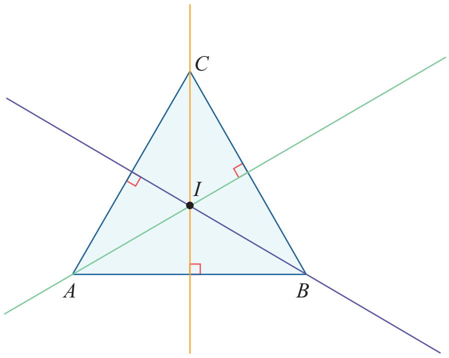
# Tema 3 – Geometria sintética no plano

## 1. Pontos notáveis do triângulo

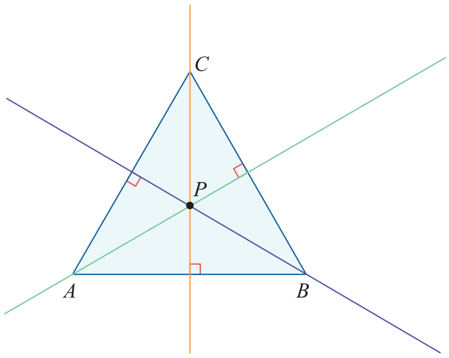
**Exercícios – páginas 40 a 42**

**1.**

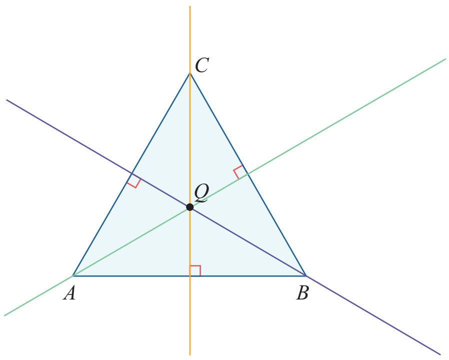
**1.1.** Incentro (*I*):



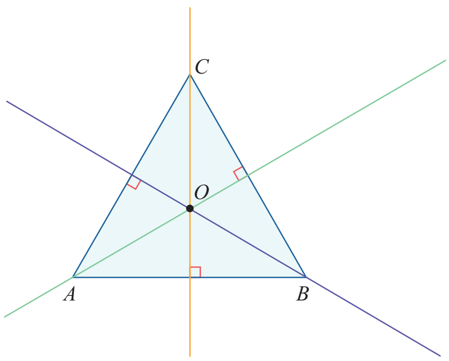

Circuncentro (*P*):



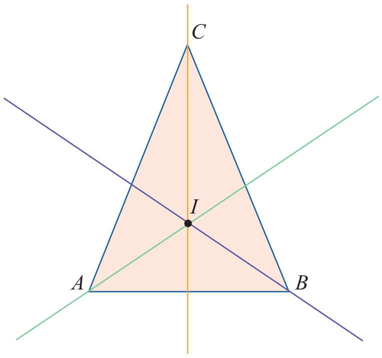

Baricentro (*Q*):



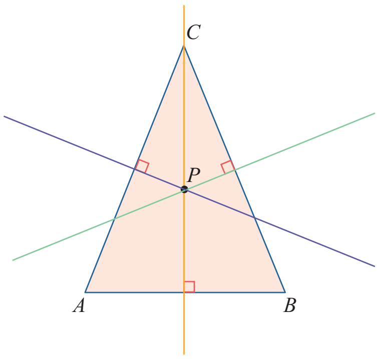

Ortocentro (*O*):



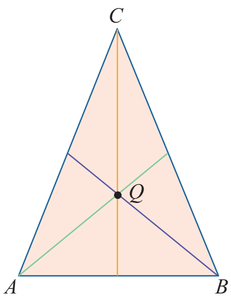

**1.2.** Incentro (*I*):



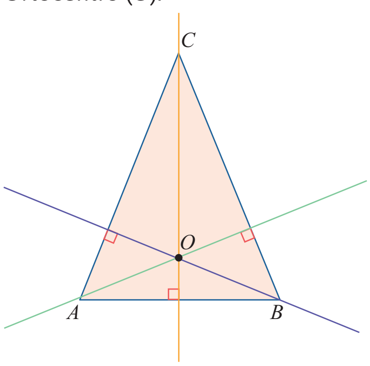

Circuncentro (*P*):



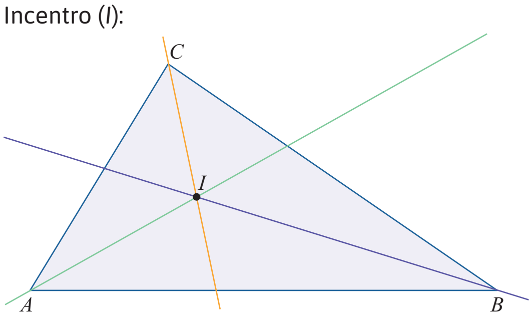

Baricentro (*Q*):



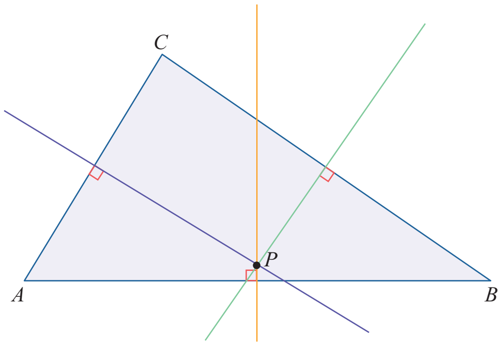

Ortocentro (*O*):



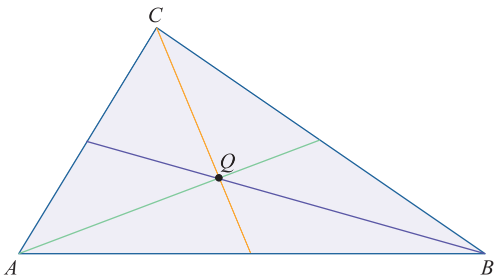

**1.3.** Incentro (*I*):



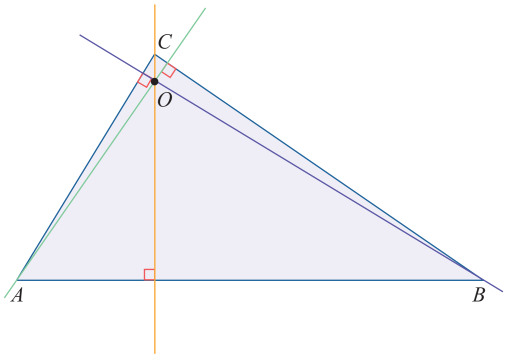
Circuncentro ($P$):



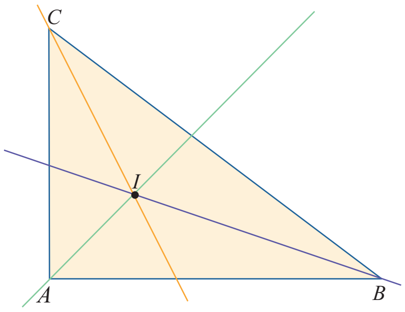

Baricentro ($Q$):



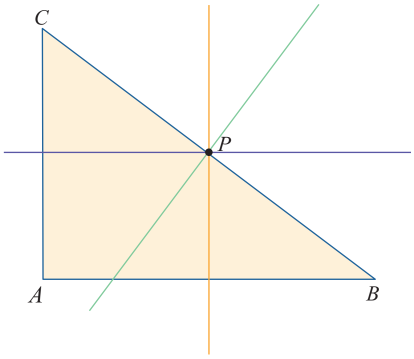

Ortocentro ($O$):



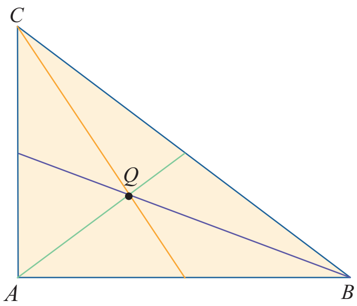

**1.4.** Incentro ($I$):



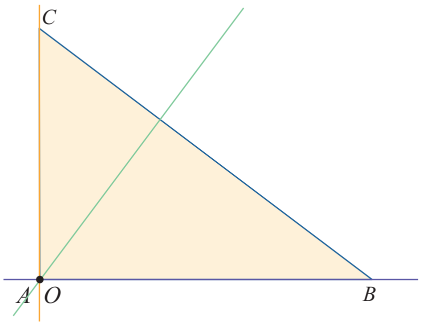

Circuncentro ($P$):



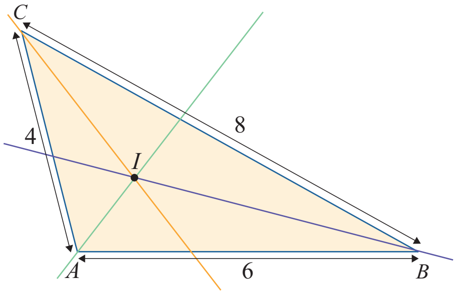

Baricentro ($Q$):




Ortocentro ($O$):




**2.** O ponto equidistante dos três lados do triângulo é o incentro, ou seja, o ponto $I$ a seguir determinado.




**3.** O ponto equidistante dos três vértices do triângulo é o circuncentro, ou seja, o ponto $P$ a seguir representado.


**4.**

**4.1.** Sendo $P$ o incentro do triângulo, tem-se que $\overline{MP} = \overline{NP} = 6$ u.c.

**4.2.** $D\hat{A}B = D\hat{A}C = 40^{\circ}$, pois $\dot{A}D$ é a bissetriz do ângulo $BAC$.

**4.3.** $D\hat{B}P = 180^\circ - 88^\circ - 40^\circ = 52^\circ$
Assim, $M\hat{C}B = 180^\circ - 52^\circ - 80^\circ = 48^\circ$.
Portanto, $M\hat{C}P = \frac{48^\circ}{2} = 24^\circ$.

**5.**
**5.1.** $\overline{BG} = \overline{AG} = 6{,}3$ u.c.

**5.2.** $\overline{AF} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{12}{2} = 6$
Pelo teorema de Pitágoras:
$$\begin{aligned}\overline{AG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FG}^2 &\Leftrightarrow 6{,}3^2 = 6^2 + \overline{FG}^2\\ &\Leftrightarrow \overline{FG}^2 = 6{,}3^2 - 6^2\\ &\Leftrightarrow \overline{FG}^2 = 3{,}69\end{aligned}$$
Logo, $\overline{FG} \approx 1{,}9$ u.c.

**5.3.** Pelo teorema de Pitágoras:
$$\begin{aligned}\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 &\Leftrightarrow 6{,}3^2 = \overline{BD}^2 + 2{,}8^2\\ &\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 6{,}3^2 - 2{,}8^2\\ &\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 31{,}85\end{aligned}$$
Logo, $\overline{BD} \approx 5{,}644$.
Portanto, $\overline{BC} = 2 \times \overline{BD} \approx 11{,}3$ u.c.

**6.**
**6.1.** $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 4{,}8 \Leftrightarrow \overline{AD} = 2{,}4$

$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{DG} = \frac{1}{3} \times 2{,}4 \Leftrightarrow \overline{DG} = 0{,}8$

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AE} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{2}{3} \times 3 \Leftrightarrow \overline{AG} = 2$

Assim, $P_{[ADG]} = 2{,}4 + 0{,}8 + 2 = 5{,}2$.
O perímetro do triângulo [ADG] é 5,2 cm.

**6.2.** $\overline{CE} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{1}{2} \times 4{,}3 \Leftrightarrow \overline{CE} = 2{,}15$

$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{2}{3} \times 2{,}4 \Leftrightarrow \overline{CG} = 1{,}6$

$\overline{EG} = \frac{1}{3}\overline{AE} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{3} \times 3 \Leftrightarrow \overline{EG} = 1$

Assim, $P_{[CEG]} = 2{,}15 + 1{,}6 + 1 = 4{,}75$.
O perímetro do triângulo [CEG] é 4,75 cm.

**7.** $\overline{QM} = \frac{2}{3}\overline{QT} \Leftrightarrow \overline{QT} = \frac{3}{2}\overline{QM} \Leftrightarrow \overline{QT} = \frac{3}{2} \times 8 \Leftrightarrow \overline{QT} = 12$

Pelo teorema de Pitágoras:
$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{QT}^2 &\Leftrightarrow (2\overline{PT})^2 = \overline{PT}^2 + 12^2\\ &\Leftrightarrow 4\overline{PT}^2 - \overline{PT}^2 = 144\\ &\Leftrightarrow \overline{PT}^2 = 48\end{aligned}$$
Logo, $\overline{PT} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ e $\overline{OP} = 2\overline{PT} \Leftrightarrow \overline{OP} = 8\sqrt{3}$.

Assim, $A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{QT}}{2} = \frac{8\sqrt{3} \times 12}{2} = 48\sqrt{3}$.

Então, $A_{[PMR]} = \frac{1}{6} A_{[OPQ]} = \frac{1}{6} \times 48\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ u.a.

**8.**
$$\begin{cases} 4x = 2y - 4 \\ 2y - 4 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y - 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 4 - 2 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$
Assim, $x = 2$ e $y = 6$.

**9.**
$$\begin{cases} 8y = 2 \times 8x \\ 8x + 2y = 2 \times 4z \\ 7z + 3 = 2 \times (2y + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 4x + y = 4z \\ 7z + 3 = 4y + 8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 4x + 2x = 4z \\ 7z - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 6x = 4z \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ z = \frac{3}{2}x \\ 7 \times \frac{3}{2}x - 4 \times 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ 21x - 16x = 10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$
Assim, $x = 2$, $y = 4$ e $z = 3$.

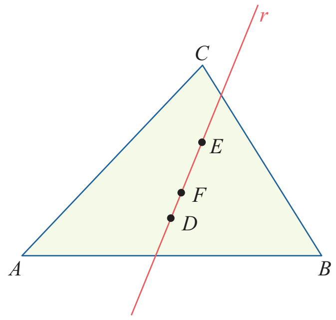
## 2. Reta de Euler

## 3. Circunferência dos nove pontos

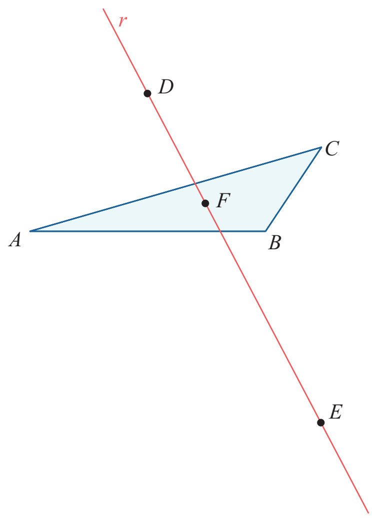
**Exercícios – página 43**

**10.** Sejam $D$ o circuncentro do triângulo, $E$ o ortocentro do triângulo, $F$ o baricentro do triângulo e $r$ a reta de Euler.

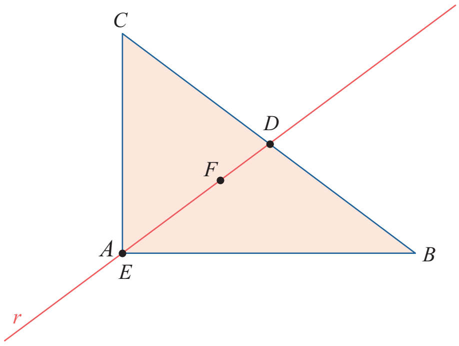
**10.1**



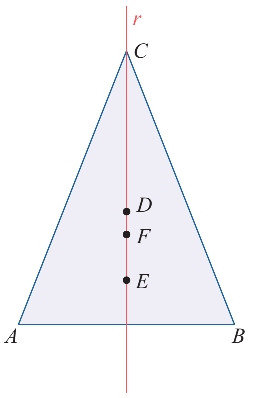

**10.2**



**10.3**



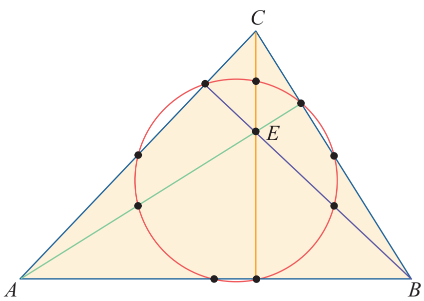

**10.4**



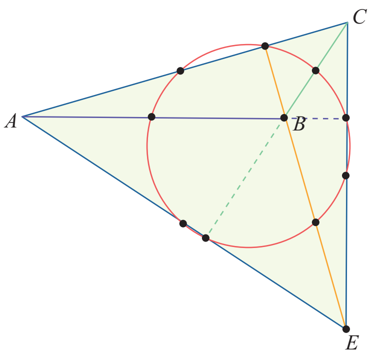

**11.** $\overline{EF} = 2\overline{DF} \Leftrightarrow \overline{EF} = 2 \times 1{,}035 \Leftrightarrow \overline{EF} = 2{,}07$
$\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DF} \Leftrightarrow \overline{DE} = 1{,}035 + 2{,}07 \Leftrightarrow \overline{DE} = 3{,}105$
Assim, $\overline{EF} = 2{,}07$ cm e $\overline{DE} = 3{,}105$ cm.

**12.**

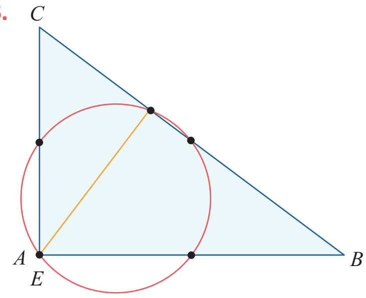
**12.1.**



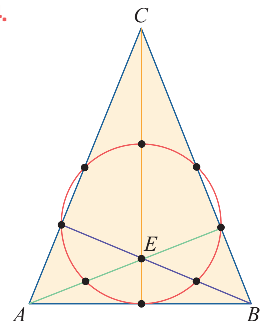

**12.2.**




**12.3.**




**12.4.**




**13.**

**13.1.** O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento de reta definido pelo circuncentro e pelo ortocentro do triângulo, ou seja, é o ponto médio do segmento de reta $[EF]$.

**13.2.** O raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita. Assim, o raio da circunferência circunscrita é 5,2 cm.

**14.** Opção (D)
O centro da circunferência inscrita no triângulo é o incentro.

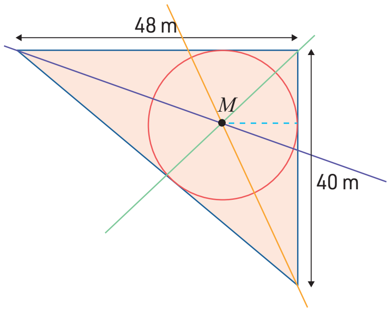
**15.** Opção (B)
As afirmações correspondem a propriedades relativas à localização dos pontos notáveis nos diversos tipos de triângulos e são todas verdadeiras.

**16.** Opção (B)
$D\hat{C}F = F\hat{C}E$, uma vez que, sendo $F$ o ponto de interseção das bissetrizes $\dot{B}D$ e $\dot{A}E$, o segmento de reta $[CF]$ está contido na bissetriz do ângulo interno do triângulo cujo vértice é $C$, ou seja, de $ACB$. Assim, $D\hat{C}F = F\hat{C}E$.

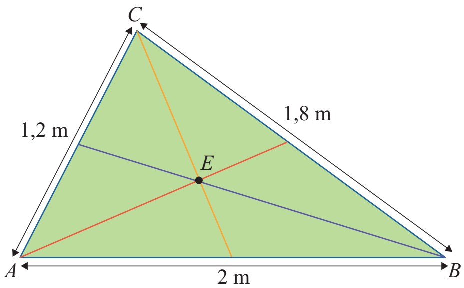
**17.** Opção (C)
$\frac{2}{3}\overline{RC} = \overline{RM} \Leftrightarrow \overline{RC} = \frac{3}{2} \times 12 \Leftrightarrow \overline{RC} = 18$

**18.** Opção (A)
Para que o ponto de interseção das medianas coincida com o ponto de interseção das alturas, então as medianas coincidem com as alturas, logo o triângulo é equilátero.

**19.** $M$ é o incentro do triângulo e é o centro da circunferência inscrita no triângulo.




**20.** $E$ é o baricentro do triângulo e corresponde ao ponto pedido.




**21.**

**21.1.** $P\hat{A}B = \frac{48^\circ}{2} = 24^\circ = A\hat{B}P$, uma vez que $\dot{A}P$ é a bissetriz do ângulo $CAB$ e que $\overline{AC} = \overline{BC}$, logo os respetivos ângulos opostos também são iguais.
Assim, $A\hat{P}B = 180^\circ - 2 \times 24^\circ = 132^\circ$.

**21.2.** $\overline{QC} = \overline{QP} + \overline{PC} \Leftrightarrow \overline{QP} = 7{,}8 - 4{,}7 \Leftrightarrow \overline{QP} = 3{,}1$

$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AQ} = 7$

Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{PQ}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 7^2 + 3{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 58{,}61$
Logo, $\overline{AP} = \sqrt{58{,}61} \approx 7{,}7$ cm.

**21.3.** $\overline{PS} = \overline{PQ} = 3{,}1$
Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{CP}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{PS}^2 \Leftrightarrow \overline{CS}^2 = 4{,}7^2 - 3{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{CS}^2 = 12{,}48$
Logo, $\overline{CS} = \sqrt{12{,}48} \approx 3{,}5$ cm.
Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{AP}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{PS}^2 \Leftrightarrow \overline{AS}^2 = 7{,}7^2 - 3{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{AS}^2 = 49{,}68$
Logo, $\overline{AS} = \sqrt{49{,}68} \approx 7$ cm.
Assim, $\overline{AC} = \overline{AS} + \overline{CS} \approx 7 + 3{,}5 = 10{,}5$ cm.

**22.**

**22.1.** $\overline{CG} = 2\overline{FG} \Leftrightarrow 60 = 2 \times (11x + 8)$
$\Leftrightarrow 60 = 22x + 16$
$\Leftrightarrow 22x = 44$
$\Leftrightarrow x = 2$
O valor de $x$ é 2.

**22.2.** $\overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{BE} \Leftrightarrow 7x + 25 = \frac{1}{3} \times 180$
$\Leftrightarrow 7x + 25 = 60$
$\Leftrightarrow 7x = 35$
$\Leftrightarrow x = 5$
O valor de $x$ é 5.

**22.3.** $B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A = 180 \Leftrightarrow x + \frac{3x}{2} - 8 + \frac{3x}{2} - 8 = 180$
$\Leftrightarrow x + 3x - 16 = 180$
$\Leftrightarrow 4x = 196$
$\Leftrightarrow x = 49$
Assim, $B\hat{A}C = 49^\circ$, $A\hat{C}B = C\hat{B}A = 65{,}5^\circ$.

Então, $C\hat{D}A = 180^\circ - \frac{49^\circ}{2} - 65{,}5^\circ = 90^\circ = B\hat{D}A$.

Logo, $AD$ é perpendicular a $BC$ e, portanto, $[AD]$ é uma altura do triângulo.

**23.** $\overline{AB} = \overline{BC}$
Seja $D$ o ponto de interseção da mediana relativa ao vértice $B$ com o lado oposto, ou seja, $[AC]$.
$\overline{AD} = \overline{DC}$, já que $\overline{BD}$ é a mediana do triângulo.
$[BD]$ é comum aos triângulos $[ABD]$ e $[CBD]$.
Então, os triângulos $[ABD]$ e $[CBD]$ têm três lados iguais e, portanto, são iguais.
Além disso, $[BD]$ divide $[AC]$ em duas partes iguais.
Logo, $B\hat{D}A = B\hat{D}C = 90^\circ$.
Então, $BD \perp AC$, logo $[BD]$ é uma das alturas do triângulo.