

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

do Manual

1. Trigonometria

Recorda – páginas 6 e 7

1.

a) $\sin \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\sin \gamma = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $\cos \gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \gamma = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) Segundo o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 10^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 244$$

Logo, $\overline{AC} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$.

$$\sin \alpha = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61};$$

$$\cos \gamma = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

c) Segundo o teorema de Pitágoras:

$$15^2 = \overline{AB}^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 81$$

Logo, $\overline{AB} = 9$.

$$\sin \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; \cos \gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

d) Segundo o teorema de Pitágoras:

$$17^2 = \overline{BC}^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 225$$

Logo, $\overline{BC} = 15$.

$$\sin \alpha = \frac{15}{17}; \cos \alpha = \frac{8}{17}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$$

$$\sin \gamma = \frac{8}{17}; \cos \gamma = \frac{15}{17}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{8}{15}$$

2.

a) $\sin 22^\circ - \cos 15^\circ \approx 0,3746 - 0,9659 \approx -0,59$

b) $\frac{\operatorname{tg} 10^\circ}{2} + \cos 5^\circ \approx \frac{0,1763}{2} + 0,9962 \approx 1,08$

3. A altura da árvore, em metros, é igual a:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \times \operatorname{tg} 60^\circ$$

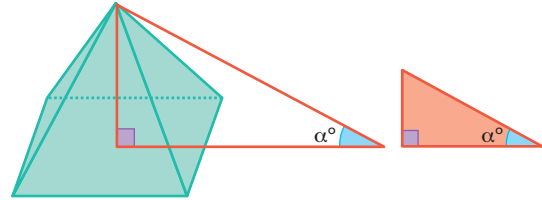
Como $\overline{BC} \approx 5$, tem-se que a altura da árvore, em metros, é aproximadamente igual a 5 metros.

Capítulo 1 – Resolução de problemas que envolvem triângulos

Tarefa – A pirâmide – página 8

a) Tales de Mileto usou a semelhança de triângulos para determinar a altura da pirâmide. A ideia básica seria a seguinte: se a altura da pirâmide e a altura da vara são proporcionais às medidas das respectivas sombras, ele poderia usar o tamanho da sombra da vara e a sombra da pirâmide para calcular a altura da pirâmide.

b) Medindo as sombras à mesma hora, Tales de Mileto garantiu que o ângulo do sol era constante, obtendo assim dois ângulos agudos iguais, um em cada triângulo retângulo, como a figura abaixo mostra:

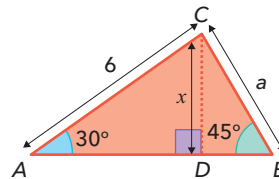


c) O comprimento da vara é irrelevante, pois, qualquer que seja o seu comprimento, é constante a razão entre a medida do comprimento da vara e a medida da sua sombra medida à mesma hora.

d) A Pirâmide de Quéops (ou Grande Pirâmide de Gizé) foi construída com, aproximadamente, 146,6 metros de altura. Atualmente, devido à perda de parte do seu revestimento de calcário, a sua altura é de, aproximadamente, 138,8 metros. É uma das sete maravilhas do mundo antigo e continua a ser uma das maiores estruturas construídas pelo ser humano.

Exercícios de margem – páginas 11 a 17

1.



$$\sin 30^\circ = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = 3$$

Como $\sin 45^\circ = \frac{x}{a}$, vem que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{a}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{a}$$

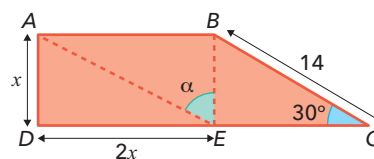
$$\Leftrightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$$

2.

a)



$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{BE}}{14} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{14}{2} \Leftrightarrow \overline{BE} = 7$$

Logo, $\overline{DE} = 2 \times \overline{BE} = 2 \times 7 = 14$.

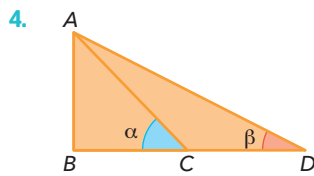
$$\begin{aligned} \cos 30^\circ &= \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{EC}}{14} \\ &\Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{14\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \overline{EC} = 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

Então, o perímetro do trapézio é:
 $7 + 14 + 7\sqrt{3} + 14 + 14 = (49 + 7\sqrt{3})$ u.c.

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$
 Logo, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 63,43^\circ$.

3. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$, logo $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53,1^\circ$.

$\cos \gamma = \frac{12}{13}$, logo $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \approx 22,6^\circ$.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{\overline{AB}}{15} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4 \times 15}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = 12$$

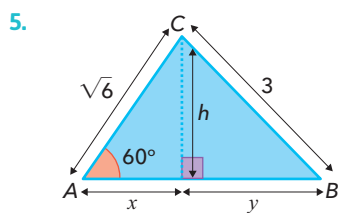
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{12}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4 \times 12}{3} \Leftrightarrow \overline{BD} = 16$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 12^2 + \overline{BC}^2 = 15^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 225 - 144 \\ &\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 81 \end{aligned}$$

Logo, $\overline{BC} = 9$.

Tem-se, então, $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = 16 - 9 = 7$ u.c.



Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{6}} & \quad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\sqrt{6}} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2} & \quad \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{18}}{2} \end{aligned}$$

$$h^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 + y^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{18}{4} + y^2 = 9$$

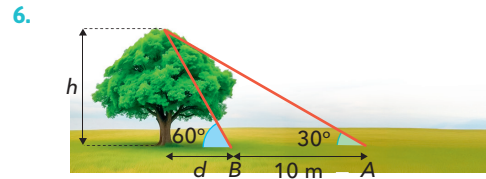
$$\Leftrightarrow y^2 = 9 - \frac{18}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{18}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{18}{4}}$$

$y > 0$, logo $y = \frac{\sqrt{18}}{2}$.

Assim, $\overline{AB} = x + y = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2} = \left(\frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}\right)$ u.c.



Sejam h a altura da árvore e d a distância entre o ponto B e a árvore.

Então:
 $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{d+10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d+10}$
 $\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}d + 10\sqrt{3}}{3}$

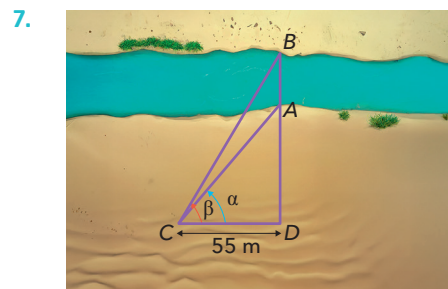
Por outro lado:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{d} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{d} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}d$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}d + 10\sqrt{3}}{3} &= \sqrt{3}d \Leftrightarrow \sqrt{3}d + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3}d \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{3}d = 10\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow d = 5 \end{aligned}$$

Tem-se, então, que $h = \sqrt{3}d = 5\sqrt{3}$, ou seja, a altura da árvore é $5\sqrt{3}$ metros.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{AD}}{55} \Leftrightarrow \overline{AD} = 55 \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 62^\circ = \frac{\overline{BD}}{55} \Leftrightarrow \overline{BD} = 55 \operatorname{tg} 62^\circ$$

Logo, $\overline{AB} = \overline{BD} - \overline{AD} = 55 \operatorname{tg} 62^\circ - 55 \operatorname{tg} 40^\circ \approx 57,3$.
 Assim, a largura aproximada do rio é 57,3 metros.

8. a)

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 63^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 72^\circ = \frac{h}{120-x} \end{cases}$$

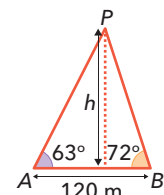
$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 63^\circ \\ h = 120 \operatorname{tg} 72^\circ - x \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x \operatorname{tg} 63^\circ = 120 \operatorname{tg} 72^\circ - x \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x \operatorname{tg} 72^\circ + x \operatorname{tg} 63^\circ = 120 \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x (\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) = 120 \operatorname{tg} 72^\circ \end{cases}$$

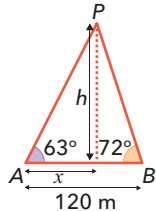
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \times \operatorname{tg} 63^\circ \\ x = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \end{cases}$$

Logo, $h \approx 143,8$, ou seja, a largura do rio é de, aproximadamente, 143,8 metros.

b)



Pela resolução da alínea anterior, sabe-se que

$$h \approx 143,808 \text{ e } x = \frac{120 \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ} \approx 73,274.$$

Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AP}^2 = 73,274^2 + 143,808^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 26\,115,969$$

$$\text{Logo, } \overline{AP} = \sqrt{26\,115,969} \approx 161,6$$

$$\text{e } \overline{BP}^2 = (120 - 73,274)^2 + 143,808^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BP}^2 = 22\,864,060$$

$$\text{Logo, } \overline{BP} = \sqrt{22\,864,060} \approx 151,2.$$

Assim, a distância da Ana à pedra é, aproximadamente, 161,6 metros e a distância da Berta à pedra é, aproximadamente, 151,2 metros.

9.

a)

i. $V_{\text{cubo}} = 343$

$$\overline{AB}^3 = 343$$

$$\overline{AB} = \sqrt[3]{343} = 7 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times h =$$

$$= A_{\Delta[\text{FPG}]} \times \overline{FE} =$$

$$= \frac{\overline{FP} \times \overline{FG}}{2} \times 7 =$$

$$= \frac{7\sqrt{3} \times 7}{2} \times 7 =$$

$$= \frac{343\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$$

ii. $A_{[\text{PQHG}]} = \overline{PQ} \times \overline{GP} =$

$$= 7 \times 14 =$$

$$= 98 \text{ cm}^2$$

Cálculo auxiliar

Cálculo de \overline{FP} :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{FP}}{\overline{FG}}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{FP}}{7} \Leftrightarrow \overline{FP} = 7\sqrt{3}$$

Cálculo auxiliar

Cálculo de \overline{GP} :

$$\cos 60^\circ = \frac{7}{\overline{GP}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{7}{\overline{GP}} \Leftrightarrow \overline{GP} = 14$$

b)

O retângulo [PQHG] tem dimensões 7 e \overline{GP} , onde

\overline{GP} é tal que $\cos \beta = \frac{7}{\overline{GP}}$, isto é, $\overline{GP} = \frac{7}{\cos \beta}$.

Assim, $A_{[\text{PQHG}]} = 63$.

$$A_{[\text{PQHG}]} = 63 \Leftrightarrow 7 \times \frac{7}{\cos \beta} = 63$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{\cos \beta} = 63$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{49}{63}$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{7}{9}$$

Assim, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$, logo $\beta \approx 38,9^\circ$.

Aprende fazendo ① – páginas 18 a 21

1. Opção (A)

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2,3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2,3}{\operatorname{tg} 20^\circ}$$

Logo, $x \approx 6,32$ metros.

2. Seja h a altura do pinheiro.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{3,2} \Leftrightarrow h = 3,2 \operatorname{tg} 60^\circ$$

Logo, a altura do pinheiro é, aproximadamente, 5,54 metros.

$$\begin{aligned} 3. \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\overline{BC}}{150} \Leftrightarrow \overline{BC} = 150 \operatorname{tg} 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \overline{BC} = 150 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\Leftrightarrow \overline{BC} = 50\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{150} \Leftrightarrow \overline{AC} = 150 \operatorname{tg} 45^\circ \Leftrightarrow \overline{AC} = 150$$

Logo, $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = (150 - 50\sqrt{3})$ metros.

4. Seja x o comprimento da escada e seja α o ângulo que a escada faz com o chão.

$$\cos \alpha = \frac{0,1x}{x} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0,1$$

Logo, $\alpha = \cos^{-1}(0,1) \approx 84^\circ$.

$$\begin{aligned} 5. \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) &= \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{2\overline{BC}} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{\overline{MB}}{2 \times 2\overline{MB}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{MAB}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } \widehat{MAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

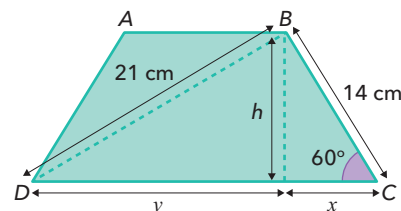
$$\operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{\overline{CB}}{2\overline{CB}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } \widehat{CAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ.$$

Assim, $\widehat{CAM} = \widehat{CAB} - \widehat{MAB} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 12,5^\circ$.

6.



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{14} \Leftrightarrow h = 14 \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow h = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = 7\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{x}{14} \Leftrightarrow x = 14 \operatorname{cos} 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 14 \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$21^2 = y^2 + (7\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow y^2 = 441 - 147 \Leftrightarrow y^2 = 294$$

Logo, $y = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}$.

Então, $\overline{AB} = 7\sqrt{6} - 7$.

Logo, o perímetro do trapézio é dado por:

$$14 + 7\sqrt{6} - 7 + 14 + 7 + 7\sqrt{6} = (28 + 14\sqrt{6}) \text{ cm}$$

A área do trapézio é dada por:

$$\frac{7\sqrt{6} + 7 + 7\sqrt{6} - 7}{2} \times 7\sqrt{3} = \frac{14\sqrt{6}}{2} \times 7\sqrt{3} =$$

$$= 49\sqrt{18} =$$

$$= 147\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

7. Sejam x a altura do farol e y a distância entre o penhasco e a primeira posição do barco.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{x}{y + 100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 30^\circ \\ x = y \operatorname{tg} 15^\circ + 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y \operatorname{tg} 30^\circ = y \operatorname{tg} 15^\circ + 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y \operatorname{tg} 30^\circ - y \operatorname{tg} 15^\circ = 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y (\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ) = 100 \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \times \operatorname{tg} 30^\circ \\ y = \frac{100 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} \end{cases}$$

Assim, $x = 50$ metros.

8. $\alpha + \beta = 18^\circ + 14^\circ = 32^\circ$

Sejam x a distância entre o pé do candeeiro e a luz que projeta e y a altura do candeeiro.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 14^\circ = \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{x + 0,75}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \operatorname{tg} 14^\circ \\ x + 0,75 = y \operatorname{tg} 32^\circ \end{cases}$$

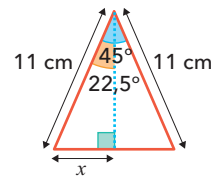
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y \operatorname{tg} 32^\circ - y \operatorname{tg} 14^\circ = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y (\operatorname{tg} 32^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ) = 0,75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = \frac{0,75}{\operatorname{tg} 32^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ} \end{cases}$$

Assim, $y \approx 2$ metros.

- 9.



$r = \text{raio} = 2x$

$$\operatorname{sen} 22,5^\circ = \frac{x}{11} \Leftrightarrow x = 11 \times \operatorname{sen} 22,5^\circ$$

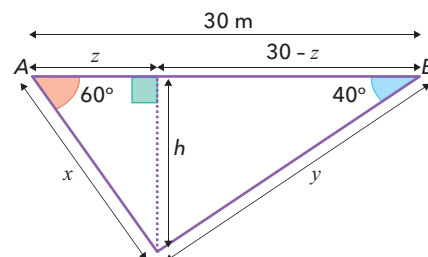
$$r = 22 \times \operatorname{sen} 22,5^\circ$$

Logo, a área círculo é:

$$\pi r^2 = \pi \times (22 \operatorname{sen} 22,5^\circ)^2 =$$

$$\approx 222,677 \text{ cm}^2$$

- 10.



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{z} \\ \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{30-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}z = h \\ \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\sqrt{3}z}{30-z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ (30-z)\operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 30 \operatorname{tg} 40^\circ - z \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \sqrt{3}z + z \operatorname{tg} 40^\circ = 30 \operatorname{tg} 40^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ z(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 40^\circ) = 30 \operatorname{tg} 40^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ z = \frac{30 \operatorname{tg} 40^\circ}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 40^\circ} \end{cases}$$

Assim, $z \approx 9,791$ e $h = \sqrt{3} \times z \approx 16,958$.

Como $x^2 = z^2 + h^2$, vem que $x^2 = 9,791^2 + 16,958^2$.

Assim, $x \approx 19,6$.

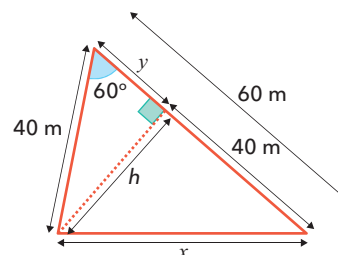
Como $y^2 = (30-z)^2 + h^2$, vem que

$$y^2 = 20,209^2 + 16,958^2.$$

Assim, $y = 26,4$.

As cordas têm de comprimento, aproximadamente, 19,6 metros e 26,4 metros.

- 11.



Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ = \frac{y}{40} &\Leftrightarrow y = 40 \times \cos 60^\circ & \bullet 60 - y = 60 - 20 = \\ &\Leftrightarrow y = 40 \times \frac{1}{2} & = 40 \\ &\Leftrightarrow y = 20 \end{aligned}$$

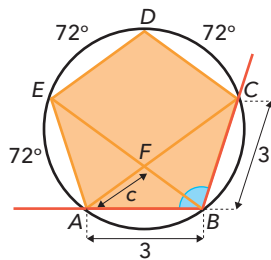
$$\begin{aligned} \text{sen } 60^\circ = \frac{h}{40} &\Leftrightarrow h = 40 \text{ sen } 60^\circ \\ &\Leftrightarrow h = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow h = 20\sqrt{3} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 = h^2 + 40^2 &\Leftrightarrow x^2 = (20\sqrt{3})^2 + 40^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2800 \end{aligned}$$

Como $x > 0$, $x = \sqrt{2800} = 20\sqrt{7}$ metros.

12.



O pentágono é regular e, como tal, pode ser inscrito numa circunferência, onde cada arco assinalado tem amplitude $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

$$\widehat{ABC} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

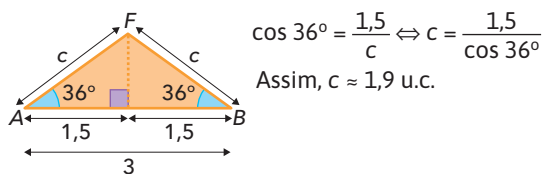
Considerando o ângulo ABC, inscrito na circunferência, tem-se que:

$$\widehat{A\hat{B}C} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{3 \times 72^\circ}{2} = 108^\circ$$

Sabe-se, também, que o triângulo [ABC] é isósceles.

$$\text{Assim, } \widehat{A\hat{B}C} = 108^\circ \text{ e } \widehat{B\hat{A}C} = \widehat{A\hat{C}B} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

O triângulo [ABC] também é isósceles, logo:



Capítulo 2 – Ângulo e arco generalizados e circunferência trigonométrica

Tarefa – Às voltas – página 22

a)

```
print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - ( k * 360)
if x < 0 :
    print (f"x(x) = -{a}-{k} * 360")
else:
    print (f"x(x) = {a} + {k} * 360")
```

Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
400
400.0 = 40.0 + 1.0 * 360

b)

a : representa o ângulo que “sobra” após remover os múltiplos completos de 360° de x .

k : representa o número de múltiplos inteiros de 360° , que cabem no valor absoluto de x . Este valor pode ser positivo ou negativo, dependendo do sinal de x .

c)

Entrada do valor do ângulo: o programa pede que se introduza um valor para a amplitude do ângulo.

Cálculo de múltiplos de 360° : o valor absoluto de x é dividido por 360, para determinar quantos múltiplos inteiros de 360° cabem nesse valor.

Cálculo do valor restante: o programa calcula o que resta dessa divisão, ou seja, o ângulo que “sobrou” após subtrair os múltiplos de 360° .

Ajuste de sinal para valores negativos: se o ângulo original x for negativo, o programa devolve valores de k e de a também negativos.

Saída: o programa exhibe a forma da decomposição do ângulo, ou seja, o valor de x é mostrado como a soma do valor restante (entre -360° e 360°) e o número de múltiplos de 360° .

d)

```
print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - ( k * 360)
if x < 0 :
    print (f"x(x) = -{a}-{k} * 360")
else:
    print (f"x(x) = {a} + {k} * 360")
```

Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
70
70.0 = 70.0 + 0.0 * 360

```
print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - ( k * 360)
if x < 0 :
    print (f"x(x) = -{a}-{k} * 360")
else:
    print (f"x(x) = {a} + {k} * 360")
```

Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
430
430.0 = 70.0 + 1.0 * 360

```
print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - ( k * 360)
if x < 0 :
    print (f"x(x) = -{a}-{k} * 360")
else:
    print (f"x(x) = {a} + {k} * 360")
```

Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
790
790.0 = 70.0 + 2.0 * 360

```
print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - ( k * 360)
if x < 0 :
    print (f"x(x) = -{a}-{k} * 360")
else:
    print (f"x(x) = {a} + {k} * 360")
```

Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
1150
1150.0 = 70.0 + 3.0 * 360

```
print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - ( k * 360)
if x < 0 :
    print (f"x(x) = -{a}-{k} * 360")
else:
    print (f"x(x) = {a} + {k} * 360")
```

Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
-290
-290.0 = -290.0-0.0 * 360

```

▶ print ("Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida")
x = float(input())
k = abs(x) // 360 #determina a parte inteira da divisão de |x| por 360
a = abs(x) - (k * 360)
if x < 0 :
    print (f"{x} = -{a} - {k} * 360")
else:
    print (f"{x} = {a} + {k} * 360")

```

↔ Introduz o valor da amplitude do ângulo pretendida
-650
-650.0 = -290.0-1.0 * 360

Concluimos que os ângulos de amplitudes 70° , 430° , 790° , 1150° , -290° e -650° admitem o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade, diferindo a sua amplitude em um número inteiro de voltas completas.

Exercícios de margem – páginas 23 a 39

10.

a) i. I ii. D iii. H iv. I

b) Por exemplo, 160° ou -200° .

11.

a) I

b) C

c) C

d) G

e) F

12.

a) $400^\circ = 40^\circ + 1 \times 360^\circ$

b) $-1280^\circ = -200^\circ - 3 \times 360^\circ$

c) $670^\circ = 310^\circ + 1 \times 360^\circ$

d) $-825^\circ = -105^\circ - 2 \times 360^\circ$

13.

a) 85° pertence ao 1º quadrante.

b) 280° pertence ao 4º quadrante.

c) -25° pertence ao 4º quadrante.

d) 200° pertence ao 3º quadrante.

e) $400^\circ = 40^\circ + 1 \times 360^\circ$ pertence ao 1º quadrante.

f) $-1280^\circ = -200^\circ - 3 \times 360^\circ$ pertence ao 2º quadrante.

g) $670^\circ = 310^\circ + 1 \times 360^\circ$ pertence ao 4º quadrante.

h) $-825^\circ = -105^\circ - 2 \times 360^\circ$ pertence ao 3º quadrante.

14.

a) **Abcissa de P:**

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \cos 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ordenada de P:

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 5 \sin 30^\circ \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\text{Logo, } P\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

b) **Abcissa de P:**

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha$$

Ordenada de P:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha$$

Logo, $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$.

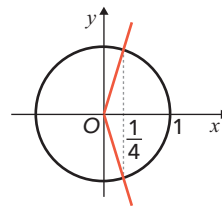
15.

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

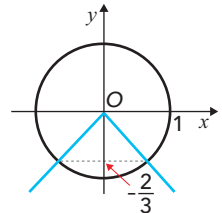
b) $\cos \beta = \frac{3}{5}$; $\sin \beta = -\frac{4}{5}$

16.

a)



b)



17.

a) $\sin 780^\circ = \sin (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 780^\circ = \cos (2 \times 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

b) $\sin 1125^\circ = \sin (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 1125^\circ = \cos (3 \times 360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $\sin 1110^\circ = \sin (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\cos 1110^\circ = \cos (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ = \cos (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ = \cos (3 \times 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

18.

a) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$

Valor mínimo: -4 Valor máximo: 4

b) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq \sin \alpha - 3 \leq -2$

Valor mínimo: -4 Valor máximo: -2

c) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \alpha \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2 \geq -2 \sin \alpha \geq -2$$

$$\Leftrightarrow 7 \geq 5 - 2 \sin \alpha \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3} \geq \frac{5 - 2 \sin \alpha}{3} \geq 1$$

Valor mínimo: 1

Valor máximo: $\frac{7}{3}$

d) $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$

Valor mínimo: 0

Valor máximo: 1

e) $0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \cos^2 \alpha + 1 \leq 2$
 Valor mínimo: 1 Valor máximo: 2

f) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos \alpha + 1 \leq 2$
 $\Leftrightarrow 0 \leq (\cos \alpha + 1)^2 \leq 4$
 Valor mínimo: 0 Valor máximo: 4

19.

a) $\sin 50^\circ < \sin 80^\circ$

b) $\cos 50^\circ > \cos 80^\circ$

c) $\cos 105^\circ > \cos 162^\circ$

d) $\sin 200^\circ < \sin 90^\circ$

e) $\cos 180^\circ < \sin 5^\circ$

f) $\cos(-90^\circ) = \sin 180^\circ$

20.

A. Afirmação falsa. No 2º quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo, logo, não têm o mesmo sinal.

B. Afirmação verdadeira.

C. Afirmação verdadeira.

D. Afirmação falsa. Não existe qualquer ângulo cujo cosseno seja superior a 1.

E. Afirmação falsa. No 2º quadrante o seno é positivo.

F. Afirmação falsa. Qualquer que seja o ângulo α :

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ e $-\frac{7}{6} < -1$.

21.

A. Afirmação verdadeira.

B. Afirmação verdadeira.

C. Afirmação falsa. No 3º quadrante o cosseno é crescente.

D. Afirmação falsa. Não existe qualquer ângulo cujo cosseno seja superior a 1.

E. Afirmação verdadeira.

F. Afirmação falsa. Qualquer que seja o ângulo α :

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ e $-\frac{7}{6} < -1$.

22. Ordenada de P: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$

Uma vez que α é um ângulo do 2º quadrante, tem-se que $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

23.

a) $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1$
 $\Leftrightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2$
 $\Leftrightarrow -3 \leq -3k \leq 1$
 $\Leftrightarrow 3 \geq 3k \geq -1$
 $\Leftrightarrow 1 \geq k \geq -\frac{1}{3}$

Logo, $k \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

b) $x \in]180^\circ, 270^\circ[$, então:

$-1 < \cos x < 0 \Leftrightarrow -4 < 4 \cos x < 0$
 $\Leftrightarrow -4 < \frac{k-10}{2} < 0$
 $\Leftrightarrow -8 < k-10 < 0$
 $\Leftrightarrow 2 < k < 10$

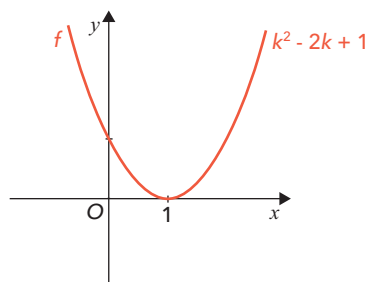
Logo, $k \in]2, 10[$.

c) $x \in [0^\circ, 90^\circ[$, então:

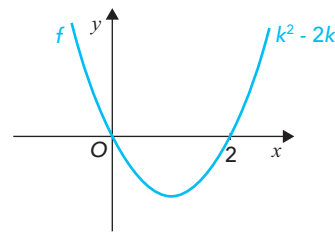
$0 < \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < k^2 - 2k + 1 \leq 1$
 $\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \wedge k^2 - 2k + 1 \leq 1$
 $\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \wedge k^2 - 2k \leq 0$

Cálculos auxiliares

$k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$



$k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$



Logo, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap [0, 2] = [0, 1[\cup]1, 2]$.

24.

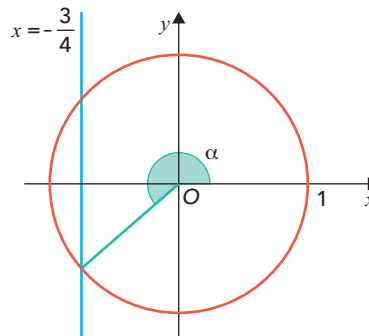
a) O produto do seno pelo cosseno é positivo nos 1º e 3º quadrantes.

b) O seno é crescente e o cosseno é decrescente no 1º quadrante.

c) O seno e o cosseno são crescentes no 4º quadrante.

d) O seno é decrescente e o cosseno é negativo nos 2º e 3º quadrantes.

25.



$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16}$
 $\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$

Uma vez que α pertence ao 3º quadrante, tem-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

26. a) $\operatorname{sen} \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{BD}}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{BD} = a \operatorname{sen} \theta$
 $\Leftrightarrow \overline{BD} = 2a \operatorname{sen} \theta$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{\frac{1}{2} \overline{AC}}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{AC} = a \operatorname{cos} \theta$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 2a \operatorname{cos} \theta$$

Assim, a área da peça é dada por:

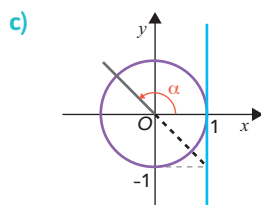
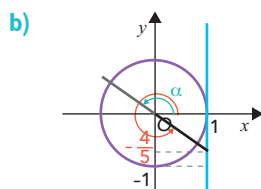
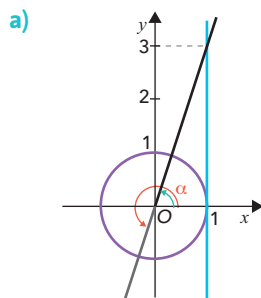
$$\frac{2a \operatorname{sen} \theta \times 2a \operatorname{cos} \theta}{2} = 2a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta = A(\theta)$$

Se $\theta \leq 0^\circ$ ou se $\theta \geq 90^\circ$, a figura não é um losango, pelo que $\theta \in]0^\circ, 90^\circ[$.

b) $A(45^\circ) = 2 \times 3^2 \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{cos} 45^\circ =$
 $= 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= 9$

Quando $\theta = 45^\circ$ e $a = 3$, o losango [ABCD] adquire a forma de um quadrado de lado 3.

27.



28.

a) $\operatorname{cos} 450^\circ + 2 \operatorname{sen} 765^\circ - \operatorname{tg} 720^\circ =$
 $= \operatorname{cos} (360^\circ + 90^\circ) + 2 \operatorname{sen} (2 \times 360^\circ + 45^\circ) -$
 $- \operatorname{tg} (2 \times 360^\circ) =$
 $= \operatorname{cos} 90^\circ + 2 \operatorname{sen} 45^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ =$
 $= 0 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 =$
 $= \sqrt{2}$

b) $\operatorname{cos}^2(361^\circ) - \operatorname{tg} 405^\circ + \operatorname{sen}^2(721^\circ) =$
 $= \operatorname{cos}^2(360^\circ + 1^\circ) - \operatorname{tg}(360^\circ + 45^\circ) +$
 $+ \operatorname{sen}^2(2 \times 360^\circ + 1^\circ) =$

$$= \operatorname{cos}^2(1^\circ) - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{sen}^2(1^\circ) =$$

$$= 1 - 1 =$$

$$= 0$$

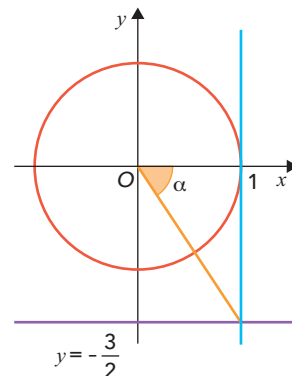
29.

- a) $\operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[$
 b) Uma vez que $\operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[$, então $\operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \in [3, +\infty[$.
 c) $\operatorname{tg} \alpha \in]-\infty, +\infty[$, logo $\operatorname{tg} \alpha + 3 \in]-\infty, +\infty[$.
 d) Uma vez que $\operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[$, então $2 \operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[$ e, portanto, $2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 \in [-1, +\infty[$.
 e) Uma vez que $\operatorname{tg}^2 \alpha \in [0, +\infty[$, então $-\operatorname{tg}^2 \alpha \in]-\infty, 0[$, logo $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \in]-\infty, 1[$ e, portanto, $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \in]-\infty, \frac{1}{2}[$.

30.

- a) A tangente é negativa e o cosseno é positivo no 4º quadrante.
 b) O seno e a tangente são negativos no 4º quadrante.
 c) Não há nenhum quadrante em que a tangente seja decrescente.
 d) A tangente e o cosseno têm o mesmo sinal nos 1º e 2º quadrantes.
 e) O seno é maior que a tangente em todos os ângulos do 2º e do 4º quadrantes.

31.



$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{4}{13}$$

Uma vez que α pertence ao 4º quadrante, tem-se que:

$$\operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{4}{13} = 1$$

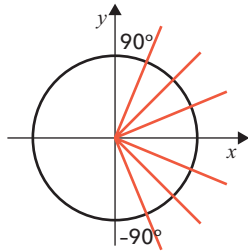
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{4}{13}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{13}$$

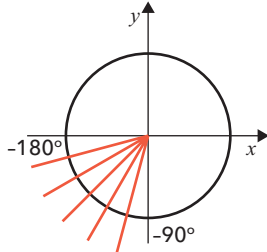
Como α pertence ao 4º quadrante, tem-se que:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

32. Opção (C)
 $\alpha \in]-90^\circ, 90^\circ[$



$$\begin{aligned} -1 < \sin \alpha < 1 \\ 0 < \cos \alpha \leq 1 \\ \beta \in]-180^\circ, -90^\circ[\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -1 < \sin \beta < 0 \\ -1 < \cos \beta < 0 \\ \operatorname{tg} \beta > 0 \end{aligned}$$

Opção (A): $\sin \alpha - \cos \beta > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha > \cos \beta$
 Falso, para $\alpha = -60^\circ$ e $\beta = -120^\circ$, por exemplo,
 $\sin \alpha < \cos \beta$.

Opção (B): $\sin \alpha + \cos \beta < 0$
 Falso, para $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = -120^\circ$, por exemplo,
 $\sin \alpha + \cos \beta > 0$.

Opção (C): $\cos \alpha - \sin \beta > 0 \Leftrightarrow \cos \alpha > \sin \beta$
 Verdadeiro $\forall \alpha \in]-90^\circ, 90^\circ[\wedge \beta \in]-180^\circ, -90^\circ[$.

Opção (D): $\cos \alpha \times \operatorname{tg} \beta < 0$
 Falso, para $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = -120^\circ$, por exemplo,
 $\cos \alpha \times \operatorname{tg} \beta > 0$

- 33.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ & = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \\ & \quad - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ & = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - (1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha) = \\ & = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ & = 4 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ & = \sin \alpha \times 1 = \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ & = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ & = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \\ & = 1 + 2 \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ & = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

- 34.

a) $P\hat{Q}R = \alpha$
 Logo, $\overline{QR} = 4 \cos \alpha$ e $\overline{OR} = 4 \sin \alpha$
 Então:

$$A(\alpha) = \frac{4 \cos \alpha \times (2 \times 4 \sin \alpha)}{2} = 16 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & A(30^\circ) = 16 \sin 30^\circ \times \cos 30^\circ = 16 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ & = 4\sqrt{3} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Aprende fazendo ② – páginas 40 e 41

- Opção (B)
 $-2026^\circ = -226 - 5 \times 360^\circ$
 O lado extremidade de um ângulo de amplitude -2026° pertence ao 2º quadrante.
- Opção (C)
 $P(2 \cos 120^\circ, 2 \sin 120^\circ) = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$
 $= (-1, \sqrt{3})$
- Opção (B)
 Uma vez que α é um ângulo do 2º quadrante e β é um ângulo do 3º quadrante, tem-se que $\operatorname{tg} \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \beta > 0$, pelo que $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$.
 Uma vez que α é um ângulo do 2º quadrante e β é um ângulo do 3º quadrante, tem-se que $\sin \alpha > 0$ e $\cos \beta < 0$, pelo que $\sin \alpha > \cos \beta$.
 Uma vez que β é um ângulo do 3º quadrante, tem-se que $\operatorname{tg} \beta > 0$ e $\cos \beta < 0$, pelo que $\operatorname{tg} \beta > \cos \beta$.
 Uma vez que α é um ângulo do 2º quadrante e β é um ângulo do 3º quadrante, tem-se que $\cos \alpha < 0$ e $\sin \beta < 0$, pelo que $\cos \alpha + \sin \beta < 0$.
- O seno e o cosseno têm o mesmo sinal no 1º quadrante (ambos são positivos) e no 3º quadrante (ambos são negativos).
 - O cosseno e a tangente são negativos no 2º quadrante.
 - O seno cresce e o cosseno decresce no 1º quadrante.
 - O cosseno e a tangente crescem no 3º e no 4º quadrantes.
- Miguel: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{16}{25} = \frac{17}{25} \neq 1$, o que contraria a fórmula fundamental da trigonometria.
 Filipa: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$
 Logo, a Filipa tem razão.
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25}$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{21}{25}$
 Uma vez que α é um ângulo agudo, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

$$b) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

7.

$$a) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 3^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$b) \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

8. Opção (A)

A afirmação I é falsa, porque o valor do seno e o valor do cosseno são sempre menores ou iguais a 1.

A afirmação II é falsa, porque, no 2º quadrante, o cosseno é decrescente.

A afirmação III é falsa, porque $\operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{cos} 30^\circ =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.$$

9. Opção (B)

Os lados extremidade dos ângulos de amplitudes $300^\circ + k 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$ situam-se nos 2º e 4º quadrantes.

10. Opção (D)

Para que $\operatorname{tg} \theta \times \operatorname{sen} \theta < 0$, então o lado extremidade de θ terá de se situar nos 2º ou 3º quadrantes.

$800^\circ = 2 \times 360^\circ + 80^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 1º quadrante.

$-440^\circ = -360^\circ - 80^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 4º quadrante.

$690^\circ = 360^\circ + 330^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 4º quadrante.

$-530^\circ = -360^\circ - 170^\circ$, pelo que o lado extremidade deste ângulo se situa no 3º quadrante.

11. O quadrante em que o cosseno é crescente e a tangente é negativa é o 4º quadrante.

A. No 4º quadrante o seno é crescente, logo, a afirmação é falsa.

B. No 4º quadrante o cosseno é positivo, logo, a afirmação é falsa.

C. No 4º quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo, logo, a afirmação é verdadeira.

D. No 4º quadrante a tangente é crescente, logo, a afirmação é falsa.

12. Opção (B)

Se $\operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{cos} \alpha > 0$, então α é um ângulo do 1º ou do 3º quadrantes. Se $x_1 < x_2 \Rightarrow \operatorname{cos} x_1 < \operatorname{cos} x_2$, então o cosseno é crescente, e isso acontece no 3º e no 4º quadrantes. Logo, α é um ângulo do 3º quadrante, onde o seno é decrescente.

$$13. \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha \times \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{16}{15}$$

$$\Leftrightarrow 15 - 15 \operatorname{cos}^2 \alpha = 16 \operatorname{cos} \alpha \quad (\operatorname{cos} \alpha \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 15 \operatorname{cos}^2 \alpha + 16 \operatorname{cos} \alpha - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 900}}{30}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{3}{5} \vee \operatorname{cos} \alpha = -\frac{3}{5}$$

Como α é um ângulo agudo, então $\operatorname{cos} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$.

14. $\operatorname{sen} \beta \times \operatorname{cos} \beta = 0,3$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta \times \operatorname{cos}^2 \beta = 0,09 \quad (\operatorname{sen} \beta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \beta > 0)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \operatorname{cos}^2 \beta) \times \operatorname{cos}^2 \beta = 0,09$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \beta - \operatorname{cos}^4 \beta = 0,09$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^4 \beta - \operatorname{cos}^2 \beta + 0,09 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0,36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{1}{10} \vee \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{9}{10}$$

Como $\beta \in]0^\circ, 45^\circ[$, então $\operatorname{cos}^2 \beta = \frac{9}{10}$, porque

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{cos} \beta < 1 \text{ e, então, } \operatorname{cos} \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \operatorname{cos}^2 \beta = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Logo, como $\beta \in]0^\circ, 45^\circ[$, tem-se $\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\text{Assim, } \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Capítulo 3 – Radiano e redução ao primeiro quadrante

Tarefa – O fio – página 42

a) Um valor aproximado às unidades da amplitude do ângulo ACB é 57° .

b) Estima-se que um radiano “cabe” aproximadamente 6 vezes num ângulo giro.

c) Sabemos que a medida do comprimento da circunferência de raio r é $2\pi r$.

Como 1 radiano corresponde a um arco de comprimento igual ao raio e $\frac{2\pi r'}{r'} = 2\pi$, concluímos que “cabem” exatamente 2π radianos numa circunferência.

d) Sabemos que o perímetro da circunferência é diretamente proporcional ao raio. Logo, se o raio for r' , como $\frac{2\pi r'}{r'} = 2\pi$, concluímos que, qualquer que seja o raio, “cabem” sempre 2π raios numa circunferência, logo os resultados não se alterariam.

Exercícios de margem – páginas 43 a 66

35.

a) Sendo o comprimento do arco igual ao raio, então a amplitude do arco correspondente é 1 radiano.

b) $\frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}$, logo a amplitude do arco é:
 $\frac{4 \times 1}{2} = 2 \text{ rad}$

c) $\frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$, logo a amplitude do arco é:
 $\frac{1 \times 1}{2} = 0,5 \text{ rad}$

d) $\frac{1 \text{ rad}}{x \text{ rad}} = \frac{2 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}}$, logo a amplitude do arco é:
 $\frac{0,5 \times 1}{2} = 0,25 \text{ rad}$

36.

a) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{x \text{ rad}}$
 Então, $x = \frac{120\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$.
 Logo, $\frac{2\pi}{3}$ rad é a medida da amplitude de um ângulo de 120° .

b) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ}{x \text{ rad}}$
 Então, $x = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$.
 Logo, $\frac{3\pi}{4}$ rad é a medida da amplitude de um ângulo de 135° .

c) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{150^\circ}{x \text{ rad}}$
 Então, $x = \frac{150\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.
 Logo, $\frac{5\pi}{6}$ rad é a medida da amplitude de um ângulo de 150° .

d) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{200^\circ}{x \text{ rad}}$
 Então, $x = \frac{200\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{9}$.
 Logo, $\frac{10\pi}{9}$ rad é a medida da amplitude de um ângulo de 200° .

e) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{-70^\circ}{x \text{ rad}}$
 Então, $x = \frac{-70\pi}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{18}$.
 Logo, $-\frac{7\pi}{18}$ rad é a medida da amplitude de um ângulo de -70° .

37.

a) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{2\pi}{3} \text{ rad}}$
 $180 \times \frac{2\pi}{3} = x\pi$
 Então, $x = \frac{120\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = 120$.

Logo, 120° é a medida da amplitude de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

b) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{-\frac{5\pi}{3} \text{ rad}}$
 $180 \times \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = x\pi$
 Então, $x = \frac{-300\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = -300$.

Logo, -300° é a medida da amplitude de um ângulo de $-\frac{5\pi}{3}$ radianos.

c) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{7\pi}{6} \text{ rad}}$
 $180 \times \frac{7\pi}{6} = x\pi$
 Então, $x = \frac{210\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = 210$.

Logo, 210° é a medida da amplitude de um ângulo de $\frac{7\pi}{6}$ radianos.

d) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{3\pi}{4} \text{ rad}}$
 $180 \times \frac{3\pi}{4} = x\pi$
 Então, $x = \frac{135\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = 135$.

Logo, 135° é a medida da amplitude de um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianos.

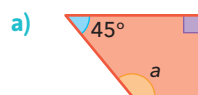
e) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{-\frac{5\pi}{4} \text{ rad}}$
 $180 \times \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = x\pi$
 Então, $x = \frac{-225\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = -225$.

Logo, -225° é a medida da amplitude de um ângulo de $-\frac{5\pi}{4}$ radianos.

f) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{x \text{ rad}}$
 Então, $x = \frac{180 \times 1}{\pi} \Leftrightarrow x \approx 57,3$.

Logo, $57,3^\circ$ é a medida aproximada da amplitude de um ângulo de 1 radiano.

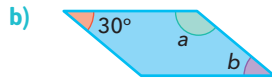
38.



$a = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ}{a \text{ rad}}$
 Então, $a = \frac{135\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{4}$.

Logo, $a = \frac{3\pi}{4}$ rad.



$$a = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{150^\circ}{a \text{ rad}}$$

Então, $a = \frac{150\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{5\pi}{6}$.

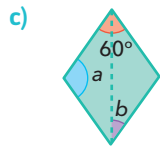
Logo, $a = \frac{5\pi}{6}$ rad.

$$b = 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{30^\circ}{b \text{ rad}}$$

Então, $b = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$.

Logo, $b = \frac{\pi}{6}$ rad.



$$a = \frac{360^\circ - 60^\circ - 60^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{a \text{ rad}}$$

Então, $a = \frac{120\pi}{180} \Leftrightarrow a = \frac{2\pi}{3}$.

Logo, $a = \frac{2\pi}{3}$ rad.

$$b = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{30^\circ}{b \text{ rad}}$$

Então, $b = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{6}$.

Logo, $b = \frac{\pi}{6}$ rad.

39.

a) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{1 \text{ rad}}$

Então, $x = \frac{180 \times 1}{\pi} \approx 57,2958$.

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,2958^\circ}{y'}$$

Então, $y = \frac{0,2958 \times 60}{1} = 17,748$.

$$\frac{1'}{60'} = \frac{0,748'}{z''}$$

Então, $z = \frac{0,748 \times 60}{1} \approx 45$.

Logo, 1 radiano corresponde aproximadamente a $57^\circ 17' 45''$.

b) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{\frac{\pi}{11} \text{ rad}}$

Então, $x = \frac{180 \times \frac{\pi}{11}}{\pi} \approx 16,3636$.

$$\frac{1^\circ}{60'} = \frac{0,3636^\circ}{y'}$$

Então, $y = \frac{0,3636 \times 60}{1} = 21,816$.

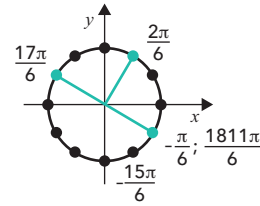
$$\frac{1'}{60'} = \frac{0,816'}{z''}$$

Então, $z = \frac{0,816 \times 60}{1} \approx 49$.

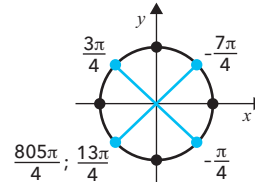
Logo, $\frac{\pi}{11}$ radianos correspondem aproximadamente a $16^\circ 21' 49''$.

40.

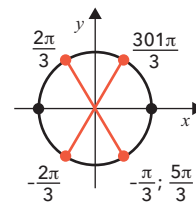
a)



b)



c)



41.

a) $13\pi = 6 \times 2\pi + \pi \quad -13\pi = -6 \times 2\pi - \pi$

Ora, π e $-\pi$ correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo 13π e -13π correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

b) $2016\pi = 1013 \times 2\pi$

Ora, 0 e 2π correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo 0 e 2016π correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

c) $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$

Ora, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade, logo $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

d) $\frac{32\pi}{3} = 5 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3} \quad -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

Logo, $-\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{32\pi}{3}$ correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

e) $-\frac{15\pi}{4} + 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{4} \quad -\frac{109\pi}{4} + 14 \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$

Logo, $-\frac{15\pi}{4}$ e $-\frac{109\pi}{4}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

f) $\frac{25\pi}{6} - 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$ $\frac{2018\pi}{6} - 168 \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$
 Logo, $\frac{25\pi}{6}$ e $\frac{2018\pi}{6}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

42. $\frac{2\pi}{18} = \frac{2 \times 0,5 \times \pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{18\pi}{2\pi} \Leftrightarrow x = 9$
 A distância percorrida foi de 9 metros.

43. $\frac{2\pi}{x} = \frac{2 \times 5 \times \pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi \times \frac{\pi}{2}}{10\pi} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10}$
 A amplitude do arco AB é $\frac{\pi}{10}$ radianos.

44. $\frac{2\pi}{5} = \frac{6^2\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5 \times 36\pi}{2\pi} \Leftrightarrow x = 90$
 A área do setor circular é 90 cm².

45. $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow 4 = \frac{r^2}{4} \Leftrightarrow r^2 = 16$
 Logo, $r = \sqrt{16} = 4$.
 O raio do setor circular é 4 cm.

46.
$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2r\pi}{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{r^2\pi}{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha} = 4r \\ \frac{2\pi}{\alpha} = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 4r \\ \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 4r = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(r - 4) = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \vee r = 4 \\ \alpha = \frac{2\pi}{r^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \frac{2\pi}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

 O raio da circunferência é 4 cm e a amplitude do arco é $\frac{\pi}{8}$ radianos.

47. a) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

48. a) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

49. a) $-2 \cos \frac{5\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{28\pi}{3} =$
 $= -2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(9\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} =$
 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{4\pi}{3} =$
 $= \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$
 $= 0$

c) $\cos \frac{20\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} =$
 $= \cos\left(7\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$
 $= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$
 $= -\cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} =$
 $= -\frac{1}{2} - 1 =$
 $= -\frac{3}{2}$

d) $\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) - 3 \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} =$
 $= -\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{11\pi}{6} - 3 \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$
 $= -\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} =$
 $= -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} =$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} =$
 $= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\operatorname{sen} \frac{17\pi}{4} + \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} \frac{19\pi}{6} =$
 $= \operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{23\pi}{4} + \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$
 $= \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} =$
 $= \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} =$
 $= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} =$
 $= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}$

50.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2 \operatorname{sen}(-x) + \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = -2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x = \\ & = -\operatorname{sen} x - \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & -\cos(-x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = -\cos x - \operatorname{tg} x + \cos x + \cos x = \\ & = -\operatorname{tg} x + \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2 \cos\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{sen}(3\pi - x) + \\ & + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{sen}(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\ & = -2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \\ & = -2 \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \operatorname{sen}(x + \pi) + \cos(x - \pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \\ & = -\operatorname{sen} x + \cos(\pi - x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\ & = -\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x = \\ & = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

51.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) - \cos(720^\circ - \alpha) + \\ & + \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(-\alpha) = \\ & = -\operatorname{sen} \alpha - \cos(-\alpha) + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\ & = -\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\ & = -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & -\operatorname{tg}(1080^\circ + \beta) - \cos(180^\circ - \beta) + \\ & + \operatorname{sen}(270^\circ + \beta) - \operatorname{sen}(360^\circ - \beta) = \\ & = -\operatorname{tg} \beta + \cos \beta - \operatorname{sen}(90^\circ + \beta) - \operatorname{sen}(-\beta) = \\ & = -\operatorname{tg} \beta + \cos \beta - \cos \beta + \operatorname{sen} \beta = \\ & = -\operatorname{tg} \beta + \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & -2 \cos(450^\circ + \gamma) - 3 \operatorname{tg}(540^\circ + \gamma) - \\ & - \cos(\gamma - 180^\circ) - 3 \operatorname{sen}(-\gamma - 270^\circ) = \\ & = -2 \cos(90^\circ + \gamma) - 3 \operatorname{tg}(180^\circ + \gamma) - \\ & - \cos(180^\circ - \gamma) + 3 \operatorname{sen}(270^\circ + \gamma) = \\ & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma - 3 \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma) = \\ & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma - 3 \cos \gamma = \\ & = 2 \operatorname{sen} \gamma - 3 \operatorname{tg} \gamma - 2 \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 2 \operatorname{sen}(-270^\circ + \delta) - 3 \operatorname{sen}(\delta - 90^\circ) + \\ & + 5 \cos(-180^\circ - \delta) + 2 \operatorname{tg}(-360^\circ + \delta) = \\ & = 2 \operatorname{sen}(90^\circ + \delta) + 3 \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) + \\ & + 5 \cos(180^\circ + \delta) + 2 \operatorname{tg} \delta = \\ & = 2 \cos \delta + 3 \cos \delta - 5 \cos \delta + 2 \operatorname{tg} \delta = \\ & = 2 \operatorname{tg} \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{52.} \quad & \cos\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \\ & \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, então α pertence ao 2º quadrante.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} & \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Uma vez que α pertence ao 2º quadrante, então

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \cos(-4\pi - \alpha) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(3\pi - \alpha) &= \\ = \cos \alpha - 2 \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha &= \\ = -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha &= \\ = -\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) &= \\ = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} &= \frac{11\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

$$\text{53.} \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 2 \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -2$$

Como $\operatorname{tg} \alpha < 0$ e $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, então α pertence ao 4º quadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

Uma vez que α pertence ao 4º quadrante, então

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

Uma vez que α pertence ao 4º quadrante, então

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}(-\alpha) + \operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= \\ = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha &= \\ = -\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha &= \\ = -\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} &= \frac{\sqrt{5} + 10}{5} \end{aligned}$$

$$\text{54.} \quad \cos(-90^\circ - \alpha) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos(90^\circ + \alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

Como $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in]90^\circ, 270^\circ[$, então α pertence

ao 2º quadrante.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

Uma vez que α pertence ao 2º quadrante, então

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Então:

$$\begin{aligned} & \text{sen}(180^\circ - \alpha) \times \cos(180^\circ - \alpha) + \text{sen}^2(-\alpha) - \\ & \quad - \text{tg}(\alpha - 180^\circ) = \\ & = \text{sen } \alpha \times (-\cos \alpha) + \text{sen}^2 \alpha + \text{tg}(180^\circ - \alpha) = \\ & = -\text{sen } \alpha \times \cos \alpha + \text{sen}^2 \alpha - \text{tg } \alpha = \\ & = -\frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \\ & = \frac{12}{25} + \frac{9}{25} + \frac{3}{4} = \\ & = \frac{159}{100} \end{aligned}$$

55.

a)
$$\frac{(1 + \text{tg}(\pi + \alpha))^2}{1 + \text{tg}^2(-\alpha)} = \frac{(1 + \text{tg } \alpha)^2}{1 + \text{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2 \text{tg } \alpha + \text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} =$$

$$= 1 + \frac{2 \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + \frac{2 \text{sen } \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= 1 + 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

b)
$$-\frac{2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = -\frac{2 \cos \alpha \text{sen } \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

$$= -\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\text{tg } \alpha = \text{tg}(-\alpha)$$

56.

a) Seja M o ponto médio de [AB].

$$\overline{OM} = 3$$

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow -\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AM}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} = -3 \text{tg } \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{3}{\overline{OA}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha}$$

Logo, o perímetro do triângulo [OAB] é dado por:

$$2 \times (-3 \text{tg } \alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos \alpha}\right) = -6 \text{tg } \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

b)
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{2}{5}$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{21}{25}$$

Como $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, tem-se que:

$$\cos x = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

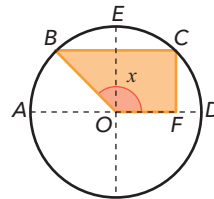
$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Então:

$$-6 \text{tg } x - \frac{6}{\cos \alpha} = -6 \times \left(-\frac{2\sqrt{21}}{21}\right) - \frac{6}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{21}}{21} + \frac{30\sqrt{21}}{21} = \frac{42\sqrt{21}}{21} = 2\sqrt{21}$$

57.



$$\overline{OF} = -2 \cos x$$

$$\overline{FC} = 2 \text{sen } x$$

$$\overline{BC} = -4 \cos x$$

A área do trapézio [OBCF] é dada por:

$$\frac{\overline{BC} + \overline{OF}}{2} \times \overline{FC} = \frac{-4 \cos x - 2 \cos x}{2} \times 2 \text{sen } x =$$

$$= -6 \cos x \text{sen } x$$

Aprende fazendo ③ – páginas 67 a 69

1. Opção (B)

$\frac{9\pi}{8} = \pi + \frac{\pi}{8}$, logo, $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{9\pi}{8}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$-\frac{19\pi}{10} = -2\pi + \frac{\pi}{10}$, logo, $\frac{\pi}{10}$ e $-\frac{19\pi}{10}$ correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$, logo, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{2016\pi}{6} = 351\pi$, logo, $\frac{2016\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$ não correspondem a ângulos com o mesmo lado extremidade.

2. Opção (B)

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$. Uma vez que

$x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos x < 0$ e, portanto, $-\cos x > 0$.

$\text{sen}(-24\pi + x) = \text{sen } x$. Uma vez que $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$,

então $\text{sen } x < 0$.

Uma vez que $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, então $\text{tg } x > 0$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{sen } x$. Uma vez que $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$,

então $\text{sen } x < 0$ e, portanto, $-\text{sen } x > 0$.

3. Opção (B)

$$\cos \frac{5\pi}{3} + \text{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} - \text{sen} \frac{\pi}{6} + \text{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

4. Opção (D)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta = \text{sen } \alpha \cos \beta$$

Como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\text{sen } \alpha < 0$.

Como $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, então $\cos \beta > 0$.

Logo, $\text{sen } \alpha \cos \beta < 0$ e a afirmação é verdadeira.

$$\text{sen}(-\pi - \alpha) \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= -\operatorname{sen}(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha. \text{ Como } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \text{ então } \operatorname{sen} \alpha < 0.$$

Logo, $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha > 0$ e a afirmação é verdadeira.

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \beta = -\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \beta =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \beta = \cos \alpha - \cos \beta$$

$$\text{Como } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \text{ então } \cos \alpha < 0.$$

$$\text{Como } -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, \text{ então } \cos \beta > 0.$$

Logo, $\cos \alpha - \cos \beta < 0$ e a afirmação é verdadeira.

$$-\operatorname{tg}(-\pi - \alpha) < -\operatorname{tg}(-\beta) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi + \alpha) < \operatorname{tg} \beta$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$$

$$\text{Como } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \text{ então } \operatorname{tg} \alpha > 0.$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, então $\operatorname{tg} \beta < 0$. Logo, $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ e a afirmação é falsa.

5. $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}(-10\pi) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) -$

$$- \cos^2\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right) - \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4\pi\right) + \operatorname{tg} 0 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) -$$

$$- \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} + 0 - \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}{2}$$

A Carlota tinha razão.

6. a) $\frac{3}{2} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{6} - \cos \pi + \operatorname{sen} \frac{200\pi}{3} =$

$$= -\frac{3}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{6} - \cos \pi + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} =$$

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6} + 4}{4}$$

b) $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{21\pi}{2}\right)^2 - \cos \frac{13\pi}{4} =$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)^2 - \cos \frac{5\pi}{4} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} + \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}$$

c) $2 \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen} \frac{39\pi}{2} + \operatorname{sen}(2025\pi) =$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi =$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 =$$

$$= 1 + \sqrt{2} + 1 =$$

$$= 2 + \sqrt{2}$$

d) $\cos \frac{25\pi}{3} - \operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

$$= \cos \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

7.

a) $\cos(-x) + \operatorname{sen}(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}(-x) =$

$$= \cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x =$$

$$= \cos x - 3 \operatorname{sen} x$$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(x + 11\pi) =$

$$= \cos x - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 \cos(\pi + x) =$$

$$= \cos x - 2 \cos x - 3 \cos x =$$

$$= -4 \cos x$$

c) $\operatorname{tg}(-x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + 3 \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen}(8\pi + x) =$

$$= -\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen} x =$$

$$= -\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + 3 \cos x - \operatorname{sen} x =$$

$$= -\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$$

d) $\operatorname{sen}(-2\pi + x) - 4 \operatorname{tg}(-\pi + x) + \cos(13\pi - x) \operatorname{tg}(x - 3\pi) =$

$$= \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{tg}(\pi - x) - \cos(\pi - x) \operatorname{tg}(\pi - x) =$$

$$= \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{tg} x - \cos x \operatorname{tg} x =$$

$$= \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x =$$

$$= -4 \operatorname{tg} x$$

e) $\operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{sen}(-x) =$

$$= -\operatorname{tg} x \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen} x =$$

$$= \operatorname{tg} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \cos x + \operatorname{sen} x =$$

$$= \operatorname{tg} x \cos x - 2 \cos x + \operatorname{sen} x =$$

$$= \operatorname{sen} x - 2 \cos x + \operatorname{sen} x =$$

$$= 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x$$

f) $-\operatorname{sen}(-15\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) \operatorname{tg}(\pi + x) +$

$$+ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) =$$

$$= \operatorname{sen}(\pi + x) - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x =$$

$$= -\operatorname{sen} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

g) $-2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - \cos(-x + 7\pi) =$

$$= 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x) =$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x =$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$

8.

a) $\cos(-\beta) = \cos \beta = k$

b) $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta = -k$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta = \sqrt{1 - k^2}$

Cálculo auxiliar

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - k^2$$

Como $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então $\sin \beta = \sqrt{1 - k^2}$.

d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\sqrt{1 - k^2}$

e) $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}$

9. Opção (B)

$$\operatorname{tg}(-\alpha) \times \sin(-90^\circ + \alpha) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha \times (-\sin(90^\circ - \alpha)) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha < 0$$

10. Uma vez que $\operatorname{tg} x > 0$ e que $x \in]-180^\circ, 0^\circ[$, então x pertence ao 3º quadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

Como x pertence ao 3º quadrante, então

$$\cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

Como x pertence ao 3º quadrante, então

$$\sin x = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então:

$$\sin^2(180^\circ + x) - 3 \sin(90^\circ + x) + \cos(270^\circ + x) + \sin^2(90^\circ - x) =$$

$$= \sin^2 x - 3 \cos x - \cos(90^\circ + x) + \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x - 3 \cos x + \sin x =$$

$$= \frac{1}{3} - 3 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{3} =$$

$$= 1 + \sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

11. $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \sqrt{8} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

Como $\operatorname{tg} \alpha < 0$ e $\alpha \in [2\pi, 3\pi]$, tem-se que

$$\alpha \in \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right], \text{ pelo que } \cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Então:

$$\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \sin(23\pi + \alpha) - \sin\left(-\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= -\sin \alpha (-\sin \alpha) + \cos \alpha =$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos \alpha =$$

$$= \frac{8}{9} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{9}$$

12. Opção (D)

$$\alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - \beta$$

$$\beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{3\pi}{2} - \beta$$

Assim:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \sin \gamma =$$

$$= \cos(\pi - \beta) + \cos \beta + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= -\cos \beta + \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= -\cos \beta =$$

$$= -\cos(\pi - \alpha) =$$

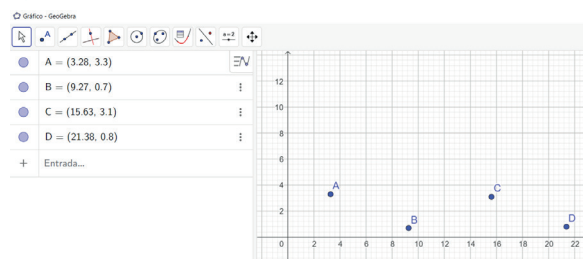
$$= \cos \alpha$$

Capítulo 4 – Funções trigonométricas e fenómenos periódicos

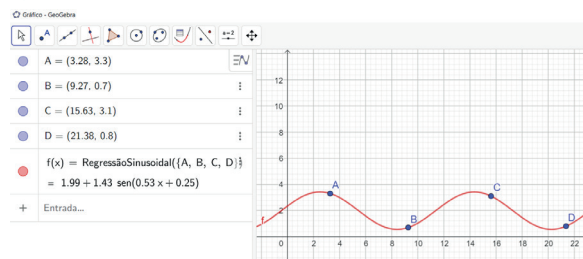
Tarefa – As marés – página 70

a) (3,28; 3,3), (9,27; 0,7), (15,63; 3,1) e (21,38; 0,8)

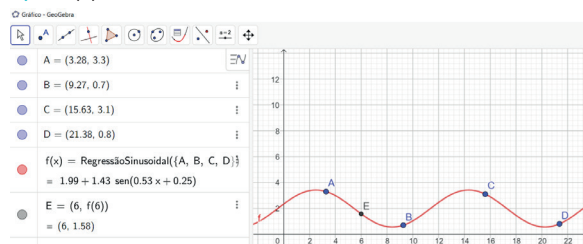
b)



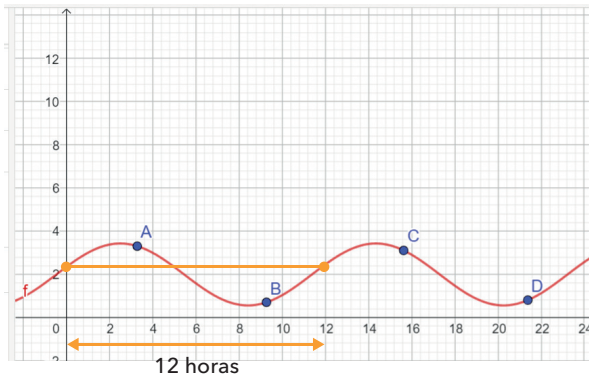
c)



d) $f(6) \approx 1,58$ m



e)



Por observação do gráfico, somos levados a acreditar que passam 12 horas até que o comportamento da altura da maré se repita. Este resultado advém do movimento das marés se repetir aproximadamente de 12 em 12 horas.

f) Ao cuidado do aluno.

g) Ao cuidado do aluno.

Exercícios de margem – páginas 74 a 95

58.

a) $f(x) = \sin x - 1$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D'_f = [-2, 0]$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de f são da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $g(x) = 3 \sin x$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, $D'_g = [-3, 3]$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de g são da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $h(x) = 2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 2 - \frac{x}{2} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, $D'_h = [1, 3]$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2$$

Equação impossível

Logo, a função h não tem zeros.

59.

a) $f(x) = 1 + \cos x$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D'_f = [0, 2]$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de f são da forma $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $g(x) = -5 \cos x$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq -5 \cos x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq -5 \cos x \geq -5$$

Logo, $D'_g = [-5, 5]$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -5 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, os zeros de g são da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $h(x) = 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 2$$

Logo, $D'_h = [2, 4]$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3$$

Equação impossível

Logo, a função h não tem zeros.

60. $d(t) = 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$

a) $d(2) = 40 - 15 \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 40 - \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 29,4$

Passados 2 segundos do início do movimento, a bola encontrava-se a uma distância do chão de, aproximadamente, 29,4 cm.

b) $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -15 \leq 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 15$

$$\Leftrightarrow 15 \geq -15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \geq -15$$

$$\Leftrightarrow 55 \geq 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \geq 25$$

A distância máxima da bola ao chão é 55 cm e a distância mínima é 25 cm.

61.

a) $f(x) = \operatorname{tg}(3x)$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D'_f = \mathbb{R}$$

b) $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D'_g = \mathbb{R}$$

62.

a) Seja M o ponto médio de $[PQ]$.

$$\overline{PM} = \sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\overline{OP} = \sqrt{2} \sin \alpha$$

Logo, a área do triângulo $[PQO]$ é dada por:

$$\frac{2\sqrt{2} \cos \alpha \times \sqrt{2} \sin \alpha}{2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

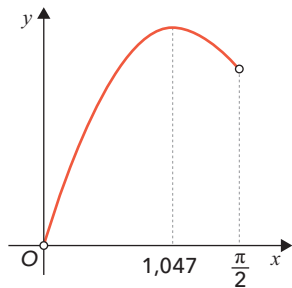
$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{(\sqrt{2})^2 \pi}{x} \Leftrightarrow x = \alpha$$

Logo, a área do setor circular é dada por α .

Assim, a área da região sombreada é dada por:

$$\alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = f(\alpha)$$

b)



Logo, $\alpha \approx 1,047$.

63. Opção (D)

O período positivo mínimo da função f definida por

$$f(x) = \text{sen}(6x) \text{ é } \frac{2\pi}{6}, \text{ isto é, } \frac{\pi}{3}.$$

64.

a) $f(x) = \text{sen}(3x)$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \text{sen}(3x + 2\pi) =$$

$$= \text{sen}(3x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, f é uma função periódica de período $\frac{2\pi}{3}$.

b)

$$g(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$g(x + 10\pi) = \cos\left(\frac{x + 10\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{x}{5} + 2\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{x}{5}\right) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, g é uma função periódica de período 10π .

65.

a) Por exemplo, as funções do tipo

$$f(x) = a + b \text{sen}(2(x - d)) \text{ têm período } \pi, \text{ pois } \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Assim, $f(x) = \text{sen}(2x)$ é um exemplo de uma função de período π .

b) Por exemplo, as funções do tipo

$$f(x) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{12}(x - d)\right) \text{ têm período } 24,$$

$$\text{pois } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24.$$

Assim, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$ é um exemplo de uma função de período $\frac{\pi}{12}$.

c) Por exemplo, as funções do tipo

$$f(x) = a + b \cos\left(\frac{1}{2}(x - d)\right) \text{ têm período } 4\pi, \text{ pois}$$

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Consideremos, por exemplo, $b = 1$ e $d = 0$:

$$f(x) = a + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Para determinar a , consideremos o ponto de coordenadas $(0, 6)$, que sabemos ter de pertencer ao gráfico da função. Então, vem que:

$$f(0) = 6 \Leftrightarrow a + \cos\left(\frac{1}{2} \times 0\right) = 6 \Leftrightarrow a + \cos 0 = 6$$

$$\Leftrightarrow a + 1 = 6$$

$$\Leftrightarrow a = 5$$

Assim, $f(x) = 5 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ é um exemplo de uma função de período 4π e cujo gráfico contém o ponto de coordenadas $(0, 6)$.

66. Pretende-se o período positivo mínimo da função d

$$\text{definida por } d(t) = 3 + 2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{15}t\right). \text{ A função } d \text{ tem}$$

período positivo mínimo $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$. Assim, a fita

demora 30 segundos a dar uma volta completa.

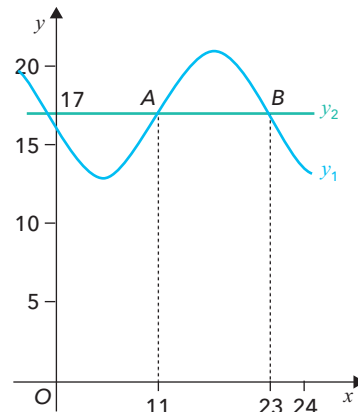
67. $T(t) = 17$

Introduzindo na calculadora gráfica:

$$y_1 = 17 + 4 \cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right)$$

$$y_2 = 17$$

obtem-se os pontos de interseção assinalados.



Assim, conclui-se que, nesse dia, a água esteve à temperatura de 17°C às 11 h e às 23 h.

68. $t = 0$ corresponde às 16 h.

$t = 2$ corresponde às 18 h.

$$\begin{cases} N(0) = 3,2 \\ N(2) = 2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B \cos 0 = 3,2 \\ A + B \cos \frac{\pi}{3} = 2,6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3,2 \\ A + \frac{B}{2} = 2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3,2 - B \\ 3,2 - B + \frac{B}{2} = 2,6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3,2 - B \\ -\frac{B}{2} = 2,6 - 3,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3,2 - B \\ -\frac{B}{2} = 0,6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3,2 - B \\ B = 1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3,2 - 1,2 \\ B = 1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1,2 \end{cases}$$

69.

a) A função definida por $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$ tem contradomínio $[-1, 1]$.

A função definida por $y = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$ tem contradomínio $[-3, 3]$.

A função definida por $D(t) = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$ tem contradomínio $[1, 7]$.

Assim, a distância máxima e a distância mínima ao solo é de, respetivamente, 7 metros e 1 metro.

b) O período positivo mínimo da função definida por $D(t) = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$ é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ e a frequência é

o inverso do período positivo mínimo, logo a frequência é $\frac{1}{4}$.

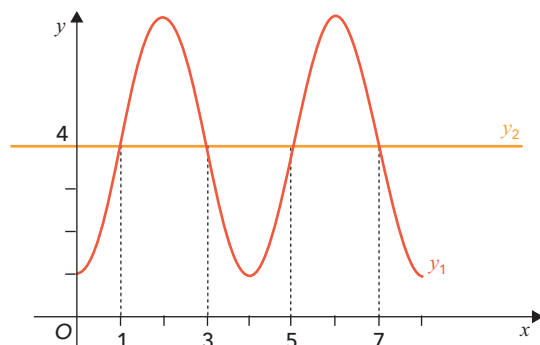
c) Pretende-se as soluções da equação $D(t) = 4$, no intervalo $[0, 8]$.

Introduzindo na calculadora gráfica:

$$y_1 = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$$

$$y_2 = 4$$

obtêm-se os pontos de interseção assinalados.



Assim, conclui-se que o corpo C está à distância de 4 metros do solo aos 1, 3, 5 e 7 segundos.

70. Sabendo que a função definida por $y = \sin(c(x - d))$ tem contradomínio $[-1, 1]$, sabemos também que a função definida por $y = a + b \sin(c(x - d))$ tem contradomínio $[a - b, a + b]$. Assim, sabemos que o mínimo da função é 10,25 e o máximo é 13,25. Logo, uma possibilidade é a seguinte:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + b \\ a + b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4 + b + b = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + 4 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

Dado que as marés se repetem de 12 em 12 horas, sabemos que o período da função é 12, logo uma possibilidade é a seguinte:

$$\frac{2\pi}{c} = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{12} = c \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

Para determinar o valor da constante d , sabemos que $h(0) = 10$:

$$8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times (0 - d)\right) = 10 \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{6}d\right) = \frac{1}{2}$$

Como $\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right) = \frac{1}{2}$, e também $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, vem que:

$$-\frac{\pi}{6}d = \frac{\pi}{6} \vee -\frac{\pi}{6}d = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow d = -1 \vee d = -5$$

Se $d = -1$, tem-se que $f_1(x) = 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x + 1)\right)$.

Se $d = -5$, tem-se que $f_2(x) = 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x + 5)\right)$.

Como sabemos que a maré alta ocorre às 2 h e às 14 h e a maré baixa ocorre às 8 h e às 20 h, tem-se:

$$\begin{aligned} f_1(2) &= 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(2 + 1)\right) = 8 + 4 \sin\frac{3\pi}{6} = \\ &= 8 + 4 \times 1 = 12 = f_1(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(8) &= 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(8 + 1)\right) = 8 + 4 \sin\frac{9\pi}{6} = \\ &= 8 + 4 \times (-1) = 4 = f_1(20) \end{aligned}$$

$$12 > 4$$

$$\begin{aligned} f_2(2) &= 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(2 + 5)\right) = 8 + 4 \sin\frac{7\pi}{6} = \\ &= 8 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 = f_2(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(8) &= 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(8 + 5)\right) = 8 + 4 \sin\frac{13\pi}{6} = \\ &= 8 + 4 \times \frac{1}{2} = 10 = f_2(20) \end{aligned}$$

$$6 < 10$$

Dadas as condições, pode concluir-se que

$$f(x) = 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x + 1)\right).$$

71. Opção (A)

Começamos por determinar quanto tempo decorre desde o nascer ao pôr do sol, no maior dia do ano:

$$21 \text{ h } 20 \text{ min} - 6 \text{ h } 15 \text{ min} = 15 \text{ h } 5 \text{ min} = 15 \text{ h} + \frac{5}{60} \text{ h} = \frac{181}{12} \text{ h (máximo de } f).$$

Determinemos, agora, quanto tempo decorre desde o nascer ao pôr do sol, no menor dia do ano:

$$17 \text{ h } 20 \text{ min} - 7 \text{ h } 45 \text{ min} = 9 \text{ h } 35 \text{ min} = 9 \text{ h} + \frac{35}{60} \text{ h} = \frac{115}{12} \text{ h (mínimo de } f).$$

Sabemos que o mínimo da função f é $\frac{115}{12}$, o que nos permite excluir a expressão da opção (D).

O contradomínio da função definida pela expressão desta opção é $\left[\frac{91}{12}, \frac{181}{12}\right]$: a função definida por

$y = \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 80,75)\right)$ tem contradomínio $[-1, 1]$;

a função definida por $y = \frac{13}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 80,75)\right)$

tem contradomínio $\left[-\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right]$ e a função definida

por $y = \frac{71}{6} + \frac{13}{4} \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 80,75)\right)$ tem contra-

domínio $\left[\frac{91}{12}, \frac{181}{12}\right]$. Logo, a função relativa a esta

opção tem mínimo igual a $\frac{91}{12}$ e não igual a $\frac{115}{12}$.

Sabemos também que o período da função f é igual a 365, o que nos permite excluir a expressão da opção (C). A função definida pela expressão da opção (C) tem período igual a $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = \frac{4\pi^2}{365}$ e não igual a 365.

Vejam, ainda, quantos dias decorrem desde o início do ano até ao dia 21 de junho:

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 172$$

Sabemos, ainda, que, no dia de ordem 172, o tempo que decorre desde o nascer ao pôr do sol é máximo, o que nos leva a excluir a expressão da opção (B), pois, de acordo com esta, o tempo que decorre desde o nascer ao pôr do sol no dia de ordem 172 é igual a:

$$\begin{aligned} & \frac{37}{3} - \frac{11}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3265}(172 - 80,75)\right) = \\ & = \frac{37}{3} - \frac{11}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(172 - 80,75)\right) = \\ & = \frac{37}{3} - \frac{11}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{182,6\pi}{365}\right) \approx 9,58 \text{ e não } \frac{181}{12} \approx 15,08. \end{aligned}$$

72. Pretendemos determinar o valor de t tal que $A(t + 1,5) = A(t) + 1$.

Utilizando x como variável independente, pretendemos determinar, em $[0; 4,5]$, a solução da equação $A(x + 1,5) = A(x) + 1$.

$$A(x + 1,5) = A(x) + 1$$

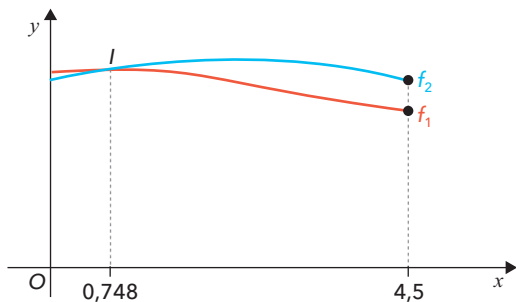
$$\Leftrightarrow 16 - 2 \operatorname{sen}(-0,7(x + 1,5)) = 16 - 2 \operatorname{sen}(-0,7x) + 1$$

$$\Leftrightarrow 16 - 2 \operatorname{sen}(-0,7(x + 1,5)) = 17 - 2 \operatorname{sen}(-0,7x)$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = 16 - 2 \operatorname{sen}(-0,7(x + 1,5))$$

$$f_2(x) = 17 - 2 \operatorname{sen}(-0,7x), 0 \leq x \leq 4,5$$



O valor de t , com aproximação às milésimas, é 0,748.

$$0,748 \times 60 = 44,88$$

Assim, a hora desse dia em que tal ocorreu foi às 9 h 45 min.

Aprende fazendo 4 – páginas 96 a 98

1.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= (1 - \operatorname{sen} x)^2 - (\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen}^2 x - 1) = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = \\ &= 2 - 2 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 &\Leftrightarrow 2 \geq -2 \operatorname{sen} x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow 4 \geq 2 - 2 \operatorname{sen} x \geq 0 \end{aligned}$$

Logo, $D'_f = [0, 4]$.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad g(x) &= \operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2 = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 1 + 2 \cos x = \\ &= 1 + 1 + 2 \cos x = \\ &= 2 + 2 \cos x = \\ &= 2(\cos x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2(\cos x + 1) \leq 4 \end{aligned}$$

Logo, $D'_g = [0, 4]$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad g(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(\cos x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

Uma vez que $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$, então

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Logo:

$$g(\alpha) = 2(\cos \alpha + 1) = 2\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} + 1\right) = \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2$$

3. Opção (A)

$$-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \cos(\pi t) + 5 \leq 6$$

Logo, a distância do centro da rolha ao fundo do lago varia entre 4 metros e 6 metros.

4. Opção (C)

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Então, no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, a equação tem três

soluções: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

5.

$$\text{a)} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(3x + 2) \leq 1 &\Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos(3x + 2) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 5 + 4 \cos(3x + 2) \leq 9 \end{aligned}$$

Logo, $D'_f = [1, 9]$.

$$\text{b)} \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow 5 + 4 \cos(3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x + 2) = -\frac{5}{4}$$

que é uma equação impossível, visto que $-\frac{5}{4} < -1$. Logo, a função f não tem zeros.

c) $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 + 4 \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\right) =$
 $= 5 + 4 \cos(3x + 2\pi + 2) =$
 $= 5 + 4 \cos(3x + 2) =$
 $= f(x), \forall x \in \mathbb{R},$ logo $\frac{2\pi}{3}$ é período da função f .

6.

a) Seja h a altura do triângulo [EAB].

$$\operatorname{tg} x = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x$$

Então, a área do triângulo [EAB] é dada por:

$$\frac{a \times \frac{a}{2} \operatorname{tg} x}{2} = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x$$

Assim, a área da região sombreada da figura é dada por:

$$a^2 - 4 \times \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x = a^2 - a^2 \operatorname{tg} x = a^2(1 - \operatorname{tg} x) = A(x)$$

b) $A(x) = 36(1 - \operatorname{tg} x)$

i. $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, então $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

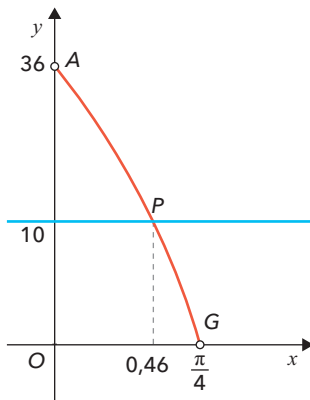
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Assim:

$$A(\theta) = 36(1 - \operatorname{tg} \theta) = 36\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) =$$

 $= 36 - 9\sqrt{2}$

ii. $A(x) = 18 \Leftrightarrow 36(1 - \operatorname{tg} x) = 18$



Logo, $x \approx 0,46$ rad.

7. $d(0) = 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\pi \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) =$
 $= 1 + \frac{1}{3} \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} =$
 $= 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$
 $= \frac{7}{6}$

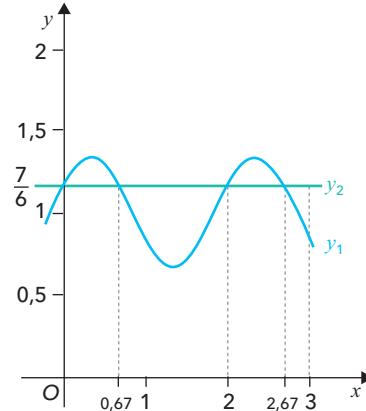
Pretende-se, então, os três instantes t em que $d(t) = \frac{7}{6}$.

Introduzindo na calculadora gráfica:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_2 = \frac{7}{6}$$

obtêm-se os pontos de interseção assinalados.



Assim, conclui-se que os instantes, diferente do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A foram os instantes 0,67 s, 2s e 2,67s.

8. Opção (B)

$$f(x) = \cos(2x)$$

Maximizantes de f :

$$\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

 $\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Minimizantes de f :

$$\cos(2x) = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $]0, 2\pi]$, a função f tem 4 maximizantes e minimizantes.

Assim, no intervalo $]0, 50\pi]$ terá $4 \times 25 = 100$ maximizantes e minimizantes, mas um deles é 50π .

Logo, no intervalo $]0, 50\pi[$, a função f tem 99 maximizantes e minimizantes.

Aprende Fazendo **Global** – páginas 106 a 122

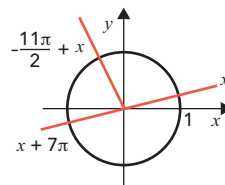
1. Opção (C)

O seno é crescente e é negativo no 4º quadrante e, neste quadrante, o seno é negativo e o cosseno é positivo, logo o produto é negativo.

2. Opção (B)

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) - 2 \cos(x + 7\pi) = \cos x - (-2 \cos x) =$$

 $= \cos x + 2 \cos x =$
 $= 3 \cos x$



3. a) $A_{[SPQR]} = \frac{\overline{SP} + \overline{RQ}}{2} \times \overline{QT} =$

Cálculos auxiliares

- $\text{sen } x = \frac{\overline{QT}}{4} \Leftrightarrow \overline{QT} = 4 \text{ sen } x$
- $\text{cos } x = \frac{\overline{TP}}{4} \Leftrightarrow \overline{TP} = 4 \text{ cos } x$
- $\overline{SP} = 1 + \overline{TP} = 1 + 4 \text{ cos } x$

$$= \frac{1 + 4 \text{ cos } x + 1}{2} \times 4 \text{ sen } x =$$

$$= 4 \text{ sen } x (1 + 2 \text{ cos } x) =$$

b) $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{ sen } \frac{\pi}{2} \times \left(1 + 2 \text{ cos } \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= 4 \times 1 \times (1 + 2 \times 0) =$$

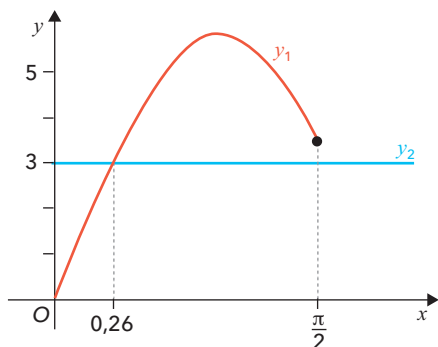
$$= 4 \text{ cm}^2$$

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o trapézio retângulo da figura corresponde ao retângulo [RSTQ] de área $4 \times 1 = 4 \text{ cm}^2$.

c) Pretende-se os valores de x para os quais $A(x) < 3$

$$y_1 = 4 \text{ sen } x(1 + 2 \text{ cos } x)$$

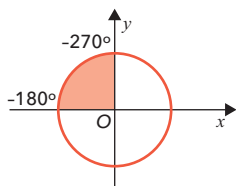
$$y_2 = 3$$



Verifica-se que, os valores de x para os quais $A(x) < 3$ são os valores do intervalo $[0; 0,26[$.

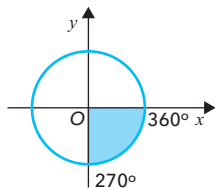
4. Opção (D)

$$\alpha \in]-270^\circ, -180^\circ[$$



$$\alpha \in 2^\circ \text{ Q}$$

$$\beta \in]270^\circ, 360^\circ[$$



$$\beta \in 4^\circ \text{ Q}$$

$$\text{sen } \alpha \times \text{cos } \beta > 0$$

$$\text{tg } \alpha \times \text{tg } \beta > 0$$

$$\text{cos } \alpha + \text{sen } \beta < 0$$

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta > 0$$

5. Opção (D)

Como $\alpha \in 3^\circ$ quadrante, então $\text{sen } \alpha < 0$, $\text{cos } \alpha < 0$ e $\text{tg } \alpha > 0$.

Como $\beta \in 1^\circ$ quadrante, então $\text{sen } \beta > 0$, $\text{cos } \beta > 0$ e $\text{tg } \beta > 0$.

Assim:

- $\text{sen } \alpha \times \text{cos } \beta < 0$ e a opção (A) é falsa.
- $\text{cos } \alpha \times \text{tg } \beta < 0$ e a opção (B) é falsa.
- $\text{sen } \beta - \text{sen } \alpha > 0$ e a opção (C) é falsa.
- $\text{sen } \alpha - \text{cos } \beta < 0$ e a opção (D) é verdadeira.

6.

a) $(1 - \text{cos}^2\alpha)(1 + \text{tg}^2\alpha) = (1 - \text{cos}^2\alpha) \times \frac{1}{\text{cos}^2\alpha} =$

$$= \frac{1 - \text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} =$$

$$= \text{tg}^2\alpha$$

b) $\text{tg}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} + \text{sen}^2\alpha =$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha \text{cos}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2\alpha (1 + \text{cos}^2\alpha)}{\text{cos}^2\alpha} =$$

$$= \frac{(1 - \text{cos}^2\alpha)(1 + \text{cos}^2\alpha)}{\text{cos}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \text{cos}^4\alpha}{\text{cos}^2\alpha}$$

c) $\frac{\text{sen } \alpha - 2 \text{sen}^3\alpha}{2 \text{cos}^3\alpha - \text{cos } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha (1 - 2 \text{sen}^2\alpha)}{\text{cos } \alpha (2 \text{cos}^2\alpha - 1)} =$

$$= \text{tg } \alpha \times \frac{1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha - 1} =$$

$$= \text{tg } \alpha \times \frac{\text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} =$$

$$= \text{tg } \alpha$$

7. Opção (C)

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

8. A função definida por $y = \text{cos}(\pi t + \pi)$ tem contradomínio $[-1, 1]$.

A função definida por $y = 2 \text{cos}(\pi t + \pi)$ tem contradomínio $[-2, 2]$.

A função definida por $y = 3 + 2 \text{cos}(\pi t + \pi)$ tem contradomínio $[1, 5]$.

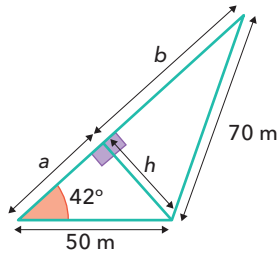
Assim, 5 é o valor máximo e 1 é o valor mínimo da distância do centro da esfera ao tampo da mesa.

9. Opção (A)

Comprimento do arco de circunferência $AP =$

$$= C(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \times \pi = \alpha$$

10.
a)



$$\text{sen } 42^\circ = \frac{h}{70} \Leftrightarrow h = 70 \text{ sen } 42^\circ$$

$$\text{cos } 42^\circ = \frac{a}{70} \Leftrightarrow a = 70 \text{ cos } 42^\circ$$

$$70^2 = b^2 + h^2 \Leftrightarrow 4900 = b^2 + (70 \text{ sen}(42^\circ))^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4900 - 2500 \times \text{sen}^2(42^\circ)$$

$b > 0$

$$\Leftrightarrow b = \sqrt{4900 - 2500 \times \text{sen}^2(42^\circ)}$$

$$\Leftrightarrow b \approx 61,487$$

$$a + b \approx 70 \text{ cos } 42^\circ + 61,487 \approx 98,6 \text{ m}$$

O comprimento do outro cabo é, aproximadamente, 98,6 m.

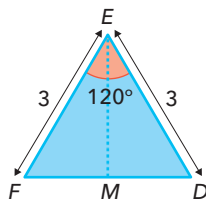
b) O ângulo que o cabo mais curto faz com o solo tem amplitude $180^\circ - 109,448^\circ = 70,552^\circ$, aproximadamente.

Seja h a altura do balão ao solo.

$$\text{sen } 70,552^\circ = \frac{h}{70} \Leftrightarrow h = 70 \text{ sen } 70,552^\circ$$

Logo, $h \approx 66,0$ metros.

11.



$$P_{[BDF]} = 3 \times \overline{FD}$$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ = \widehat{FED}$$

$\overline{FE} = \overline{ED}$, logo o triângulo $[FED]$ é isósceles.

Seja M a projeção ortogonal de E sobre $[FD]$.

$$\overline{FM} = \overline{MD}$$

$$\widehat{FEM} = \widehat{DEM} = 60^\circ$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\overline{FM}}{3} \Leftrightarrow \overline{FM} = 3 \text{ sen } 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{FM} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

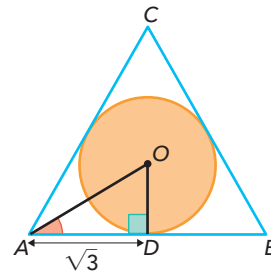
$$\overline{FD} = 2 \times \overline{FM} =$$

$$= 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$P_{[BDF]} = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ u.c.}$$

12.



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 2\sqrt{3}$$

\overline{AO} é uma bissetriz do triângulo $[ABC]$.

$$\text{Logo, } \widehat{BAO} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{OD}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{OD} = \sqrt{3} \times \text{tg } 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD} = 1$$

$$A_{\odot} = \pi \times r^2 = \pi \times 1^2 = \pi \text{ u.a.}$$

13. Opção (A)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha r = \frac{4\pi}{7} \\ \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{8\pi}{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha r = \frac{4\pi}{7} \\ \alpha r^2 = \frac{16\pi}{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha r = \frac{4\pi}{7} \\ \alpha r \times r = \frac{16\pi}{7} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha r = \frac{4\pi}{7} \\ \frac{4\pi}{7} r = \frac{16\pi}{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha r = \frac{4\pi}{7} \\ r = 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\alpha = \frac{4\pi}{7} \\ r = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{7} \\ r = 4 \end{array} \right.$$

14. Opção (C)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{5} \times \overline{DC}$$

$$\overline{BC} = \overline{DP}$$

$$\overline{AP} = \overline{DC}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{DP}^2$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + (\sqrt{5} \times \overline{AP})^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 6\overline{AP}^2$$

$$\overline{AD} = \sqrt{6} \times \overline{AP}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{DP}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{5} \times \overline{AP}}{\sqrt{6} \times \overline{AP}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{DP}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{5} \times \overline{AP}}{\overline{AP}} = \sqrt{5}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AP}}{\sqrt{6} \times \overline{AP}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AP}}{\sqrt{5} \times \overline{AP}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

15. $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AB}$
 $\overline{AB} = 1 - \cos \alpha$
 $\overline{AD} = \sin \alpha$
 $\overline{BC} = \operatorname{tg} \alpha$
 $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pelo que $\cos \alpha > 0$, logo $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Assim:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{2}{3}}{2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{5}}{9} =$$

$$= \frac{9\sqrt{5}}{45} - \frac{5\sqrt{5}}{45} =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{45}$$

16. Opção (A)
 $A(2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha)$
 $2 \cos \alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{5}$
 $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 25$
 $\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 24$

O ponto B tem coordenadas $\left(1, \frac{6}{5}\right)$ e o ângulo de amplitude β tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\hat{O}B$, logo $\operatorname{tg} \beta = \frac{6}{5}$, ou seja, $\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{36}{25}$.

Assim:
 $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = 24 - \frac{36}{25} = \frac{564}{25}$

17. $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(-\alpha) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \times (-\operatorname{sen} \alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$
 $= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{3} - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + (-\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \sqrt{2} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \sqrt{2}$$

Cálculos auxiliares

- $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow (-\sqrt{2})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, pelo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

18. a) $D\hat{A}B = C\hat{D}A$ e $A\hat{B}C = B\hat{C}D$, uma vez que $[ABCD]$ é um trapézio isósceles.

$$D\hat{A}B = \frac{360^\circ - 2x}{2} = 180^\circ - x$$

Seja h a altura do trapézio e seja a tal que $\overline{AD} = \overline{BC} + 2a$.

$$\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen}(180^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\cos(180^\circ - x) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \cos(180^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \cos x$$

Então, a área do trapézio é dada por:

$$\frac{(2 - 4 \cos x) + 2}{2} \times 2 \operatorname{sen} x = \frac{4 - 4 \cos x}{2} \times 2 \operatorname{sen} x =$$

$$= (2 - 2 \cos x) \times 2 \operatorname{sen} x =$$

$$= 4 \operatorname{sen} x - 4 \cos x \operatorname{sen} x$$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$
 $\Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

Como $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Logo, a área do trapézio é:

$$4 \operatorname{sen} x - 4 \cos x \operatorname{sen} x = 4 \times \frac{3}{5} - 4 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{108}{25} \text{ u.a.}$$

19. a) $A(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha) \quad B(1, \operatorname{tg} \alpha) \quad C(0, \operatorname{tg} \alpha) \quad D(0, \operatorname{sen} \alpha)$

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{CB}}{2} \times \overline{DC} =$$

$$= \frac{\cos \alpha + 1}{2} \times (-\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \alpha + 1)(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$$

b) $\cos(-\alpha) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$
 $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{16}{25} = 1$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9}{25}$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{3}{5}$

Como $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$, $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{12}{25} + \frac{3}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{27}{100} =$$

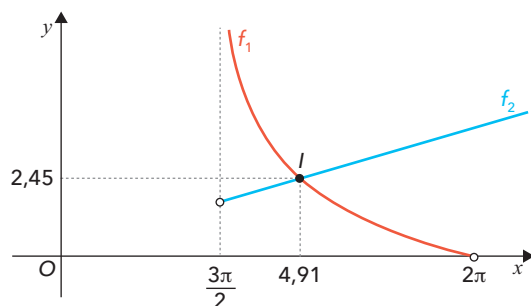
$$= \frac{27}{200} \text{ u.a.}$$

c) $A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$
 $\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{\alpha}{2}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Usando x como variável independente:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{tg} x)$$

$$f_2(x) = \frac{x}{2}$$



$I(4,91; 2,45)$
 Assim, $\alpha \approx 4,91$.

20.
a) $\frac{2\pi}{3}$ é período de f se se verificar $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 4 - 3 \operatorname{sen}\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 4 - 3 \operatorname{sen}\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 4 - 3 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= f(x)$$

Conclui-se, assim, que $\frac{2\pi}{3}$ é período de f .

b) Opção (D)

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 4 - 3 \operatorname{sen}\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{5}\right) + 4 - 3 \operatorname{sen}\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 8 - 3 \operatorname{sen}\left(3x - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - 3 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 8 - 3 \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} + \left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right) - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right) =$$

$$= 8 - 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) - 3 \times \left(-\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right) =$$

$$= 8$$

21.

a) $f(x) = (1 - \cos x \operatorname{sen} x) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right) =$
 $= (1 - \cos x \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x) =$
 $= \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$
 $= \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$
 $= \cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x) =$
 $= \cos x \times \cos^2 x + \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen}^2 x =$
 $= \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$

b) $f(x) = 2 \cos^3 x \Leftrightarrow \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x = 2 \cos^3 x$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = 2 \cos^3 x - \cos^3 x$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \cos^3 x$
 $\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Consideremos a função f , definida em $[0, \pi]$. Como A é um ponto do gráfico de f , as coordenadas de A são da forma $(x, f(x))$, ou seja, $(x, \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x)$, com $x \in [0, \pi]$.

Para que a distância de A à origem seja igual a 2:

$$d(O, A) = \sqrt{(x - 0)^2 + (\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x - 0)^2} = 2$$

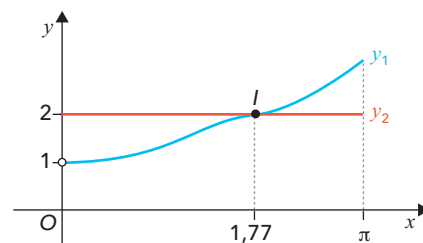
ou seja:

$$\sqrt{x^2 + (\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x)^2} = 2$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

$$y_1 = \sqrt{x^2 + (\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x)^2}$$

$$y_2 = 2$$



Seja I o ponto de interseção.

As coordenadas de I são $(1,77; 2)$.

Cálculo auxiliar

$$f(1,77) = \cos^3(1,77) + \operatorname{sen}^3(1,77) \approx 0,93$$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(1,77; f(1,77))$, ou seja, $(1,77; 0,93)$.

22. Opção (A)

π é período positivo mínimo, pois:

$$f(x + \pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x + \pi) = 6 \cos(2(x + \pi)) - 3 =$$

$$= 6 \cos(2x + 2\pi) - 3 =$$

$$= 6 \cos(2x) - 3 =$$

$$= f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

23. Opção (D)

Para qualquer valor real x , tem-se:

$$-1 \leq \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -a \leq a \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \leq a$$

$$\Leftrightarrow 1 - a \leq 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 + a$$

Como $-2 \leq f(x) \leq 4$, então:

$$\begin{cases} 1 - a = -2 \\ 1 + a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$$

Por outro lado:

$$f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -2 \Leftrightarrow 1 + 3 \sin\left(-\frac{\pi}{12}b - \frac{\pi}{3}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{12}b - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}b - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12}b + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b + 4 = 6 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow b = 2 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $b = 2$.

24. $f(x) = a + b \sin(cx + d)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(cx + d) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -b \leq b \sin(cx + d) \leq b$$

$$\Leftrightarrow a - b \leq a + b \sin(cx + d) \leq a + b$$

Como 3 é máximo absoluto de f e -1 é mínimo absoluto de f , então:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + b \\ -1 + b + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Logo, $f(x) = 1 + 2 \sin(cx + d)$.

Como π é período positivo mínimo de f , então

$$\frac{2\pi}{c} = \pi \Leftrightarrow c = 2.$$

Logo, $f(x) = 1 + 2 \sin(2x + d)$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + d\right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi + d) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee d = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uma possibilidade é $d = -\frac{\pi}{3}$.

25. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -a^2 \leq a^2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + \frac{k}{3} \leq a^2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{k}{3} \leq a^2 + \frac{k}{3}$$

Como $D'_g = [-3, 5]$, então:

$$\begin{cases} -a^2 + \frac{k}{3} = -3 \\ a^2 + \frac{k}{3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 + \frac{k}{3} \\ 3 + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2k = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ k = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então:

$$\begin{cases} a = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

26.

a) 1.º processo

O período da função d é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$.

Como cada minuto corresponde a 60 segundos, e uma oscilação corresponde a 4 segundos, então a bola faz $\frac{60}{4} = 15$ oscilações em cada minuto.

2.º processo

O período da função d é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$, logo, a

frequência é $\frac{1}{4}$, isto é, o número de oscilações que a bola faz em cada segundo.

Assim, num minuto, faz $60 \times \frac{1}{4} = 15$ oscilações.

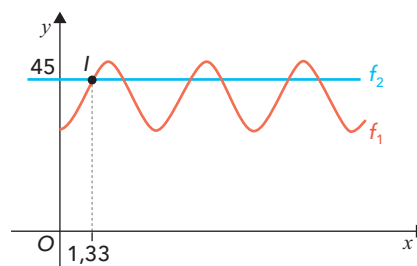
b) Pretendemos, recorrendo à calculadora, determinar a menor solução positiva da equação

$$40 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 45.$$

Usando x como variável independente:

$$f_1(x) = 40 - 10 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \geq 0$$

$$f_2(x) = 45$$



O primeiro instante em que a bola atingiu os 0,45 metros foi aos 1,33 segundos, aproximadamente.

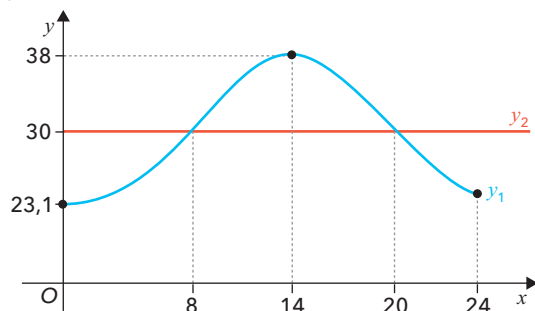
- c) No instante inicial, a bola que se encontrava mais perto do chão era a bola da Anabela, já que $m(0) = 40 - 15 \cos 0 = 25$ cm e $d(0) = 40 - 10 \cos 0 = 30$ cm. Apesar disso, depois de se iniciar o movimento, é a bola da Anabela que atinge uma maior altura, 55 cm, pois $D'_m = [25, 55]$, enquanto que a bola da Alice atinge uma altura máxima de 50 cm, pois $D'_d = [30, 50]$.

Cálculos auxiliares

- $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -10 \leq -10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 10, \forall t \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow 30 \leq 40 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \leq 50, \forall t \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -15 \leq -15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 15, \forall t \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow 25 \leq 40 - 15 \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 55, \forall t \in \mathbb{R}$

Quanto à bola que mais oscilações realizou, conclui-se que foi a bola da Alice, pois esta realizou, como se viu na primeira alínea, 15 oscilações durante o primeiro minuto (já que o período positivo mínimo da função d é 4 s), enquanto que a bola da Anabela realizou quase 4 oscilações completas, pois, como o período positivo mínimo da função m é de 16 s, vem que $\frac{60}{16} = 3,75$ oscilações.

27. $y_1 = 30 + 8 \cos\left(\frac{\pi t + 10\pi}{12}\right)$
 $y_2 = 30$



O primeiro dia de férias começou com uma temperatura de, aproximadamente, 23,1 °C, logo, às 0 h desse dia, tendo aumentado até às 14 h, altura em que atingiu o máximo de 38 °C.

A partir dessa hora, a temperatura começou a diminuir até às 24 h, momento em que atingiu a temperatura com a qual o dia tinha iniciado: aproximadamente, 23,1 °C.

Durante este dia, a temperatura foi superior a 30 °C, das 8 h às 20 h. Assim, o Joaquim tinha razão quando afirmava que durante toda a tarde a temperatura foi superior a 30 °C.

28.

- a) Opção (C)

$$\begin{aligned} \text{raio} &= h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0) = \\ &= 40 + 11 \sin \frac{\pi}{2} - 40 = \\ &= 40 + 11 - 40 = \\ &= 11 \end{aligned}$$

Logo, diâmetro = 22 cm.

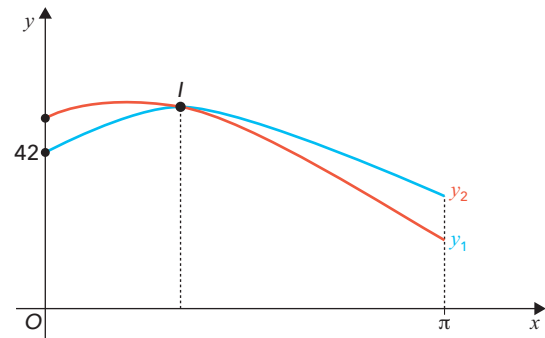
- b) Seja $h(\theta) = 40 + 11 \sin \theta$.

Sabe-se que $h(\theta + 0,5) = h(\theta) + 2$.

Pretende-se, então, determinar o valor de θ tal que $40 + 11 \sin(\theta + 0,5) = 40 + 11 \sin \theta + 2$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

$$\begin{aligned} x &\in [0, \pi] \\ y_1 &= 40 + 11 \sin(x + 0,5) \\ y_2 &= 42 + 11 \sin x \end{aligned}$$



Seja I o ponto de interseção.

As coordenadas de I são $(0,94; 50,91)$.

Assim, $\theta \approx 0,94$.

29.

a)
$$\frac{\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}}{\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}} =$$

$$= \frac{-\sin^2 \alpha \times \sin \alpha}{-\cos^2 \alpha \times \cos \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} = \text{tg}^3 \alpha$$

b)
$$\frac{\cos \alpha - \frac{1}{\sin \alpha}}{\sin \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \alpha - 1}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha}} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha \cos \alpha - 1) \cos \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha - 1) \sin \alpha} = \frac{1}{\text{tg} \alpha}$$

c)
$$\begin{aligned} (1 + \text{tg}^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= \\ = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= \\ = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} &= \\ = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \text{tg}^2 \alpha &= \\ = 1 - \text{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

30.

- a) Opção (D)

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} : \cos \alpha \neq 0 \wedge 1 + \sin \alpha \neq 0\}$$

Cálculos auxiliares

- $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$$D = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Opção (A)

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = \\ & = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} \times \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} = \\ & = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha(1 - \operatorname{sen} \alpha)}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ & = \frac{\cos \alpha(1 + \operatorname{sen} \alpha) + \cos \alpha(1 - \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \\ & = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha + 1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \\ & = \frac{2}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

31. Opção (D)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \text{Para } \alpha \in]-30^\circ, 60^\circ], \frac{1}{2} &\leq \cos \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1 - \sqrt{3}k}{2} \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq 1 - \sqrt{3}k \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -\sqrt{3}k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{3}k \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq k \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3} \leq k \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right]$$

32. Opção (C)

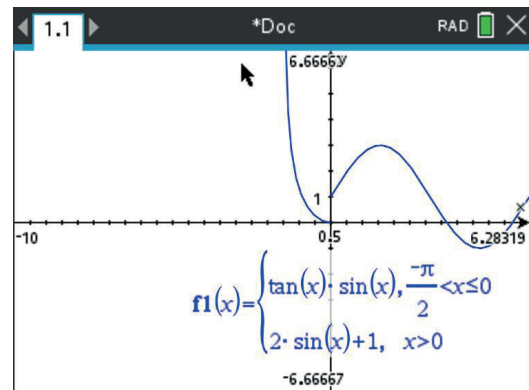
$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \underbrace{1 + \operatorname{tg}^2 x \neq 0}_{\text{Condição universal}} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $g(x) = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \left(1 + 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \right) \times \cos^2 x = \cos^2 x + 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos^2 x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x = \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x = (\cos x + \operatorname{sen} x)^2 = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \quad \text{c.q.d.}$

33.

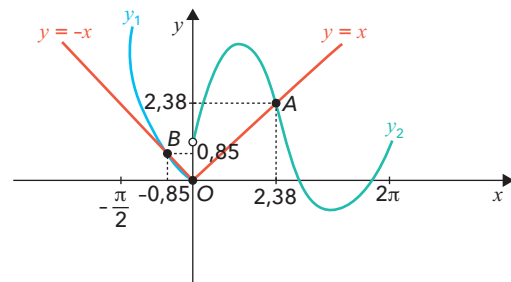
a) Opção (B)

Recorrendo à calculadora gráfica:



b) Colocando na calculadora:

$$\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x, x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right] \\ y_2 &= 2 \operatorname{sen} x + 1, x \in]0, 2\pi] \\ y_3 &= x \\ y_4 &= -x \end{aligned}$$



$$A(2,38; 2,38)$$

$$B(-0,85; 0,85)$$

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(2,38 - (-0,85))^2 + (2,38 - 0,85)^2} = \\ &= \sqrt{12,7738} \approx 3,6 \end{aligned}$$

34.

a) Seja s a área do setor circular representado na figura.

$$\frac{s}{x} = \frac{3^2 \pi}{2\pi} \Leftrightarrow s = \frac{9}{2} x$$

Seja h a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao vértice C e seja $b = \overline{AB}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\frac{b}{2}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{b}{6} \\ &\Leftrightarrow b = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim, a área da região sombreada é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2} x - \frac{6 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = \\ & = \frac{9}{2} x - 9 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

b) Seja c o comprimento do arco AB .

$$\frac{c}{x} = \frac{3 \times 2\pi}{2\pi} \Leftrightarrow c = 3x$$

Da alínea anterior, vem que $\overline{AB} = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Assim, o perímetro da região sombreada é dado por $3x + 6 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

c) Se $x = \frac{\pi}{2}$, então a área da região sombreada é:

$$\begin{aligned} \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} - 9 \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} &= \frac{9\pi}{4} - 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \\ &= \frac{9\pi - 18}{4} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

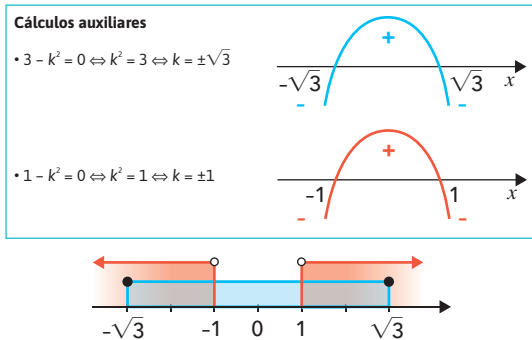
35. Opção (A)

$$k^2 + 2 \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1 - k^2}{2}$$

Como $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $-1 \leq \cos \alpha < 0$.

Assim:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{1 - k^2}{2} < 0 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 - k^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - k^2 \geq -2 \wedge 1 - k^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - k^2 \geq 0 \wedge 1 - k^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} \wedge (k < -1 \vee k > 1) \end{aligned}$$



Logo, $k \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

36.

a) $A(\underbrace{\cos \alpha}_-, \underbrace{\operatorname{sen} \alpha}_+)$ $B(\cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha)$ $D\left(1, \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$D\left(1, -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \quad C\left(1, \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{DC} + \overline{BA}}{2} \times h = \\ &= \frac{-\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} + 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha) = \\ &= \frac{-2 \cos \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \operatorname{sen} \alpha\right) \times (1 - \cos \alpha) = \\ &= \frac{-\cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times (1 - \cos \alpha) = \\ &= \frac{-\cos \alpha + 1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \times (1 - \cos \alpha) = \\ &= \frac{-\cos^2 \alpha - \cos \alpha + 1}{\operatorname{sen} \alpha} \times (1 - \cos \alpha) \quad \text{c.q.d} \end{aligned}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Como $\alpha \in 2^\circ \text{Q}$, então $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo, a área do trapézio é igual a:

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{8}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1}{\frac{1}{3}} \times \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3} + 2\sqrt{2}\right) \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{9} + 2\sqrt{2} + \frac{8}{3} = \\ &= \left(3 + \frac{20\sqrt{2}}{9}\right) \text{ u.a.} \end{aligned}$$

c) $A\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} A(\beta)$, $\frac{4\pi}{5} < \beta < \pi$

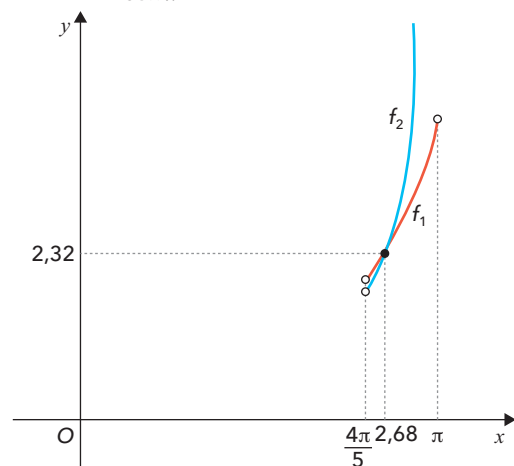
Utilizando a letra x como variável independente:

$$A\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} A(x)$$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{-\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} \times \\ &\quad \times \left(1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \frac{-\cos^2 x - \cos x + 1}{\operatorname{sen} x} (1 - \cos x) \times \frac{1}{2}$$



$\beta \approx 2,68$

37. Seja c o comprimento do arco AB . O perímetro da região sombreada é igual a:

$$\overline{OA} + c + \overline{BC} + \overline{CO}$$

- $2\pi r = 4\pi \Leftrightarrow r = 2$
- $c = (\pi - \alpha) \times 2 = 2\pi - 2\alpha$
Desta forma, $\overline{OA} = 2$ e $\overline{CO} = 2$.
- $\alpha + \frac{\pi}{2}$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta \hat{OC} , logo:

$$C\left(2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \times (-\text{sen } \alpha) = -2 \text{ sen } \alpha$$

$$2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

Assim, as coordenadas do ponto C são $(-2 \text{ sen } \alpha, 2 \cos \alpha)$.

- As coordenadas do ponto B são $(-2, 0)$.
- $\overline{BC} = \sqrt{(-2 \text{ sen } \alpha - (-2))^2 + (2 \cos \alpha - 0)^2} =$
 $= \sqrt{(-2 \text{ sen } \alpha + 2)^2 + 4 \cos^2 \alpha} =$
 $= \sqrt{4 \text{ sen}^2 \alpha - 8 \text{ sen } \alpha + 4 + 4 \cos^2 \alpha} =$
 $= \sqrt{4(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 8 \text{ sen } \alpha + 4} =$
 $= \sqrt{4 \times 1 - 8 \text{ sen } \alpha + 4} =$
 $= \sqrt{8 - 8 \text{ sen } \alpha}$

Desta forma:

$$\begin{aligned} \overline{OA} + c + \overline{BC} + \overline{CO} &= 2 + 2\pi - 2\alpha + \sqrt{8 - 8 \text{ sen } \alpha} + 2 = \\ &= 4 + 2\pi - 2\alpha + \sqrt{4(2 - 2 \text{ sen } \alpha)} = \\ &= 4 + 2\pi - 2\alpha + 2\sqrt{2 - 2 \text{ sen } \alpha} \end{aligned}$$

Daqui se conclui que:

$$\begin{aligned} \frac{P(\alpha)}{2} &= \frac{4 + 2\pi - 2\alpha + 2\sqrt{2 - 2 \text{ sen } \alpha}}{2} = \\ &= 2 + \pi - \alpha + \sqrt{2 - 2 \text{ sen } \alpha} \end{aligned}$$

38. O argumento da função seno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π .

$$-1 \leq \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -b \leq b \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq b$$

$$\Leftrightarrow -3 - b \leq -3 + b \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -3 + b$$

$$\Leftrightarrow a - 3 - b \leq a - 3 + b \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq a - 3 + b$$

Como $D'_f = [-4, 2]$, então:

$$\begin{cases} a - 3 - b = -4 \\ a - 3 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ b - 1 + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ 2b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 1 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

39. Opção (D)

$$\begin{aligned} \text{I. } D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x - 1 \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \cos^2 x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } f(x + \pi) &= \frac{\text{tg}(x + \pi)}{\cos^2(x + \pi) - 1} = \\ &= \frac{\text{tg } x}{\cos^2 x - 1} = \\ &= f(x), \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Daqui se conclui que π é período da função f , pelo que apenas a afirmação II é verdadeira.

- 40.

- a) Opção (A)

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -2 \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1 = \\ &= -2 \cos(2x + \pi) + 1 = \\ &= 2 \cos(2x) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= 2 \cos\left(-\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \\ &= 2 \cos\left(-x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \\ &= 2 \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \\ &= 2 \text{ sen } x + 1 \end{aligned}$$

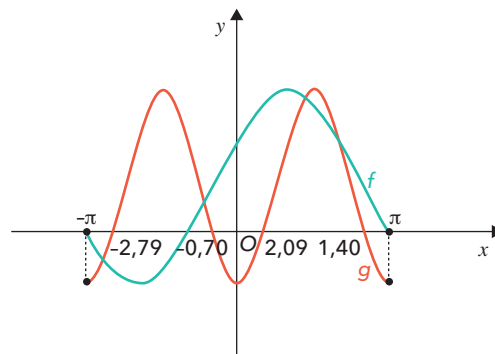
$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= 2 \cos(2x) + 1 - (2 \text{ sen } x + 1) = \\ &= 2 \cos(2x) + 1 - 2 \text{ sen } x - 1 = \\ &= 2 \cos(2x) - 2 \text{ sen } x \end{aligned}$$

- b) $f(x) = g(x)$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$$f(x) = 2 \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$g(x) = -2 \cos(2x) + 1$$



As abscissas, com aproximação às centésimas, dos pontos de interseção dos dois gráficos são:
 $-2,79; -0,70; 2,09; 1,40$

c) $f(x) = g(x) + 2$

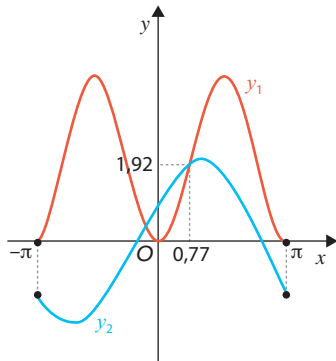
$$2 \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = -2 \cos(2x) + 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cos(2x) + 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$$y_1 = 2 \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_2 = -2 \cos(2x) + 2$$



Assim, $x \approx 0,8$.

41. A altura da maré, no porto de Leixões, às 0 horas do dia 18 de outubro de 2023 é dada por $h(0)$:

$$h(0) = 8 + 5 \operatorname{sen}(0,2 \times 0 + 1) = 8 + 5 \operatorname{sen} 1$$

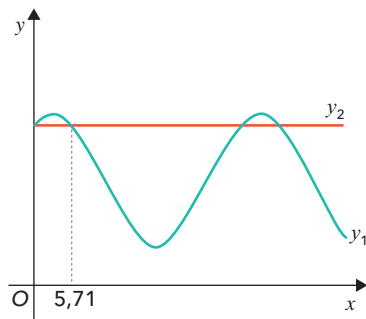
Pretende-se determinar quanto tempo decorreu até ao primeiro instante em que se voltou a registar a mesma altura da maré, nesse porto, de acordo com o modelo apresentado, pelo que a equação que permite determinar esse instante é $h(t) = h(0)$. Utilizando x como variável independente:

$$8 + 5 \operatorname{sen}(0,2x + 1) = 8 + 5 \operatorname{sen} 1$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1 = 8 + 5 \operatorname{sen}(0,2x + 1), 0 \leq x \leq 48$$

$$y_2 = 8 + 5 \operatorname{sen} 1$$



$$0,71 \times 60 \approx 43$$

Decorreram 5 horas e 43 minutos até se voltar a registar a altura da maré registada às 0 horas.

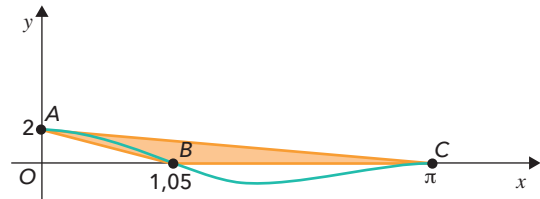
42. **Interseção com o eixo Oy:** $(0, f(0)) = (0, 2)$

$$f(0) = \cos 0 + \cos(2 \times 0) = 1 + 1 = 2$$

$$A(0, 2)$$

Interseção com o eixo Ox

Pretendemos resolver, recorrendo à calculadora, a equação $f(x) = 0$, em $[0, \pi]$.



$$\begin{aligned} A_{|ABC|} &= \frac{\overline{BC} \times \text{ordenada de } A}{2} = \\ &= \frac{(3,14 - 1,05) \times 2}{2} = \\ &= 2,1 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

43.

a) Opção (D)

O período de f é $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

b) Opção (B)

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + a \cos x =$$

$$= -\cos x + a \cos x =$$

$$= (a - 1) \cos x, \text{ com } a > 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -(a - 1) \leq (a - 1) \cos x \leq a - 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$

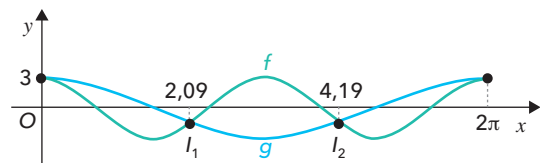
$$\Leftrightarrow -a + 1 \leq g(x) \leq a - 1$$

$$D'_g = [1 - a, a - 1]$$

c) Pretende-se os valores de $x \in]0, 2\pi[$ tais que $f(x) = g(x)$.

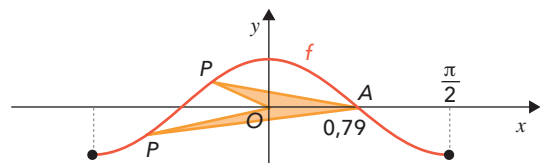
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:
 $f(x) = 3 \cos(2x)$

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + 4 \cos x$$



Obtemos, com aproximação às centésimas, $x \approx 2,09$ e $x \approx 4,19$.

d)



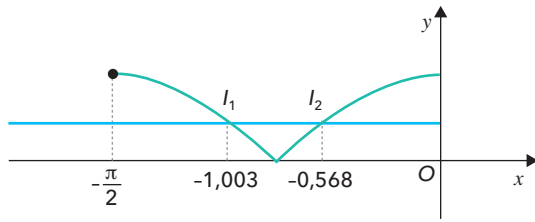
$$P(x, f(x))$$

$$A(0,79; 0)$$

Assim, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determinemos a abcissa de A, com aproximação às centésimas, 0,79.

Pretende-se as coordenadas de um ponto P do gráfico de f cuja abcissa pertença ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

e tal que $\frac{0,79 \times |f(x)|}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{1}{0,79}$.



As abscissas de P, com aproximação às milésimas, são -1,003 e -0,568.

Teste final – páginas 123 a 125

1. Seja C' a projeção ortogonal de C sobre [AB].

$$\cos 45^\circ = \frac{C'B}{2} \Leftrightarrow C'B = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C'B = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{CC'}{2} \Leftrightarrow CC' = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow CC' = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{AC'} &\Leftrightarrow \overline{AC'} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{AC'} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AC'} = \frac{3\sqrt{6}}{3} \\ &\Leftrightarrow \overline{AC'} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC'} + \overline{C'B} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ u.c.}$$

2. Opção (D)

$$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$$

3. $\widehat{ACB} = 90^\circ$, pois o triângulo [ABC] está inscrito na circunferência de diâmetro [AB].

$$\sin \alpha = \frac{CB}{6} \Leftrightarrow CB = 6 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{6} \Leftrightarrow AC = 6 \cos \alpha$$

$$A_{[ABC]} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{6 \cos \alpha \times 6 \sin \alpha}{2} = 18 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$A_{\text{semicircunferência}} = \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 9 = \frac{9}{2} \pi$$

Logo, a área da região a sombreado é igual a $\frac{9}{2} \pi - 18 \sin \alpha \cos \alpha$.

4. Para $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, $0 < \sin x < 1$

$$0 < k^2 + 2k + 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 < 1 \wedge k^2 + 2k + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k < 0 \wedge k^2 + 2k + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < k < 0 \wedge (k > -1 \vee k < -1)$$

$$\Leftrightarrow -2 < k < -1 \vee -1 < k < 0$$

Cálculos auxiliares

- $k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k(k+2) = 0$
 $\Leftrightarrow k = 0 \vee k = -2$
- $k^2 + 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow k = -1$

$$\text{C.S.} =]-2, -1[\cup]-1, 0[$$

5. Opção (D)

$$\alpha \in 3^\circ \text{ Q e } \beta \in 2^\circ \text{ Q}$$

sen $\alpha < 0$ e cos $\beta < 0$, logo, sen $\alpha \times \cos \beta > 0$.

tg $\alpha > 0$ e cos $\beta < 0$, logo, tg $\alpha \times \cos \beta < 0$.

cos $\alpha < 0$ e tg $\beta < 0$, logo, cos $\alpha + \operatorname{tg} \beta < 0$.

sen $\alpha < 0$ e sen $\beta > 0$, logo, sen $\alpha - \operatorname{sen} \beta < 0$.

$$\begin{aligned} 6. \quad \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x &= \\ &= \cos^2 x (\underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_1) + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \end{aligned}$$

$$= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x =$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{c.q.d.}$$

7. Opção (B)

$$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

$$\alpha + \gamma = 2022\pi \Leftrightarrow \gamma = 2022\pi - \alpha$$

$$-\cos \gamma - \operatorname{sen} \beta + \cos \alpha =$$

$$= -\cos(2022\pi - \alpha) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha =$$

$$= -\cos \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha =$$

$$= \cos \alpha$$

$$8. \quad \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \beta = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{9}{20}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \beta = \frac{9}{20} \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow 20 - 20 \cos^2 \beta = 9 \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow 20 \cos^2 \beta + 9 \cos \beta - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 20 \times (-20)}}{40}$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{-9 \pm 41}{40}$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = -\frac{5}{4} \vee \cos \beta = \frac{4}{5}$$

Como $-1 \leq \cos \beta \leq 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, então $\cos \beta = \frac{4}{5}$.

9. Opção (C)

$$A(x) = \cos^2\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}(-2023\pi + x) \times \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) +$$

$$+ \cos^2(2025\pi + x) =$$

$$= (-\operatorname{sen} x)^2 + \operatorname{tg} x \times (-\cos x) + (-\cos x)^2 =$$

$$= \operatorname{sen}^2 x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times (-\cos x) + \cos^2 x =$$

$$= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x =$$

$$= 1 - \operatorname{sen} x$$

10.

- a) Sabemos que $A(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, $B(1, \operatorname{sen} \alpha)$ e $C(1, \operatorname{tg} \alpha)$.
Como A pertence ao 3º quadrante, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha)(-\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{2} = \\ &= \frac{-2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{2} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} \left(-2 + \cos \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} \left(-2 + \cos \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha} \right) = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} \left(-2 + \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

- b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{Como } \alpha \in 3^\circ \text{ Q, } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} \times \left(-2 + \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) &= \\ = -\frac{3}{10} \times \left(-2 - \frac{4}{5} - \frac{5}{4} \right) &= \\ = -\frac{3}{10} \times \left(-\frac{40}{20} - \frac{16}{20} - \frac{25}{20} \right) &= \\ = -\frac{3}{10} \times \left(-\frac{81}{20} \right) &= \\ = \frac{243}{200} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

- c) $\frac{9\pi}{8} < \alpha_1 < \frac{11\pi}{8}$

$$A\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{8}\right) = 3 A(\alpha_1)$$

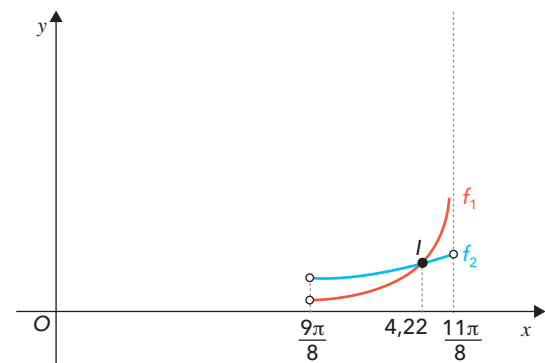
Utilizando x como variável independente:

$$A\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 3 A(x)$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right)}{2} \left(-2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)} \right)$$

$$f_2(x) = \frac{3 \operatorname{sen} x}{2} \left(-2 + \cos x + \frac{1}{\cos x} \right)$$



$I(a, b)$

$$a \approx 4,22$$

$$b \approx 6,07$$