PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

do Manual

Tema 1 – Modelos matemáticos para a cidadania

Recorda – páginas 6 e 7

1. **A.** $\frac{90+10}{90+10+60+40}=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$

A afirmação é verdadeira.

B. $\frac{90+60}{90+10+60+40}=\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$

A afirmação é falsa.

C. $\frac{90}{90+10+60+40}=\frac{90}{200}=\frac{9}{20}$

A afirmação é verdadeira.

D. $\frac{40}{90+10+60+40}=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$

A afirmação é falsa.

2.

a) 4 258 356 – 47 164 – 38 018 = 4 173 174

b) Marisa Matias: $\frac{165\,127}{4\,173\,174}\times 100 \approx 3{,}96\%$

Marcelo Rebelo de Sousa: $\frac{2531\,692}{4\,173\,174}\times 100 \approx 60{,}67\%$

Tiago Mayan: $\frac{134\,991}{4\,173\,174}\times 100 \approx 3{,}23\%$

André Ventura: $\frac{497\,746}{4\,173\,174}\times 100 \approx 11{,}93\%$

Vitorino Silva: $\frac{123\,031}{4\,173\,174}\times 100 \approx 2{,}95\%$

João Ferreira: $\frac{179\,764}{4\,173\,174}\times 100 \approx 4{,}31\%$

Ana Gomes: $\frac{540\,823}{4\,173\,174}\times 100 \approx 12{,}96\%$

3.

a) $\frac{1\,308\,130}{2\,664\,884}$

b) $\frac{2\,664\,884}{2\,709\,503}$

Capítulo 1 – Modelos matemáticos nas eleições – página 8

Explora o incentro

1. Ao cuidado do aluno.

2. Ao cuidado do aluno.

3. O direito de voto pode ser exercido a partir dos 18 anos de idade, através do recenceamento eleitoral. As pessoas de cidadania portuguesa que completem 17 anos e que tenham Cartão de Cidadão, são automaticamente inscritas na freguesia da morada que consta no cartão. A inscrição de pessoas de cidadania estrangeira no recenceamento eleitoral é voluntária.
Nota: O número de eleitor for eliminado. Assim, para poder exercer o seu direito de voto, basta apresentar o seu Cartão de Cidadão ou documento de identificação na mesa de voto.

Fonte: https://eportugal.gov.pt/guias/votar (consultado a 6 de fevereiro de 2024)

4.

a) Número total de alunos: 260
Número total de votos: 121 + 87 + 10 + 6 = 224
Número total de não votantes: 260 – 224 = 36
$\frac{36}{260}\approx 0{,}138$
A percentagem de abstenção foi, aproximadamente, 13,8%.

b) Número total de votos: 224
Número total de votos nulos: 10
$\frac{10}{224}\approx 0{,}045$
A percentagem de votos nulos foi, aproximadamente, 4,5%.

c) Número total de votos: 224
Número total de votos em branco: 6
$\frac{6}{224}\approx 0{,}027$
A percentagem de votos em branco foi, aproximadamente, 2,7%.

5.

a) **i.** Número de votos validamente expressos: 3 766 198
Número de votantes: 3 840 176
$\frac{3\,766\,198}{3\,840\,176}\approx 0{,}981$
A percentagem de votos validamente expressos foi, aproximadamente, 98,1%.

ii. Número de votos válidos cuja resposta foi SIM: 2 231 529
Número de votos válidos: 3 766 198
$\frac{2\,231\,529}{3\,766\,198}\approx 0{,}593$
A percentagem de votos válidos cuja resposta foi SIM foi, aproximadamente, 59,3%.

iii. Número de votos válidos cuja resposta foi NÃO: 1 534 669
Número de votos válidos: 3 766 198
$\frac{1\,534\,669}{3\,766\,198}\approx 0{,}407$
A percentagem de votos válidos cuja resposta foi NÃO foi, aproximadamente, 40,7%.

iv. Número de votantes: 3 840 176
Número de total de eleitores (votantes e não votantes): 3 840 176 + 4 973 840 = 8 814 016
$\frac{3\,840\,176}{8\,814\,016}\approx 0{,}436$
A percentagem de votantes foi, aproximadamente, 43,6% e, portanto, a percentagem de abstenção foi 100% – 43,6% = 56,4%.

b) Os resultados oficiais do referendo de 1998 são os que constam na tabela (e que se encontram no exercício resolvido do manual ao lado deste exercício):

	Número
Votantes	2 709 503
Não votantes	5 786 586
Votos brancos	29 057
Votos nulos	15 562
Votos válidos	2 664 884
Resposta SIM	1 308 130
Resposta NÃO	1 356 754

	Referendo 1998	Referendo 2007
i. % votos validamente expressos	98,4% (exercício resolvido no manual)	98,1%
ii. % votos válidos cuja resposta foi SIM	$\frac{1\ 308\ 130}{2\ 664\ 884} \approx 0{,}491$ isto é 49,1%	59,3%
iii. % votos válidos cuja resposta foi NÃO	$\frac{1\ 356\ 754}{2\ 664\ 884} \approx 0{,}509$ isto é 50,9%	40,7%
iv. % abstenção	68,1% (exercício resolvido no manual)	56,4%

Observa-se que a taxa de abstenção no referendo de 2007 foi claramente inferior em relação à de 1998. No referendo de 2007 assiste-se também a uma diminuição da percentagem de votos no NÃO e a um aumento na percentagem de votos no SIM.

c) Como, segundo a legislação portuguesa, um referendo não pode ser vinculativo se a abstenção for superior a 50%, o referendo de 1998, com uma taxa de 68,1% de abstenção, não foi vinculativo. O referendo de 2007 sobre o mesmo assunto, tornou a não ser vinculativo, pois a abstenção foi novamente superior a 50%.

6. **Nota:** Os valores foram retirados de *Diário da República*, 1.ª série – N.º 35 – 19 de fevereiro de 2016.

a) 4 642 015

b) Número de total de eleitores inscritos: 9 751 398
Número de votantes: 4 744 597
Número de não votantes: 9 751 398 – 4 744 597 = = 5 006 801

$\frac{5\ 006\ 801}{9\ 751\ 398} \approx 0{,}513$

A percentagem de abstenção foi, aproximadamente, 51,3%.

c) i. Número de votos em Marcelo Rebelo de Sousa: 2 413 956
Número de eleitores inscritos: 9 751 398

$\frac{2\ 413\ 956}{9\ 751\ 398} \approx 0{,}2475$

A percentagem de votos em Marcelo Rebelo de Sousa em relação ao número de eleitores inscritos é, aproximadamente, 24,75%.

ii. Número de votos em Marcelo Rebelo de Sousa: 2 413 956
Número de votos validamente expressos: 4 642 015

$\frac{2\ 413\ 956}{4\ 642\ 015} \approx 0{,}5200$

A percentagem de votos em Marcelo Rebelo de Sousa em relação ao número de votos validamente expressos é, aproximadamente, 52,00%.

d) O candidato Marcelo Rebelo de Sousa foi o vencedor destas eleições, com mais de metade dos votos validamente expressos, 52,00%. No entanto, observa-se que, quando se calcula o número de votantes em Marcelo Rebelo de Sousa em relação ao número de eleitores inscritos, este valor desce bastante, para cerca de 24,75%, o que significa que nem um quarto da população portuguesa com direito a voto elegeu este candidato como presidente e, portanto, o impacto da abstenção é significativo.

7. Ao cuidado do aluno.

8.

a) A turma tem 26 alunos (8 + 7 + 4 + 3 + 3 + 1 = 26).

b) Como ficou acordado que seria eleito o aluno com maior número de votos, foi a Helena (com oito votos) que foi eleita Delegada de Turma.

c) Sistema de Maioria Simples (é eleita numa única votação a opção que reúne o maior número de votos, independentemente dos resultados obtidos pelas outras opções).

d) Caso tivesse ficado acordado que o vencedor teria de ter alcançado pelo menos 50% dos votos, não estaria decidida a eleição, pois a Helena teria obtido cerca de 31% dos votos: $\frac{8}{26} \approx 0{,}308$.

9.

a) Eduardo Vítor Rodrigues, pois foi o candidato que obteve o maior número de votos.

b) Sim, pois a maioria absoluta é alcançada quando uma opção obtém mais de 50% dos votos validamente expressos, e o candidato Eduardo Vítor Rodrigues obteve aproximadamente 60,43% dos votos validamente expressos.
Votos válidos: 127 546 – 5579 = 121 967

$\frac{73\ 712}{121\ 967} \approx 0{,}6043$

10. Ao cuidado do aluno.

11.

a) $\frac{800}{2} = 400$, logo para o Zeferino vencer esta eleição terá de ter, no mínimo, 401 votos e, nesse caso, o António terá 399 votos.

b) $\frac{401}{800} = 0{,}501\ 25$ e $\frac{399}{800} = 0{,}498\ 75$. Assim, no caso de vencer o Zeferino com 401 votos, ele terá 50,125% dos votos e o António 49,875%.

c) i. $\frac{800}{3} \approx 267$, logo para um candidato vencer esta eleição por Maioria Simples terá de ter, no mínimo, 268 votos.

ii. $\frac{800}{2} = 400$, logo para um candidato vencer esta eleição por Maioria Absoluta terá de ter, no mínimo, 401 votos.

12. I. Afirmação verdadeira.
II. Afirmação falsa.
Ver, por exemplo, o exercício anterior em que o vencedor tem 50,125% dos votos.

13.

```python
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
cD=int(input("N.º de votos do candidato D:"))
ma=int((cA+cB+cC+cD)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
  print("O candidato A obteve maioria absoluta com", cA, "votos.")
elif cB>=ma:
  print("O candidato B obteve maioria absoluta com", cB, "votos.")
elif cC>=ma:
  print("O candidato C obteve maioria absoluta com", cC, "votos.")
elif cD>=ma:
  print("O candidato D obteve maioria absoluta com", cD, "votos.")
else:
  print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

14.

a) Se houver três opções podem ser feitas seis ordenações de preferências diferentes (a pessoa pode colocar em primeiro lugar um dos três destinos e, por cada uma dessas escolhas, tem duas opções diferentes para colocar em segunda preferência e, por fim, por cada uma das maneiras anteriores terá apenas uma forma de colocar a sua última preferência. Logo, $3 \times 2 \times 1 = 6$).

b) Se houver quatro opções podem ser feitas 24 ordenações de preferências diferentes (a pessoa pode colocar em primeiro lugar um dos quatro destinos e, por cada uma dessas escolhas, tem três opções diferentes para colocar em segunda preferência. Por cada uma das escolhas para primeira e segunda preferências pode colocar em terceira preferência dois destinos e, por fim, por cada uma das maneiras anteriores terá apenas uma forma de colocar a sua última preferência. Logo, $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$).

c) Se houver cinco opções podem ser feitas 120 ordenações de preferências diferentes ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$).

15. Para cada um dos doces temos as pontuações seguintes.
O doce fino de amêndoa obteve 135 pontos:
$3 \times 16 + 3 \times 7 + 2 \times 7 + 2 \times 12 + 1 \times 18 + 1 \times 10 = 135$
O Dom Rodrigo obteve 146 pontos:
$3 \times 7 + 3 \times 18 + 2 \times 16 + 2 \times 10 + 1 \times 7 + 1 \times 12 = 146$
O queijinho de figo obteve 139 pontos:
$3 \times 12 + 3 \times 10 + 2 \times 7 + 2 \times 18 + 1 \times 16 + 1 \times 7 = 139$
Logo, o doce vencedor foi o Dom Rodrigo.

16.

a) Considerando apenas os resultados da primeira preferência:

- o doce fino de amêndoa obtém 23 $(16 + 7)$ pontos;
- o Dom Rodrigo obtém 25 $(7 + 18)$ pontos;
- o queijinho de figo obtém 22 $(12 + 10)$ pontos.

O doce vencedor não muda, continuando a ser o Dom Rodrigo.

b) Com o engano nas duas primeiras ordens de preferência os resultados ficam como consta na tabela:

Ordem de preferência	Número de votos					
	7	16	7	18	12	10
1.ª	A	A	D	D	F	F
2.ª	D	F	A	F	A	D
3.ª	F	D	F	A	D	A

Utilizando o método de maioria simples o doce vencedor é o mesmo, pois:
- o doce fino de amêndoa obtém 23 pontos $(7 + 16$ em vez de $16 + 7)$;
- o Dom Rodrigo obtém 25 $(7 + 18)$ pontos;
- o queijinho de figo obtém 22 $(12 + 10)$ pontos.

Logo, o doce vencedor continua a ser o Dom Rodrigo.
Utilizando o Método de Borda, para cada um dos doces temos as pontuações seguintes.
O doce fino de amêndoa obtém 135 pontos:
$3 \times 7 + 3 \times 16 + 2 \times 7 + 2 \times 12 + 1 \times 18 + 1 \times 10 = 135$
O Dom Rodrigo obtém 137 pontos:
$3 \times 7 + 3 \times 18 + 2 \times 7 + 2 \times 10 + 1 \times 16 + 1 \times 12 = 137$
O queijinho de figo obtém 148 pontos:
$3 \times 12 + 3 \times 10 + 2 \times 16 + 2 \times 18 + 1 \times 7 + 1 \times 7 = 148$
Assim, o doce vencedor com esta alteração é o queijinho de figo.

17.

a) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) **i.** $10 + 16 + 5 + 23 + 18 + 32 + 54 + 7 = 165$

ii. Utilizando o Método de Borda, para cada um dos jogadores temos as pontuações seguintes.
O Afonso obtém 298 pontos:
$4 \times 5 + 3 \times 7 + 2 \times 18 + 2 \times 32 + 2 \times 54 + 1 \times 10 + 1 \times 16 + 1 \times 23 = 298$
O Dinis obtém 480 pontos:
$4 \times 23 + 4 \times 32 + 3 \times 16 + 3 \times 54 + 2 \times 10 + 1 \times 5 + 1 \times 18 + 1 \times 7 = 480$
O João obtém 309 pontos:
$4 \times 18 + 4 \times 7 + 3 \times 10 + 3 \times 5 + 2 \times 16 + 2 \times 23 + 1 \times 32 + 1 \times 54 = 309$
O Tomás obtém 563 pontos:
$4 \times 10 + 4 \times 16 + 4 \times 54 + 3 \times 23 + 3 \times 18 + 3 \times 32 + 2 \times 5 + 2 \times 7 = 563$
Assim, o jogador vencedor foi o Tomás.

18.

a) Considerando apenas os resultados da primeira preferência, a tuna dos Açores tem 7 pontos, a tuna da Madeira tem 5 pontos e a tuna de Coimbra tem 4 pontos. Assim, usando o método de Maioria Simples a tuna vencedora é a tuna dos Açores.

b) A tuna dos Açores (9 votos).

c) Utilizando o Método de Borda, para cada uma das tunas temos as pontuações seguintes.
A tuna dos Açores obtém 30 pontos:
$3 \times 7 + 1 \times 5 + 1 \times 4 = 30$
A tuna de Coimbra obtém 29 pontos:
$3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 7 = 29$
A tuna da Madeira obtém 37 pontos:
$3 \times 5 + 2 \times 7 + 2 \times 4 = 37$
Assim, a tuna vencedora é a tuna da Madeira.

d) Utilizando o Método de Borda com a variação nos pesos atribuídos às preferências (6 pontos para a primeira preferência, 1 ponto para a segunda e 0 pontos para a última preferência), para cada uma das tunas temos as pontuações seguintes.
A tuna dos Açores obtém 42 pontos:
$6 \times 7 + 0 \times 5 + 0 \times 4 = 42$
A tuna de Coimbra obtém 29 pontos:
$6 \times 4 + 1 \times 5 + 0 \times 7 = 29$
A tuna da Madeira obtém 41 pontos:
$6 \times 5 + 1 \times 7 + 1 \times 4 = 41$
Assim, a tuna vencedora é a tuna dos Açores.

19.

a) $7 + 12 + 18 + 20 + 23 + 25 = 105$

b) Considerando apenas os resultados da primeira preferência.

i. O vencedor por Maioria Simples é o filme 5.
O filme 1 tem 19 (12 + 7) votos;
O filme 2 tem 20 votos;
O filme 3 tem 18 votos;
O filme 4 tem 23 votos;
O filme 5 tem 25 votos.

ii. O filme com mais votos é o filme 5 e tem 25 votos, o que corresponde a aproximadamente 23,8% dos votos. Portanto, se o método utilizado fosse o de Maioria Absoluta, era necessária uma segunda volta, disputada pelos filmes 4 e 5.

c) Utilizando o Método de Borda, para cada um dos filmes temos as pontuações seguintes.
O filme 1 obteve 269 pontos:
$5 \times 7 + 5 \times 12 + 3 \times 25 + 2 \times 18 + 2 \times 20 + 1 \times 23 = 269$
O filme 2 obteve 316 pontos:
$5 \times 20 + 4 \times 18 + 3 \times 12 + 3 \times 23 + 2 \times 7 + 1 \times 25 = 316$
O filme 3 obteve 381 pontos:
$5 \times 18 + 4 \times 12 + 4 \times 20 + 4 \times 23 + 3 \times 7 + 2 \times 25 = 381$
O filme 4 obteve 329 pontos:
$5 \times 23 + 4 \times 7 + 4 \times 25 + 3 \times 18 + 1 \times 12 + 1 \times 20 = 329$
O filme 5 obteve 280 pontos:
$5 \times 25 + 3 \times 20 + 2 \times 12 + 2 \times 23 + 1 \times 7 + 1 \times 18 = 280$
Assim, filme vencedor é o filme 3.

20.

a)

B	C
Listas de preferência	Número de votos
F1F4F3F2F5	7
F1F3F2F5F4	12
F3F2F4F1F5	18
F2F3F5F1F4	20
F4F3F2F5F1	23
F5F4F1F3F2	25
Total	105

E	F	G	H	I	J	K
	Filmes a concurso					Maior pontuação
Sistema de votação	F1	F2	F3	F4	F5	
Borda	269	316	381	329	280	381

b) Com a introdução de mais 10 votos em qualquer uma das preferências, apesar de se verificarem alterações nas pontuações obtidas por cada filme, não se verifica alteração no filme vencedor, que continua a ser o filme 3. No entanto, por exemplo, com mais 10 votos na 2.ª lista de preferências, o segundo lugar passa a ser atribuído ao filme 2 e não ao filme 4.

21.

a) 10 eleitores do grupo 1 preferem A a B e 10 eleitores do grupo 3 também preferem A a B. Logo, 20 dos 30 eleitores preferem A a B, ou seja, $\frac{2}{3}$ dos eleitores preferem o candidato A ao B.

b) 10 eleitores do grupo 1 preferem B a C e 9 eleitores do grupo 2 também preferem B a C. Logo, 20 dos 30 eleitores preferem B a C, ou seja, $\frac{2}{3}$ dos eleitores preferem o candidato B ao C.

c) A partir dos resultados das alíneas anteriores não podemos concluir que $\frac{2}{3}$ dos eleitores prefere o candidato A ao candidato C.
Por observação da tabela sabemos que 10 eleitores do grupo 2 preferem C a A e 10 eleitores do grupo 3 também preferem C a A. Logo, 20 dos 30 eleitores preferem C a A, ou seja, $\frac{2}{3}$ dos eleitores preferem o candidato C ao A, e não o candidato A ao C.

22. Até à data (dezembro de 2023).

a) O sistema de votação utilizado para eleger o bastonário da ordem dos advogados é o sistema de Maioria Absoluta.

b) O sistema de votação utilizado para eleger o bastonário da ordem dos médicos é o sistema de Maioria Absoluta.

c) O sistema de votação utilizado para eleger o bastonário da ordem dos enfermeiros é o sistema de Maioria Simples.

Capítulo 2 – Modelos matemáticos na partilha – página 28

23.

	Listas			
	A	B	C	D
Divisores	10 000	6000	5500	2000
1	10 000	6000	5500	2000
2	5000	3000	2750	1000
3	3333,3	2000	1833,3	666,7
4	2500	1500	1375	500
5	2000	1200	1100	400

Escrevendo os quocientes obtidos por ordem decrescente, obtemos:

Quociente	Lista
10 000	A
6000	B
5500	C
5000	A
3333,3	A
3000	B

Distribuição dos seis mandatos: 3 para a lista A, 2 para a lista B, 1 para a lista C e 0 para a lista D.

24.

a)

	Listas			
	A	**B**	**C**	**D**
Divisores	10 000	6000	5500	2000
1	10 000	6000	5500	2000
2	5000	3000	2750	1000
3	3333,3	2000	1833,3	666,7
4	2500	1500	1375	500
5	2000	1200	1100	400
6	1666,7	1000	916,7	333,3

Escrevendo os quocientes obtidos por ordem decrescente, obtemos:

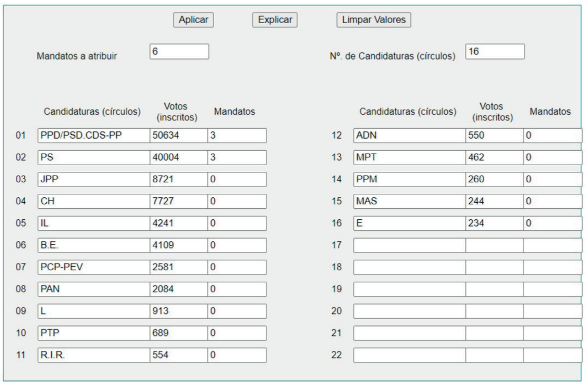
Quociente	Curso
10 000	A
6000	B
5500	C
5000	A
3333,3	A
3000	B
2750	C
2500	A
2000	D

Observa que existem três quocientes iguais a 2000 – o último mandato a distribuir foi atribuído à lista D, pois, em caso de empate, segundo o método de Hondt, atribui-se o item à opção que tiver o menor número de votos.

Distribuição dos nove mandatos: 4 para a lista A, 2 para a lista B, 2 para a lista C e 1 para a lista D.

b) A afirmação é verdadeira. A lista B tem 6000 votos, que é o triplo de votos da lista D, que tem 2000 votos. No entanto, a lista B tem dois mandatos, ou seja, o dobro dos mandatos obtidos pela lista D (um mandato).

25. Utilizando o simulador disponível obtemos os seguintes resultados.



Aplicar Explicar Limpar Valores

Mandatos a atribuir: 6 — Nº. de Candidaturas (círculos): 16

	Candidaturas (círculos)	Votos (inscritos)	Mandatos		Candidaturas (círculos)	Votos (inscritos)	Mandatos
01	PPD/PSD.CDS-PP	50634	3	12	ADN	550	0
02	PS	40004	3	13	MPT	462	0
03	JPP	8721	0	14	PPM	260	0
04	CH	7727	0	15	MAS	244	0
05	IL	4241	0	16	E	234	0
06	B.E.	4109	0	17			
07	PCP-PEV	2581	0	18			
08	PAN	2084	0	19			
09	L	913	0	20			
10	PTP	689	0	21			
11	R.I.R.	554	0	22			

Assim, verifica-se que nessas eleições legislativas no círculo eleitoral da Madeira, os seis mandatos foram distribuídos da seguinte forma: 3 mandatos para a candidatura do PPD/PSD.CDS-PP e 3 mandatos para a candidatura do PS.

Dados oficiais, consultados em https://www.eleicoes.mai.gov.pt/legislativas2022/resultados/territorio-nacional?local=LOCAL-300000 (17 de dezembro de 2023)

26.

a)

	Listas		
	X	**Y**	**Z**
Divisores	9000	8400	3300
1	9000	8400	3300
2	4500	4200	1650
3	3000	2800	1100
4	2250	2100	825

Escrevendo os quocientes obtidos por ordem decrescente, obtemos:

Quociente	Lista
9000	X
8400	Y
4500	X
4200	Y

Distribuição dos quatro mandatos: 2 para a lista X, 2 para a lista Y e 0 para a lista Z.

b)

	Listas		
	X	**Y**	**Z**
Divisores	9000	8400	3300
1	9000	8400	3300
3	3000	2800	1100
5	1800	1680	660
7	1285,7	1200	471,4
9	1000	933,3	366,7

Escrevendo os quocientes obtidos por ordem decrescente, obtemos:

Quociente	Lista
9000	X
8400	Y
3300	Z
3000	X

Distribuição dos quatro mandatos: 2 para a lista X, 1 para a lista Y e 1 para a lista Z.

c) A utilização do método de Saint-Laguë favoreceu a lista com menor número de votos (lista Z), pois com o método de Hondt não conseguiu obter nenhum mandato e com o método de Saint-Laguë obteve um mandato.

27.

	Listas			
	A	C	E	R
Divisores	1018	921	303	71
1	1018	921	303	71
2	509	460,5	151,5	35,5
3	339,3	307	101	23,7
4	254,5	230,3	75,8	17,8
5	203,6	184,2	60,6	14,2
6	169,7	153,5	50,5	11,8
7	145,4	131,6	43,3	10,1
8	127,3	115,1	37,9	8,9
9	113,1	102,3	33,7	7,9
10	101,8	92,1	30,3	7,1
11	92,5	83,7	27,5	6,5

No exercício resolvido, utilizando o método de Saint-Laguë, conclui-se que as listas A e C elegeram 9 representantes cada uma, a lista E elegeu 3 representantes e a lista R elegeu 1 representante.
Utilizando o método de Hondt e observando a tabela acima, conclui-se que a lista A elegeu 10 representantes, a lista C elegeu 9 representantes, a lista E elegeu 3 representantes e a lista R não conseguiu eleger nenhum representante.
A lista com menor número de votos não ficaria representada se fosse utilizado o método de Hondt.

28. Método de Hondt

	Listas				
	A	B	C	D	E
Divisores	17 800	10 300	9506	2301	2116
1	17 800	10 300	9506	2301	2116
2	8900	5150	4753	1150,5	1058
3	5933,3	3433,3	3168,7	767	705,3
4	4450	2575	2376,5	575,3	529
5	3560	2060	1901,2	460,2	423,2
6	2966,7	1716,7	1584,3	383,5	352,7

Distribuição dos oito mandatos: 4 para a lista A, 2 para a lista B e 2 para a lista C e 0 para as listas D e E.

Método de Saint-Laguë

	Listas				
	A	B	C	D	E
Divisores	17 800	10 300	9506	2301	2116
1	17 800	10 300	9506	2301	2116
3	5933,3	3433,3	3168,7	767	705,3
5	3560	2060	1901,2	460,2	423,2
7	2542,9	1471,4	1358	328,7	302,3
9	1977,8	1144,4	1056,2	255,7	235,1
11	1618,2	936,4	864,2	209,2	192,4

Distribuição dos oito mandatos: 3 para a lista A, 2 para a lista B, 2 para a lista C, 1 para a lista D e 0 para a lista E.
Com o método de Saint-Laguë, uma das listas com menos votos, a lista D, que não tinha nenhum mandato atribuído pelo método de Hondt, consegue um mandato.

29.
a)

	i. Percentagem do número de eleitores em relação ao número total validamente expressos	**ii.** Percentagem do número de mandatos face ao total nacional
Castelo Branco	2%	2%
Lisboa	18%	21%
Porto	15%	17%

b) A percentagem de eleitores e de mandatos por cada círculo eleitoral deveria ser a mesma, como acontece no círculo de Castelo Branco. No entanto, verifica-se que, por exemplo, o círculo eleitoral de Lisboa é representado por 21% dos mandatos, enquanto que em relação ao número de eleitores, estes são 18% do número total de eleitores, sendo esta tendência também verificada no círculo eleitoral do Porto. Parece que, com a utilização do método de Hondt (que determina o número de mandatos, em função do número de eleitores), e de uma forma geral, os círculos maiores são favorecidos em relação ao número de mandatos.

c) Utilizando o simulador que encontras na página
https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx
podes concluir que, para o terceiro partido mais votado conseguir eleger um deputado, seriam necessários mais 7250 votos nesse partido.
Observa que se calcularmos os primeiros quocientes do número de votantes por 1, 2, 3 e 4, e observamos os quatro maiores quocientes, verificamos que o último é de 15 207 – o que valeu um deputado ao partido Socialista (PS). Para que o quarto maior quociente fosse do terceiro partido mais votado (CHEGA), teria de ultrapassá-lo em pelo menos um voto, os 15 207 (ou até ficar empatado, pois em caso de empate o partido menos votado é o escolhido). Como tem 7958 votos, faltam-lhe 7250 (15 208 – 7958 = 7250).

Partidos	Votantes	Quocientes do número de votantes por			
		1	2	3	4
PS	45 622	45 622	22 811	15 207	11 406
PPD/PSD	26 237	26 237	13 119	8746	6559
CH	7958	7958	3979	2653	1990
BE	4069	4069	2035	1356	1017
PCP PEV	2784	2784	1392	928	696

30. Ao cuidado do aluno.

Aprende fazendo – páginas 40 a 49

1. Opção (C)

$\frac{3456}{2} + 1 = 1728 + 1 = 1729$

2. Percentagem de votos obtida por Aníbal Cavaco Silva nas eleições presidenciais de 2011:

$\frac{2\,231\,956}{4\,214\,860} \approx 0{,}5295$, ou seja, 52,95%

Percentagem de votos obtida por Aníbal Cavaco Silva nas eleições presidenciais de 2006:

$\frac{2\,773\,431}{5\,487\,347} \approx 0{,}5054$, ou seja, 50,54%

Aníbal Cavaco Silva obteve maioria absoluta nas duas eleições presidenciais. Em 2006 obteve 50,54% com 2 773 431 votos de entre 5 487 347 votos validamente expressos, e em 2011 obteve 52,95% com 2 231 956 votos de entre 4 214 860 votos validamente expressos.

3.

B	C	D	E	F	G	H
		PARTIDOS				
		PS	PPD/PSD	CDS-PP	BE	PCP-PEV
DIVISORES	1	20236	7973	1161	520	426
	2	10118	3986,5	580,5	260	213
	3	6745,3	2657,7	387	173,3	142
	4	5059	1993,3	290,3	130	106,5
	5	4047,2	1594,6	232,2	104	85,2
	6	3372,7	1328,8	193,5	86,7	71
	7	2890,9	1139	165,9	74,3	60,9
	8	2529,5	996,6	145,1	65	53,3
	9	2248,4	885,9	129	57,8	47,3
Número de mandatos		7	2			

J	K	L	M	N	O	P
		PARTIDOS				
		PS	PPD/PSD-CDS-PP		BE	PCP-PEV
DIVISORES	1	20236	9134		520	426
	2	10118	4567		260	213
	3	6745,3	3044,7		173,3	142
	4	5059	2283,5		130	106,5
	5	4047,2	1826,8		104	85,2
	6	3372,7	1522,3		86,7	71
	7	2890,9	1304,9		74,3	60,9
	8	2529,5	1141,8		65	53,3
	9	2248,4	1014,9		57,8	47,3
Número de mandatos		6	3			

Se nas eleições autárquicas de 2017 os partidos PPD/PSD e CDS-PP se tivessem coligado o PS teria obtido apenas seis mandatos e a coligação PPD/PSD com o CDS-PP teria obtido três mandatos.

4.

a)

Divisores	Financeiro	Comercial	Publicidade e *marketing*
	8	60	26
1	8	60	26
2	4	30	13
3	2,7	20	8,7
4	2	15	6,5
5	1,6	12	5,2
6	1,3	10	4,3
7	1,1	8,6	3,7
8	1	7,5	3,3
9	0,9	6,7	2,9
10	0,8	6	2,6
11	0,7	5,5	2,4
12	0,7	5	2,17
13	0,6	4,6	2
14	0,6	4,3	1,9
Número de computadores	**1**	**13**	**6**

O departamento financeiro recebeu um computador, o departamento comercial recebeu 13 computadores e o departamento de publicidade e *marketing* recebeu seis computadores.

b)

Número de computadores	Financeiro	Comercial	Publicidade e *marketing*
	8	60	26
1	8	60	26
3	2,7	20	8,7
5	1,6	12	5,2
7	1,1	8,6	3,7
9	0,9	6,7	2,9
11	0,7	5,5	2,4
13	0,6	4,6	2
15	0,5	4	1,7
17	0,5	3,5	1,5
19	0,4	3,2	1,4
21	0,4	2,9	1,2
23	0,35	2,4	1,1
25	0,32	2,4	1,04
Número de computadores	**2**	**13**	**5**

O departamento financeiro recebeu dois computadores, o departamento comercial recebeu 13 computadores e o departamento de publicidade e *marketing* recebeu cinco computadores.

5.

B	C	D	E	F	G	H
		Listas				
		A	B	C	D	Total
Divisores	Número de votos	160	200	520	670	1550
	1	160	200	520	670	
	3	53,3	66,7	173,3	223,3	
	5	32	40	104	134	
	7	22,9	28,6	74,3	95,7	
	9	17,8	22,2	57,8	74,4	
	11	14,5	18,2	47,3	60,9	
	13	12,3	15,4	40	51,5	
Número de mandatos Saint-Laguë		1	1	3	4	
Número de mandatos proporcional		0,9	1,2	3	3,9	

De acordo com o método de Saint-Laguë, a lista A elegeu um consultor, a lista B elegeu um consultor, a lista C elegeu três consultores e a lista D elegeu quatro consultores.
Se os mandatos tivessem sido atribuídos na proporção direta dos votos, com arredondamento à unidade, os resultados teriam sido os mesmos:

- Lista A

$$\frac{160}{1550} \times 9 \approx 1$$

- Lista B

$$\frac{200}{1550} \times 9 \approx 1$$

- Lista C

$$\frac{520}{1550} \times 9 \approx 3$$

- Lista D

$$\frac{670}{1550} \times 9 \approx 4$$

A afirmação feita pelos representantes da lista A está correta, já que se os mandatos tivessem atribuídos na proporção direta dos votos, com arredondamento à unidade, os resultados teriam sido os mesmos.

6.

B	C	D	E	F	G
		Partidos			
		A	B	C	D
	Número de votos	10945	7980	5120	4000
DIVISORES	1	10945	7980	5120	4000
	2	5472,5	3990	2560	2000
	3	3648,3	2660	1706,7	1333,3
	4	2736,3	1995	1280	1000
	5	2189	1596	1024	800
	6	1824,2	1330	853,3	666,7
	7	1563,6	1140	731,4	571,4
	8	1368,1	997,5	640	500
Número de mandatos		4	2	1	1

I	J	K	L	M	N
		Partidos			
		A	B	C	D
	Número de votos	10945	7980	5120	4000
DIVISORES	1	10945	7980	5120	4000
	3	3648,3	2660	1706,7	1333,3
	5	2189	1596	1024	800
	7	1563,6	1140	731,4	571,4
	9	1216,1	886,7	568,9	444,4
	11	995	725,5	465,5	363,6
	13	841,9	613,8	393,8	307,7
	15	729,7	532	341,3	266,7
Número de mandatos		3	2	2	1

Pela aplicação do método de Hondt, o partido A elegeu quatro mandatos, o partido B dois mandatos, o partido C um mandato e o partido D um mandato.
Pela aplicação do método de Saint-Laguë, o partido A elegeu três mandatos, o partido B dois mandatos, o partido C dois mandato e o partido D um mandato.

7.

a) **i.** Se o método de eleição fosse o de Maioria Simples a delegada eleita seria a Andreia.

ii. $\frac{9}{20} = 0{,}45$, ou seja, 45%
A percentagem de votos obtida pela vencedora foi 45%.

iii. $\frac{11}{20} = 0{,}55$, ou seja, 55%
A percentagem de alunos que não votou na candidatura vencedora foi 55%.

iv. Ao cuidado do aluno.

b) **i.** Pontuação obtida pela Andreia:
$9 \times 3 + 6 \times 1 + 5 \times 1 = 27 + 6 + 5 = 38$
Pontuação obtida pelo Bernardo:
$9 \times 2 + 6 \times 3 + 5 \times 2 = 18 + 18 + 10 = 46$
Pontuação obtida pela Cláudia:
$9 \times 1 + 6 \times 2 + 5 \times 3 = 9 + 12 + 15 = 36$
Por aplicação do método de Borda, o delegado eleito seria o Bernardo.

ii. Pontuação obtida pela Andreia:
$9 \times 5 + 6 \times 0 + 5 \times 0 = 45$
Pontuação obtida pelo Bernardo:
$9 \times 1 + 6 \times 5 + 5 \times 1 = 9 + 30 + 5 = 44$
Pontuação obtida pela Cláudia:
$9 \times 0 + 6 \times 1 + 5 \times 5 = 6 + 25 = 31$
Com a alteração da pontuação, a delegada seria a Andreia, logo há uma alteração relativamente ao candidato vencedor da alínea anterior.

8.

a) Determinemos a percentagem de mandatos obtida por cada partido político.

Listas	Votos	% de Votos	Mandatos	Percentagem de mandatos
PS	2 303 601	42,50%	120	52,17%
PPD/PSD	1 539 415	28,41%	72	31,30%
CH	399 659	7,38%	12	5,22%
IL	273 687	5,05%	8	3,48%
BE	244 603	4,52%	5	2,17%
PCP-PEV	238 920	4,41%	6	2,61%
CDS-PP	89 181	1,65%	0	0,00%
PAN	88 152	1,63%	1	0,43%
L	71 232	1,31%	1	0,43%
PPD/PSD.CDS-PP	50 636	0,93%	3	1,30%
PPD/PSD.CDS-PP.PPM	28 330	0,52%	2	0,87%
Total			**230**	

Observa-se que, em três candidaturas (PS, PPD/PSD e PPD/PSD.CDS-PP), a percentagem de mandatos é superior à percentagem de votos.

Isto deve-se ao facto de o país estar organizado em 22 círculos eleitorais, sendo a distribuição de mandatos feita dentro de cada círculo, de acordo com o número de deputados que cada círculo elege. Além disso, essa distribuição não é diretamente proporcional ao número de votos, mas obedece a um sistema de representação proporcional que é o método de Hondt.
Verifica-se que, neste caso, o partido vencedor, PS, apesar de vencer com a maioria relativa dos votos 42,5% obteve uma maioria absoluta na distribuição dos mandatos, 52,17%.
Assim, a afirmação do enunciado é falsa.

b) Comecemos por aplicar o método de Hondt para determinar a distribuição dos seis mandatos.

	Partidos							
	PPD/PSD.CDS-PP	PS	JPP	CH	BE	IL	PCP-PEV	PAN
N.º de votos	50 636	40 006	8722	7730	4120	4243	2582	2084
Divisores 1	50 636	40 006	8722	7730	4120	4243	2582	2084
2	25 318	20 003	4361	3865	2060	2121,5	1291	1042
3	16 878,7	13 335,3	2907,3	2576,7	1373,3	1414,3	860,7	694,7
4	12 659	10 001,5	2180,5	1932,5	1030	1060,8	645,5	521
5	10 127,2	8001,2	1744,4	1546	824	848,6	516,4	416,8
6	8439,3	6667,7	1453,7	1288,3	686,7	707,2	430,3	347,3
Número de mandatos	3	3						

No círculo eleitoral da Madeira, onde se procedeu à distribuição de seis mandatos, foram eleitos três deputados pela lista PPD/PSD.CDS-PP e três deputados pelo PS, atendendo ao número de votos alcançados.
Assim, a lista PPD/PSD.CDS-PP obteve três mandatos dos 230 mandatos para a Assembleia da República, o que corresponde a 1,3% do número total de mandatos, apesar de só ter obtido 0,93% dos votos a nível nacional.

9.

a) O número de votos validamente expressos é igual a:
28 799 + 17 437 + 11 959 + 4785 + 948 + 430 = 64 268
O número de votantes é igual a:
64 268 + 2225 + 1550 = 68 043
Assim, a percentagem de abstenção é, aproximadamente:

$$\frac{141\,360 - 68\,043}{141\,360} \approx 0{,}52, \text{ ou seja, } 52\%$$

b) Comecemos por determinar, aplicando o método de Hondt, o número de mandatos de cada força política. No quadro seguinte apresentam-se os quocientes que se obtêm dividindo o número de votos de cada partido pelos divisores 1, 2, 3, 4, ..., 11, destacando os onze maiores.

	Partidos					
Divisores	A	B	C	D	E	F
1	28 799,0	17 437,0	11 959,0	4785,0	948,0	340,0
2	14 399,5	8718,5	5979,5	2392,5	474,0	170,0
3	9599,7	5812,3	3986,3	1595,0	316,0	113,3
4	7199,8	4359,3	2989,8	1196,3	237,0	85,0
5	5759,8	3487,4	2391,8	957,0	189,6	68,0
6	4799,8	2906,2	1993,2	797,5	158,0	56,7
7	4114,1	2491,0	1708,4	683,6	135,4	48,6
8	3599,9	2179,6	1494,9	598,1	118,5	42,5
9	3199,9	1937,4	1328,8	531,7	105,3	37,8
10	2879,9	1743,7	1195,9	478,5	94,8	34,0
11	2618,1	1585,2	1087,2	435,0	86,2	30,9

Do quadro anterior resulta que o partido A elegeu seis vereadores, o partido B, três, e o partido C, dois.
Se partido D tivesse obtido mais 15 votos, teria ficado com 4800 votos.
O quociente da divisão entre 4800 e 1, que é 4800, ultrapassa o quociente 4799,8.
Portanto, se o partido D tivesse obtido mais 15 votos, elegeria o seu cabeça-de-lista, em prejuízo do partido A, o qual, em vez de seis vereadores, elegeria apenas cinco.
O partido A, que conseguiu maioria absoluta de mandatos, seis em onze, deixaria de ter essa maioria absoluta, tendo, por isso, necessidade de dialogar com a oposição. É neste contexto que surge a frase do cabeça-de-lista do partido D.

10.

a) O número de votos validamente expressos é igual a:
13 442 + 8723 + 6033 + 1120 = 29 318
O número total de votos é igual a 29 318 + 1258 = = 30 576.
Cálculo das percentagens de votos brancos e nulos:

A: $\frac{13\,442}{30\,576} \approx 0{,}4396$, ou seja, 43,96%

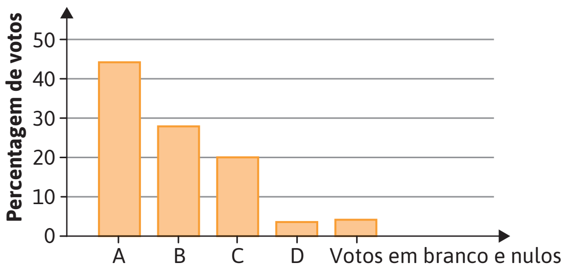
B: $\frac{8723}{30\,576} \approx 0{,}2853$, ou seja, 28,53%

C: $\frac{6033}{30\,576} \approx 0{,}1973$, ou seja, 19,73%

D: $\frac{1120}{30\,576} \approx 0{,}0366$, ou seja, 3,66%

Votos brancos e nulos: $\frac{1258}{30\,576} \approx 0{,}0411$, ou seja, 4,11%

Eleições da Câmara Municipal



b) O Presidente da Câmara eleito em 1997 foi o cabeça-de-lista do partido A. Atendendo a que, em 2001, o partido mais votado foi novamente o partido A, concluímos que o cabeça-de-lista do partido A foi reeleito Presidente da Câmara.

c) Comecemos por determinar, aplicando o método Hondt, o número de mandatos obtidos por cada partido.
No quadro seguinte apresentam-se os quocientes que se obtêm dividindo o número de votos de cada partido pelos divisores 1, 2, 3, 4, ..., 7, destacando os sete maiores.

	Partidos			
Divisores	A	B	C	D
1	13 442,0	8723,0	6033,0	1120,0
2	6721,0	4361,5	3016,5	560,0
3	4480,7	2907,7	2011,0	373,3
4	3360,5	2180,8	1508,3	280,0
5	2688,4	1744,6	1206,6	224,0
6	2240,3	1453,8	1005,5	186,7
7	1920,3	1246,1	861,9	160,0

Do quadro anterior resulta que o partido A obteve quatro mandatos, o partido B, dois, e o partido C, um.
Simulando o que aconteceria se os partidos B e C tivessem concorrido em coligação, ter-se-ia o seguinte quadro:

	Partidos		
Divisores	A	B + C	D
1	13 442,0	14 756,0	1120,0
2	6721,0	7378,0	560,0
3	4480,7	4918,7	373,3
4	3360,5	3689,0	280,0
5	2688,4	2951,2	224,0
6	2240,3	2459,3	186,7
7	1920,3	2108,0	160,0

Portanto, se os partidos B e C tivessem concorrido em coligação, teriam obtido quatro mandatos, em vez dos três que, efetivamente, obtiveram. O partido A, em vez dos quatro mandatos que obteve, teria obtido apenas três.
O partido A, que conseguiu a Presidência da Câmara, perderia essa Presidência, que passaria a ser exercida pelo cabeça-de-lista da coligação B + C.
A formação de uma coligação teria sido vantajosa para os partidos B e C.

11. Opção (C)
Seja n o número total de votos.
$0{,}85\,n + 75 = n \Leftrightarrow -0{,}15n = -75$
$\Leftrightarrow n = 500$
$\frac{300}{800} = 0{,}375$, ou seja, 37,5%

12. Pontuação obtida pelo filme A:
$600 \times 5 + 300 \times 3 + 150 \times 3 + 250 \times 5 + 200 \times 1 +$
$+ 300 \times 4 = 7000$
Pontuação obtida pelo filme B:
$600 \times 4 + 300 \times 4 + 150 \times 2 + 250 \times 1 + 200 \times 5 +$
$+ 300 \times 5 = 6650$
Pontuação obtida pelo filme C:
$600 \times 3 + 300 \times 5 + 150 \times 5 + 250 \times 4 + 200 \times 2 +$
$+ 300 \times 3 = 6350$
Pontuação obtida pelo filme D:
$600 \times 2 + 300 \times 2 + 150 \times 4 + 250 \times 3 + 200 \times 4 +$
$+ 300 \times 1 = 4250$
Pontuação obtida pelo filme E:
$600 \times 1 + 300 \times 1 + 150 \times 1 + 250 \times 2 + 200 \times 3 +$
$+ 300 \times 2 = 2750$
I – c. II – b. III – b. IV – b.

13. Pontuação da Ana:
$100 \times 4 + 250 \times 2 + 450 \times 3 = 2250$
Pontuação da Berta:
$100 \times 3 + 250 \times 4 + 450 \times x = 1300 + 450\,x$
Sabendo que $1300 + 450x > 2250$
$\Leftrightarrow 450x > 950$
$\Leftrightarrow x > \frac{19}{9}$
Como $\frac{19}{9} \approx 2{,}11$, logo, $x = 3$ ou $x = 4$.
Se $x = 3$, então B estaria na 2.ª preferência da lista 3, o que não é possível pois sabemos que A está na 2.ª preferência da lista 3.
Então $x = 4$, ou seja, B está na 1.ª preferência da lista 3.
Como o Carlos obteve um total de 800 pontos, então ficou na última preferência dos 800 votantes.
Logo, ocupa a 4.ª preferência da lista 3.
Assim, o Duarte terá de ocupar a 3.ª preferência da lista 3.
A ordenação dos funcionários da lista 3 é:
B – A – D – C.

14.
a)

1.ª preferência	A	B	A	C	C	B
2.ª preferência	B	A	C	B	A	C
3.ª preferência	C	C	B	A	B	A
	6	6	5	5	4	4

Pontuação obtida para a viagem A:
$6 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 1 = 62$
Pontuação obtida para a viagem B:
$6 \times 2 + 6 \times 3 + 5 \times 1 + 5 \times 2 + 4 \times 1 + 4 \times 3 = 61$
Pontuação obtida para a viagem C:
$6 \times 1 + 6 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + 4 \times 3 + 4 \times 2 = 57$
Pela aplicação do método de Borda foi eleito o destino A.

b) Vamos supor que o Dinis e o João tinham escolhido como 1.ª preferência Barcelona, 2.ª preferência Cambridge e como 3.ª preferência Atenas. Os resultados seriam:
(A) $6 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 1 = 62$
(B) $6 \times 2 + 6 \times 3 + 5 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 1 + 6 \times 3 = 63$
(C) $6 \times 1 + 6 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 3 + 6 \times 2 = 55$
Neste caso, o destino vencedor seria Barcelona.

15. Determinemos a distribuição do número de convites pelo método de Hondt e em proporção direta ao número de professores de cada grupo.

		Grupo			
	N.º de professores	A	B	C	L
		6	14	27	33
Divisores	1	6	14	27	33
	2	3	7	13,5	16,5
	3	2	4,7	9	11
	4	1,5	3,5	6,8	8,3
	5	1,2	2,8	5,4	6,6
	6	1	2,3	4,5	5,5
	7	0,9	2	3,9	4,7
	8	0,8	1,8	3,4	4,1
Número de convites		0	2	4	4
Número de convites na proporção direta		0,75	1,75	3,375	4,125

Pelos cálculos acima verifica-se que:

- o grupo de Artes teria um convite se o método usado fosse o da proporção direta do número de professores, e teria zero convites se fosse aplicado o método de Hondt;
- os grupos de Biologia e de Línguas teriam o mesmo número de convites pelos dois métodos;
- o grupo de Ciências Exatas teria três convites se o método usado fosse o da proporção direta do número de professores, e teria quatro convites se fosse aplicado o método de Hondt.

Logo, o método de proporção direta seria vantajoso apenas para o grupo das Artes.

Capítulo 3 – Modelos matemáticos em finanças – página 50

1.

a) A diferença entre o valor do salário proposto de 1200 euros (salário bruto) e o valor que de facto recebeu no final do mês (salário líquido) deve-se às duas principais deduções que são feitas sobre os salários dos trabalhadores portugueses, por conta de outrem: o desconto para a segurança social e a retenção na fonte de IRS.

b) O desconto para a segurança social é 11% do salário bruto: $1200 \times 0{,}11 = 132$
A Maria descontou 132 euros para a Segurança Social.

c) $1200 \times 0{,}14 = 168$
$1200 - 132 - 168 = 900$
O rendimento líquido da Maria nesse mês foi 900 euros.

2. Valor da retribuição horária no cargo A:

$$(\overbrace{1200}^{\text{(Valor da retribuição mensal)}} \times 12) \div (52 \times \underbrace{40}_{\text{(Número de horas semanais)}}) \approx 6{,}92 \text{ euros}$$

Valor da retribuição horária no cargo B:
O vencimento mensal ilíquido é igual ao vencimento anual ilíquido a dividir por 14.
Assim, no cargo B, o vencimento mensal ilíquido é igual a $13\,300 \div 14 = 950$ euros.

$$(\overbrace{950}^{\text{(Valor da retribuição mensal)}} \times 12) \div (52 \times \underbrace{40}_{\text{(Número de horas semanais)}}) \approx 5{,}48 \text{ euros}$$

3. Valor da retribuição horária na empresa A:

$$(\overbrace{1650}^{\text{(Valor da retribuição mensal)}} \times 12) \div (52 \times \underbrace{40}_{\text{(Número de horas semanais)}}) \approx 9{,}52 \text{ euros}$$

Valor da retribuição horária na empresa B:
O vencimento mensal ilíquido é igual a $23\,100 \div 14 =$
$= 1650$ euros.

$$(\overbrace{1650}^{\text{(Valor da retribuição mensal)}} \times 12) \div (52 \times \underbrace{40}_{\text{(Número de horas semanais)}}) \approx 9{,}52 \text{ euros}$$

O Joaquim não tem razão pois o valor-hora é o mesmo (9,52 euros).

4.

a) O valor a deduzir para a Segurança Social é igual a 11% de 1927 euros, ou seja, $0{,}11 \times 1927 = 211{,}97$ euros.

b) Consultando a tabela de retenção na fonte correspondente, o valor percentual de desconto é 20,4% (ver linha Remuneração mensal em euros até 2035,00 e Número de dependentes 1).
$0{,}204 \times 1927 = 393$ euros (arredondamento à unidade de euros inferior)

c) Soma do salário base com o subsídio de alimentação: $1927 + 132 = 2059$
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS: $211{,}97 + 393 =$
$= 604{,}97$
Total a receber pelo João: $2059 - 604{,}97 = 1454{,}03$ euros.

d) O valor a deduzir para a Segurança Social é igual a 11% de 1923 euros, ou seja, $0{,}11 \times 1923 = 211{,}53$ euros.
Consultando a tabela de retenção na fonte correspondente, o valor percentual de desconto é 19,3% (ver linha Remuneração mensal em euros até 1925,00 e Número de dependentes 1).
$0{,}193 \times 1923 = 371$ euros (arredondamento à unidade de euros inferior).
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: $1923 + 132 = 2055$
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS: $211{,}53 + 371 = 582{,}53$
Total a receber pelo João: $2055 - 582{,}53 = 1472{,}47$ euros.

5.

a) Vivendo em Évora e mantendo as restantes condições, o João terá como salário líquido o mesmo valor apresentado no exercício resolvido, já que a tabela de retenção na fonte de IRS é a mesma em todo continente.
Assim:
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: $1802{,}63 + 132 = 1934{,}63$ euros.

Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS:
198,29 + 347 = 545,29 euros.
O João irá receber 1934,63 – 545,29 = 1389,34 euros.

b) Se viver no Funchal e se mantiveram as restantes condições, há apenas uma alteração ao nível da taxa de retenção de IRS.
Consultando a tabela de retenção na fonte correspondente à Madeira, o valor percentual de desconto é 15,1% (ver linha Remuneração mensal em euros até 1925,00 e Número de dependentes 1).
0,151 × 1802,63 = 272 euros (arredondamento à unidade de euros inferior).
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1802,63 + 132 = 1934,63 euros.
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social (11% de 1802,63) euros e retenção na fonte de IRS: 198,29 + 272 = 470,29 euros.
O João irá receber 1 934,63 – 470,29 = 1464,34 euros.

c) Se o João viver em São Miguel e se se mantiverem as restantes condições, há apenas uma alteração ao nível da taxa de retenção de IRS.
Consultando a tabela de retenção na fonte correspondente aos Açores, o valor percentual de desconto é 13,5% (ver linha Remuneração mensal em euros até 1925,00 e Número de dependentes 1).
0,135 × 1802,63 = 243 euros (arredondamento à unidade de euros inferior).
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1802,63 + 132 = 1934,63 euros.
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social (11% de 1802,63 euros) e retenção na fonte de IRS: 198,29 + 243 = 441,29 euros.
O João irá receber 1934,63 – 441,29 = 1493,34 euros.

6.

EMPRESA				COLABORADOR				
Nome:				Nome:				
Morada:				Número de contribuinte:				
				Número de identificação na Seg. Social:				
NIPC:				Categoria ou grupo profissional:				
NISS:								
Período de liquidação:							Total de dias	
QUANTIDADE	VALOR	DESCRIÇÃO					ABONOS	DESCONTOS
		Salário Base						
		Subsídio de Alimentação					0,00 €	
		Segurança Social		11%				0,00 €
		IRS						0,00 €
	EXTRAS	BASE SS		BASE IRS			TOTAL	TOTAL A DEDUZIR
		0,00 €		0,00 €			0,00 €	0,00 €
IBAN:							TOTAL A RECEBER	
Entidade Financeira								0,00 €

7.

a) Em novembro de 2023 houve 21 dias úteis. Sabendo que o Hugo trabalhou todos os dias úteis, o valor relativo ao subsídio de alimentação é igual a 21 × 6 = 126 euros.

b) O valor a deduzir para a Segurança Social é igual a 11% de 1100 euros, ou seja, 0,11 × 1100 = 121 euros.

c) A taxa marginal máxima de IRS a que o Hugo está sujeito (consultando a tabela correspondente) é 15,93%.
Como deve abater a parcela de 88,64 € e a parcela de 42,86 € (correspondente a um dependente), o valor do desconto relativo à retenção na fonte de IRS é 0,1593 × 1100 – 88,64 – 42,86 = 43,73 que, com o arredondamento à unidade de euros inferior, corresponde a um desconto de 43 euros.
Este valor corresponde a uma taxa efetiva de 3,91%, pois:

$$\frac{43}{1100} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{43 \times 100}{1100} \Leftrightarrow x \approx 3{,}91.$$

d) Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1100 + 126 = 1226
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS: 121 + 43 = 164
Total a receber pelo Hugo: 1226 – 164 = 1062 euros.

e) Se o casal tivesse dois filhos a única diferença era no total de desconto para IRS (alínea c), o que afetaria também o valor a receber nesse mês (alínea d).
Consultando a tabela correspondente mantém-se a taxa marginal máxima de 15,93% com a parcela de 88,64 € a abater, e ainda parcela de 2 × 42,86 € (correspondente a dois dependentes). O valor do desconto relativo à retenção na fonte de IRS seria então 0,1593 × 1100 – 88,64 – 2 × 42,86 = 0,87 que, com o arredondamento à unidade de euros inferior, corresponde a um desconto de 0 euros.
Assim:
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1100 + 126 = 1226
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS: 121 + 0 = 121
Total a receber pelo Hugo nesse mês:
1226 – 121 = 1105 euros.

f) Se a Andreia também for titular de um rendimento temos de consultar a tabela de retenção na fonte de trabalho dependente para casado dois titulares.

Tabela III – Trabalho dependente

Casado dois titulares, com um ou mais dependentes

Remuneração mensal (€)	Taxa marginal máxima	Parcela a abater (€)	Parcela adicional a abater por dependente (€)	Taxa efetiva mensal de retenção no limite do escalão
Até 762,00	0,00%	0,00	0,00	0,0%
Até 886,57	14,50%	14,5% × 2,3 × (1093,30 – R)	21,43	4,3%
Até 932,14	21,00%	21,0% × 1,3 × (1350,21 – R)	21,43	6,5%
Até 999,14	21,00%	114,14	21,43	7,4%
Até 1106,93	26,50%	159,09	21,43	9,3%
Até 1600,36	28,50%	191,23	21,43	15,2%
Até 1961,36	35,00%	295,25	21,43	18,9%

• Neste caso, e com um dependente:
A taxa marginal máxima de IRS a que o Hugo está sujeito é 26,5%.
Como deve abater a parcela de 169,09 € e a parcela de 21,43 € (correspondente a um dependente), o valor do desconto relativo à retenção na fonte de IRS é então 0,265 × 1100 – 169,09 – 21,43 = 100,98 que, com o arredondamento à unidade de euros inferior, corresponde a um desconto de 100 euros.
Este valor corresponde a uma taxa efetiva de 9,1%, pois:

$$\frac{100}{1100} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 100}{1100} \Leftrightarrow x \approx 9{,}1$$

Assim:
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1100 + 126 = 1226
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS: 121 + 100 = 221
Total a receber pelo Hugo nesse mês:
1226 – 221 = 1005 euros.

- Neste caso, e com dois dependentes:

A taxa marginal máxima de IRS a que o Hugo está sujeito é 26,5%.
Como deve abater a parcela de 169,09 € e a parcela de 2 × 21,43 € (correspondente a dois dependentes), o valor do desconto relativo à retenção na fonte de IRS é 0,265 × 1100 – 169,09 – 2 × 21,43 = 79,55 que, com o arredondamento à unidade de euros inferior, corresponde a um desconto de 79 euros para IRS.
O que corresponde a uma taxa efetiva de 7,18%, pois:
$\frac{79}{1100} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{79 \times 100}{1100} \Leftrightarrow x \approx 7{,}18$
Assim:
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1100 + 126 = 1226
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social e retenção na fonte de IRS: 121 + 79 = 200
Total a receber pelo Hugo nesse mês:
1226 – 200 = 1026 euros

g) Suponhamos que o salário do Hugo nesse mês foi 1500 euros.
A taxa marginal máxima de IRS (consultando a tabela correspondente) seria 21%.
Como deve abater a parcela de 144,78 € e a parcela de 42,86 € (correspondente a um dependente), o valor do desconto relativo à retenção na fonte de IRS é então 0,21 × 1500 – 144,78 – 42,86 = 127,36 que, com o arredondamento à unidade de euros inferior, corresponde a um desconto de 127 euros para IRS.
O que corresponde a uma taxa efetiva de 8,47%, pois:
$\frac{127}{1500} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{127 \times 100}{1500} \Leftrightarrow x \approx 8{,}47$
Assim:
Soma do salário base com o subsídio de alimentação: 1500 + 126 = 1626
Soma dos descontos relativamente à Segurança Social (0,11 × 1500 = 165) e retenção na fonte de IRS: 165 + 127 = 292
Total a receber pelo Hugo: 1626 – 292 = 1334 euros.

8. Ao cuidado do aluno (depende do ano civil, do mês e das respetivas tabelas de retenção desse ano).

9. 45 000 – 4104 = 40 896 euros
Consultando a tabela ao lado do exercício, respeitante ao ano de 2023, verificamos que, para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 43,5% e a respetiva parcela a abater é 5810,25 €.
Assim, 40 896 × 0,435 – 5810,25 = 11 979,51.
O Filipe terá de pagar 11 979,51 euros de IRS.

10.
a) Rendimento coletável do casal = rendimento anual bruto – deduções especificas =
= 65 174 € – 2 × 4104 € = 56 966 €

b) 56 966 : 2 = 28 483
Consultando a tabela ao lado do exercício, respeitante ao ano de 2023, verificamos que, para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 37% e a respetiva parcela a abater é 3299,12 €.
Assim, 28 483 × 0,37 – 3299,12 = 7239,59.
Sendo um casal: 7239,59 × 2 = 14 479,18 com 1800 € de deduções à coleta:
14 479,18 – 1 800 = 12 679,18
O casal Oliveira tem de pagar 12 679,18 euros de IRS.

11.
a) O casal Oliveira tem de pagar 12 679,18 euros de IRS.
Como a retenção na fonte totalizou 11 400 €, então o casal ainda terá de pagar 1279,18 euros (12 679,18 – 11 400 = 1279,18).

b) O casal Oliveira tem de pagar 12 679,18 euros de IRS.
Como a retenção na fonte totalizou 13 100 €, então o casal ainda terá a receber 420,82 euros (13 000 – 12 679,18 = 420,82).

12.
a) 2219,44 × 14 = 31 072,16 euros

b) 31 072,16 – 4104 = 26 968,16 euros

c) Consultando a tabela da página 61 do manual, onde constam as taxas de IRS de 2023, verificamos que, para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 37% e a respetiva parcela a abater é 3299,12 €.
Assim, 26 968,16 × 0,37 – 3299,12 = 6679,0992 euros é o valor da coleta total.

d) 6679,0992 – 250 – 65,49 = 6363,6092 euros.

13.
a) Consultando a tabela onde constam as taxas de IRS de 2023 para a região autónoma da Madeira, verificamos que, para este rendimento coletável (26 968,16 euros), a taxa a aplicar é 33,67% e a respetiva parcela a abater é 4060,25 €.
Assim, 26 968,16 × 0,3367 – 4060,25 = 5019,94 euros é o valor da coleta total.

b) Consultando a tabela onde constam as taxas de IRS de 2023 para a região autónoma dos Açores, verificamos que, para este rendimento coletável (26 968,16 euros), a taxa a aplicar é 25,90% e a respetiva parcela a abater é 2309,38 €.
Assim, 26 968,16 × 0,2590 – 2309,38 = 4675,37 euros é o valor da coleta total.

14.
a) 43,5%

b) Seja x o valor do rendimento coletável, 43,5% a taxa de IRS a aplicar e 5810,25 euros a parcela a abater.
Sabemos que $x \times 0{,}435 - 5810{,}25 = 11\,720{,}25$.
Assim, $x = \frac{11\,720{,}25 + 5810{,}25}{0{,}435}$, ou seja, $x = 40\,300$ euros, que corresponde ao rendimento coletável da Carla nesse ano.

15. Para além dos depósitos a prazo e dos certificados de aforro e certificados do tesouro, existem outros produtos de aplicação de poupanças, como ações, obrigações, fundos de investimento, fundos de pensões, seguros de capitalização e planos de poupança.

16.

a) Ao fim de um ano, o juro obtido será 30 € ($1000 \times 0{,}03 = 30$) e o capital acumulado 1030 € ($1000 + 30 = 1030$).

b) Ao fim de dois anos, o juro obtido será 60 € ($1000 \times 0{,}03 \times 2 = 60$) e o capital acumulado 1060 € ($1000 + 60 = 1060$).

c) Ao fim de três anos, o juro obtido será 90 € ($1000 \times 0{,}03 \times 3 = 90$) e o capital acumulado 1090 € ($1000 + 90 = 1090$).

d) Ao fim de n anos, o juro obtido será ($30n$) ($1000 \times 0{,}03 \times n = 30n$) e o capital acumulado ($1000 + 30n$) €.

17.

Modalidade	**Juro simples**		
Taxa de juro anual	1,50%		
Capital inicial	3000		
Ano	**Juro**	**Juro acumulado**	**Capital acumulado**
1	45	45	3045
2	45,68	90,68	3090,68
3	46,36	137,04	3137,04
4	47,06	184,09	3184,09
5	47,76	231,85	3231,85
6	48,48	280,33	3280,33
7	49,2	329,53	3329,53
8	49,94	379,48	3379,48
9	50,69	430,17	3430,17
10	51,45	481,62	3481,62
11	52,22	533,85	3533,85
12	53,01	586,85	3586,85
13	53,8	640,66	3640,66
14	54,61	695,27	3695,27
15	55,43	750,7	3750,7
16	56,26	806,96	3806,96
17	57,1	864,06	3864,06
18	57,96	922,02	3922,02
19	58,83	980,85	3980,85
20	59,71	1040,57	4040,57
21	60,61	1101,17	4101,17
22	61,52	1162,69	4162,69
23	62,44	1225,13	4225,13
24	63,38	1288,51	4288,51
25	64,33	1352,84	4352,84
26	65,29	1418,13	4418,13
27	66,27	1484,4	4484,4
28	67,27	1551,67	4551,67
29	68,28	1619,94	4619,94
30	69,3	1689,24	4689,24

18.

a) **i.** Ao fim de um ano, o juro obtido será 84 € ($4000 \times 0{,}021 = 84$) e o capital acumulado 4084 € ($4000 + 84 = 4084$).

ii. Ao fim de dezoito anos, o juro obtido será 1512 € ($4000 \times 0{,}021 \times 18 = 1512$) e o capital acumulado 5512 € ($4000 + 1512 = 5512$).

iii. Ao fim de 18 meses, isto é 1,5 anos, o juro obtido será 126 € ($4000 \times 0{,}021 \times 1{,}5 = 126$) e o capital acumulado 4126 € ($4000 + 126 = 4126$).

iv. Ao fim de n anos, o juro obtido será ($84n$) € ($4000 \times 0{,}021 \times n = 84n$) e o capital acumulado ($4000 + 84n$) €.

b) $4000 + 84n > 2 \times 4000 \Leftrightarrow 84n > 4000 \Leftrightarrow n > \dfrac{4000}{84}$

Como $\dfrac{4000}{84} \approx 47{,}6$, podemos concluir que é possível obter um capital acumulado superior ao dobro do capital inicial colocado no depósito ao fim de, aproximadamente, 48 anos.

19.

```
print("Este programa permite determinar, num sistema de juros simples, o valor do capital acumulado ao fim de um ano dado um capital inicial")
ci=float(input("Capital inicial:"))
r=float(input("Taxa de juro anual na forma decimal:"))
cf=ci+ci*r
print("O capital acumulado ao fim de um ano é igual a", cf," €.")
```

20. Para um capital inicial de 1000 euros a uma taxa de juro composto anual de 3%, tem-se que:

a) o capital acumulado ao fim de um ano é igual a $1000(1 + 0{,}03)^1 = 1000 \times 1{,}03^1 = 1030$ € e o juro obtido é então $1030 - 1000 = 30$ €.

b) o capital acumulado ao fim de dois anos é igual a $1000(1 + 0{,}03)^2 = 1000 \times 1{,}03^2 = 1060{,}9$ € e o juro obtido é então $1060{,}9 - 1000 = 60{,}9$ €.

c) o capital acumulado ao fim de três anos é igual a $1000(1 + 0{,}03)^3 = 1000 \times 1{,}03^3 = 1092{,}727$ € e o juro obtido é então $1092{,}727 - 1000 = 92{,}727$ €.

d) o capital acumulado ao fim de n anos é igual a $1000(1 + 0{,}03)^n = 1000 \times 1{,}03^n$ € e o juro obtido é então ($1000 \times 1{,}03^n - 1000$) €.

21.

Modalidade	**Juro simples**		
Taxa de juro anual	1,50%		
Capital inicial	3000		
Ano	**Juro**	**Juro acumulado**	**Capital acumulado**
1	45	45	3045
2	45,68	90,68	3090,68
3	46,36	137,04	3137,04
4	47,06	184,09	3184,09
5	47,76	231,85	3231,85
6	48,48	280,33	3280,33
7	49,2	329,53	3329,53
8	49,94	379,48	3379,48
9	50,69	430,17	3430,17
10	51,45	481,62	3481,62
11	52,22	533,85	3533,85
12	53,01	586,85	3586,85
13	53,8	640,66	3640,66

14	54,61	695,27	3695,27
15	55,43	750,7	3750,7
16	56,26	806,96	3806,96
17	57,1	864,06	3864,06
18	57,96	922,02	3922,02
19	58,83	980,85	3980,85
20	59,71	1040,57	4040,57
21	60,61	1101,17	4101,17
22	61,52	1162,69	4162,69
23	62,44	1225,13	4225,13
24	63,38	1288,51	4288,51
25	64,33	1352,84	4352,84
26	65,29	1418,13	4418,13
27	66,27	1484,4	4484,4
28	67,27	1551,67	4551,67
29	68,28	1619,94	4619,94
30	69,3	1689,24	4689,24

22.

```
[ ] print("Este programa permite determinar, num sistema de juros compostos, o capital acumulado ao fim de 10 anos dado um determinado capital inicial")
    ci=float(input("Capital inicial:"))
    r=float(input("Taxa de juro anual na forma decimal:"))
    cn=ci*(1+r)**10
    print("O capital acumulado ao fim de 10 anos é igual a", cn," €.")
```

23. Para um capital inicial de 1000 euros a uma taxa de juro composto anual de 3%, capitalizado mensalmente, tem-se que:

a) o capital acumulado ao fim de nove meses é igual a $1000\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{9} \approx 1022{,}73$ € e o juro obtido é então $1022{,}73 - 1000 = 22{,}73$ €.

b) o capital acumulado ao fim de treze meses é igual a $1000\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{13} \approx 1032{,}99$ € e o juro obtido é então $1032{,}99 - 1000 = 32{,}99$ €.

c) o capital acumulado ao fim de um ano e meio, isto é, dezoito meses é igual a $1000\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{18} \approx 1045{,}97$ € e o juro obtido é então $1045{,}97 - 1000 = 45{,}97$ €.

d) o capital acumulado ao fim de três anos, isto é, trinta e seis meses é igual a $1000\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{36} \approx 1094{,}05$ € e o juro obtido é então $1094{,}05 - 1000 = 94{,}05$ €.

24. **Banco ABC**

Para um capital inicial de 1300 euros a uma taxa de juro composto anual de 1,6%, capitalizado anualmente, tem-se que:

- após 10 anos o capital acumulado é igual a $1300(1+0{,}016)^{10} \approx 1523{,}63$ €.
- após 20 anos o capital acumulado é igual a $1300(1+0{,}016)^{20} \approx 1785{,}74$ €.
- após 40 anos o capital acumulado é igual a $1300(1+0{,}016)^{40} \approx 2452{,}97$ €.

Banco XYZ

Para um capital inicial de 1300 euros a uma taxa de juro composto anual de 1,59%, capitalizado mensalmente, tem-se que:

- após 10 anos, isto é, 120 meses, o capital acumulado é igual a $1300\left(1+\frac{0{,}0159}{12}\right)^{120} \approx 1523{,}88$ €.
- após 20 anos, isto é, 240 meses, o capital acumulado é igual a $1300\left(1+\frac{0{,}0159}{12}\right)^{240} \approx 1786{,}31$ €.
- após 40 anos, isto é, 480 meses, o capital acumulado é igual a $1300\left(1+\frac{0{,}0159}{12}\right)^{40} \approx 2454{,}55$ €.

25.

a) Para um capital inicial de C euros a uma taxa de juro composto anual de 2,8% com os juros capitalizados anualmente, tem-se que, após 10 anos, o capital acumulado é igual a $C \times (1+0{,}028)^{10}$.

Como o capital acumulado pelo Rodrigo ao fim de 10 anos foi 5931 €, então:

$$C \times (1+0{,}028)^{10} = 5931 \Leftrightarrow C = \frac{5931}{1{,}028^{10}}$$

$$\Leftrightarrow C \approx 4499{,}83 \text{ €}$$

O capital inicial, com arredondamento às unidades, foi 4500 €.

b) Para um capital inicial de C euros a uma taxa de juro composto anual de 2,8% com os juros capitalizados mensalmente, tem-se que, após 10 anos, o capital acumulado é igual a $C \times \left(1+\frac{0{,}028}{12}\right)^{120}$.

Como o capital acumulado pelo Rodrigo ao fim de 10 anos foi 5931 €, então:

$$C \times \left(1+\frac{0{,}028}{12}\right)^{120} = 5931 \Leftrightarrow C = \frac{5931}{\left(1+\frac{0{,}028}{12}\right)^{120}}$$

$$\Leftrightarrow C \approx 4484{,}02 \text{ €}$$

O capital inicial, com arredondamento às unidades, foi 4484 €.

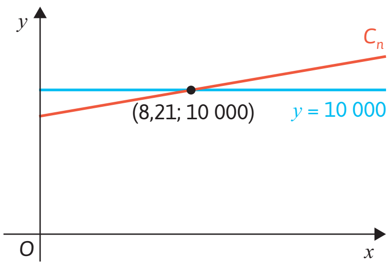
26.

a) $8500(1+0{,}02)^1 = 8670$ €

b) $8500(1+0{,}02)^{10} \approx 10\,361{,}45$ €

c) $8500(1+0{,}02)^n = 8500 \times 1{,}02^n$

d) $C_n > 10\,000 \Leftrightarrow 8500 \times 1{,}02^n > 10\,000$



Ao fim de nove anos será possível obter um capital acumulado superior a 10 000 euros.

e) O capital disponível ao fim de um ano, com juros pagos mensalmente a uma taxa de 1,9% ao ano, é:

$$8500 \times \left(1+\frac{0{,}019}{12}\right)^{12} \approx 8662{,}91 \text{ €}$$

Na alínea a), viu-se que o capital disponível ao fim de um ano, a uma taxa de 1,9% ao ano, é 8670 €. Assim, o capital acumulado é inferior ao obtido na opção inicial.

Aprende fazendo – páginas 82 a 89

1. Com 24 024 € de vencimento anual ilíquido e um horário de 40 horas de trabalho semanais, o salário mensal bruto é $24\,024 : 14 = 1716$ euros.
O valor hora é $(1716 \times 12) : (52 \times 40) = 9{,}9$ euros.
O desconto para a Segurança Social é 11%, logo $1716 \times 0{,}11 = 188{,}76$ euros.
O valor mensal de retenção na fonte de IRS é calculado por escalões e varia consoante as tabelas definidas para esse ano.
Assim:
A. Afirmação falsa.
B. Afirmação verdadeira.
C. Afirmação verdadeira.
D. Afirmação verdadeira.
E. Afirmação falsa.

2. Opção (A)
$2000 - 0{,}11 \times 2000 - 0{,}15 \times 2000 - 30 = 1450$ euros

3. O valor da retribuição horária é calculado segundo a fórmula $(Rm \times 12) : (52 \times n)$ onde Rm é o valor da retribuição mensal e n é o período normal de trabalho semanal.
A empresa X oferece 1410 € de salário bruto mensal. Assim, o valor-hora na empresa X é:
$(1410 \times 12) : (52 \times 40) = 8{,}13$ euros
A empresa Y oferece 18 200 € de salário bruto anual. Logo, o salário bruto mensal é $18\,200 : 14 = 1300$ euros e o valor-hora é $(1300 \times 12) : (52 \times 40) = 7{,}50$ euros.

4. Identificando os valores de que depende o cálculo do salário líquido, SL, temos:
- $SB = 1500$
- $SR = 5{,}2 \times 22 = 144{,}4$, correspondente a 22 dias de trabalho;
- $SS = 1500 \times 0{,}11 = 165$, correspondente a 11% do salário bruto;
- $1500 \times 0{,}146 = 219$, correspondente à taxa de 14,6% indicada na tabela para um salário bruto compreendido entre 1437 e 1577, e a dois dependentes.

Assim, o valor do salário líquido é:
$SL = SB + SR - SS - RF = 1500 + 144{,}4 - 165 - 219 = 1230{,}4$ euros.

5.
a) Consultando a tabela verifica-se que, para um rendimento coletável de mais de 20 700 até 26 355 euros, a taxa a aplicar é 35% e a parcela a abater é 2772,14 euros. Assim, $0{,}35 \times 24\,379 - 2772{,}14 = 5760{,}51$ euros é o valor a pagar pela Sílvia nesse ano.
b) Como as condições são as mesmas da alínea anterior, o valor de IRS a pagar pela Sofia também é 5760,51 euros. No entanto, a Sofia apresentou deduções à coleta no valor de 1500 euros, logo terá de pagar $5760{,}51 - 1500 = 4260{,}51$ euros.
c) Apesar de o rendimento coletável da Liliana ser igual ao das alíneas anteriores, verifica-se que as condições são diferentes, pois a Liliana é casada e o rendimento coletável do casal é 54 160 euros.
Assim, $54\,160 : 2 = 27\,080$ e, consultando a tabela para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 37% e a parcela a abater é 3299,12 euros.
$0{,}37 \times 27\,080 - 3299{,}12 = 6720{,}48$ euros
$6720{,}48 \times 2 = 13\,440{,}96$ euros
Com as deduções à coleta de 2300 euros, o valor a pagar de IRS pelo casal nesse ano é 11 140,96 € ($13\,440{,}96 - 2300 = 11\,140{,}96$).

6. Opção (B)
Num regime de juros simples os juros são calculados anualmente, sempre sobre o montante inicialmente depositado.
Num regime de juros compostos os juros obtidos anualmente vão sendo adicionados ao valor depositado e vão servir também de base para o cálculo dos juros do ano seguinte.

7.
a) **i.** $1000 + 1000 \times 0{,}02 = 1020$ €
ii. $1000\,(1 + 0{,}02)^1 = 1000 \times 1{,}02^1 = 1020$ €
iii. $1000\left(1 + \dfrac{0{,}02}{12}\right)^{12} \approx 1020{,}18$ €
b) **i.** $1000 + 1000 \times 0{,}02 \times 4 = 1080$ €
ii. $1000\,(1 + 0{,}02)^4 = 1000 \times 1{,}02^4 \approx 1082{,}43$ €
iii. $1000\left(1 + \dfrac{0{,}02}{12}\right)^{12 \times 4} \approx 1083{,}21$ €
c) **i.** $1000 + 1000 \times 0{,}02 \times \dfrac{1}{3} = 1006{,}67$ € (quatro meses é um terço do ano)
ii. $1000\,(1 + 0{,}02)^{\frac{1}{3}} = 1000 \times 1{,}02^{\frac{1}{3}} \approx 1006{,}62$ €
iii. $1000\left(1 + \dfrac{0{,}02}{12}\right)^{4} \approx 1006{,}68$ €

8. Opção (B)
$4000\,(1 + 0{,}12)^4 = 4000 \times 1{,}12^4 \approx 6294$ €

9.
a) O valor da retribuição horária é calculado segundo a fórmula $(Rm \times 12) : (52 \times n)$, onde Rm é o valor da retribuição mensal e n é o período normal de trabalho semanal.
Neste caso, o salário mensal bruto do trabalhador, cujo valor-hora é 6 €, é 1040 €, pois
$$(Rm \times 12) : (52 \times 40) = 6 \Leftrightarrow Rm = \frac{6 \times (52 \times 40)}{12}$$
$$\Leftrightarrow Rm = 1\,040$$
Por exemplo, durante o ano de 2024 o salário mínimo foi 820 €. Assim, durante o ano de 2024, este trabalhador auferia um salário bruto mensal superior ao salário mínimo nacional.
b) $1040 \times 14 = 14\,560$ €

10. Seja x o valor do salário bruto da Telma. Como ela trabalhou 22 dias úteis e o valor do subsídio de alimentação por dia é 5,5 €, então tem a receber 121 euros ($22 \times 5{,}5 = 121$) de subsídio. Assim:
$x - 0{,}11x - 0{,}09x + 121 = 1161$
Logo, $0{,}8x = 1040 \Leftrightarrow x = 1300$
O salário bruto da Telma nesse mês foi 1300 euros.

11.

a)

EMPRESA				COLABORADOR				
Nome: Domínio				**Nome:** Fernando Pires				
Morada: Rua do Trabalho				**Número de contribuinte:** 123456789				
				Número de identificação na Seg. Social: Social: 123456789				
NIPC: 222222222				**Categoria ou grupo profissional:** Colaborador				
NISS: 33333333333								
Período de liquidação: 01/03/2024 a 31/03/2024							N.º dias úteis	20
QUANTIDADE	**VALOR**	**DESCRIÇÃO**					**ABONOS**	**DESCONTOS**
1	2034,50 €	Salário Base					2034,50 €	
20	5,00 €	Subsídio de Alimentação					100,00 €	
		Segurança Social		11%				223,80 €
			Taxa marginal máxima	Parcela a abater	N.º dep.	Parc. a abater p/ dep.	Taxa efetiva	
		IRS	32,75%	305,80 €	2	21,43 €	15,58%	317,00 €
	EXTRAS	**BASE SS**		**BASE IRS**			**TOTAL**	**TOTAL A DEDUZIR**
		2034,50 €		2034,50 €			2134,50 €	540,80 €
IBAN:							**TOTAL A RECEBER**	
Entidade Financeira								1593,71 €

b) **i.** Consultando a tabela para um valor de salário de 2070 euros e aplicando a fórmula Remuneração × taxa – parcela a abater – parcela adicional a abater × nº de dependentes, tem-se $2070 \times 0{,}37 - 393{,}23 - 21{,}43 \times 3 \approx 308$ euros.

Como $\dfrac{308}{2017} \approx 0{,}1488$, a taxa efetiva mensal a que este rendimento está sujeito é 14,88%.

ii. Consultando a tabela para um valor de salário de 2070 euros e aplicando a fórmula Remuneração × taxa – parcela a abater – parcela adicional a abater × nº de dependentes, tem-se $2070 \times 0{,}37 - 393{,}23 - 21{,}43 \times 0 \approx 372$ euros.

Como $\dfrac{372}{2017} \approx 0{,}1797$, a taxa efetiva mensal a que este rendimento está sujeito é 17,97%.

12.

a) Rendimento coletável do casal = rendimento anual bruto – deduções específicas =
= 49 408 € – 2 × 4104 € = 41 200 €
41 200 : 2 = 20 600
Consultando a tabela de IRS respeitante ao ano de 2023 (página 61 do manual) verificamos que, para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 28,5% e a respetiva parcela a abater é 1426,65 €.
Assim, 20 600 × 0,285 – 1426,65 = 4444,35 €
Sendo um casal: 4444,35 × 2 = 8888,7 €
Com 2230,89 € de deduções à coleta:
8888,7 – 2230,89 = 6657,81 €
O valor da coleta líquida do casal Tavares é 6657,81 euros.

b) O casal Tavares terá de pagar 6657,81 euros de IRS nesse ano. Como já fez uma retenção na fonte no total de 8680 euros, então será reembolsado no valor de 2202,19 euros (8680 – 6657,81 = 2202,19).

13. Opção (D)
Nas condições enunciadas, o capital acumulado ao fim de cinco anos é $3500\left(1+\dfrac{0{,}005}{12}\right)^{12 \times 5} \approx 3588{,}58$ €
Assim, o juro obtido é 88,58 € (3588,58 – 3500 = 88,58).

14. O valor a pagar ao fim dos três anos nas condições acordadas é $50\,000(1 + 0{,}15)^3 = 76\,043{,}75$ €.
Logo, o valor de juros pagos é 26 043,75 euros (76 043,75 – 50 000 = 26 043,75).

15. Opção (C)
$25\,000(1 + r)^1 = 25\,625$
Logo, $1 + r = \dfrac{625}{25\,000} \Leftrightarrow 1 + r = 1{,}025 \Leftrightarrow r = 0{,}025$, ou seja, a taxa foi 2,5%.

16.

a) Seja C o capital depositado, então o capital acumulado ao fim de 18 anos é dado por $C(1 + 0{,}0225)^{18}$.
Como se pretende obter 1000 euros, tem-se:
$C(1 + 0{,}0225)^{18} = 1000 \Leftrightarrow C = \dfrac{1000}{1{,}0225^{18}}$, ou seja, $C \approx 670$
Os pais do Tomás depositaram 670 euros.

b) Se as capitalizações fossem mensais, então o capital acumulado ao fim de 18 anos seria dado por $C\left(1+\dfrac{0{,}0225}{12}\right)^{18 \times 12}$. Como se pretende obter 1000 euros, tem-se:
Assim, $C\left(1+\dfrac{0{,}0225}{12}\right)^{18 \times 12} = 1000$
$\Leftrightarrow C = \dfrac{1000}{\left(1+\dfrac{0{,}0225}{12}\right)^{18 \times 12}}$, ou seja, $C \approx 667$
Os pais do Tomás teriam de depositar 667 euros.

17.

a) Cálculo do rendimento global do casal:
- Contribuinte A (marido), com um rendimento total de 10 950 €.
- Contribuinte B (mulher), com um rendimento total de 10 000 €.
- O rendimento global deste casal é:
  10 950 € + 10 000 € = 20 475 €

Cálculo do rendimento coletável:
- O rendimento coletável é 10 475 € (20 950 : 2).

Cálculo da coleta do casal:
- Consultar a tabela dada e identificar que o rendimento coletável do casal se encontra no 3º escalão (taxa a aplicar: 23,5%; parcela a abater: 799,78 €).
- Aplicar a taxa de imposto ao rendimento coletável do casal:
  10 475 € × 0,235 ≈ 2461,63 €
- Subtrair, do valor anteriormente obtido, a parcela a abater:
  2461,63 € – 799,78 € = 1661,85 €
- A coleta do casal obtém-se multiplicando por 2 o valor anterior:
  1661,85 € × 2 = 3323,70 €.

Cálculo do IRS:
- IRS = coleta – deduções = 3323,70 €.
  Neste caso simplificado, como não existem deduções a fazer, a coleta coincide com o valor do IRS.

b)
- Cálculo do IRS sem a prestação do serviço:
  13 000 : 2 = 6500
  Consultando a tabela de IRS respetiva verificamos que, para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 13% e a respetiva parcela a abater é 108,78 €.
  Assim, 6500 × 0,13 – 108,78 = 736,22
  Sendo um casal: 736,22 × 2 = 1472,44
  Como não houve deduções à coleta, o casal tem a pagar 1472,44 € de IRS.

Como o seu rendimento global foi 13 000 €, então o rendimento final nesse ano, após o pagamento do imposto, seria 11 527,56 € (13 000 – 1472,44 = = 11 527,56).

- Cálculo do IRS com a prestação do serviço:

  13 000 + 1000 = 14 000

  14 000 : 2 = 7 000

  Consultando a tabela de IRS respetiva verificamos que, para este rendimento coletável, a taxa a aplicar é 23,5% e a respetiva parcela a abater é 799,78 €.

  Assim, 7000 × 0,235 – 799,78 = 845,22

  Sendo um casal: 845,22 × 2 = 1690,44

  Como não houve deduções à coleta, o casal tem a pagar 1690,44 € de IRS

  Como o seu rendimento global foi de 14 000 €, então o rendimento final nesse ano, após o pagamento do imposto, seria 12 309,56 € (14 000 – – 1690,44 = 12 309,56)

  Depois de se ter efetuado o cálculo do IRS com a prestação do serviço no Natal desse ano e sem a prestação do serviço, pode concluir-se que, apesar de ser verdade que a taxa de retenção na fonte passaria para outro escalão e, consequentemente, aumentaria de 13% (escalão 2: rendimento de 13 000 : 2 = 6500 €) para 23,5% (escalão 3: rendimento de 14 000 : 2 = 7000 €) e, portanto, o valor de retenção na fonte seria superior, também a parcela a abater aumentaria de 108,78 € para 799,78 €.

  Assim, feitos os cálculos sem o serviço efetuado e após a aplicação do imposto, o casal teria de rendimento 11 527,56 €. No entanto, com o serviço de 1000 € efetuado, e após a aplicação do desconto, o casal teria de rendimento 12 309,56 €. De onde se conclui que, de facto, o Manuel não tem razão.

18. Seja C o capital depositado.

$C(1 + r)^5 = 2C$

Logo, $(1 + r)^5 = \frac{2C}{C} \Leftrightarrow (1 + r)^5 = 2 \Leftrightarrow 1 + r = \sqrt[5]{2}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[5]{2} - 1$

Como $\sqrt[5]{2} - 1 \approx 0{,}1487$, deve investir a uma taxa de 14,87%.

19.

B	D	E	G	H
Modalidade	Banco Alfa		Banco Beta	
Taxa de juro anual	2,00%		1,90%	
Capital inicial	1600		1600	
Ano	Juro acumulado	Capital acumulado	Juro acumulado	Capital acumulado
1	32	1632	30,67	1630,67
2	64,64	1664,64	61,92	1661,92
3	97,93	1697,93	93,77	1693,77
4	131,89	1731,89	126,24	1726,24
5	166,53	1766,53	159,32	1759,32
6	201,86	1801,86	193,04	1793,04
7	237,9	1837,9	227,41	1827,41
8	274,66	1874,66	262,43	1862,43
9	312,15	1912,15	298,13	1898,13
10	350,39	1950,39	334,51	1934,51

Teste final – páginas 90 a 93

1. Opção (C)

100% – 35% = 65%

0,65 × 420 = 273

O número de votantes é igual a 273.

Sabemos que 60% dos votos validamente expressos correspondem a 108 votos, assim $\frac{60}{100} = \frac{108}{n} \Leftrightarrow$ $n = 180$.

Logo, registaram-se 180 votos validamente expressos e 273 – 180 = 93 votos não validamente expressos.

2. Opção (D)

Número de votos validamente expressos:

82 + 98 + 60 + 115 + 15 = 370

Número de votos de coligação C com D: 175

Número de votos de coligação B com C: 158

Número de votos de coligação A com B: 180

Número de votos de coligação A com D: 197

Como $197 \geq \frac{370}{2} + 1$, isto é, $197 \geq 186$, então a coligação A com D permite obter uma maioria absoluta.

3.

a) Pontuação obtida pelo filme A:

180 × 1 + 165 × 2 + 120 × 2 + 95 × 3 + 5 × 4 + 15 × 4 = = 1115

Pontuação obtida pelo filme B:

180 × 4 + 165 × 3 + 120 × 1 + 95 × 4 + 5 × 2 + 15 × 3 = = 1770

Pontuação obtida pelo filme C:

180 × 2 + 165 × 1 + 120 × 4 + 95 × 1 + 5 × 1 + 15 × 1 = = 1120

Pontuação obtida pelo filme D:

180 × 3 + 165 × 4 + 120 × 3 + 95 × 2 + 5 × 3 + 15 × 2 = = 1795

Verifica-se assim que a ordem pela qual os quatro filmes serão exibidos e a respetiva pontuação obtida são os que se encontram na tabela dada.

b)

Ordem de preferência	Número de votos						
	180	165	120	95	5	15	325
1.ª	B	D	C	B	A	A	C
2.ª	D	B	D	A	D	B	
3.ª	C	A	A	D	B	D	B
4.ª	A	C	B	C	C	C	

1770 – 1120 = 650 (diferença de pontuação obtida inicialmente pelos filmes B e C).

$\frac{650}{325} = 2$

B: 1770 + 325 × 2 = 2420

C: 1120 + 325 × 4 = 2420

Assim, a primeira preferência dos 325 novos votantes é o filme C e a terceira preferência é o filme B.

Suponhamos que o filme D fosse a 2.ª preferência dos 325 novos votantes, então obteria a seguinte pontuação: 1795 + 325 × 3 = 2770, que seria uma pontuação superior à obtida pelos filmes B e C, o que sabemos não ser possível. Logo, a ordenação feita pelos 325 novos votantes foi C – A – B – D.

4.

a) Opção (A)

$\frac{20}{140} \times 3 = \frac{1}{7} \times 3 \approx 0,4$

$\frac{120}{140} \times 3 = \frac{6}{7} \times 3 \approx 2,6$

b) **i.**

Divisores	Financeiro	Comercial	Produção
1	27	36	119
2	13,5	18	59,5
3	9	12	39,6667
4	6,75	9	29,75
5	5,4	7,2	23,8
6	4,5	6	19,8333
7	3,8571	5,1429	17
8	3,375	4,5	14,875
9	3	4	13,2222

A distribuição dos 13 convites foi feita da seguinte forma: dois convites para o departamento financeiro, dois convites para o departamento comercial e nove convites para o departamento de produção.

ii.

Divisores	Financeiro	Comercial	Produção
1	27	36	119
3	9	12	39,6667
5	5,4	7,2	23,8
7	3,8571	5,1429	17
9	3	4	13,2222
11	2,4545	3,2727	10,8182
13	2,0769	2,7692	9,1538
15	1,8	2,4	7,9333
17	1,5882	2,1176	7

Aplicando o método de Saint-Laguë a distribuição dos 13 convites foi feita da seguinte forma: dois convites para o departamento financeiro, três convites para o departamento comercial e oito convites para o departamento da produção.

5. Subsídio de alimentação: $5,20 \times 22 = 114,4$

Seja x o valor de salário base:

$x + 114,4 - 0,11x - 118 = 1500,5 \Leftrightarrow 0,89x = 1504,1$

$\Leftrightarrow x = 1690$

$\frac{118}{1690} = \frac{y}{100} \Leftrightarrow y = \frac{11\,800}{1690}$, ou seja, $y \approx 7\%$

EMPRESA				COLABORADOR				
Nome: Domínio				Nome: Ricardo Gonçalves				
Morada: Avenida dos Trabalhadores				Número de contribuinte: 135791357				
				Número de identificação na Seg. Social: 246824680				
NIPC: 111111111				Categoria ou grupo profissional: Colaborador				
NISS: 12345678900								
Período de liquidação: 01/01/2023 a 31/01/2023							Total de dias	22
QUANTIDADE	**VALOR**	**DESCRIÇÃO**					**ABONOS**	**DESCONTOS**
1	**1690,00 €**	Salário base					**1690,00 €**	
22	5,20 €	Subsídio de alimentação					**114,40 €**	
		Segurança Social		11%				**185,90 €**
		IRS		**7,00 %**				118,00 €
	EXTRAS	**BASE SS**		**BASE IRS**			**TOTAL**	**TOTAL A DEDUZIR**
		1690,00 €		**1690,00 €**			1804,40 €	**303,90 €**
							TOTAL A RECEBER	
								1500,50 €

6. Opção (A)

$\frac{2900 \times 12}{52 \times 36} \approx 19,12$ €

7. Seja x o valor financiado ao Manuel.

$1,2x = 60 \times 18 \Leftrightarrow 1,2x = 1080$

$\Leftrightarrow x = 900$

O valor financiado ao Manuel foi 900 €.

8. O rendimento coletável do casal é:

85 000 – 2 × 4104 = 76 792 €

$\frac{76\,792}{2} = 38\,396$ €

0,37 × 38 396 – 3299,12 = 10 907,4 €

10 907,4 × 2 = 21 814,8 € (valor da coleta)

21 814,8 – 1500 = 20 314,8 € (valor da coleta líquida)

O valor do desconto anual relativo ao IRS deste casal é 20 314,8 euros.

9. A fórmula do capital acumulado num regime de juros simples é $C_i + C_i \times r \times n$.

$3000 + 3000 \times r \times 5 = 3525 \Leftrightarrow 15\,000r = 525$

$\Leftrightarrow r = 0,035$

A taxa de juro anual foi 3,5%.

10. Opção (D)

A fórmula do capital acumulado num regime de juros simples é $C_i(1 + r)^n$.

$5000(1 + 0,005)^{20} \approx 5524,48$ €