b)

Classes	Centro da classe	Frequência relativa acumulada	Frequência relativa
[50, 70[	60	10%	10%
[70, 90[	80	12,5%	2,5%
[90, 110[	100	30%	17,5%
[110, 130[	120	90%	60%
[130, 150[	140	100%	10%

Assim,
$\bar{x} = 60 \times 0{,}10 + 80 \times 0{,}025 + 100 \times 0{,}175 + 120 \times$
$\times\, 0{,}6 + 140 \times 0{,}1 = 111{,}5$
A média da velocidade registada nesse dia foi 111,5 km/h.

8. Opção (B)
Por observação das nuvens de pontos, podemos afirmar que nos gráficos II e III se apresentam distribuições com correlação linear negativa. Assim, só na opção (B) se encontra uma tabela com uma correspondência correta entre os gráficos e os respetivos coeficientes de correlação.

Tema 3 – Geometria sintética no plano

Recorda – páginas 6 e 7

1. $\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DF}}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \overline{DF} = \frac{8}{3}$

$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \overline{EF} = 4$

2.

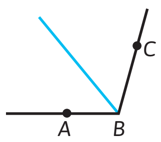
a) Os triângulos são semelhantes pelo critério LAL
$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \text{ e } B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'\right)$

b) Os triângulos são semelhantes pelo critério AA
($B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$ e $C\hat{B}A = C'\hat{B}'A'$, pois
$C'B'A' = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$)

c) Os triângulos são semelhantes pelo critério LLL
$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\right)$

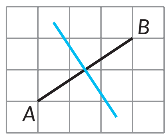
3. Bissetriz

4.



5. Opção (A)

6.



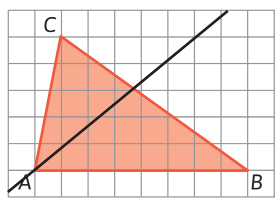
Capítulo 1 – Pontos notáveis do triângulo – página 8

Explora o incentro

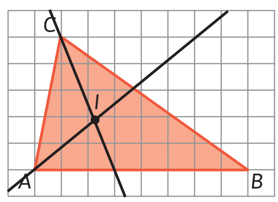
a) Intersetam-se no mesmo ponto.
b) Incentro do triângulo.
c) A distância do incentro a cada um dos lados do triângulo é a mesma.
d) Sim. O centro é o incentro e o raio é a distância do incentro a cada um dos lados.

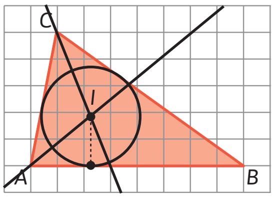
1.

a) **i.** Bissetriz do ângulo *BAC*.



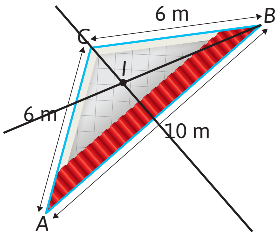
ii. Ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos do triângulo – ponto *I*.



iii. 

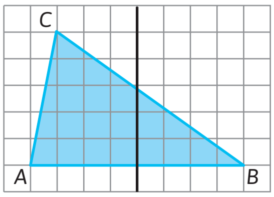
b) Consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/140152d9-0885-49b1-95b1-a8daf5527786

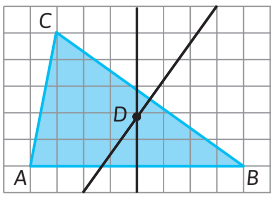
2. Pretendemos determinar o incentro. Para tal, é suficiente traçar duas das bissetrizes do triângulo e determinar o seu ponto de interseção (a terceira bissetriz interseta as outras duas no mesmo ponto). O local onde deve ser colocado o guarda-sol para cumprir as condições pedidas está representado na figura pela letra *I*.

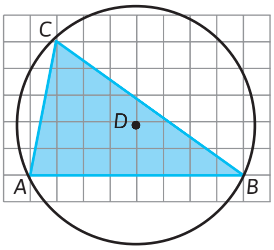


Explora o circuncentro

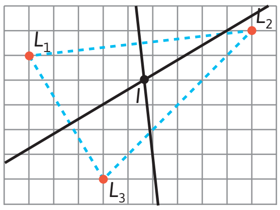
a) Intersetam-se no mesmo ponto.
b) Circuncentro do triângulo.
c) A distância do circuncentro a cada um dos vértices do triângulo é a mesma.
d) Sim. O centro é o circuncentro e o raio é a distância do circuncentro a cada um dos vértices.

3.
a) **i.** 

ii. 

iii. 

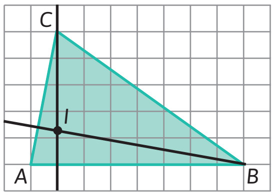
b) Consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/c1e59442-855b-4656-b7c3-d868f669386c

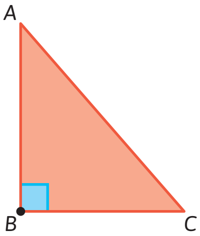
4.
a) 

b) Na circunferência circunscrita ao triângulo.

Explora o ortocentro

a) Intersetam-se no mesmo ponto.
b) Ortocentro do triângulo.

5. 

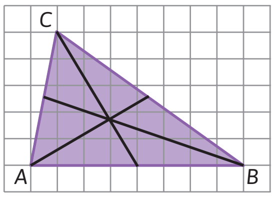
6.
a) 

b) No vértice do ângulo reto.
c) Sim

7. Consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/50f145b3-7877-444a-a993-9aa6673fb267

Explora o baricentro

a) Intersetam-se no mesmo ponto.
b) Baricentro do triângulo.

8.
a) 

b) Baricentro

9. Consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/6621b980-92fc-4371-b9f3-1f8fdad130bf

10.
a) Opção (B)
[*AE*], [*BF*] e [*CD*] são as três medianas do triângulo e *G* é o baricentro. Como as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes, e a área do triângulo [*ADG*] é 10 cm^2, então a área do triângulo [*BEG*] também é 10 cm^2.

b) Opção (D)
Utilizando a mesma propriedade da alínea anterior, a área do triângulo [*ABC*] é $6 \times 10 = 60$ cm².

11.

a) Como [*CD*] é uma mediana do triângulo e *D* é o ponto médio de [*AB*], como $\overline{AD} = 7$, então $\overline{AB} = 14$.

b) Como a distância do baricentro a qualquer dos vértices é $\frac{2}{3}$ da mediana respetiva e a mediana [*CD*] tem 6 cm de comprimento, então $\overline{CG} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ cm.

c) $\overline{GD} = \overline{CD} - \overline{CG} = 6 - 4 = 2$ cm

12.

a) Centro da circunferência.
b) Ponto de interseção das diagonais.
c) Ponto de interseção das diagonais.
d) Baricentro.

13. Ao cuidado do aluno.

14.

a) Ponto *G*.

b) O perímetro do triângulo [*CFG*] é $\overline{CF} + \overline{CG} + \overline{GF}$, onde:

$$\overline{CF} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CD} = \frac{2}{3} \times 15 = 10$$

$$\overline{GF} = \frac{1}{3}\overline{BF} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

Assim, o perímetro do triângulo [*CFG*] é $11 + 10 + 2 =$
$= 23$ cm.

15.

a) Incentro, circuncentro, ortocentro ou baricentro, pois, num triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis coincidem.

b) **i.** Como o triângulo é equilátero e tem 12 cm de perímetro, então cada lado tem 4 cm de comprimento.

> Cálculo da altura do triângulo [*ABC*]:
> $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2^2 + \overline{CD}^2 = 4^2$
> $\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 12$
> $\overline{CD} > 0$, logo $\overline{CD} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{4 \times \overline{CD}}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

A área do triângulo [*ABC*] é $4\sqrt{3}$ cm².

ii. [*AE*], [*BF*] e [*CD*] são as três medianas do triângulo e *G* é o baricentro. Logo, como as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes e a área do triângulo [*ABC*] é $4\sqrt{3}$ cm², a área de cada um dos seis triângulos representados é $\frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Logo, a área do triângulo [*ABG*] é $2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} =$
$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm².

iii. A área do triângulo [*CEG*] é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm².

iv. A circunferência inscrita no triângulo [*ABC*] tem centro no ponto *G* (incentro) e raio $\overline{GD}$, onde $\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (nota: $\overline{GD} = \overline{GE} = \overline{GF}$).
Assim, a área da circunferência inscrita no triângulo é $\pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi$ cm².

v. A circunferência circunscrita ao triângulo [*ABC*] tem centro no ponto *G* (circuncentro) e raio $\overline{GC}$, onde $\overline{GC} = \frac{2}{3}\overline{CD} = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
(nota: $\overline{GC} = \overline{GA} = \overline{GB}$).
Assim, a área da circunferência circunscrita ao triângulo é $\pi \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}\pi$ cm².

16.

a) Como *D* e *E* são os pontos médios dos lados [*AB*] e [*AC*], respetivamente, tem-se que [*BE*] e [*CD*] são duas das medianas do triângulo [*ABC*] e, portanto, o seu ponto de interseção (ponto *G*) é o baricentro.

b) Num triângulo isósceles, como é o caso do triângulo [*ABC*], os quatro pontos notáveis estão alinhados e, neste caso, pertencem à reta *CD*. Como o triângulo é acutângulo, os quatro pontos notáveis encontram-se no interior do triângulo e pertencem ao segmento de reta [*CD*]. Assim, as três afirmações são verdadeiras.

c) $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$

> Cálculo da altura do triângulo [*ABC*]:
> $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 3^2 + \overline{CD}^2 = 10^2$
> $\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 91$
> $\overline{CD} > 0$, logo $\overline{CD} = \sqrt{91}$

$$A_{[ABC]} = \frac{6 \times \overline{CD}}{2} = \frac{6 \times \sqrt{91}}{2} = 3\sqrt{91}$$

Como [*BE*] é uma mediana do triângulo [*ABC*], então a área do triângulo [*ABE*] é metade da área do triângulo [*ABC*], ou seja, $\frac{3\sqrt{91}}{2}$.

17.

A. Num triângulo **acutângulo** o circuncentro encontra-se no seu interior.

B. Num triângulo **obtusângulo** o circuncentro encontra-se no seu exterior.

C. Num triângulo **retângulo** o circuncentro encontra-se num dos seus lados.

Capítulo 2 – Reta de Euler – página 22

18. Consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/695a7f14-024d-4ca8-b3ab-e9ad46cac8f8

Capítulo 3 – Circunferência dos nove pontos – página 23

19.

a) *G*, *H* e *I*
b) *D*, *E* e *F*
c) *A*, *B* e *C*

20.

a) A reta de Euler contém o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo. O ponto *C* é o único dos quatro pontos representados na figura (pontos notáveis do triângulo) que não está representado na reta. Assim, o ponto *C* é o incentro.

b) O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento de reta definido pelo circuncentro e pelo ortocentro, que corresponde ao ponto médio de [*AD*].

21. Opção (C)
Como o ponto *D* é equidistante dos vértices do triângulo [*ABC*], então o ponto *D* é o circuncentro deste triângulo. Assim, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo é $\overline{AD}$, que é igual a 5.
Como o raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita então, neste caso, o raio da circunferência dos nove pontos é $\frac{5}{2}$, e a sua área é igual a $\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{25}{4}\pi$.

Aprende fazendo – páginas 29 a 34

1. Opção (C)
A interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo designa-se por incentro.

2. Opção (C)
O centro da circunferência inscrita no triângulo é o incentro do triângulo.

3. Opção (B)
A interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo designa-se por circuncentro.

4. Opção (B)
O centro da circunferência circunscrita a um triângulo é o circuncentro desse triângulo.

5. Opção (D)
A interseção das retas suporte das três alturas de um triângulo designa-se por ortocentro.

6. Opção (A)
A interseção das três medianas de um triângulo designa-se por baricentro.

7. Como $\overline{AB} = 24$ e *M* é o ponto médio de [*AB*], então $\overline{AM} = 12$.
Como $\overline{AN} = 15$ e *G* é o baricentro do triângulo [*ABC*], então $\overline{AG} = \frac{2}{3} \times 15 = 10$.
Como $\overline{CM} = 12$ e *G* é o baricentro do triângulo [*ABC*], então $\overline{GM} = \frac{1}{3} \times 12 = 4$.
Logo, $P_{[AGM]} = \overline{AG} + \overline{GM} + \overline{MA} = 10 + 4 + 12 = 24$ u.c.

8. Consultar em:

a) https://auladigital.leya.com/share/95c20b92-f44d-4716-aa0b-488fcab81e63

b) https://auladigital.leya.com/share/17de4c5e-e76a-4f39-8a70-cf950cd0dd47

c) https://auladigital.leya.com/share/27ee4965-9763-48fa-8c54-899c58f84eff

9. $A\hat{I}B = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$
$I\hat{A}B + I\hat{B}A + 130^\circ = 180 \Leftrightarrow I\hat{A}B + I\hat{B}A = 50^\circ$
Logo, $C\hat{A}B + C\hat{B}A = 2 \times I\hat{A}B + 2 \times I\hat{B}A =$
$= 2 \times (I\hat{A}B + I\hat{B}A) =$
$= 2 \times 50^\circ = 100^\circ$
$A\hat{C}B = 180^\circ - (C\hat{A}B + C\hat{B}A) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

10. **a)** Seja *I'* a projeção ortogonal de *I* sobre [*AB*].
$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{I'I}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 4 = \overline{I'I} \Leftrightarrow \overline{I'I} = 2$
A distância do ponto *I* à reta *AB* é 2.
Como *I* é o incentro do triângulo, a distância de *I* à reta *AC* é igual à distância de *I* à reta *AB*. Logo, a distância é 2.

b) O raio da circunferência inscrita no triângulo [*ABC*] é igual à distância de incentro a cada uma das retas suporte dos lados do triângulo.
Logo, o perímetro da circunferência inscrita no triângulo [*ABC*] é igual a $2\pi \times 2 = 4\pi$ u.c.

11. Consideramos quaisquer três pontos *A*, *B* e *C* da circunferência. Com uma régua, construímos os segmentos de reta [*AB*], [*BC*] e [*CA*], obtendo o triângulo [*ABC*]. A circunferência dada é a circunferência circunscrita ao triângulo [*ABC*].
De seguida, com régua e compasso, construímos as mediatrizes dos segmentos de reta [*AB*] e [*BC*], por exemplo.
As duas mediatrizes desenhadas intersetam-se num ponto *G*, circuncentro do triângulo [*ABC*] e centro da circunferência dada.

12. O ponto de encontro dos três amigos é a Big Thunder Mountain.
Consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/9ec86d94-7c0f-4dbd-9233-36b722e97ba2

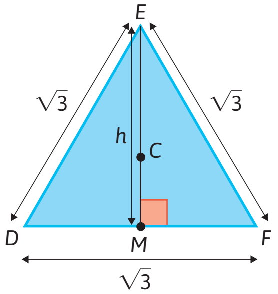
13. $A\hat{B}C = G\hat{D}E$ e $A\hat{C}B = G\hat{E}D$, logo, pelo critério AA os triângulos [*ABC*] e [*GDE*] são semelhantes. Assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GE}} = r$.
Consideremos agora o ponto *M*, ponto médio do segmento de reta [*AB*], o triângulo [*MBC*] e o triângulo [*GDC*].
$M\hat{B}C = G\hat{D}C$ e $B\hat{C}M = D\hat{C}G$, logo, pelo critério AA, os triângulos [*MBC*] e [*GDC*] são semelhantes e a razão de semelhança é igual a $\frac{\overline{MC}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{MC}}{\frac{3}{2}\overline{MC}} = \frac{3}{2}$.

Como $\frac{\overline{MC}}{\overline{GC}} = \frac{3}{2}$, então $2 = \frac{3}{2} \times \overline{GD} \Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{4}{3}$.

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{GD}} = r$, então $\frac{4}{\frac{4}{3}} = r \Leftrightarrow r = 3$.

Assim, $\overline{DE} = \frac{6}{3} = 2$, $\overline{GE} = \frac{8}{3}$ e
$P_{[GDE]} = \frac{4}{3} + 2 + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} + 2 = 4 + 2 = 6$ u.c.

14. Num triângulo equilátero, o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro são coincidentes. Designemos por C o centro do triângulo.
Consideremos a altura do triângulo relativamente a qualquer um dos lados.



$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{4} + h^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = h^2 \Leftrightarrow h = \pm\frac{3}{2}$$

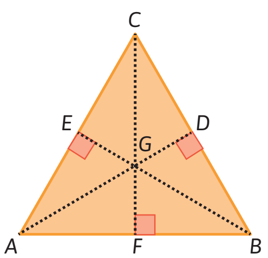
Como $h > 0$, $h = \frac{3}{2}$.
Num triângulo equilátero, a altura relativa a qualquer um dos lados é também a mediana que une o ponto médio desse lado ao vértice oposto.

Assim, qualquer mediana deste triângulo mede $\frac{3}{2}$ e a distância do baricentro do triângulo a qualquer um dos lados do triângulo é $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ u.c.

15. Opção (A)
Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles.
O incentro do triângulo é colinear com o ortocentro, o baricentro e o circuncentro do triângulo, logo, pertence à reta de Euler.
Se o triângulo $[ABC]$ for obtusângulo, o cincuncentro e o ortocentro são exteriores ao triângulo.
Se o triângulo $[ABC]$ for retângulo, o circuncentro pertence à hipotenusa do triângulo.

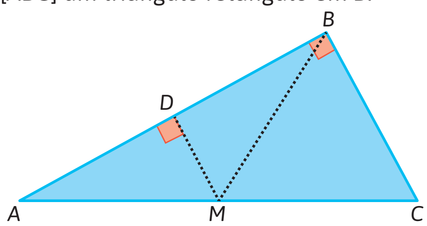
16. Opção (D)
M é o centro de circunferência dos nove pontos.
N é um dos pontos dessa circunferência por ser o ponto médio do segmento de reta $[OP]$.
Assim, o raio da circunferência dos nove pontos é igual a 4 e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[PQR]$ é igual a 8.
Logo, concluímos que a área do círculo é igual a $\pi \times 8^2 = 64\pi$ u.a.

17. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que o ponto G é simultaneamente o ortocentro e o baricentro do triângulo.



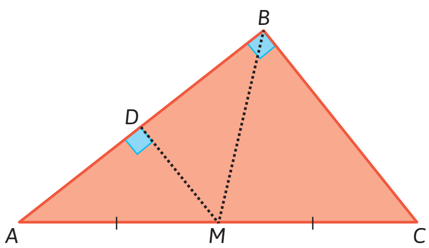
Sejam F, D e E os pontos médios dos segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, respetivamente.
A altura do triângulo em relação a $[AB]$ passa em C e em G (pois G é o ortocentro). A mediana cujos extremos são o vértice C e o ponto médio de $[AB]$ também passa em C e em G (pois G é o baricentro).
Assim, a altura do triângulo em relação e $[AB]$ é a mediana em relação a $[AB]$.
De forma análoga, concluímos o mesmo resultado para as restantes alturas e medianas do triângulo.
Os triângulos $[AGE]$ e $[CGE]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL ($\overline{AE} = \overline{EC}$, $A\hat{E}G = C\hat{E}G$ e $\overline{EG} = \overline{EG}$). Logo, $A\hat{G}E = C\hat{G}E$.
Os triângulos $[CGD]$ e $[BGD]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL ($\overline{CD} = \overline{BD}$, $C\hat{G}D = B\hat{D}G$ e $\overline{DG} = \overline{DG}$). Logo, $C\hat{G}D = B\hat{G}D$.
Os triângulos $[AFG]$ e $[BFG]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL ($\overline{AF} = \overline{BF}$, $A\hat{F}G = B\hat{F}G$ e $\overline{FG} = \overline{FG}$). Logo, $A\hat{G}F = B\hat{G}F$.
Como ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais, então:
$A\hat{G}E = B\hat{G}D$, $E\hat{G}C = B\hat{G}F$ e $C\hat{G}D = A\hat{G}F$.
Logo:
$$A\hat{G}E = E\hat{G}C = C\hat{G}D = D\hat{G}B = B\hat{G}F = F\hat{G}A = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$
Assim, os triângulos $[AEG]$, $[CEG]$, $[CDG]$, $[BDG]$, $[BFG]$ e $[AFG]$ são todos retângulos e têm um ângulo de vértice em G de amplitude igual a 60°.
Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, concluímos que $E\hat{A}G = E\hat{C}G = D\hat{C}G = D\hat{B}G = F\hat{B}G = F\hat{A}G = 30^\circ$.
Assim, $C\hat{A}B = A\hat{C}B = C\hat{B}A = 60^\circ$.
Logo, o triângulo $[ABC]$ é equilátero.

18. Seja $[ABC]$ um triângulo retângulo em B.



Seja $[BM]$ a mediana relativa à hipotenusa.
$\overline{AM} = \overline{CM}$, pois M é ponto médio de $[AC]$.
Seja D a projeção ortogonal de M sobre $[AB]$.
Os triângulos $[ADM]$ e $[ABC]$ são semelhantes pelo critério AA ($A\hat{D}M = A\hat{B}C$ e $D\hat{A}M = B\hat{A}C$).
Logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\,\overline{AD}$, ou seja, D é o ponto médio de $[AB]$.
Os triângulos $[ADM]$ e $[BDM]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL ($\overline{AD} = \overline{BD}$, $A\hat{D}M = B\hat{D}M$ e $\overline{DM} = \overline{DM}$). Logo, $\overline{AM} = \overline{MB}$, isto é, $\overline{MB} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$.
Então, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.

19. Consideremos o triângulo $[ABC]$, retângulo em B.



Comecemos por provar que a mediana [BM] mede metade de hipotenusa.

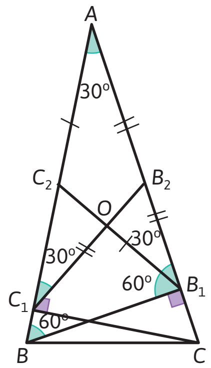
$\overline{AM} = \overline{CM}$, pois M é ponto médio de $[AC]$.
Seja D a projeção ortogonal de M sobre $[AB]$.
Os triângulos $[ADM]$ e $[ABC]$ são semelhantes pelo critério AA ($A\hat{D}M = A\hat{B}C$ e $D\hat{A}M = B\hat{A}C$).

Logo, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\,\overline{AD}$, ou seja, D é o ponto médio de $[AB]$.

Os triângulos $[ADM]$ e $[BDM]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL ($\overline{AD} = \overline{BD}$, $A\hat{D}M = B\hat{D}M$ e $\overline{DM} = \overline{DM}$). Logo, $\overline{AM} = \overline{MB}$, isto é $\overline{MB} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$.

Então, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.
Como $\overline{AC} = 30$, então $\overline{BM} = 15$.
Por se tratar de um triângulo retângulo, o ortocentro é o ponto B.
Assim, o pedido é a distância do baricentro ao vértice B, que sabemos ser $\frac{2}{3}$ da medida da respetiva mediana.
Logo, a distância pedida é igual a $\frac{2}{3} \times 15 = 10$ u.c.

20. Seja O a interseção dos segmentos de reta $[C_1B_2]$ e $[B_1C_2]$.



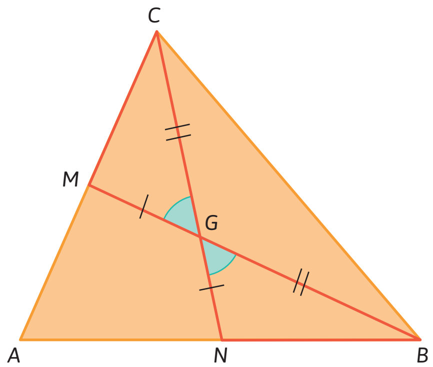
$[B_1C_2]$ é uma mediana do triângulo $[BB_1A]$, logo:
$\overline{AC_2} \underset{(1)}{=} \overline{B_1C_2}$ e $C_2\hat{B}_1A = C_2\hat{A}B_1 = 30º$

(1) a mediana relativa a hipotenusa mede metade da hipotenusa.

$[B_2C_1]$ é uma mediana do triângulo $[CC_1A]$, logo:
$\overline{B_2A} \underset{(1)}{=} \overline{B_2C_1}$ e $A\hat{C}_1B_2 = C_1\hat{A}C = 30º$

Como $B\hat{B}_1C_2 = 90º - C_2\hat{B}_1A = 90º - 30º = 60º$
e $A\hat{B}B_1 = 180º - 90º - 30º = 60º$, então
$B\hat{C}_2B_1 = 180º - 60º - 60º = 60º$
Logo, $C_1\hat{O}C_2 = 180º - 30º - 60º = 90º$, ou seja, $[C_2B_1]$ e $[C_1B_2]$ são perpendiculares.

21. Consideremos um triângulo $[ABC]$.



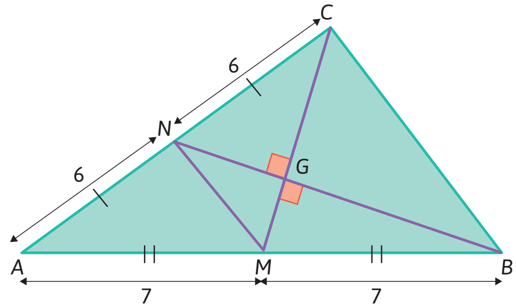
$[CN]$ e $[BM]$ são medianas do triângulo $[ABC]$.
Seja $\overline{BM} = \overline{CN} = a$.
Como G é o baricentro do triângulo $[ABC]$, então

$\overline{GM} = \overline{GN} = \frac{a}{3}$ e $\overline{GB} = \overline{GC} = \frac{2a}{3}$.

Logo, os triângulos $[BGN]$ e $[CGM]$ são geometricamente iguais pelo critério LAL ($B\hat{G}N = C\hat{G}M$, $\overline{GB} = \overline{GC}$ e $\overline{GN} = \overline{GM}$).
Então, $\overline{BN} = \overline{CM}$ e $\overline{AB} = 2\overline{BN} = 2\overline{CM} = \overline{AC}$, de onde se conclui que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

22. Sabemos que:

- M e N são pontos médios de $[AB]$ e $[AC]$;
- $[NB]$ e $[MC]$ são perpendiculares;
- $\overline{AB} = 14$;
- $\overline{AC} = 12$;
- $[CM]$ e $[BN]$ são medianas do triângulos;
- G é o baricentro do triângulo $[ABC]$.



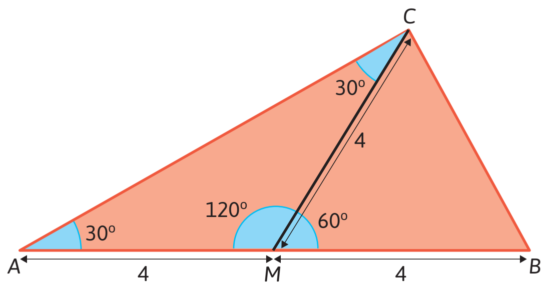
$\overline{GM}^2 + 4\overline{GN}^2 = \overline{GM}^2 + (2\overline{GN})^2 = \overline{GM}^2 + \overline{GB}^2 = 7^2 = 49$
e $\overline{GN}^2 + 4\overline{GM}^2 = \overline{GN}^2 + (2\overline{GM})^2 = \overline{GN}^2 + \overline{GC}^2 = 6^2 = 36$
Logo, $5\overline{GM}^2 + 5\overline{GN}^2 = 49 + 36 = 85$
Concluimos então que $\overline{GM}^2 + \overline{GN}^2 = \frac{85}{5} = 17$ e, por conseguinte, $\overline{MN} = \sqrt{17}$.
Como os triângulos $[ANM]$ e $[ACB]$ são semelhantes, então $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$, ou seja, $\frac{6}{12} = \frac{\sqrt{17}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{17}$ m.

Teste final – páginas 35 a 37

1. Opção (C)
Se P é um ponto que se encontra à mesma distância dos vértices de um triângulo, P pertence às três mediatrizes dos lados do triângulo. Logo, P é o circuncentro do triângulo.

2.

2.1. Opção (B)
Consideremos o triângulo $[ABC]$.

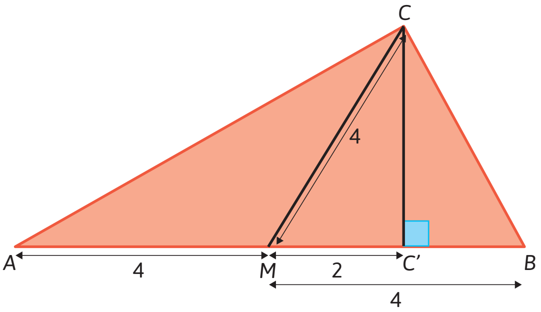


Sabemos que $\overline{AM} = 4$.
Como $[CM]$ é uma mediana do triângulo $[ABC]$, então M é o ponto médio de $[AB]$ e concluímos que $\overline{MB} = 4$.

Como o triângulo $[BMC]$ é equilátero, então $\overline{CM} = 4$ e $C\hat{M}B = M\hat{C}B = 60^o$.
Assim, $A\hat{M}C = 180^o - 60^o = 120^o$.
Como num triângulo a lados iguais se opõem ângulos iguais, tem-se que $M\hat{A}C = A\hat{C}M = \frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$.
Logo, $A\hat{C}B = A\hat{C}M + M\hat{C}B = 30^o + 60^o = 90^o$.
Concluímos então que o triângulo $[ACB]$ é retângulo em C.
Num triângulo retângulo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto, logo, a afirmação I é verdadeira.
Num triângulo retângulo o circuncentro localiza-se na hipotenusa. Além disso, a distância do circuncentro a cada um dos vértices é a mesma. Logo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e a afirmação II é verdadeira.

2.2. Seja C' a projeção ortogonal de C sobre AB.

$$A_{[AMC]} = \frac{\overline{AM} \times \overline{CC'}}{2} = \frac{4 \times \overline{CC'}}{2} = 2\overline{CC'} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$



$$4^2 = \overline{CC'}^2 + 2^2 \Leftrightarrow 16 - 4 = \overline{CC'}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{CC'} = \pm\sqrt{12}$$

Como $\overline{CC'} > 0$, então $\overline{CC'} = \sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ u.a.

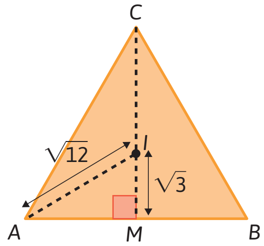
3.
- $P\hat{A}R = 180^o - 70^o = 110^o$, pois $\measuredangle PAR$ e $\measuredangle QAP$ são ângulos suplementares.
- $A\hat{P}R = 180^o - 110^o - 30^o = 40^o$, pois a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.
- $Q\hat{P}A = A\hat{P}R = 40^o$, pois PI é a bissetriz do ângulo $\measuredangle QPR$.
- $A\hat{Q}P = 180^o - 70^o - 40^o = 70^o$

Como $A\hat{Q}P = Q\hat{A}P$ e, num triângulo, a ângulos iguais se opõem lados iguais, então $\overline{QP} = \overline{AP}$.
Logo, o triângulo $[PQA]$ é isósceles.

4. Opção (D)
Num triângulo obtusângulo, o circuncentro e o ortocentro são exteriores ao triângulo.
Sabemos ainda que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo equilátero são colineares.
Logo, D é o incentro e A é o baricentro.
C é o ponto que está à mesma distância dos vértices P, Q e R, logo é o circuncentro.
B é o ortocentro.

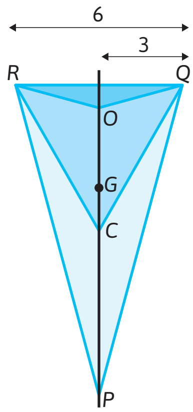
5. $[ABC]$ é um triângulo equilátero, logo, o ponto I é o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro do triângulo.

$\cancel{2}\cancel{\pi}r = \cancel{2}\sqrt{12}\cancel{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{12}$ (r é o raio da circunferência circunscrita e $r = d(I, A)$)
$\cancel{2}\cancel{\pi}r' = \cancel{2}\sqrt{3}\cancel{\pi} \Leftrightarrow r' = \sqrt{3}$ (r é o raio da circunferência inscrita)



Seja M o ponto médio de $[AB]$.
$$(\sqrt{12})^2 = (\sqrt{3})^2 + \overline{AM}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \overline{AM} = \pm 3$$
Como $\overline{AM} > 0$, então $\overline{AM} = 3$.
$\overline{CM} = 3 \times \overline{IM}$, pois I é o baricentro, ou seja, $CM = 3\sqrt{3}$.
$$A_{[ABC]} = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
Não houve engano nos cálculos da Rita, a área do triângulo é $9\sqrt{3}$ cm^2.

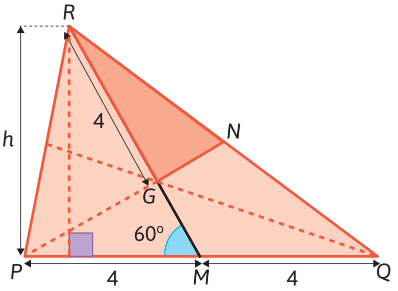
6. Consideremos o triângulo $[PQR]$.



$$A_{[EOQC]} = 13{,}5 \Leftrightarrow 2 \times A_{[OQC]} = 13{,}5$$
$$\Leftrightarrow \cancel{2} \times \frac{\overline{OC} \times 3}{\cancel{2}} = 13{,}5$$
$$\Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{13{,}5}{3}$$
$$\Leftrightarrow \overline{OG} + \overline{GC} = \frac{13{,}5}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2\overline{GC} + \overline{GC} = \frac{13{,}5}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3\overline{GC} = \frac{13{,}5}{3}$$
$$\Leftrightarrow \overline{GC} = \frac{13{,}5}{9}$$
$$\Leftrightarrow \overline{GC} = 1{,}5 \text{ u.c.}$$

7. Opção (D)
M é o centro da circunferência dos nove pontos e $\overline{MN} = 3$ é o seu raio.
$r = 6$ é o raio da circunferência circunscrita.
Logo, $A = \pi \times 6^2 = 36\pi$ u.a.

8. Sabemos que $[PN]$ e $[RM]$ são medianas do triângulo $[PQR]$.



$\overline{GR} = \frac{2}{3}\overline{RM} \Leftrightarrow 4 = \frac{2}{3}\overline{RM}$

$\Leftrightarrow 6\ \overline{RM}$

M é ponto médio de $[PQ]$, logo, $\overline{PM} = 4$ e $\overline{PQ} = 8$.

$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{6} \Leftrightarrow h = 6 \times \text{sen } 60^\circ$

$\Leftrightarrow h = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$

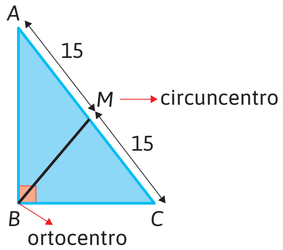
$A_{[PQR]} = \frac{8 \times 3\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

Como as três medianas dividem o triângulo $[PQR]$ em seis triângulos equivalentes, então

$A_{[RGN]} = \frac{A_{[PQR]}}{6} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$ u.a.

9. Opção (A)

Num triângulo retângulo, o circuncentro localiza-se na hipontenusa e, como a sua distância a A e a C é igual, então o circuncentro é o ponto médio de $[AC]$.



Seja G o baricentro do triângulo.

$\overline{MB} = 15 \Leftrightarrow \overline{MG} + \overline{GB} = 15$

$\Leftrightarrow \overline{MG} + 2\overline{MG} = 15$

$\Leftrightarrow 3\overline{MG} = 15$

$\Leftrightarrow \overline{MG} = 5$

Tema 4 – Funções

Recorda – páginas 40 a 45

1.

a) A correspondência II.

A correspondência I é uma função.
Objetos: 1, 2, 3
Imagens: 2, 3, 4
Contradomínio: {2, 3, 4}

A correspondência III é uma função.
Objetos: 1, 2, 3
Imagens: 2, 3
Contradomínio: {2, 3}

A correspondência IV é uma função.
Objetos: 1, 2, 3
Imagens: 2, 3, 4
Contradomínio: {2, 3, 4}

2.

a)

x	–1	0	1	2
$f(x)$	–1	1	3	5

b) $f(x) = 2x + 1, x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

3. Opção (A)

$k = \frac{6}{3} = 2$

4.

a) $3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow 3x - x = 5 + 1$

$\Leftrightarrow 2x = 6$

$\Leftrightarrow x = 3$

C.S. = {3}

b) $2 - 5(x - 1) = 8 \Leftrightarrow 2 - 5x + 5 = 8$

$\Leftrightarrow -5x = 8 - 5 - 2$

$\Leftrightarrow -5x = 1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

C.S. = $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

c) $1 - \frac{2-x}{3} = x - 4 \Leftrightarrow 3 - 2 + x = 3x - 12$

$\Leftrightarrow x - 3x = -12 + 2 - 3$

$\Leftrightarrow -2x = -13$

$\Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$

C.S. = $\left\{\frac{13}{2}\right\}$

5. Uma vez que as retas r e s são paralelas, então o declive da reta r é igual a –3. Logo, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = -3x + b$.

Como o ponto de coordenadas (3, 6) pertence à reta r então:

$6 = -3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 15$.

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -3x + 15$.

6. $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Como a abcissa de A é inferior à abcissa de C, então $A(-2, 8)$ e $C(2, 8)$.