

$2x + 3 = -x \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$

Logo, $(-1, 1)$ são as coordenadas do ponto de interseção da reta $r$ com a bissetriz dos quadrantes pares.

**34.2.** A equação reduzida da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y = x$, pelo que qualquer ponto desta reta é da forma $(x, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação da reta $s$, tem-se:

$(x, x) = (3, -3) + k(2, -1) \Leftrightarrow (x, x) = (3 + 2k, -3 - k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ x = -3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ 3 + 2k = -3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ 3k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \times (-2) \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Logo, $(-1, -1)$ são as coordenadas do ponto de interseção da reta $s$ com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

**34.3.** Um vetor diretor da reta $r$ é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(1, 2)$, e um ponto da reta $r$ é o ponto de coordenadas $(0, 3)$. Assim:

$r$: $(x, y) = (0, 3) + k(1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**34.4.** O declive da reta $s$ é dado por $m_s = -\frac{1}{2}$.

Então, a equação reduzida da reta $s$ é da forma $s$: $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como $(3, -3) \in s$, então:

$-3 = -\frac{1}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -3 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2}$

Logo, $s$: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

**34.5.** $2x + 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x + 6 = -x - 3 \Leftrightarrow 5x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$

$y = 2 \times \left(-\frac{9}{5}\right) + 3 = -\frac{3}{5}$

Logo, $P\left(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

**34.6.** $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Logo, $R\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

$(x, 0) = (3, -3) + k(2, -1) \Leftrightarrow (x, 0) = (3 + 2k, -3 - k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2k \\ 0 = -3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \times (-3) \\ k = -3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ k = -3 \end{cases}$

Logo, $S(-3, 0)$. Assim:

$A_{[PRS]} = \dfrac{\left|-\frac{3}{2} - (-3)\right| \times \left|-\frac{3}{5}\right|}{2} = \dfrac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{5}}{2} = \dfrac{9}{20}$ u.a.

**35.**

**35.1.** $AB$: $4x - 3y = 16 \Leftrightarrow -3y = -4x + 16 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$

Uma vez que o declive da reta $AB$ é $\frac{4}{3}$, o vetor de coordenadas $(3, 4)$ é um vetor diretor desta reta. Além disso, o ponto de coordenadas $\left(0, -\frac{16}{3}\right)$ pertence à reta $AB$. Assim, uma equação vetorial da reta $AB$ é, por exemplo:

$(x, y) = \left(0, -\frac{16}{3}\right) + k(3, 4), k \in \mathbb{R}$

**35.2.** O ponto $D$ é o ponto de interseção da reta $CD$ com o eixo $Oy$.

A reta $CD$ é paralela à reta $AB$ e passa no ponto $C$, logo uma equação vetorial desta reta é:

$(x, y) = (3, 5) + k(3, 4), k \in \mathbb{R}$

Uma vez que $D$ pertence ao eixo $Oy$, tem-se que $D(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação da reta $CD$, vem que:

$(0, y) = (3, 5) + k(3, 4) \Leftrightarrow (0, y) = (3 + 3k, 5 + 4k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + 3k \\ y = 5 + 4k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Logo, $D(0, 1)$.

O ponto $A$ é o ponto de interseção da reta $AB$ com o eixo $Ox$.

Uma vez que $A$ pertence ao eixo $Ox$, tem-se que $A(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação da reta $AB$, vem que:

$4x - 3 \times 0 = 16 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $A(4, 0)$.

Assim, um vetor diretor da reta $AC$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 1) - (4, 0) = (-4, 1)$

O declive da reta $AC$ é, então, dado por $m_{AC} = -\frac{1}{4}$.

Como $D(0, 1)$ é um ponto da reta $AD$, então a equação reduzida desta reta é $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

**35.3.** $\overrightarrow{DC} = C - D = (3, 5) - (0, 1) = (3, 4)$

$B = A + \overrightarrow{DC} = (4, 0) + (3, 4) = (7, 4)$

**36.**

**36.1. a)** $\overrightarrow{AB} = B - A = (-8, 10, 4) - (0, 4, 0) = (-8, 6, 4)$

$G = F + \overrightarrow{AB} = (2, 4, 4) + (-8, 6, 4) = (-6, 10, 8)$

$C = D + \overrightarrow{AB} = (-6, -6, 3) + (-8, 6, 4) = (-14, 0, 7)$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (2, 4, 4) - (0, 4, 0) = (2, 0, 4)$

$E = D + \overrightarrow{AF} = (-6, -6, 3) + (2, 0, 4) = (-4, -6, 7)$

$H = C + \overrightarrow{AF} = (-14, 0, 7) + (2, 0, 4) = (-12, 0, 11)$

**b)** $\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{116}$

$\overline{AF} = \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-6, -6, 3) - (0, 4, 0) = (-6, -10, 3)$

$\overline{AD} = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-10)^2 + 3^2} = \sqrt{145}$

$V = \overline{AB} \times \overline{AF} \times \overline{AD} = \sqrt{116} \times \sqrt{20} \times \sqrt{145} = 580$ u.v.

**c)** $\overrightarrow{AH} = H - A = (-12, 0, 11) - (0, 4, 0) = (-12, -4, 11)$

$\overline{AH} = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-12)^2 + (-4)^2 + 11^2} = \sqrt{281}$

O diâmetro da superfície esférica é $\sqrt{281}$, logo o seu raio é $\frac{\sqrt{281}}{2}$.

Seja $M$ o ponto médio de $[AH]$:

$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = (0, 4, 0) + \frac{1}{2}(-12, -4, 11) =$

$= (0, 4, 0) + \left(-6, -2, \frac{11}{2}\right) = \left(-6, 2, \frac{11}{2}\right)$

O ponto $M$ é o centro da superfície esférica.

Assim, a equação pedida é:

$(x + 6)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{281}{4}$

**36.2. a)** $AB$: $(x, y, z) = (0, 4, 0) + k(-8, 6, 4)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**b)** $FE$: $(x, y, z) = (2, 4, 4) + k(-6, -10, 3)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**c)** $CH$: $(x, y, z) = (-14, 0, 7) + k(2, 0, 4)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**37.**

**37.1.** Como $A$ pertence ao eixo $Ox$, então $A(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

O ponto $A$ é o ponto de interseção da reta $AB$ com o eixo $Ox$, logo:

$(x, 0, 0) = (0, 3, 0) + k(-4, 3, 0) \Leftrightarrow (x, 0, 0) = (-4k, 3 + 3k, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k \\ 0 = 3 + 3k \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ k = -1 \end{cases}$

Assim, $A(4, 0, 0)$.

Como $B$ pertence ao eixo $Oy$, então $B(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$.

Além disso, $B$ pertence à reta $AB$, logo $B(0, 3, 0)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 3, 0)$

$\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{BG} = G - B = (6, 11, 0) - (0, 3, 0) = (6, 8, 0)$

$\overline{BG} = \|\overrightarrow{BG}\| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$

$V = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{AD} = 5 \times 10 \times 6 = 300$ u.v.

**37.2.** $C = B + 6(0, 0, 1) = (0, 3, 0) + (0, 0, 6) = (0, 3, 6)$

$\overrightarrow{CG} = G - C = (6, 11, 0) - (0, 3, 6) = (6, 8, -6)$

Assim, uma equação vetorial da reta $CG$ é:

$CG$: $(x, y, z) = (0, 3, 6) + k(6, 8, -6)$, $k \in \mathbb{R}$

Como o ponto $P$ pertence ao plano $xOz$, tem-se que $P(x, 0, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$.

Além disso, o ponto $P$ pertence à reta $CG$, logo:

$(x, 0, z) = (0, 3, 6) + k(6, 8, -6)$

$\Leftrightarrow (x, 0, z) = (6k, 3 + 8k, 6 - 6k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6k \\ 0 = 3 + 8k \\ z = 6 - 6k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \\ k = -\frac{3}{8} \\ z = 6 - 6 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{4} \\ k = -\dfrac{3}{8} \\ z = \dfrac{33}{4} \end{cases}$

Então, $P\left(-\dfrac{9}{4}, 0, \dfrac{33}{4}\right)$.

**37.3.** $F = G + 6(0, 0, 1) = (6, 11, 0) + (0, 0, 6) = (6, 11, 6)$
$\overrightarrow{AF} = F - A = (6, 11, 6) - (4, 0, 0) = (2, 11, 6)$
Assim, uma equação vetorial da reta $r$ é:
$r: (x, y, z) = (10, 8, 0) + k(2, 11, 6), k \in \mathbb{R}$
Como o ponto $Q$ pertence ao plano $yOz$, tem-se $Q(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}$.
Além disso, o ponto $Q$ pertence à reta $r$, logo:
$(0, y, z) = (10, 8, 0) + k(2, 11, 6)$
$\Leftrightarrow (0, y, z) = (10 + 2k, 8 + 11k, 6k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 10 + 2k \\ y = 8 + 11k \\ z = 6k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ y = 8 + 11 \times (-5) \\ z = 6 \times (-5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ y = -47 \\ z = -30 \end{cases}$

Então, $Q(0, -47, -30)$.

**38.**

**38.1.** $A(0, y, 0), y \in \mathbb{R}$
$(0, y, 0) = (10, -4, 0) + k(5, -4, 0)$
$\Leftrightarrow (0, y, 0) = (10 + 5k, -4 - 4k, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 10 + 5k \\ y = -4 - 4k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ y = -4 - 4 \times (-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Logo, $A(0, 4, 0)$.
$B(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}$
$(x, 0, 0) = (10, -4, 0) + k(5, -4, 0)$
$\Leftrightarrow (x, 0, 0) = (10 + 5k, -4 - 4k, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 5k \\ 0 = -4 - 4k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 5 \times (-1) \\ k = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = -1 \end{cases}$

Logo, $B(5, 0, 0)$.
$\overline{AB} = \sqrt{(0-5)^2 + (4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$
$V = \sqrt{1025}\,\pi \Leftrightarrow \pi \times \overline{BC}^2 \times \sqrt{41} = 5\sqrt{41}\,\pi \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 5$

Logo, $\overline{BC} = \sqrt{5}$ u.c.

**38.2.** Ponto genérico da reta $AB$: $P(10 + 5k, -4 - 4k, 0), k \in \mathbb{R}$
$\overrightarrow{AP} = P - A = (10 + 5k, -4 - 4k, 0) - (0, 4, 0) =$
$= (10 + 5k, -8 - 4k, 0)$
$\|\overrightarrow{AP}\| = 2\sqrt{41} \Leftrightarrow \sqrt{(10 + 5k)^2 + (-8 - 4k)^2 + 0^2} = 2\sqrt{41}$
$\Leftrightarrow 100 + 100k + 25k^2 + 64 + 64k + 16k^2 = 164$
$\Leftrightarrow 41k^2 + 164k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k(k + 4) = 0$
$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -4$
Se $k = 0$, então $P(10, -4, 0)$.
Se $k = -4$, então $P(-10, 12, 0)$.

**39.**

**39.1.** O ponto $R$ é o ponto de interseção da reta $QR$ com a reta $CD$.
$V = 512 \Leftrightarrow \overline{OA}^3 = 512 \Leftrightarrow \overline{OA} = 8$
Assim, $P(8, 4, 8)$, $Q(0, 6, 8)$ e $S(8, 8, 3)$.
As retas $PS$ e $QR$ são paralelas, logo um vetor diretor da reta $QR$ é:
$\overrightarrow{PS} = S - P = (8, 8, 3) - (8, 4, 8) = (0, 4, -5)$
Então, uma equação vetorial da reta $QR$ é:
$QR: (x, y, z) = (0, 6, 8) + k(0, 4, -5), k \in \mathbb{R}$
Como o ponto $R$ pertence à reta $CD$, definida por $x = 0 \wedge y = 8$, então:
$R(0, 8, z), z \in \mathbb{R}$
$(0, 8, z) = (0, 6, 8) + k(0, 4, -5)$
$\Leftrightarrow (0, 8, z) = (0, 6 + 4k, 8 - 5k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 6 + 4k \\ z = 8 - 5k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{11}{2} \end{cases}$

Logo, $R\left(0, 8, \dfrac{11}{2}\right)$.

**39.2.** $PS: (x, y, z) = (8, 4, 8) + k(0, 4, -5), k \in \mathbb{R}$
O ponto $I$ pertence ao plano $xOy$, logo $I(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}$.
$(x, y, 0) = (8, 4, 8) + k(0, 4, -5)$
$\Leftrightarrow (x, y, 0) = (8, 4 + 4k, 8 - 5k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 + 4k \\ 0 = 8 - 5k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 + 4 \times \dfrac{8}{5} \\ k = \dfrac{8}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \dfrac{52}{5} \\ k = \dfrac{8}{5} \end{cases}$

$I\left(8, \dfrac{52}{5}, 0\right)$

$\overline{AE} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\overline{AI} = \dfrac{52}{5}$

[$AEI$] é um triângulo retângulo em $A$. Assim:

$$A_{[AEI]} = \frac{\overline{AE} \times \overline{AI}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \times \frac{52}{5}}{2} = \frac{208\sqrt{2}}{5} \text{ u.a.}$$

**40.**

**40.1.** Como $A$ é um ponto do eixo das abcissas, $A(x, 0), x \in \mathbb{R}$.

$0 = ax + b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Logo, $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Ponto genérico da reta $s$: $(2k, b - ak)$, $k \in \mathbb{R}$

Substituindo na equação da reta $r$:

$b - ak = a \times 2k + b \Leftrightarrow -ak = 2ak \Leftrightarrow k = 0$

Logo, $B(0, b)$.

Como $C$ é um ponto do eixo das abcissas, $C(x, 0), x \in \mathbb{R}$.

$(x, 0) = (0, b) + k(2, -a) \Leftrightarrow (x, 0) = (2k, b - ak)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ 0 = b - ak \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ ak = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2b}{a} \\ k = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Logo, $C\left(\frac{2b}{a}, 0\right)$. Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{\left(\frac{2b}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right)\right) \times b}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2b}{a} + \frac{b}{a}\right) \times b =$$

$$= \frac{b}{2} \times \frac{3b}{a} = \frac{3b^2}{2a}$$

**40.2.** $\vec{u}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ é paralelo ao lado [$AB$], uma vez que o declive da reta $r$ é positivo.

Assim, $m_r = a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$.

$\frac{3b^2}{2a} = 48 \Leftrightarrow \frac{3b^2}{2 \times 2} = 48 \Leftrightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = 8 \vee b = -8$

Como $b$ é um número positivo, então $b = 8$.

Assim, $A\left(-\frac{8}{2}, 0\right)$, ou seja, $A(-4, 0)$, $B(0, 8)$ e $C\left(\frac{2 \times 8}{2}, 0\right)$, ou seja, $C(8, 0)$.

$\overline{AC} = 8 - (-4) = 12$

$\overline{AB} = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$\overline{BC} = \sqrt{(0-8)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Então, $P_{[ABC]} = \left(12 + 4\sqrt{5} + 8\sqrt{2}\right)$ u.c.

## Exercícios globais – páginas 120 a 125

**41.**

**41.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -3) - (5, 6) = (-1, -9)$

**41.2.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 2\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = C - A + 2\vec{u} \Leftrightarrow C = A + \overrightarrow{AB} - 2\vec{u}$

$\Leftrightarrow C = B - 2\vec{u} \Leftrightarrow C = (4, -3) - 2(-1, -3) \Leftrightarrow C = (6, 3)$

**41.3.** $\overrightarrow{AB} + \vec{u} = (-1, -9) + (-1, -3) = (-2, -12)$

$\|\overrightarrow{AB} + \vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-12)^2} = \sqrt{4 + 144} = \sqrt{148} =$

$= 2\sqrt{37}$

**41.4.** $m_{AB} = \frac{-9}{-1} = 9$

$A \in AB$: $6 = 9 \times 5 + b \Leftrightarrow b = 6 - 45 \Leftrightarrow b = -39$

$AB$: $y = 9x - 39$

**41.5.** $(x, y) = (5, 6) + k(-1, -3)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**41.6.** Bissetriz dos quadrantes ímpares: $y = x$

$P(x, x), x \in \mathbb{R}$

$x = 9x - 39 \Leftrightarrow 8x = 39 \Leftrightarrow x = \frac{39}{8}$

Logo, $P\left(\frac{39}{8}, \frac{39}{8}\right)$.

**41.7.** Opção (C)

Uma vez que o declive da reta $AB$ é 9, como se viu antes, então os vetores diretores de retas paralelas a $AB$ são colineares com o vetor $(1, 9)$.

Assim, $(x, y) = (2, 3) + k(1, 9)$, $k \in \mathbb{R}$, é uma equação vetorial de uma dessas retas.

**42.**

**42.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 4, -1) - (1, -2, 6) = (2, 6, -7)$

**42.2.** $2\overrightarrow{AB} - \vec{u} = 2(2, 6, -7) - (2, 3, -1) = (4, 12, -14) - (2, 3, -1) =$

$= (2, 9, -13)$

**42.3.** $\overrightarrow{AB} - \vec{u} = (2, 6, -7) - (2, 3, -1) = (0, 3, -6)$

$\|\overrightarrow{AB} - \vec{u}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

**42.4.** $AB$: $(x, y, z) = (1, -2, 6) + k(2, 6, -7)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**42.5.** $(x, y, z) = (3, 4, -1) + k(2, 3, -1)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**42.6.** $(2, 1, 0) = (1, -2, 6) + k(2, 6, -7)$

$\Leftrightarrow (2, 1, 0) = (1 + 2k, -2 + 6k, 6 - 7k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + 2k \\ 1 = -2 + 6k \\ 0 = 6 - 7k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ 6k = 3 \\ 7k = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{6}{7} \end{cases} \quad \text{Sistema impossível.}$$

Logo, o ponto $C$ não pertence à reta $AB$.

**43.**

**43.1.** $(x, y) = (2, 1) + k(1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**43.2.** Opção (A)

A circunferência é definida pela condição $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Como o ponto $A$ pertence ao eixo das ordenadas, então $A(0, y)$, $y \in \mathbb{R}^+$.

Além disso, $A$ é um ponto da circunferência, então:

$(0 - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow 4 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow y - 1 = 1 \vee y - 1 = -1 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = 0$

Logo, $A(0, 2)$.

Assim, $AB$: $y = -x + 2$.

**43.3.** Uma vez que $B$ pertence à reta $AB$, tem-se que $B(x, -x + 2)$, $x \in \mathbb{R}^+$.
Além disso, $B$ é um ponto da circunferência, logo:
$(x - 2)^2 + (-x + 2 - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (-x + 1)^2 = 5$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$
$\Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
Assim, $B(3, -1)$.

**43.4.** $\overrightarrow{CB} = B - C = (3, -1) - (2, 1) = (1, -2)$
$D = A + \overrightarrow{CB} = (0, 2) + (1, -2) = (1, 0)$

**43.5.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 5 \wedge y \geq -x + 2 \wedge y \geq 0$

**44.**
**44.1.** Opção (B)

$m_r = \frac{8}{5}$

$s$: $3x + 2ay = -1 \Leftrightarrow 2ay = -3x - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2a}x - \frac{1}{2a}$

$m_s = -\frac{3}{2a}$

Para que as retas $r$ e $s$ sejam paralelas:

$m_r = m_s \Leftrightarrow \frac{8}{5} = -\frac{3}{2a} \Leftrightarrow 2a = -\frac{15}{8} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{16}$

**44.2.** $s$: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

**a)** $(x, y) = (0, 0) + k(4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**b)** $m_r = \frac{8}{5}$ e $m_s = \frac{3}{4}$, logo as retas $r$ e $s$ são concorrentes.

$r$: $y = \frac{8}{5}x + b$

$(-2, 3) \in r$: $3 = \frac{8}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{16}{5}$

$\Leftrightarrow b = \frac{31}{5}$

$r$: $y = \frac{8}{5}x + \frac{31}{5}$

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{8}{5}x + \frac{31}{5} \Leftrightarrow 15x + 5 = 32x + 124$

$\Leftrightarrow -17x = 119 \Leftrightarrow x = -\frac{119}{17} \Leftrightarrow x = -7$

$y = \frac{3}{4} \times (-7) + \frac{1}{4} = -\frac{21}{4} + \frac{1}{4} = -5$

O ponto de interseção das retas $r$ e $s$ tem coordenadas $(-7, -5)$.

**44.3.** $P$ é o ponto de interseção da mediatriz de $[AB]$ com a reta $r$.
Mediatriz de $[AB]$:
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 6y = 10x + 20 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$

$\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} = \frac{8}{5}x + \frac{31}{5} \Leftrightarrow 25x + 50 = 24x + 93 \Leftrightarrow x = 43$

$y = \frac{5}{3} \times 43 + \frac{10}{3} = 75$

Logo, $P(43, 75)$.

**45.**
**45.1.** $B = C + \overrightarrow{OA} = (-2, 4) + (4, 2) = (2, 6)$

**45.2.** $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 4) - (4, 2) = (-6, 2)$

$\vec{u} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{u} = k(-6, 2)$
$\Leftrightarrow \vec{u} = (-6k, 2k)$
$\|\vec{u}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-6k)^2 + (2k)^2} = 5 \Leftrightarrow 36k^2 + 4k^2 = 25$

$\Leftrightarrow 40k^2 = 25 \Leftrightarrow k^2 = \frac{25}{40} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{25}{40}} \vee k = -\sqrt{\frac{25}{40}}$

$\Leftrightarrow k = \frac{5}{2\sqrt{10}} \vee k = -\frac{5}{2\sqrt{10}} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{10}}{4} \vee k = -\frac{\sqrt{10}}{4}$

Como $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm o mesmo sentido, então $k = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Logo, $\vec{u}\left(-6 \times \frac{\sqrt{10}}{4}, 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$, ou seja,

$\vec{u}\left(-\frac{3\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

**45.3.** Seja $M$ o centro da circunferência.

$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (4, 2) + \frac{1}{2}(-6, 2) = (4, 2) + (-3, 1) = (1, 3)$

$\overline{AC} = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Logo, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{10}$.

Assim, uma condição que define a circunferência é:
$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

**45.4.** $\overrightarrow{OA} = A - O = (4, 2)$

$m_{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Como $O \in OA$, tem-se que $OA$: $y = \frac{1}{2}x$.

$m_{BC} = m_{OA} = \frac{1}{2}$

$C \in BC$: $4 = \frac{1}{2} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 4 + 1 \Leftrightarrow b = 5$

$BC$: $y = \frac{1}{2}x + 5$

$\overrightarrow{OC} = C - O = (-2, 4)$

$m_{OC} = \frac{4}{-2} = -2$

Como $O \in OC$, tem-se que $OC$: $y = -2x$.
$m_{AB} = m_{OC} = -2$
$A \in AB$: $2 = -2 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 2 + 8 \Leftrightarrow b = 10$
$AB$: $y = -2x + 10$
Assim, uma condição que define o quadrado $[ABCD]$ é:

$y \geq \frac{1}{2}x \wedge y \leq -2x + 10 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 5 \wedge y \geq -2x$

**46.**
**46.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2, 1) - (1, -1, 2) = (1, -1, -1)$
Tem-se, então:
$AB$: $(x, y, z) = (1, -1, 2) + k(1, -1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
$P \in AB$, logo:
$(-4p, 4p, p) = (1, -1, 2) + k(1, -1, -1)$
$\Leftrightarrow (-4p, 4p, p) = (1 + k, -1 - k, 2 - k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4p = 1 + k \\ 4p = -1 - k \\ p = 2 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2 - k) = -1 - k \\ p = 2 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 4k = -1 - k \\ p = 2 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3k = -9 \\ p = 2 - k \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ p = -1 \end{cases}$

**46.2.** Um ponto que não seja colinear com $A$ nem com $B$ é um ponto que não pertence à reta $AB$.
Por exemplo, o ponto de coordenadas (1, 2, 1) não pertence à reta $AB$.
**Verificação**
$(1, 2, 1) = (1, -1, 2) + k(1, -1, -1)$
$\Leftrightarrow (1, 2, 1) = (1 + k, -1 - k, 2 - k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + k \\ 2 = -1 - k \\ 1 = 2 - k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -3 \\ k = 1 \end{cases}$ Sistema impossível.

**46.3.** O conjunto dos pontos equidistantes de $A$ e de $B$ é o plano mediador de $[AB]$.
$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 =$
$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$
$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2z - 3 = 0$

**46.4.** $C = B + \vec{u} = (2, -2, 1) + (1, 0, 2) = (3, -2, 3)$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (3, -2, 3) - (1, -1, 2) = (2, -1, 1)$
$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$
Logo, o raio da superfície esférica é $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
Seja $M$ o centro da superfície esférica.
$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (1, -1, 2) + \frac{1}{2}(2, -1, 1) =$
$= (1, -1, 2) + \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
Assim, a equação pedida é:
$(x - 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

**46.5.** $\vec{v} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{v} = k(1, 0, 2), k \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \vec{v} = (k, 0, 2k), k \in \mathbb{R}$
$||\vec{v}|| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 0^2 + (2k)^2} = 10$
$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4k^2} = 10$
$\Leftrightarrow 5k^2 = 100$
$\Leftrightarrow k^2 = 20$
$\Leftrightarrow k = \sqrt{20} \vee k = -\sqrt{20}$
$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{5} \vee k = -2\sqrt{5}$
Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, então $k = 2\sqrt{5}$.
Assim, $\vec{v}(2\sqrt{5}, 0, 4\sqrt{5})$.

**47.**
**47.1.** $\overrightarrow{AE} = E - A = (1, 0, 1) - (2, 1, 0) = (-1, -1, 1)$
$C = A + 2\overrightarrow{AE} = (2, 1, 0) + 2(-1, -1, 1) =$
$= (2, 1, 0) + (-2, -2, 2) = (0, -1, 2)$

**47.2.** $\overrightarrow{VE} = E - V = (1, 0, 1) - (3, -1, 2) = (-2, 1, -1)$
$VE$: $(x, y, z) = (3, -1, 2) + k(-2, 1, -1), k \in \mathbb{R}$
Como $P$ pertence ao plano $yOz$, tem-se que $P(0, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.
$(0, y, z) = (3, -1, 2) + k(-2, 1, -1)$
$\Leftrightarrow (0, y, z) = (3 - 2k, -1 + k, 2 - k)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y = -1 + \frac{3}{2} \\ z = 2 - \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Logo, $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

**47.3.** $\overrightarrow{VE}(-2, 1, -1)$
$||\overrightarrow{VE}|| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(-1, -1, 1) = (-2, -2, 2)$
$\overline{AC} = ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$
Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{12})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 12 = 2\overline{AB}^2$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 6$
$A_{base} = \overline{AB}^2 = 6$
Assim:
$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times 6 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ u.v.

**47.4.** $\overrightarrow{AV} = V - A = (3, -1, 2) - (2, 1, 0) = (1, -2, 2)$
$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$
Assim, a equação pedida é:
$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

**48.**
**48.1.** $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$
Como $Q$ é o ponto médio de $[BC]$ e pertence ao eixo $Oy$, então $Q(0, 5, 0)$.
$\overline{AP} = \overline{GR} = \frac{2}{5}\overline{AB} = \frac{2}{5} \times 5 = 2$
Logo, $P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$ e $R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$.
$\overline{PR} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 + (2 - 5)^2 + (0 - 3)^2} =$
$= \sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{43}$
$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + (2 - 5)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$
$= \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$
$\overline{QR} = \sqrt{\left(0 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 + (5 - 5)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} =$
$= \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$
$P_{[PQR]} = \sqrt{43} + \frac{\sqrt{61}}{2} + \frac{\sqrt{61}}{2} = (\sqrt{43} + \sqrt{61})$ u.c.

**48.2. a)** $FG: y = 5 \wedge z = 5$

**b)** $EFG: z = 5$

**c)** $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \wedge 0 \leq y \leq 5 \wedge 0 \leq z \leq 5$

**48.3. a)** $A + \overrightarrow{FG} = A + \overrightarrow{AD} = D$

**b)** $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR}$, por exemplo.

**c)** $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ}$, por exemplo.

**48.4.** $B\left(\frac{5}{2}, 5, 0\right)$

$\overrightarrow{PR} = R - P = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) = (-5, 3, 3)$

Assim, uma equação vetorial da reta paralela a $PR$ e que passa no ponto $B$ é, por exemplo:

$(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, 5, 0\right) + k(-5, 3, 3), k \in \mathbb{R}$

**48.5.** $BCG: y = 5$

Para que $M$ pertença ao plano $BCG$, tem-se que $M(x, 5, z), x, y \in \mathbb{R}$.

Então:

$$\begin{cases} x = k^2 \\ 5 = -k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ k = -5 \\ z = -5 \end{cases}$$

Logo, $M(25, 5, -5)$.

**49.**

**49.1.** O ponto $A$ é o ponto de interseção da reta $AE$ com o plano $xOy$.

Como $A \in xOy$, então $A(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}$.

$(x, y, 0) = (1, 1, 3) + k(1, 1, -3)$

$\Leftrightarrow (x, y, 0) = (1 + k, 1 + k, 3 - 3k)$

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ 0 = 3 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, $A(2, 2, 0)$.

Pode também concluir-se que $B(-2, 2, 0)$, $C(-2, -2, 0)$ e $D(2, -2, 0)$.

O ponto $E$ é o ponto de interseção da reta $AE$ com o eixo $Oz$.

Como $E \in Oz$, então $E(0, 0, z), z \in \mathbb{R}$.

$(0, 0, z) = (1, 1, 3) + k(1, 1, -3)$

$\Leftrightarrow (0, 0, z) = (1 + k, 1 + k, 3 - 3k)$

$$\begin{cases} 0 = 1 + k \\ 0 = 1 + k \\ z = 3 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ z = 6 \end{cases}$$

Logo, $E(0, 0, 6)$.

**49.2.** $x = -2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge z = 0$ é uma condição que define a aresta $[BC]$.

**49.3.** Plano mediador de $[AE]$:

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 6)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36$

$\Leftrightarrow -4x - 4y + 12z - 28 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 3z + 7 = 0$

**49.4.** Seja $M$ o ponto médio de $[AE]$.

$M = \left(\frac{2 + 0}{2}, \frac{2 + 0}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (1, 1, 3)$

Seja $N$ o ponto médio de $[CD]$.

$N(0, -2, 0)$

$\overrightarrow{MN} = N - M = (0, -2, 0) - (1, 1, 3) = (-1, -3, -3)$

Assim, $MN: (x, y, z) = (1, 1, 3) + k(-1, -3, -3), k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**49.5.** $\overrightarrow{BE} = E - B = (0, 0, 6) - (-2, 2, 0) = (2, -2, 6)$

$BE: (x, y, z) = (0, 0, 6) + k(2, -2, 6), k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

$F(x, 1, z), x, z \in \mathbb{R}$

$(x, 1, z) = (0, 0, 6) + k(2, -2, 6)$

$\Leftrightarrow (x, 1, z) = (2k, -2k, 6 + 6k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ 1 = -2k \\ z = 6 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = -\frac{1}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

Logo, $F(-1, 1, 3)$.

$\overrightarrow{AF} = F - A = (-1, 1, 3) - (2, 2, 0) = (-3, -1, 3)$

Assim, $AF: (x, y, z) = (-1, 1, 3) + k(-3, -1, 3), k \in \mathbb{R}$.

**50.**

**50.1.** Os pontos $A$ e $B$ são os pontos de interseção da reta com a circunferência.

Como $A$ e $B$ pertencem à reta $r$, são da forma $(x, 2x + 8)$, $x \in \mathbb{R}$.

$x^2 + (2x + 8 - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + (2x + 4)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 16x + 16 = 16 \Leftrightarrow 5x^2 + 16x = 0$

$\Leftrightarrow x(5x + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{16}{5}$

Assim, $A\left(-\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$ e $B(0, 8)$.

**50.2.** Ponto genérico da reta $s$: $(4, -2 + 6k), k \in \mathbb{R}$

Substituindo na equação da circunferência:

$4^2 + (-2 + 6k - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow 16 + (6k - 6)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (6k - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow 6k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Logo, existe um e um só ponto de interseção entre a reta $s$ e a circunferência, ou seja, a reta $s$ é tangente à circunferência.

**50.3.** Como os pontos $A$ e $B$ pertencem à circunferência e o seu centro pertence à reta $r$, então $[AB]$ é o diâmetro da circunferência.

Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$:

$$M = \left(\frac{-\frac{16}{5} + 0}{2}, \frac{\frac{8}{5} + 8}{2}\right) = \left(-\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(-\frac{16}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - 8\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25} + \frac{1024}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{212}{5}}$$

Assim, o raio da circunferência é:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{212}{5}} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{53}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{265}}{5}$$

A equação pedida é:

$$\left(x + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{24}{5}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{265}}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{24}{5}\right)^2 = \frac{53}{5}$$

**51.**

**51.1.** $AB$: $(x, y) = (0, 0) + k(-2, 3)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

$m_{AB} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

$AB$: $y = -\frac{3}{2}x$

**51.2.** O ponto $B$ é o ponto de interseção das retas $AB$ e $BC$.

$-\frac{3}{2}x = 2x - 7 \Leftrightarrow -3x = 4x - 14 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$

$y = -\frac{3}{2} \times 2 = -3$

Logo, $B(2, -3)$.

$\overrightarrow{BO} = O - B = (-2, 3)$

$A = O + \overrightarrow{BO} = (0, 0) + (-2, 3) = (-2, 3)$

O ponto $C$ pertence à reta de equação $y = 2x - 7$, logo $C(x, 2x - 7)$, $x \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{BC} = C - B = (x, 2x - 7) - (2, -3) = (x - 2, 2x - 4)$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{20} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (2(x-2))^2 = 20 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4(x-2)^2 = 20$

$\Leftrightarrow 5(x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \vee x - 2 = -2$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0$

Logo, $C(4, 1)$.

$\overrightarrow{CD} = (-2, 3) \Leftrightarrow D - C = (-2, 3) \Leftrightarrow D = C + (-2, 3)$

$\Leftrightarrow D = (4, 1) + (-2, 3) \Leftrightarrow D = (2, 4)$

**51.3.** A condição pedida é $y \geq -\frac{3}{2}x \wedge y \geq 2x - 7 \wedge y < 0$.

**51.4.** Como $E$ pertence ao segmento de reta $[AB]$, então $E\left(x, -\frac{3}{2}x\right)$, $x \in [-2, 2]$.

Seja $h$ a altura do trapézio $[ABCD]$.

$A_{[AED]} = \frac{1}{4}A_{[ABCD]} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times h}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times h$

$\Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{4}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(-2-x)^2 + \left(3 + \frac{3}{2}x\right)^2} =$

$= \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2} + \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{4 + 4x + x^2 + 9 + 9x + \frac{9}{4}x^2} =$

$= \sqrt{2^2 + (-3)^2} + \sqrt{4^2 + (-6)^2}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{13}{4}x^2 + 13x + 13} = \sqrt{13} + \sqrt{52}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{13}{4}x^2 + 13x + 13} = \sqrt{13} + 2\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{13}{4}x^2 + 13x + 13} = 3\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow 16\left(\frac{13}{4}x^2 + 13x + 13\right) = 9 \times 13$

$\Leftrightarrow 52x^2 + 208x + 208 = 117$

$\Leftrightarrow 52x^2 + 208x + 91 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-208 \pm \sqrt{208^2 - 4 \times 52 \times 91}}{2 \times 52}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

Como $x \in [-2, 2]$, então $x = -\frac{1}{2}$, e, portanto, $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

**51.5.** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{OR}$

Analogamente se prova que $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PO}$.

Logo, $[OPQR]$ é um paralelogramo.

**52.**

**52.1.** Como a altura do prisma é 6, tem-se que $\overrightarrow{AH} = (0, 0, 6)$.

$D = K + \overrightarrow{HA} = (1, \sqrt{3}, 7) - (0, 0, 6) = (1, \sqrt{3}, 1)$

$C = D + \overrightarrow{DC} = (1, \sqrt{3}, 1) - (-1, \sqrt{3}, 0) = (2, 0, 1)$

$B = C + \overrightarrow{CB} = (2, 0, 1) - (1, \sqrt{3}, 0) = (1, -\sqrt{3}, 1)$

$A = B + \overrightarrow{BA} = (1, -\sqrt{3}, 1) - (2, 0, 0) = (-1, -\sqrt{3}, 1)$

**52.2.** $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DK} = (2, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 6) = (2, 0, 0) + (0, 0, 3) =$

$= (2, 0, 3)$

$\left\|\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}\right\| = \|(2, 0, 3)\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} =$

$= \sqrt{13}$

**52.3.** $\overrightarrow{BC}(1, \sqrt{3}, 0)$

$K(1, \sqrt{3}, 7)$

$r$: $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 7) + (1, \sqrt{3}, 0)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**52.4.** $LIB$ é o plano mediador do segmento de reta $[KH]$.

$K(1, \sqrt{3}, 7)$

$H = A + \overrightarrow{AH} = (-1, -\sqrt{3}, 1) + (0, 0, 6) = (-1, -\sqrt{3}, 7)$

$(x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z-7)^2 =$

$= (x+1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 + (z-7)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 =$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$

$\Leftrightarrow -4x - 4\sqrt{3}y = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 0$

**52.5.** $\overline{BC} = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$

$N = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (1, \sqrt{3}, 4)$

$\overline{CN} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-\sqrt{3})^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1 + 3 + 9} =$

$= \sqrt{13}$

Seja $P$ o ponto médio de $[MN]$.

$M(-1, -\sqrt{3}, 4)$

$P = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (0, 0, 4)$

$\overline{NP} = \overline{BC} = 2$

Seja $h$ a altura do triângulo $[CNP]$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{CN}^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{NP}\right)^2 \Leftrightarrow 13 = h^2 + 1 \Leftrightarrow h^2 = 12$

Logo, $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Assim, $A_{[BCNLGM]} = 6 \times \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ u.a.

**53.**

**53.1.** $A \in Ox$, logo $A(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$(x, 0, 0) = (7, -3, -6) + k(-2, 3, 6)$

$\Leftrightarrow (x, 0, 0) = (7 - 2k, -3 + 3k, -6 + 6k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2k \\ 0 = -3 + 3k \\ 0 = -6 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Assim, $A(5, 0, 0)$.

$B \in Oy$, logo $B(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$.

$(0, y, 0) = (6, -2, 12) + \lambda(-3, 5, -6)$

$\Leftrightarrow (0, y, 0) = (6 - 3\lambda, -2 + 5\lambda, 12 - 6\lambda)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 6 - 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ 0 = 12 - 6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = 8 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Assim, $B(0, 8, 0)$.

$C$ é o ponto de interseção das retas $AC$ e $BC$.

$(7, -3, -6) + k(-2, 3, 6) = (6, -2, 12) + \lambda(-3, 5, -6)$

$\Leftrightarrow (7 - 2k, -3 + 3k, -6 + 6k) = (6 - 3\lambda, -2 + 5\lambda, 12 - 6\lambda)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 2k = 6 - 3\lambda \\ -3 + 3k = -2 + 5\lambda \\ -6 + 6k = 12 - 6\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ 6k = 18 - 6\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 2(3 - \lambda) = 6 - 3\lambda \\ -3 + 3(3 - \lambda) = -2 + 5\lambda \\ k = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - 6 + 2\lambda = 6 - 3\lambda \\ -3 + 9 - 3\lambda = -2 + 5\lambda \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 5 \\ 8\lambda = 8 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Assim:

$C = (7, -3, -6) + 2(-2, 3, 6) = (7, -3, -6) + (-4, 6, 12) =$

$= (3, 3, 6)$

**53.2.** $V_{[OABC]} = \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 8}{2} \times 6 = 40$ u.v.

**54.**

**54.1.** $(x, y, z) = (3, 3, 3) + k(-1, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

**54.2.** $FBC$: $y = 3$

Seja $M$ o ponto de interseção da reta $r$ com o plano $FBC$.

$M(x, 3, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$

$(x, 3, z) = (1, -1, 2) + k(-1, 2, 1)$

$\Leftrightarrow (x, 3, z) = (1 - k, -1 + 2k, 2 + k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ 3 = -1 + 2k \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Logo, $M(-1, 3, 4)$.

**54.3. a)** $X = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$X$ é o centro da face $[ABCD]$ e tem coordenadas $(3, 0, 0)$.

$Y = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

$Y$ é o centro da face $[BCGF]$ e tem coordenadas $(0, 3, 0)$.

$Z = H - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = H + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} =$

$= H + \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = H + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

$Z$ é o centro da face $[CDHG]$ e tem coordenadas $(-3, 0, 0)$.

$\overline{XZ} = 6$

$\overline{XY} = \overline{YZ} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9 + 9} =$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Logo:

$P_{[XYZ]} = 6 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (6 + 6\sqrt{2})$ u.c.

**b)** $\overrightarrow{EZ} = Z - E = (-3, 0, 0) - (3, -3, 3) = (-6, 3, -3)$

$EZ$: $(x, y, z) = (-3, 0, 0) + k(-6, 3, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{HX} = X - H = (3, 0, 0) - (-3, -3, 3) = (6, 3, -3)$

$HX$: $(x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(6, 3, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(-3, 0, 0) + k(-6, 3, -3) = (3, 0, 0) + \lambda(6, 3, -3)$

$\Leftrightarrow (-3 - 6k, 3k, -3k) = (3 + 6\lambda, 3\lambda, -3\lambda)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 6k = 3 + 6\lambda \\ 3k = 3\lambda \\ -3k = -3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 6k = 3 + 6k \\ \lambda = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12k = -6 \\ \lambda = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $P = (-3, 0, 0) - \frac{1}{2}(-6, 3, -3) =$

$= (-3, 0, 0) + \left(3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

**55.**

**55.1.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (12, 0, 8) - (12, -3, 6) = (0, 3, 2)$

$D = C - \overrightarrow{AB} = (10, -2, 11) - (0, 3, 2) = (10, -5, 9)$

$E \in AE$, logo $E(-1 - 26k, 1 + 8k, -12k)$, $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (-1 - 26k, 1 + 8k, -12k) - (12, -3, 6) =$

$= (-13 - 26k, 4 + 8k, -6 - 12k)$, $k \in \mathbb{R}$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{221}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-13 - 26k)^2 + (4 + 8k)^2 + (-6 - 12k)^2} = \sqrt{221}$

$\Leftrightarrow (-13(1 + 2k))^2 + (4(1 + 2k))^2 + (-6(1 + 2k))^2 = 221$

$\Leftrightarrow 169(1 + 2k)^2 + 16(1 + 2k)^2 + 36(1 + 2k)^2 = 221$

$\Leftrightarrow 221(1 + 2k)^2 = 221$

$\Leftrightarrow (1 + 2k)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 1 + 2k = 1 \vee 1 + 2k = -1$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -1$

Se $k = 0$, então $E(-1, 1, 0)$.

Se $k = -1$, então $E(25, -7, 12)$.

Assim, uma vez que a abcissa do ponto $E$ é negativa, tem-se que $E(-1, 1, 0)$.
$\overrightarrow{AE} = (-13, 4, -6)$
$F = B + \overrightarrow{AE} = (12, 0, 8) + (-13, 4, -6) = (-1, 4, 2)$
$G = C + \overrightarrow{AE} = (10, -2, 11) + (-13, 4, -6) = (-3, 2, 5)$
$H = D + \overrightarrow{AE} = (10, -5, 9) + (-13, 4, -6) = (-3, -1, 3)$

**55.2.** $\overline{AE} = ||\overrightarrow{AE}|| = \sqrt{221}$
$\overline{AB} = \sqrt{(12-12)^2 + (-3-0)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{0+9+4} = \sqrt{13}$
$\overline{BC} = \sqrt{(12-10)^2 + (0+2)^2 + (8-11)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$
Assim, $V = \sqrt{221} \times \sqrt{13} \times \sqrt{17} = 221$ u.v.

**55.3.** $\overrightarrow{AB}(0, 3, 2)$
$AB$: $(x, y, z) = (13, -2, 6) + k(0, 3, 2)$, $k \in \mathbb{R}$
Seja $P$ o ponto de interseção da reta $AB$ com o plano $xOy$.
$P(x, y, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$
$(x, y, 0) = (12, -3, 6) + k(0, 3, 2)$
$\Leftrightarrow (x, y, 0) = (12, -3 + 3k, 6 + 2k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -3 + 3k \\ 0 = 6 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -12 \\ k = -3 \end{cases}$$

Logo, $P(12, -12, 0)$.

**55.4.** $(x-12)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = (x-10)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 24x + 144 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 12z + 36 =$
$= x^2 - 20x + 100 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 22z + 121$
$\Leftrightarrow -4x + 2y + 10z - 36 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - y - 5z + 18 = 0$

**56.**

**56.1.** Equação do plano $ABC$:
$x^2 + y^2 + z^2 = (x-6)^2 + (y-12)^2 + (z-18)^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 24y + 144 + z^2 - 36z + 324$
$\Leftrightarrow 12x + 24y + 36z - 504 = 0$
$\Leftrightarrow x + 2y + 3z - 42 = 0$

**56.2.** $OP$: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(6, 12, 18)$, $k \in \mathbb{R}$, por exemplo.

**56.3.** $A \in Ox$: $A(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$
$x + 2 \times 0 + 3 \times 0 - 42 = 0 \Leftrightarrow x = 42$
Logo, $A(42, 0, 0)$.
$B \in Oy$: $(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$
$0 + 2y + 3 \times z - 42 = 0 \Leftrightarrow 2y = 42 \Leftrightarrow y = 21$
Logo, $B(0, 21, 0)$.
$C \in Oz$: $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$
$0 + 2 \times 0 + 3z - 42 = 0 \Leftrightarrow 3z = 42 \Leftrightarrow z = 14$
Logo, $C(0, 0, 14)$.

**56.4.** $V = \frac{1}{3} \times \pi \times \overline{OC}^2 \times \overline{OB} = \frac{1}{3} \times \pi \times 14^2 \times 21 = 1372\pi$ u.v.