2. Produto escalar

Recorda – páginas 128 e 129

1. As coordenadas dos vetores $\overline{u}$, $\overline{v}$ e $\overline{w}$ são, respetivamente, $\overline{u}(1, 2)$, $\overline{v}(0, -3)$ e $\overline{w}(4, 2)$.

2. As coordenadas do vetor $\overline{u}$ são $\overline{u}(2, 5, 3)$.

3.

a) Por exemplo: (0, 4, –2) e (1, 1, 4)

b) Por exemplo: (1, –3, 6)

4.

a) A equação reduzida da reta que tem a direção do vetor $\overline{u}(5, 10)$ e que passa pelo ponto $A(0, 3)$ é $y = 2x + 3$, sendo $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{5} = 2$ e $b = 3$.

b) A equação reduzida da reta que tem a direção do vetor $\overline{u}(-2, -1)$ e que passa pelo ponto $A(2, 1)$ é $y = \frac{1}{2}x$, sendo $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ e

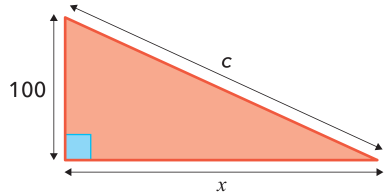
$b = 0 \left(1 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0\right)$.

Capítulo 1 – Declive e inclinação de uma reta

Tarefa – A rampa – página 130

a) Seja m o declive da rampa. Como, para cada 100 cm na horizontal, a rampa sobe 8 cm, tem-se que $m = \frac{8}{100} = 0{,}08$.

b)



Sabendo que a entrada do edíficio está a 1 metro de altura do solo, isto é, a 100 cm, tem-se que:

$\frac{8}{100} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = 1250$

Pelo teorema de Pitágoras, vem, então, que:

$c^2 = 100^2 + 1250^2 \Leftrightarrow c^2 = 1\,572\,500$

Assim, $c = \sqrt{1\,572\,500} \approx 1254$ cm, ou seja, a rampa deve ter, no mínimo, 12,54 metros.

c) Seja α o ângulo que a rampa faz com o solo.

i. Sabe-se que $\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{100} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = 0{,}08$.

Logo, $\alpha = \text{tg}^{-1}(0{,}08) \approx 4{,}57^\circ$.

ii. Como, neste caso, o ângulo tem amplitude, aproximadamente, 4,57° e as normas de acessibilidade geralmente exigem que o ângulo seja inferior a 5°, então podemos concluir que a rampa está dentro do limite permitido.

Exercícios de margem – páginas 132 e 133

1.

a) $y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4 \longrightarrow$ reta horizontal

Logo, a inclinação da reta é 0°.

b) $(x, y) = (1, \pi) + k(-1, 0),\ k \in \mathbb{R} \longrightarrow$ reta horizontal

Logo, a inclinação da reta é 0°.

c) $x = 2 \longrightarrow$ reta vertical

Logo, a inclinação da reta é 90°.

2. A reta r contém os pontos de coordenadas (0, 4) e (–2, 0), logo:

$m_r = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} = 2$

$\text{tg}\,\alpha = 2 \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$, onde α representa a inclinação da reta r.

Então, $\alpha = \text{tg}^{-1}(2) \approx 63{,}4^\circ$.

A reta s contém os pontos de coordenadas (0, 0) e (3, –1), logo:

$m_s = \frac{-1 - 0}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$

$\text{tg}\,\beta = -\frac{1}{3} \wedge 0^\circ < \beta < 180^\circ$, onde β representa a inclinação da reta s.

Então, $\beta = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 161{,}6^\circ$.

3.

a) $m = \text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$

Assim, a equação da reta é do tipo $y = \sqrt{3}x + b$.

Como o ponto de coordenadas (1, 5) pertence à reta:

$5 = \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 5 - \sqrt{3}$

Logo, $y = \sqrt{3}x + 5 - \sqrt{3}$ é a equação da reta pedida.

b) $m = \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$

Assim, a equação da reta é do tipo $y = -x + b$.

Como o ponto de coordenadas (2, 0) pertence à reta:

$0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$

Logo, $y = -x + 2$ é a equação da reta pedida.

4.

a) $\text{tg}\,\alpha = 1 \wedge 0 < \alpha < \pi$

Logo, $\alpha = \text{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) $3x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3y = -3x + 4$

$\Leftrightarrow y = -x + \frac{4}{3}$

$\text{tg}\,\alpha = -1 \wedge 0 < \alpha < \pi$.

Logo, $\alpha = \text{tg}^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

c) $m_t = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$

Logo, $\alpha = \text{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

5. A reta r contém os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, logo:

$m_r = \frac{1-0}{0-\frac{1}{2}} = -2 = \text{tg}\,\alpha \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$, onde α representa a inclinação da reta r.

Então, $\alpha = \text{tg}^{-1}(-2) \approx 116{,}6^\circ$.

Aprende fazendo (1) – página 134

1.

a) $y = 3$ representa uma reta horizontal, logo a sua inclinação é 0 radianos.

b) $x = 4$ representa uma reta vertical, logo a sua inclinação é $\frac{\pi}{2}$ radianos.

c) A reta de equação $y = x + 1$ tem declive 1.
Assim, sendo α a inclinação desta reta:
$\text{tg}\,\alpha = 1 \wedge 0 < \alpha < \pi$
Logo, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ radianos.

d) $2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow 2y = -2x + 7 \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{2}$
A reta de equação $2x + 2y - 7 = 0$ tem declive -1.
Assim, sendo α a inclinação desta reta:
$\text{tg}\,\alpha = -1 \wedge 0 < \alpha < \pi$
Logo, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ radianos.

e) A reta de equação $(x, y) = (1, 2) + k(6, 2\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$ tem declive $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Assim, sendo α a inclinação desta reta:
$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$
Logo, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ radianos.

f) A reta definida por $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + \sqrt{3}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ tem declive $\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$.
Assim, sendo α a inclinação desta reta:
$\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \wedge 0 < \alpha < \pi$
Logo, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ radianos.

2. **Reta *r*:**
$m_r = \text{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
O ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à reta r.
Logo, $r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$.

Reta *s*:
$m_s = \text{tg}\,45^\circ = 1$
O ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à reta s.
Logo, $s: y = x - 2$.

Reta *t*:
$m_t = \text{tg}\,120^\circ = -\sqrt{3}$
O ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à reta t.
Logo, $t: y = -\sqrt{3}x - 2$.

3. **Reta *r*:**
Os pontos de coordenadas $(0, -4)$ e $(5, 0)$ pertencem à reta r. Logo, $m_r = \frac{-4-0}{0-5} = \frac{4}{5}$.
Como o ponto de coordenadas $(0, -4)$ pertence à reta r, $r: y = \frac{4}{5}x - 4$.
Sendo α a inclinação da reta r:
$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{5} \wedge 0^\circ < \alpha < 180^\circ$
Logo, $\alpha \approx 38{,}7^\circ$.

Reta *s*:
Os pontos de coordenadas $(3, 1)$ e $(5, 0)$ pertencem à reta s. Logo, $m_s = \frac{1-0}{3-5} = -\frac{1}{2}$.
Assim, $s: y = -\frac{1}{2}x + b$.
Como o ponto de coordenadas $(5, 0)$ pertence à reta s:
$0 = -\frac{1}{2} \times 5 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$
Então, $s: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
Sendo β a inclinação da reta s:
$\text{tg}\,\beta = -\frac{1}{2} \wedge 0^\circ < \beta < 180^\circ$
Logo, $\beta \approx 153{,}4^\circ$.

4. Opção (D)
Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles e $A\hat{C}B = 120^\circ$, então:
$C\hat{B}A = B\hat{A}C = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$
Seja m o declive da reta BC. Então:
$m = \text{tg}(180^\circ - 30^\circ) = \text{tg}(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
Assim, um vetor diretor da reta BC pode ser o vetor de coordenadas $(-3, \sqrt{3})$ (opção (C)) ou $(3, -\sqrt{3})$ (opção (D)). No entanto, a opção (C) apresenta a equação vetorial de uma reta de ordenada na origem positiva (1), o que dadas as condições do enunciado não é possível.
Observe-se que as opções (A) e (B) estão excluídas, pois, na opção (A), encontra-se uma equação de uma reta de declive $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e, na opção (B), encontra-se uma equação de uma reta de declive $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.

5. Opção (A)
Sabemos que $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{5}$.
Como $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{9}{25} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \frac{34}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{34}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tem-se que:

$$\text{sen}^2\alpha + \frac{25}{34} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{34}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{9}{34}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{34}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$$

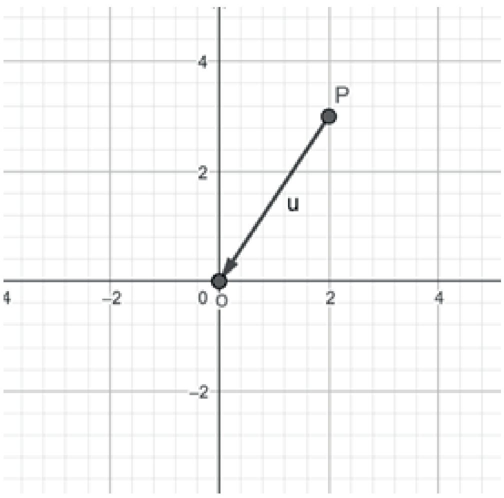
$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{3\sqrt{34}}{34}$$

Conclui-se que $\text{sen}\,\alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, pois, sendo α a inclinação de r, tem-se que $\alpha \in [0, 180^\circ[$, logo $\text{sen}\,\alpha > 0$.

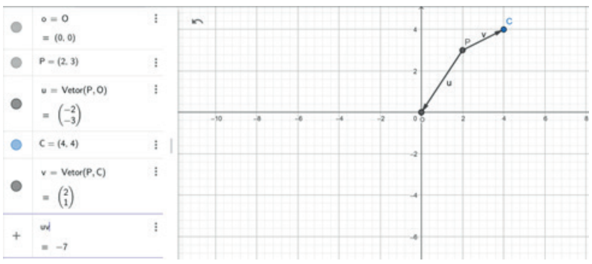
Capítulo 2 – Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço

Tarefa – O jogo – página 135

1. e 2.

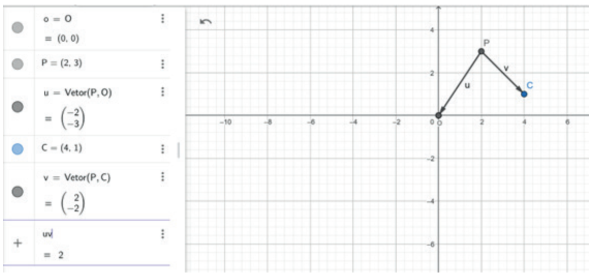


3., 4., 5. e 6. Por exemplo, para o ponto C de coordenadas (4, 4):



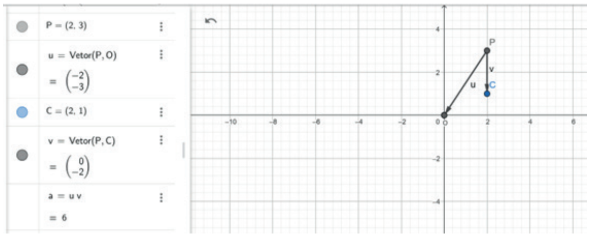
Produto escalar: –7

Por exemplo, para o ponto C de coordenadas (4, 1):



Produto escalar: 2

Por exemplo, para o ponto C de coordenadas (2, 1):



Produto escalar: 6

7.

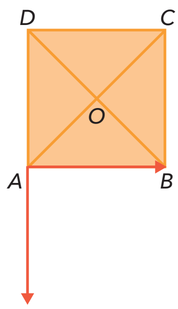
a) Quando o produto escalar é positivo, a personagem parece estar a aproximar-se do objetivo.

b) Um produto escalar negativo parece indicar um afastamento da personagem em relação ao objetivo.

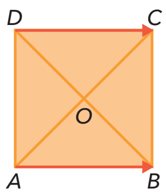
Exercícios de margem – páginas 136 a 142

6.

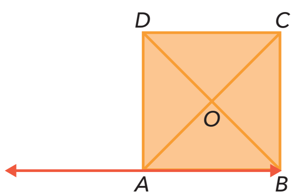
a) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}}) = 90^\circ$



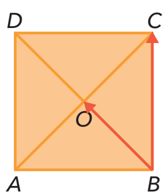
b) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}) = 0^\circ$



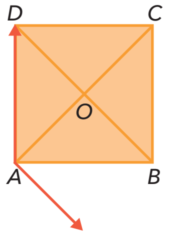
c) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = 180^\circ$



d) $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD}}) = 45^\circ$



e) $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DO}}\right) = 135^\circ$



7.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) =$
$= 2 \times 3 \times \cos 30^\circ =$
$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= 3\sqrt{3}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) =$
$= 4 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} =$
$= 16 \times \frac{1}{2} =$
$= 8$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) =$
$= 2018 \times 2018 \times \cos 90^\circ =$
$= 2018 \times 2018 \times 0 =$
$= 0$

8.

a) Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

b) Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

c) Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

9.

a) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DE}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}}\right) =$
$= 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}}\right) =$
$= 1 \times 2 \times \cos 0^\circ = 2 \times 1 = 2$

c) $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{FA}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AB}}\right) =$
$= 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AF}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}}\right) =$
$= 1 \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos 90^\circ = 1 \times \|\overrightarrow{AC}\| \times 0 = 0$

e) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{EA}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AB}}\right) =$
$= \|\overrightarrow{EA}\| \times 1 \times \cos 90^\circ = \|\overrightarrow{EA}\| \times 1 \times 0 = 0$

10.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = a \times a \times \cos 0^\circ = a^2$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GH} = a \times a \times \cos 180^\circ = -a^2$

c) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{LD} = a \times 2a \times \cos 90^\circ = 0$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JL} = \|\overrightarrow{AC}\|\ \|\overrightarrow{JL}\| \cos 90^\circ = 0$

e) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK} = a \times a\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = a^2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

> **Cálculo auxiliar**
> $\overline{IK}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 2a^2$, pelo que $\overline{IK} = \sqrt{2}a$.

f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = a \times a\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = a^2$

> **Cálculos auxiliares**
> • $\overline{AG}^2 = a^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 3a^2$, pelo que $\overline{AG} = \sqrt{3}a$.
> • $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

g) $\overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{EF} = \sqrt{5}a \times a \times \cos 90^\circ = 0$

h) $\overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LH} = \sqrt{5}a \times a \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2a^2$

> **Cálculos auxiliares**
> • $\overline{LA}^2 = a^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow \overline{LA}^2 = 5a^2$, pelo que $\overline{LA} = \sqrt{5}a$.
> • $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LH}}\right) = \frac{\overline{LD}}{\overline{LA}} = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

11.

a) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 = 8$

b) $(-5\vec{u}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{v}\right) = -\frac{5}{2}\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{5}{2} \times 4 = -10$

c) $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 + (-3) = 1$

12.

a) $(6\vec{u}) \cdot \vec{v} = 6\vec{u} \cdot \vec{v} =$
$= 6 \times 2 \times 2 \times \cos 45^\circ =$
$= \frac{24\sqrt{2}}{2} =$
$= 12\sqrt{2}$

b) $(2017\vec{w}) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{v}\right) = -\frac{2017}{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

c) $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} \cdot \vec{u} =$
$= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} =$
$= 2 \times 2 \times \cos 45^\circ + 0 - 3^2$
$= 2\sqrt{2} - 9$

13.

a) $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{15}{2}}{5 \times \sqrt{3}} =$
$= \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} =$
$= \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\left(\widehat{\vec{u} \cdot \vec{v}}\right) = 30^\circ$.

b) $\cos\left(\widehat{\vec{u} \cdot \vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$

Logo, $\left(\widehat{\vec{u} \cdot \vec{v}}\right) = 120^\circ$.

14.

a) **i.** $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{5}}{3 \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{9}$

Logo, $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \approx 75{,}6^\circ$.

ii. $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{7 \times \frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}$

Logo, $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \approx 115{,}4^\circ$.

b) $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \approx 180^\circ - 115{,}4^\circ \approx 64{,}6^\circ$

15. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=$

$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD}=$

$=0+k\times k\times\cos 180^\circ=$

$=-k^2$

16. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ})=$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BJ}=$

$=0+||\overrightarrow{AB}||\times\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||+\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AB}||+0=$

$=\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||^2+\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||^2=$

$=||\overrightarrow{AB}||^2$

17. $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{DL}=(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CL})=$

$=\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CL}=$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+0+0+\overrightarrow{BC}\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=$

$=\frac{1}{4}||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AB}||\cos 0^\circ+\frac{1}{4}||\overrightarrow{BC}||\times$

$\times||\overrightarrow{CB}||\cos 180^\circ=$

$=\frac{1}{4}||\overrightarrow{AB}||^2-\frac{1}{4}||\overrightarrow{BC}||^2=$

$=\frac{1}{4}||\overrightarrow{AB}||^2-\frac{1}{4}||\overrightarrow{AB}||^2=$

$=0$

Assim, uma vez que os vetores $\overrightarrow{KC}$ e $\overrightarrow{DL}$ são perpendiculares, então as retas KC e DL são perpendiculares.

Aprende fazendo 2 – páginas 143 a 146

1. Opção (C)

$(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{u}=$

$=0-||\vec{u}||^2=$

$=-||\vec{u}||^2$

2. Opção (D)

$||\vec{u}||=\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB}=(3,0,-1)-(2,-4,-4)=(1,4,3)$

$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+4^2+3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{26}$

Logo, $||\vec{u}||\neq\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||$, o que significa que a proposição I é falsa.

$\frac{3}{1}\neq\frac{0}{4}\neq\frac{-1}{3}$, logo $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são colineares e a proposição II é falsa.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times1+0\times4+(-1)\times3=3-3=0$, ou seja, os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são perpendiculares e a proposição III é verdadeira.

3. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=19\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=19$

$\Leftrightarrow||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2=19$

$\Leftrightarrow 10^2-||\vec{v}||^2=19$

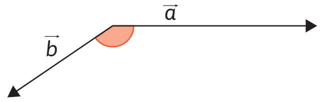
$\Leftrightarrow||\vec{v}||^2=100-19$

$\Leftrightarrow||\vec{v}||^2=81$

Logo, $||\vec{v}||=\sqrt{81}=9$.

4. Opção (A)

Se $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, então o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é um ângulo obtuso, o que apenas acontece na opção (A):



5. Opção (A)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18\Leftrightarrow||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||\times\cos 60^\circ=18$

$\Leftrightarrow x\times x\times\frac{1}{2}=18$

$\Leftrightarrow x^2=36$

Logo, $x=6$, ou seja, a medida do lado do triângulo é 6. Assim, o seu perímetro é $3\times6=18$.

6. Opção (C)

$\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{PO}=||\overrightarrow{RQ}||\times||\overrightarrow{PO}||\times\cos 120^\circ=$

$=a\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=-\frac{a^2}{2}$

7.

a) $\frac{1}{2}(||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2)=$

$=\frac{1}{2}(\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}))=$

$=\frac{1}{2}(\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}))=$

$=\frac{1}{2}(\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}}+\cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}}-\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}})=$

$=\frac{1}{2}(2\vec{u}\cdot\vec{v})=$

$=\vec{u}\cdot\vec{v}$ c.q.d.

b) **i.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(6^2+5^2-4^2)=\frac{45}{2}$

ii. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(6^2+4^2-5^2)=\frac{27}{2}$

iii. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(5^2+4^2-6^2)=\frac{5}{2}$

8.

a) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=||\overrightarrow{DA}||\times||\overrightarrow{DC}||\times\cos\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}=$

$=a\times a\times\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}=||\overrightarrow{AD}||\times||\overrightarrow{DB}||\times\cos\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB})}=$

$=a\times a\times\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$

$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=$

$=0$

Logo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$ são vetores perpendiculares.

9. **A.** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = r \times r \times \cos 72^\circ =$

$= r^2 \cos 72^\circ$

Logo, a afirmação é verdadeira.

> **Cálculo auxiliar**
>
> $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = r \times r \times \cos (2 \times 72^\circ) =$

$= r^2 \cos 144^\circ$

Logo, a afirmação é verdadeira.

C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AE} = r \times \ell \times \cos \frac{108^\circ}{2} =$

$= r\,\ell \cos 54^\circ$

Logo, a afirmação é verdadeira.

> **Cálculo auxiliar**
>
> $\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$

D. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \ell \times \ell \times \cos 108^\circ \neq \ell^2 \cos 216^\circ$

Logo, a afirmação é falsa.

E. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = \ell \times \ell \times \cos \left(\frac{180^\circ - 108^\circ}{2}\right) =$

$= \ell^2 \cos 36^\circ$

Logo, a afirmação é verdadeira.

F. $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \qquad C\hat{D}B = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{DB}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}}) =$

$= \ell \times 2\ell \cos 36^\circ \cos 36^\circ = 2\ell^2 \cos 36^\circ \cos 36^\circ$

Logo, a afirmação é falsa.

> **Cálculo auxiliar**
>
> O triângulo [*BCD*] é isósceles. Seja *M* o ponto médio de [*DB*].
>
> $\cos 36^\circ = \frac{\overline{DM}}{\ell} \Leftrightarrow \overline{DM} = \ell \times \cos 36^\circ$.
>
> Logo, $\overline{DB} = 2\ell \cos 36^\circ$.

G. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \ell \times 2\ell \cos 36^\circ \times \cos(108^\circ - 36^\circ) =$

$= 2\ell^2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

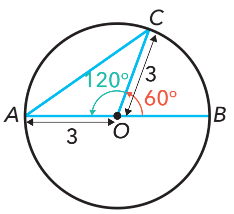
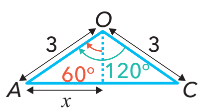
Logo, a afirmação é verdadeira.

10. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 3\sqrt{3} \times \cos \frac{60^\circ}{2} =$

$= 18\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 9 \times 3 =$

$= 27$

> **Cálculo auxiliar**
>
> 
>
>
> 
>
>
> $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
>
> Logo, $\overline{AC} = 2x = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

11. Opção (D)

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} =$

$= \ell \times \ell \times \cos 120^\circ + \ell \times \ell \times \cos 60^\circ =$

$= -\frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{2} =$

$= 0$

12. Opção (A)

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2} =$

$= \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} =$

$= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$

$= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2} =$

$= \sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} + 4^2} =$

$= \sqrt{9 + 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$

$= \sqrt{37}$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2} =$

$= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} =$

$= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$

$= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \|\vec{v}\|^2} =$

$= \sqrt{3^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} + 4^2} =$

$= \sqrt{9 - 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$

$= \sqrt{13}$

13. Opção (C)

Seja $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

$\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Assim:

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

14. $\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 =$

$= \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 =$

$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}) =$

$= \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} +$

$+ 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} =$

$= 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{CM} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} =$

$= 2\|\overrightarrow{CM}\|^2 + 2\overrightarrow{CM} \cdot \vec{0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$

$= 2\|\overrightarrow{CM}\|^2 + 0 + 2 \times \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$= 2\|\overrightarrow{CM}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 =$

$= 2\overline{CM}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}$

15. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} =$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DN} =$

$= \|\overrightarrow{AB}\| \times \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cos 90^\circ + \|\overrightarrow{AB}\| \times$

$\times \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cos 0^\circ + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\| \times \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cos 0^\circ +$

$+ \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\| \times \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cos 90^\circ =$

$= 0 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \frac{1}{8}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 0 =$

$= \frac{5}{8}\|\overrightarrow{AB}\|^2$

Capítulo 3 – Expressão do produto escalar nas cocordenadas dos vetores e perpendicularidade de vetores e de retas

Tarefa – Outra expressão para o produto escalar – página 147

a)

$\vec{u}(u_1, u_2)$	$\vec{v}(v_1, v_2)$	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$	$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ (com aproximação às milésimas)	$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ (com aproximação às milésimas)	$u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$
(3, 0)	(1, 4)	3	$\sqrt{17}$	76°	0,242	2,993	$3 \times 1 + 0 \times 4 = 3$
(2, –1)	(3, 4)	$\sqrt{5}$	5	79,7°	0,179	2,001	$2 \times 3 + (-1) \times 4 = 2$
(–2, 4)	(4, 2)	$\sqrt{20}$	$\sqrt{20}$	90°	0	0	$(-2) \times 4 + 4 \times 2 = 0$
(2, 4)	(–1, –4)	$\sqrt{20}$	$\sqrt{17}$	167,5°	–0,976	–17,997	$2 \times (-1) + 4 \times (-4) = -18$
(3, –2)	(–4, 5)	$\sqrt{13}$	$\sqrt{41}$	162,3°	–0,953	–22,002	$3 \times (-4) + (-2) \times 5 = -22$

b) Os valores obtidos nas duas últimas colunas são muito aproximados; aliás, se a aproximação pedida fosse às unidades, os valores obtidos seriam iguais, o que leva a concluir que são ambas formas de calcular o produto escalar. Observe-se que os valores que dizem respeito às colunas da amplitude do ângulo e do respetivo cosseno foram determinadas com aproximações, o que naturalmente conduz a um resultado do produto escalar (valores da coluna $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$) também eles aproximados.

Exercícios de margem – páginas 148 a 156

18.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} + 7 \times 0 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-6) + 1 \times 3 = -12 + 3 = -9$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-10) + (-2) \times (-15) = -30 + 30 = 0$

19.

a) Uma vez que $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo.

b) Uma vez que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso.

c) Uma vez que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto.

20.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \wedge \frac{3}{2} \neq \frac{k}{-4} \Leftrightarrow 2 \times 3 + (-4) \times k < 0 \wedge 2k \neq -12$

$\Leftrightarrow 6 - 4k < 0 \wedge k \neq -6$

$\Leftrightarrow 4k > 6 \wedge k \neq -6$

$\Leftrightarrow k > \frac{3}{2} \wedge k \neq -6$

Logo, $k \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k - 1) \times 2 + 3 \times k = 0$

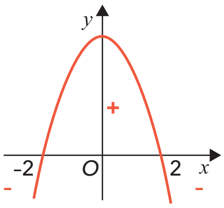
$\Leftrightarrow 2k - 2 + 3k = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \wedge -k^2 \neq 1$

$\Leftrightarrow 2 \times 2 + 1 \times (-k^2) > 0 \wedge \underbrace{k^2 \neq -1}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow 4 - k^2 > 0$



$\Leftrightarrow -2 < k < 2$

Logo, $k \in]-2, 2[$.

21.

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 4) - (1, -2) = (2, 6)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + 6 \times 5 =$

$= -4 + 30 =$

$= 26$

b) $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{BA} - 3\vec{u}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{BA} - 3\vec{u} \cdot \vec{u} =$

$= -\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} - 3\|\vec{u}\|^2 =$

$= -26 - 3 \times \left(\sqrt{29}\right)^2 =$

$= -113$

Cálculo auxiliar

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

22.

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 1 \times 3 = -2 + 3 = 1$

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$

Logo, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 81,9°$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 2 + 7 \times 0 = -8$

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$

$= \frac{-8}{\sqrt{65} \times 2}$

Logo, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 119,7°$

23.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-1) + (-1) \times 4 = -4 - 4 = -8$

Logo, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são perpendiculares.

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \times \sqrt{2} + 3 \times 0 = 0 + 0 = 0$

Logo, os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são perpendiculares.

c) $\vec{e} \cdot \vec{f} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0$

Logo, os vetores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ são perpendiculares.

24.

a) Por exemplo: (–5, 2), (5, –2), (10, –4)

b) Por exemplo: (6, 1), (–6, –1), (12, 2)

c) Por exemplo: (0, –4), (0, 1), (0, 2)

25. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-1, 2) \cdot (x, y) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x = 2y$

$\|\vec{v}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(2y)^2 + y^2} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}y = 2$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Assim, o vetor pedido é $\vec{v}\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

26.

a) A equação da reta pretendida é da forma $y = -\dfrac{3}{2}x + b$.

Como o ponto A pertence a esta reta:

$5 = -\dfrac{3}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \dfrac{19}{2}$

Logo, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{19}{2}$ é a equação pedida.

b) $x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$

A equação da reta pretendida é da forma $y = -x + b$.

Como o ponto A pertence a esta reta:

$5 = -3 + b \Leftrightarrow b = 8$

Logo, $y = -x + 8$ é a equação pedida.

c) A reta definida por $(x, y) = (1, 10) + k(-2, 6)$, $k \in \mathbb{R}$ tem declive $\dfrac{6}{-2} = -3$.

A equação da reta pretendida é da forma $y = \dfrac{1}{3}x + b$.

Como o ponto A pertence a esta reta:

$5 = \dfrac{1}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 4$

Logo, $y = \dfrac{1}{3}x + 4$ é a equação pedida.

d) A reta de equação $x = 1$ é uma reta vertical, pelo que uma reta que lhe seja perpendicular é da forma $y = b$. Como o ponto A pertence a essa reta, então $y = 5$ é a equação da reta pedida.

e) A reta de equação $y = 0$ é uma reta horizontal, pelo que uma reta que lhe seja perpendicular é da forma $x = a$. Como o ponto A pertence a essa reta, então $x = 3$ é a equação da reta pedida.

27.

a) $A = C + \overrightarrow{BC} = (0, 2) + ((0, 2) - (3, 0)) =$

$= (0, 2) + (-3, 2) = (-3, 4)$

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} = 2(-3, 2) = (-6, 4)$

$m_{AC} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$

Assim, a equação da reta t é da forma $y = \dfrac{3}{2}x + b$.

Como o ponto A pertence a esta reta:

$4 = \dfrac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = \dfrac{17}{2}$

Logo, $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{17}{2}$ é a equação pedida.

b) $m_t = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{2}$

$\alpha \in [0°, 180°]$

Logo, $\alpha \approx 56{,}3°$.

c) A bissetriz dos quadrantes pares tem como vetor diretor, por exemplo, o vetor de coordenadas (1, –1). Um vetor diretor da reta t pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas (2, 3).

$\|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$(1, -1) \cdot (2, 3) = 2 - 3 = -1$

Assim, sendo α o ângulo pedido,

$\cos\alpha = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}}$, pelo que

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 1{,}4$ rad.

28. Opção (D)

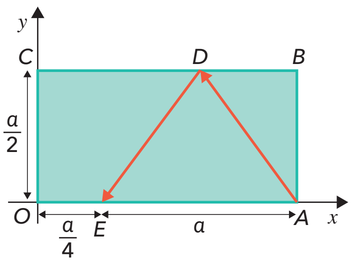
$ax - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = ax - 2$, pelo que o declive desta reta é a.

O declive da reta definida por

$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ é $-\dfrac{3}{2}$.

Logo, $a = \dfrac{2}{3}$.

29.



$A(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}^+$ $\quad C\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$ $\quad E\left(\dfrac{a}{4}, 0\right)$ $\quad B\left(a, \dfrac{a}{2}\right)$

Pretende-se calcular $A_{[OABC]}$.

$A_{[OABC]} = \overline{OA} \times \overline{OC} =$

$= a \times \dfrac{a}{2} =$

$= \dfrac{a^2}{2}$

Cálculo auxiliar

$4\overline{DB} = 3\overline{OC} \Leftrightarrow \overline{DB} = \dfrac{3\overline{OC}}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{a}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \dfrac{3a}{8}$

Assim, $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$.

$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$

$a = \dfrac{3a}{8} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{DC} = a - \dfrac{3a}{8}$

$\Leftrightarrow \overline{DC} = \dfrac{5a}{8}$

Assim, $D\left(\dfrac{5a}{8}, \dfrac{a}{2}\right)$.

Logo, $\overrightarrow{AD} = D - A = \left(\frac{5a}{8}, \frac{a}{2}\right) - (a, 0) = \left(-\frac{3a}{8}, \frac{a}{2}\right)$

e $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\frac{a}{4}, 0\right) - \left(\frac{5a}{8}, \frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{3a}{8}, -\frac{a}{2}\right)$.

Como $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$, vem que:

$\left(-\frac{3a}{8}, \frac{a}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3a}{8}, -\frac{a}{2}\right) = -7$

$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{64} - \frac{a^2}{4} = -7$

$\Leftrightarrow -\frac{7a^2}{64} = -7$

$\Leftrightarrow a^2 = 64$

Assim, $A_{[OABC]} = \frac{a^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$ u.a.

30.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 10 + (-3) \times (-1) + 9 \times (-2) = 5 + 3 - 18 = -10$

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso, já que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 10 + 2 \times 0 + 5 \times (-1) = 5 + 0 - 5 = 0$

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto, já que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3} \times 0 + (-2) \times 0 + 4 \times \sqrt{5} =$

$= 0 + 0 + 4\sqrt{5} =$

$= 4\sqrt{5}$

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, já que $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.

31.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-1) + (-1) \times 3 + 1 \times 7 = -4 - 3 + 7 = 0$

Logo, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares.

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \times \sqrt{2} + 4 \times 0 + 3 \times \frac{1}{2} = 0 + 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Logo, os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ não são perpendiculares.

32.

a) Por exemplo: $(0, -5, -1)$, $(5, 0, 4)$, $(1, -4, 0)$

b) Por exemplo: $(-7, 0, \sqrt{2})$, $(0, -7, 3)$, $(3, -\sqrt{2}, 0)$

33. $(a, b, c) \cdot (0, c, -b) = 0 + bc - bc = 0$, logo os vetores $\vec{u}(a, b, c)$ e $(0, c, -b)$ são perpendiculares.

$(a, b, c) \cdot (c, 0, -a) = ac + 0 - ac = 0$, logo os vetores $\vec{u}(a, b, c)$ e $(c, 0, -a)$ são perpendiculares.

$(a, b, c) \cdot (b, -a, 0) = ab - ab + 0 = 0$, logo os vetores $\vec{u}(a, b, c)$ e $(b, -a, 0)$ são perpendiculares.

34. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1, -3)$.

a) Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(1, -3)$.

Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares.

Consideremos o ponto de coordenadas (1, 1) pertencente à reta r.

Averiguemos se também pertence à reta s:

$1 = -3 \times 1 + 1 \Leftrightarrow 1 = -2 \longrightarrow$ Proposição falsa, logo o ponto não pertence à reta s.

Assim, as retas r e s são estritamente paralelas.

b) Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(1, -3)$.

Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são colineares.

Consideremos o ponto de coordenadas (1, 1) pertencente à reta r.

Averiguemos se também pertence à reta s:

$1 = -3 \times 1 + 4 \Leftrightarrow 1 = 1 \longrightarrow$ Proposição verdadeira, logo o ponto também pertence à reta s.

Assim, as retas r e s são coincidentes.

c) Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(3, 1)$.

Como $\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, -3) \cdot (3, 1) = 3 - 3 = 0$, as retas r e s são concorrentes perpendiculares.

d) Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(-1, -3)$.

Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares.

Então, as retas r e s são concorrentes.

Como $\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, -3) \cdot (-1, -3) = -1 + 9 = 8 \neq 0$, as retas r e s são concorrentes oblíquas.

Aprende fazendo 3 – páginas 157 a 159

1.

a) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{CD} = 8 \times 4 \times \cos 0^\circ = 32$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 \times 4 \times \cos 180^\circ = -16$

c) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \times 8 \times \cos 60^\circ = 32 \times \frac{1}{2} = 16$

d) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

2.

a) $\overrightarrow{AB} = (2, -5) - (0, 3) = (2, -8)$

$(2\overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u} = (4, -16) \cdot (-1, 4) =$

$= -4 - 64 =$

$= -68$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 6\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$= ||\vec{u}||^2 + 0 =$

$= (-1)^2 + 4^2 =$

$= 17$

c) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-2, 8)$

$\left(\vec{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) \cdot (3\vec{u}) = 3\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u} =$

$= 3 \times 0 + (-3, 12) \cdot (-1, 4) =$

$= 3 + 48 =$

$= 51$

3.

a) O declive da reta r é 2.

Um vetor diretor desta reta é $\vec{r}(1, 2)$.

O declive da reta s é -4.

Um vetor diretor desta reta é $\vec{s}(1, -4)$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (1, 2) \cdot (1, -4) = 1 - 8 = -7$

$||\vec{r}|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$||\vec{s}|| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

Seja α o ângulo formado pelas retas r e s.

$\cos \alpha = \frac{|-7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}}$

Logo, $\alpha \approx 40{,}6^\circ$.

b) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-2, 3)$.

$5x + 2y = 7 \Leftrightarrow 2y = -5x + 7$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$

O declive da reta s é $-\frac{5}{2}$.

Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(2, -5)$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2, 3) \cdot (2, -5) = -4 - 15 = -19$

$||\vec{r}|| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$||\vec{s}|| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

Seja α o ângulo formado pelas retas r e s.

$\cos \alpha = \frac{|-19|}{\sqrt{13} \times \sqrt{29}}$

Logo, $\alpha \approx 11{,}9°$.

c) A reta r é uma reta horizontal e a reta s é uma reta vertical, logo o ângulo formado pelas retas r e s é $90°$.

4.

a) O declive da reta definida por $(x, y) = (5, \sqrt{2}) + k(3, -4), k \in \mathbb{R}$ é $-\frac{4}{3}$.

Logo, o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é $\frac{3}{4}$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$2 = \frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}$

A equação pedida é $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

b) $x - 5y = 2 \Leftrightarrow 5y = x - 2$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

O declive da reta definida por $x - 5y = 2$ é $\frac{1}{5}$.

Logo, o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é -5.

Assim, a equação pedida é da forma $y = -5x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$2 = -5 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 7$

A equação pedida é $y = -5x + 7$.

c) O declive da reta é dado por $m = \text{tg } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

A equação pedida é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) O declive da reta é dado por $m = \text{tg } 45° = 1$.

Assim, a equação pedida é da forma $y = x + b$.

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence a esta reta:

$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$

A equação pedida é $y = x + 1$.

5. Opção (B)

O declive da reta r é $-\frac{1}{3}$. Logo, o declive da reta s, que é perpendicular à reta r, é 3.

Assim, a reta r é da forma $y = 3x + b$.

Como o ponto de coordenadas (1, 2) pertence à reta s, tem-se:

$2 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

Logo, s: $y = 3x - 1$.

6. Opção (A)

O declive da reta de equação $y = 2x + 5$ é 2, pelo que o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{1}{2}$. Na opção (A) tem-se:

$y + \frac{1}{2}x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$

7. Opção (D)

A circunferência representada na figura tem centro no ponto de coordenadas (4, 2) e raio 2. Assim, uma equação dessa circunferência é $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$, o que exclui as opções (B) e (C).

As retas p e r, representadas na figura, são perpendiculares, pelo que o produto dos seus declives é igual a -1. Assim, exclui-se a opção (A).

8. Opção (D)

O centro da circunferência é a origem do referencial. Seja T o ponto de tangência.

$\overrightarrow{OT} = (3, 4)$, pelo que o declive da reta OT é igual a $\frac{4}{3}$.

Uma reta que seja tangente à circunferência no ponto T é perpendicular à reta OT e tem declive igual a $-\frac{3}{4}$.

9.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \wedge \frac{k}{2} \neq \frac{3}{k-1}$

$\Leftrightarrow (k, 3) \cdot (2, k - 1) < 0 \wedge k(k - 1) \neq 6 \wedge k - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2k + 3k - 3 < 0 \wedge k^2 - k - 6 \neq 0 \wedge k \neq 1$

$\Leftrightarrow 5k < 3 \wedge k \neq -2 \wedge k \neq 3 \wedge k \neq 1$

$\Leftrightarrow k < \frac{3}{5} \wedge k \neq -2 \wedge k \neq 3 \wedge k \neq 1$

Cálculo auxiliar

$k^2 - k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2 \times 1} \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -2$

Logo, $k \in \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[\setminus \{-2\}$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (2, k - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2k + 3k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5k = 3$

$\Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (k, 3) \cdot (k + 2, k + 2) = 0$

$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 3k + 6 = 0$

$\Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2}$

$\Leftrightarrow k = -2 \vee k = -3$

10. $\begin{cases} (x, y, 1) \cdot (6, 4, 0) = 0 \\ (x, y, 1) \cdot \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

11. Opção (A)

Seja $T(x, y)$ um ponto da reta t.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PT} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$

$\Leftrightarrow ax - a^2 + by - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow by = -ax + a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{b}$

Tendo em conta que a circunferência representada tem centro na origem e raio 1, tem-se que $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$, onde α representa a inclinação da reta OP e, então, $a^2 + b^2 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$.

Assim, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$ é a equação reduzida da reta t.

A ordenada do ponto Q é 0 e o ponto Q pertence à reta t, logo:

$0 = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 0 = -ax + 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$

12. Seja r a reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 6$ e que passa no ponto A.

$r\!: y = -\frac{2}{3}x + b$

Como A pertence a r:

$-5 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$

Então, $r\!: y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$.

Seja B o ponto de interseção da reta r com a reta definida no enunciado.

$\frac{3}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$

$y = \frac{3}{2} \times \frac{14}{13} - 6 = -\frac{57}{13}$

Logo, $B\left(\frac{14}{13}, -\frac{57}{13}\right)$.

A distância do ponto $A(2, -5)$ à reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 6$ é igual a $\overline{AB}$.

$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{14}{13} - 2\right)^2 + \left(-\frac{57}{13} + 5\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{8}{13}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{64}{169}} =$

$= \frac{\sqrt{208}}{13} =$

$= \frac{4\sqrt{13}}{13}$

13. Sejam r, s e t, respetivamente, as retas definidas no enunciado:

$\mathbf{r \cap s}$**:**

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 2x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x - 5 = 6x - 1$

$\Leftrightarrow -4x = 4$

$\Leftrightarrow x = -1$

$y = \frac{2}{3} \times (-1) - \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$ $\qquad A\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$

$\mathbf{r \cap t}$**:**

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow 2x - 5 = -2x + 15$

$\Leftrightarrow 4x = 20$

$\Leftrightarrow x = 5$

$y = \frac{2}{3} \times 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$ $\qquad C\left(5, \frac{5}{3}\right)$

$\mathbf{s \cap t}$**:**

$2x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow 6x - 1 = -2x + 15$

$\Leftrightarrow 8x = 16$

$\Leftrightarrow x = 2$

$y = 2 \times 2 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$ $\qquad C\left(2, \frac{11}{3}\right)$

Pretende-se determinar a área do triângulo [ABC].

$\overline{AB} = \sqrt{(5 + 1)^2 + \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

Seja h a altura do triângulo [ABC] relativa ao vértice C.

h é a distância entre o ponto C e a reta $AB = r$.

Seja u a reta perpendicular a r que passa em C.

$u\!: y = -\frac{3}{2}x + b$

Como C pertence à reta u:

$\frac{11}{3} = -\frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{20}{3}$

Logo, $u\!: y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3}$.

$\mathbf{r \cap u}$**:**

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{25}{3}$

$\Leftrightarrow 13x = 50$

$\Leftrightarrow x = \frac{50}{13}$

$y = \frac{2}{3} \times \frac{50}{13} - \frac{5}{3} = \frac{35}{39}$ $\qquad D\left(\frac{50}{13}, \frac{35}{39}\right)$

$h = \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{50}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{35}{39} - \frac{11}{3}\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2 + \left(-\frac{36}{13}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{576}{169} + \frac{1296}{169}} =$

$= \sqrt{\frac{144}{13}}$

Logo, a área do triângulo [ABC] é dada por:

$\frac{\sqrt{52} \times \sqrt{\frac{144}{13}}}{2} = 12$ u.a.

14. $||\vec{u}|| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) =$

$= a + b + c$

$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{3}$

Logo:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow a + b + c = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow a + b + c = \frac{3}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) =$

$= a + c$

$||\vec{w}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{2}$

Logo:

$\vec{u} \cdot \vec{w} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow a + c = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow a + c = 1$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = \frac{3}{2} \\ a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - c)^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 1 - c + b + c = \frac{3}{2} \\ a = 1 - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2c + c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 - 2c + \frac{1}{4} = 0 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{4} \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, os vetores $\vec{u}$ nas condições do enunciado são:

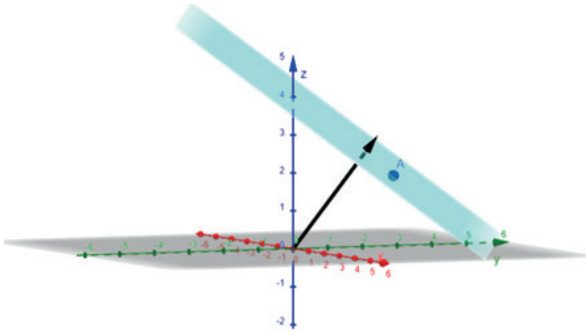
$\vec{u}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ e

$\vec{u}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$.

Capítulo 4 – Equações cartesianas de planos no espaço

Tarefa – Os planos – página 160

a)



p : PlanoPerpendicular(A, v)

= x + 2y + 3z = 12

b)

A	$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$	Equação do plano obtida no Geogebra® na forma $ax + by + cz + d = 0$	Simplificação da expressão $v_1(x - 2) + v_2(y - 2) + v_3(z - 2) = 0$
(2, 2, 2)	(1, –2, –3)	$x - 2y - 3z + 8 = 0$	$x - 2y - 3z + 8 = 0$ (i)
(2, 2, 2)	(0, 4, –5)	$4y - 5z + 2 = 0$	$4y - 5z + 2 = 0$ (ii)
(2, 2, 2)	(2, 0, –1)	$2x - z - 2 = 0$	$2x - z - 2 = 0$ (iii)
(2, 2, 2)	(3, –2, 0)	$3x - 2y - 2 = 0$	$3x - 2y - 2 = 0$ (iv)

Cálculos auxiliares

(i) $1(x - 2) + (-2)(y - 2) + (-3)(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 - 2y + 4 - 3z + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y - 3z + 8 = 0$

(ii) $0(x - 2) + 4(y - 2) + (-5)(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 4y - 8 - 5z + 10 = 0 \Leftrightarrow 4y - 5z + 2 = 0$

(iii) $2(x - 2) + 0(y - 2) + (-1)(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 2 = 0$

(iv) $3(x - 2) + (-2)(y - 2) + 0(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 2 = 0$

c) As equações que constam nas duas últimas colunas são iguais, o que nos leva a concluir que são ambas formas de definir por uma equação um plano, dado um ponto e um vetor perpendicular ao plano.

Exercícios de margem – páginas 162 a 171

35.

a) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\alpha(-2, 1, 3)$ e o ponto $P_1\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)$.

Se, por exemplo, $x = 0$ e $y = 0$, tem-se:

$-2(0 - 1) + \left(0 + \frac{1}{2}\right) - 3(2 - z) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} - 6 + 3z = 0$

$\Leftrightarrow 3z = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{7}{6}$

Obtém-se o ponto $P_2\left(0, 0, \frac{7}{6}\right)$.

b) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\beta\left(-1, 1, \frac{1}{4}\right)$ e o ponto $P_1(-2, 0, 2)$.

Se, por exemplo, $y = 0$ e $z = 0$, tem-se:

$$-(x + 2) + 0 = -\frac{1}{4}(0 - 2) \Leftrightarrow -x - 2 = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Obtém-se o ponto $P_2\left(-\frac{5}{2}, 0, 0\right)$.

c) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\gamma\left(1, 2, \frac{1}{3}\right)$.

Se, por exemplo, $x = 0$ e $y = 0$, tem-se:

$$0 + 0 + \frac{z}{3} = 5 \Leftrightarrow z = 15$$

Obtém-se o ponto $P_1(0, 0, 15)$.

Se, por exemplo, $x = 1$ e $y = 1$, tem-se:

$$1 + 2 + \frac{z}{3} = 5 \Leftrightarrow z = 6$$

Obtém-se o ponto $P_2(1, 1, 6)$.

d) Por observação da condição dada, obtém-se o vetor normal ao plano $\vec{n}_\delta(3, 0, 2)$.

Se, por exemplo, $x = 0$ e $y = 100$, tem-se:

$$0 + 2z = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

Obtém-se o ponto $P_1\left(0, 100, -\frac{1}{2}\right)$.

Se, por exemplo, $z = 0$ e $y = 2017$, tem-se:

$$3x + 0 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Obtém-se o ponto $P_2\left(-\frac{1}{3}, 2017, 0\right)$.

36.

a) $2(x + 1) - 1(y - 1) + 3(z - 2) = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 2 - y + 1 + 3z - 6 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - y + 3z - 3 = 0$, que é a equação pedida.

b) $1(y - 3) + 2(z - 2) = 0$
$\Leftrightarrow y - 3 + 2z - 4 = 0$
$\Leftrightarrow y + 2z - 7 = 0$, que é a equação pedida.

c) $-2(x + 2) + 5(z - 2) = 0$
$\Leftrightarrow -2x - 4 + 5z - 10 = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 5z - 14 = 0$, que é a equação pedida.

d) $-3(x + 1) + 4(y + 1) = 0$
$\Leftrightarrow -3x - 3 + 4y + 4 = 0$
$\Leftrightarrow -3x + 4y + 1 = 0$, que é a equação pedida.

e) $5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 15 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$, que é a equação pedida.

37.

a) Um vetor diretor da reta definida por $x = -4 \wedge y = 5$ é $(0, 0, 1)$, pois a reta é paralela ao eixo Oz. Como a reta é perpendicular ao plano α, então este vetor é normal ao plano α. Assim:

$z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$

Logo, $z = -1$ é uma equação cartesiana do plano α.

b) Um vetor diretor da reta definida por $y = 21 \wedge z = -10$ é $(1, 0, 0)$, pois a reta é paralela ao eixo Ox. Como a reta é perpendicular ao plano α, então este vetor é normal ao plano α. Assim:

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Logo, $x = 1$ é uma equação cartesiana do plano α.

c) Um vetor diretor da reta definida por $x = -1 \wedge z = 0$ é $(0, 1, 0)$, pois a reta é paralela ao eixo Oy. Como a reta é perpendicular ao plano α, então este vetor é normal ao plano α. Assim:

$y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$

Logo, $y = 3$ é uma equação cartesiana do plano α.

38. $\vec{n}_\alpha(2, -1, 1)$ é um vetor normal ao plano α.

a) $\vec{r}(2, -1, 1)$ é um vetor diretor da reta r, logo a reta r é concorrente perpendicular ao plano α.

b) $\vec{r}(1, 2, 0)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (1, 2, 0) \cdot (2, -1, 1) =$
$= 2 - 2 + 0 =$
$= 0$

Averiguemos se o ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$, pertencente à reta r, pertence também ao plano α:

$2 \times 0 - 0 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira, logo o ponto pertence ao plano α.

Assim, a reta r está contida no plano α.

c) $\vec{r}(0, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (0, 1, 1) \cdot (2, -1, 1) =$
$= 0 - 1 + 1 =$
$= 0$

Averiguemos se o ponto de coordenadas $(1, 1, 1)$, pertencente à reta r, pertence também ao plano α:

$2 \times 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \longrightarrow$ Proposição falsa, logo o ponto não pertence ao plano α.

Assim, a reta r é estritamente paralela ao plano α.

d) $\vec{r}(0, 0, 1)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = (0, 0, 1) \cdot (2, -1, 1) = 1 \neq 0$ e $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ não são colineares.

Logo, a reta r é concorrente oblíqua ao plano α.

39. Opção (C)

Um vetor normal ao plano dado é $(1, -2, 0)$.

Um vetor diretor da reta definida na opção (A) é $(3, 2, 1)$. Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção (B) é $(0, 0, 1)$. Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção (C) é $(1, -2, 0)$. Ora, este vetor é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta é perpendicular ao plano dado.

Um vetor diretor da reta definida na opção (D) é $(3, 0, 1)$. Ora, este vetor não é colinear com o vetor normal ao plano, pelo que esta reta não é perpendicular ao plano dado.

40. IJK: $x + y + z = 2$

Uma vez que o centro do cubo é a origem do referencial, e que o ponto K pertence ao plano xOy, então $K(x, x, 0)$, sendo x um número real.

Como K pertence ao plano IJK, então:

$x + x + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Logo, $K(1, 1, 0)$. Conclui-se também que a aresta do cubo é 2 e que $D(1, -1, 1)$.

Assim, o plano paralelo a IJK e que passa em D é da forma $x + y + z = d$.

Como D pertence a esse plano:

$1 - 1 + 1 = d \Leftrightarrow d = 1$

A equação pedida é $x + y + z = 1$.

41. Opção (B)

Um vetor normal ao plano α é $(1, -2, 1)$. Um plano que seja paralelo a α terá como vetor normal um vetor colinear com este, o que apenas acontece na opção (B), em que um vetor normal ao plano indicado é $(-2, 4, -2)$.

42. Para que os dois planos sejam perpendiculares têm de ter vetores normais perpendiculares.

Assim:

$(2, 4, -1) \cdot (2, k - 1, -1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{4}$

43. Qualquer ponto da reta r é da forma $(1 + 2k, -1 - k, k)$, sendo k um número real. Substituindo na equação do plano:

$1 + 2k - 2(-1 - k) = 4 \Leftrightarrow 1 + 2k + 2 + 2k = 4$

$\Leftrightarrow 4k = 1$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1}{4}$

Assim, obtém-se o ponto de coordenadas

$\left(1 + 2 \times \dfrac{1}{4}, -1 - \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, que é o ponto de interseção da reta r com o plano α.

44.

a) Substituindo na equação da reta (x, y, z) pelas coordenadas do ponto A, obtém-se:

$\left(\dfrac{3}{2}, 2, 2\right) = (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = \dfrac{3}{2} \\ 2 = 2 \\ 3 + 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ 2 = 2 \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto A pertence à reta s.

Substituindo na equação da reta (x, y, z) pelas coordenadas do ponto B, obtém-se:

$(-1, 2, -1) = (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = -1 \\ 2 = 2 \\ 3 + 2\lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2 = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Logo, o ponto B não pertence à reta s.

b) Qualquer ponto do plano yOz é da forma $(0, y, z)$, onde y e z representam números reais. Assim:

$(0, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-1, 0, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ 2 = y \\ 3 + 2\lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta s com o plano yOz tem coordenadas $(0, 2, 5)$.

c) Por exemplo:

$r: (x, y, z) = (-1, 2, -1) + k(-2, 0, 4),\ k \in \mathbb{R}$

d) Sabe-se que o vetor de coordenadas $(-1, 0, 2)$ é um vetor diretor da reta s.

Um vetor diretor da reta t terá de ser perpendicular a qualquer vetor diretor da reta s.

Assim, um vetor diretor da reta t pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas $(2, 5, 1)$.

Então, uma equação vetorial da reta t é, por exemplo:

$t: (x, y, z) = \left(\dfrac{3}{2}, 2, 2\right) + k(2, 5, 1),\ k \in \mathbb{R}$

45.

a) $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 1) - (1, 3, 2) = (1, 1, -1)$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, por estar inscrito numa semicircunferência, logo o vetor $\overrightarrow{AB}$ é normal ao plano BCD.

Então, como B pertence ao plano BCD e $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal a este plano, uma equação cartesiana do plano BCD é:

$1(x - 2) + 1(y - 4) - 1(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 + y - 4 - z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0$

b) $\overrightarrow{CD}$ é um vetor normal ao plano ABC e, como tal, é colinear com $(0, 1, 1)$ que é um vetor colinear a este plano.

Assim, $\overrightarrow{CD} = (0, k, k)$, para algum k real.

Como a altura do cilindro é $2\sqrt{2}$, tem-se:

$\|\overrightarrow{CD}\| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{8}$

$\Leftrightarrow 2k^2 = 8$

$\Leftrightarrow k = 2 \lor k = -2$

Logo, $\overrightarrow{CD} = (0, 2, 2)$, de acordo com a figura.

Um ponto da base superior do cilindro é:

$A + \overrightarrow{CD} = (1, 3, 2) + (0, 2, 2) =$

$= (1, 5, 4)$

Como a base superior do cilindro é paralela ao plano BCD, então um vetor normal a este plano é também um vetor normal ao plano que contém essa base.

Assim, $(0, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano que contém a base superior do cilindro.

Tem-se, então, que uma equação da base superior do cilindro é:

$0(x - 1) + 1(y - 5) + 1(z - 4) = 0$

$\Leftrightarrow y - 5 + z - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y + z - 9 = 0$

c) $\begin{cases} y + z = 5 \\ 16x - 5y + 11z = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - z \\ 16x - 5(5 - z) + 11z = 23 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 16x - 25 + 5z + 11z = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 16x + 16z = 48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - z \\ x = 3 - z \end{cases}$

Assim, os pontos que pertencem à interseção dos dois planos são os pontos da forma:

$(3 - z, 5 - z, z), z \in \mathbb{R}$

Mas:

$(3 - z, 5 - z, z) = (3, 5, 0) + z(-1, -1, 1), z \in \mathbb{R}$

Logo, uma equação vetorial da reta de interseção dos dois planos é:

$$(x, y, z) = (3, 5, 0) + k(-1, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

46.

a) $A(0, 0, a)$, com $a \in \mathbb{R}$

$a + 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \qquad A(0, 0, 1)$

$C(c, 0, 0)$, com $c \in \mathbb{R}$

$0 + c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \qquad C(1, 0, 0)$

Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Uma vez que a reta BD é paralela ao eixo Oy e que M é um ponto desta reta, então uma sua equação vetorial é:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas do ponto B são da forma $\left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}\right)$ e as coordenadas do ponto D são da forma $\left(\frac{1}{2}, -y, \frac{1}{2}\right)$, sendo y um número real positivo.

$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0^2 + (-2y)^2 + 0^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4y^2}$

$\Leftrightarrow 4y^2 = 2$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}$

Como $y > 0$, então $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) $E = M = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Como $[ABCDV]$ é uma pirâmide quadrangular regular, a reta EV é perpendicular ao plano ABC.

Assim, qualquer vetor normal ao plano ABC é um vetor diretor de EV.

O vetor de coordenadas $(1, 0, 1)$ é, assim, um vetor diretor da reta EV.

Logo, $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta EV.

c) O vetor $(1, 0, 1)$ é normal ao plano ABC e, consequentemente, é normal a qualquer plano que lhe seja paralelo.

Como o ponto V pertence à reta EV, tem-se que $V(a, 0, a)$, $a \in \mathbb{R}^+$, de acordo com a figura.

$V_{\text{pirâmide}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \overline{EV} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \overline{EV} = 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 18$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 3 \vee a - \frac{1}{2} = -3$

$\Leftrightarrow a = \frac{7}{2} \vee a = -\frac{5}{2}$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então $V\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2}\right)$.

Assim, uma equação do plano paralelo a ABC que contém V é:

$1\left(x - \frac{7}{2}\right) + 0(y - 0) + 1\left(z - \frac{7}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{7}{2} + z - \frac{7}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x + z = 7$

47. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A.

O vetor de coordenadas $(1, -2, 1)$ é um vetor normal ao plano α, logo é um vetor diretor de qualquer reta que lhe seja perpendicular.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α, e que contém o centro da superfície esférica, de coordenadas $(1, 5, 3)$, é:

$$(x, y, z) = (1, 5, 3) + k(1, -2, 1), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta é do tipo

$(1 + k, 5 - 2k, 3 + k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$1 + k - 2(5 - 2k) + (3 + k) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + k - 10 + 4k + 3 + k - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6k = 12$

$\Leftrightarrow k = 2$

Para $k = 2$, obtemos as coordenadas do ponto A:

$(1 + 2, 5 - 2 \times 2, 3 + 2) = (3, 1, 5)$

Logo, 1 é a distância do ponto A ao plano xOz.

48.

a) O ponto R tem cota nula e a abcissa é simétrica da sua ordenada, logo as suas coordenadas são do tipo $(-y, y, 0)$.

Uma vez que R pertence ao plano α, tem-se que:

$2y + 6y + 3 \times 0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 8y = 8 \Leftrightarrow y = 1$

Assim, o ponto R tem coordenadas $(-1, 1, 0)$.

Seja M o ponto médio de $[RC]$.

As coordenadas de M são $\left(\frac{-1+6}{2}, \frac{1+10}{2}, \frac{0+3}{2}\right) =$
$= \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

O vetor $\overrightarrow{RC}$ é um vetor normal ao plano mediador de $[RC]$.

$\overrightarrow{RC} = C - R = (6, 10, 3) - (-1, 1, 0) = (7, 9, 3)$

Assim, o plano mediador de $[RC]$ pode ser definido por:

$$7\left(x - \frac{5}{2}\right) + 9\left(y - \frac{11}{2}\right) + 3\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - \frac{35}{2} + 9y - \frac{99}{2} + 3z - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 9y + 3z - \frac{143}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 14x + 18y + 6z - 143 = 0$$

b) Opção (D)

Uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano α é da forma $-2x + 6y + 3z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$. O ponto de coordenadas $(1, -3, 5)$ pertence ao plano, logo:

$$-2 \times 1 + 6 \times (-3) + 3 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow -2 - 18 + 15 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = 5$$

Assim, uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano α e que passa no ponto de coordenadas $(1, -3, 5)$ é:

$$-2x + 6y + 3z + 5 = 0$$

c) Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A.

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que contém o centro da superfície esférica é $(x, y, z) = (6, 10, 3) + k(-2, 6, 3)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico desta reta é da forma $(6 - 2k, 10 + 6k, 3 + 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta na equação do plano α, obtém-se:

$$-2(6 - 2k) + 6(10 + 6k) + 3(3 + 3k) - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow -12 + 4k + 60 + 36k + 9 + 9k - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow 49k = -49$$
$$\Leftrightarrow k = -1$$

Assim, $A(6 - 2 \times (-1), 10 + 6 \times (-1), 3 + 3 \times (-1))$, ou seja, $A(8, 4, 0)$.

$[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica, logo $B = A + 2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (6, 10, 3) - (8, 4, 0) = (-2, 6, 3)$

Desta forma:

$B = (8, 4, 0) + 2(-2, 6, 3) =$
$= (8, 4, 0) + (-4, 12, 6) =$
$= (4, 16, 6)$

Aprende fazendo 4 – páginas 173 a 175

1.

a) $(0, 2, -1) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - 2t \\ 2 = 2 \\ -1 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1 \\ 2 = 2 \\ 4t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 2 = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto A pertence à reta r.

$(-5, 2, -3) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 1 - 2t \\ 2 = 2 \\ -3 = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6 \\ 2 = 2 \\ 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 2 = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Logo, o ponto B não pertence à reta r.

b) Os pontos do plano definidos por $y = x$ são da forma (x, x, z), sendo x e z números reais.

$(x, x, z) = (1, 2, -3) + t(-2, 0, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ x = 2 \\ z = -3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 - 2t \\ x = 2 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ z = -3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ z = -5 \end{cases}$$

O ponto de interseção da reta r com o plano $y = x$ tem coordenadas $(2, 2, -5)$.

c) **i.** Um vetor diretor da reta s é, por exemplo, $(-1, 0, 2)$, que é colinear com $(-2, 0, 4)$, que é um vetor diretor da reta r. Assim:

$$s: (x, y, z) = (-5, 2, -3) + k(-1, 0, 2),\ k \in \mathbb{R}$$

ii. Um vetor diretor da reta t tem de ser perpendicular ao vetor $(-2, 0, 4)$, podendo ser, por exemplo, $(4, 0, 2)$. Assim:

$$t: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 0, 2),\ k \in \mathbb{R}$$

iii. Um vetor normal ao plano α é $(-1, 2, -1)$, que é um vetor diretor da reta u, perpendicular ao plano α. Assim:

$$u: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$$

iv. Um vetor normal ao plano β é $(1, -1, -2)$. Um vetor diretor da reta v tem de ser perpendicular ao vetor normal ao plano, por exemplo, $(1, 1, 0)$. Assim:

$$v: (x, y, z) = (-5, 2, -3) + k(1, 1, 0),\ k \in \mathbb{R}$$

2.

a) Por exemplo: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(4, 5, 6)$, $k \in \mathbb{R}$

b) Por exemplo: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(4, 5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

c) Por exemplo: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

d) Por exemplo: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

e) Por exemplo: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-3, -1, 7)$, $k \in \mathbb{R}$

3.

a) $4(x - 1) + 5(y - 2) + 6(z - 3) = 0$
$\Leftrightarrow 4x - 4 + 5y - 10 + 6z - 18 = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 5y + 6z - 32 = 0$

b) Um vetor normal ao plano é, por exemplo, $(8, 0, 3)$.
$8(x - 1) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 3z - 9 = 0$
$\Leftrightarrow 8x + 3z = 17$

c) $\sqrt{2}(x - 1) + 1(y - 2) - 1(z - 3) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2} + y - 2 - z + 3 = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + y - z = \sqrt{2} - 1$

d) $0(x - 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow y = 2$

4. Opção (B)

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(2, -1, \frac{1}{8}\right)$.

$$\left(2, -1, \frac{1}{8}\right) \cdot (16, -8, 1) = 2 \times 16 + (-1) \times (-8) + \frac{1}{8} \times 1 = 32 + 8 + \frac{1}{8} = \frac{321}{8}$$

Ou seja, a reta r não é perpendicular à reta definida por $(x, y, z) = k(16 -8, 1), k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{16} = \frac{-1}{-8} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8}$$

Logo, a reta r é paralela à reta definida por:

$$(x, y, z) = k(16 -8, 1), k \in \mathbb{R}$$

5. Opção (D)

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(2, \frac{5}{3}, 0\right)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas (2, 5, 0), logo este não é um vetor diretor da reta r.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(6, 5, 0)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas (6, 5, –4), logo este não é um vetor normal ao plano α.

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 2 \times 6 + \frac{5}{3} \times 5 + 0 \times 0 = \frac{61}{3}$, logo os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são perpendiculares e, portanto, a reta r não é estritamente paralela ao plano α.

Uma vez que $\frac{2}{6} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$, então $\vec{r}$ é colinear a $\vec{n}$, logo a reta r é perpendicular ao plano α.

6. Opção (B)

$$(2, 4, -1) \cdot (2, k-1, -1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

7. Opção (D)

Um vetor normal ao plano dado é $\vec{n}(1, -2, 0)$.

$(1, -2, 0) \cdot (3, 2, 1) = 3 - 4 + 0 = -1$, logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (A).

$(1, -2, 0) \cdot \left(3, \frac{2}{3}, -5\right) = 3 - \frac{4}{3} + 0 = \frac{5}{3}$, logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (B).

$(1, -2, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 - 2 + 0 = -2$, logo o plano não é paralelo à reta definida na opção (C).

$(1, -2, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$, logo o plano é paralelo à reta definida na opção (D).

8.

a) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(2, 4, -1)$.

Ora, $\vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2}$, pelo que a reta não é paralela ao plano α, ou seja, a reta r é concorrente ao plano α.

b) Os pontos da reta r são da forma $\left(1 + \frac{k}{4}, 2 + \frac{k}{2}, 2 + k\right)$, sendo k um número real.

Substituindo na equação do plano:

$$2 \times \left(1 + \frac{k}{4}\right) + 4\left(2 + \frac{k}{2}\right) - (2 + k) = -4$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{k}{2} + 8 + 2k - 2 - k = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k = -12$$

$$\Leftrightarrow k = -8$$

Então, o ponto de interseção da reta r com o plano α tem coordenadas:

$$\left(1 - \frac{8}{4}, 2 - \frac{8}{2}, 2 - 8\right) = (-1, -2, -6)$$

9.

a) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-2, 3, 4)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(0, 4, -3)$.

Ora, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 + 12 - 12 = 0$, pelo que a reta r é estritamente paralela ao plano α ou a reta r é coincidente com o plano α.

Um ponto da reta é o ponto de coordenadas (1, 0, –7). Substituindo estas coordenadas na equação do plano, tem-se:

$4 \times 0 - 3 \times (-7) = 1 \Leftrightarrow 21 = 1$, que é uma proposição falsa.

Logo, a reta r é estritamente paralela ao plano α.

b) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, -3, 1)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(2, -1, -1)$.

Ora, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 4 + 3 - 1 = 6$, pelo que a reta r não é paralela ao plano α, ou seja, a reta r é concorrente ao plano α.

Os pontos da reta r são da forma $(1 + 2k, -2 - 3k, k)$, sendo k um número real.

Substituindo na equação do plano:

$$2 \times (1 + 2k) - (-2 - 3k) - k = 6$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4k + 2 + 3k - k = 6$$

$$\Leftrightarrow 6k = 2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Então, o ponto de interseção da reta r com o plano α tem coordenadas:

$$\left(1 + \frac{2}{3}, -2 - 1, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -3, \frac{1}{3}\right)$$

10. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(-5, p, 0)$.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(1, p, -1)$.

Para que a interseção da reta com o plano seja um conjunto vazio, a reta tem de ser estritamente paralela ao plano, ou seja, estes dois vetores têm de ser perpendiculares.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-5, p, 0) \cdot (1, p, -1) = 0 \Leftrightarrow -5 + p^2 = 0 \Leftrightarrow p = \sqrt{5} \vee p = -\sqrt{5}$$

11. Um vetor normal ao plano de equação $4x - 3y + 12z = 6$ é, por exemplo, $\vec{n}(4, -3, 12)$.

A reta perpendicular ao plano e que contém o ponto A pode ser definida pela equação vetorial:

$$(x, y, z) = (1, 4, 2) + k(4, -3, 12), k \in \mathbb{R}$$

Ponto genérico: $(1 + 4k, 4 - 3k, 2 + 12k), k \in \mathbb{R}$

Substituindo na equação do plano, vem que:

$4(1 + 4k) - 3(4 - 3k) + 12(2 + 12k) = 6$

$\Leftrightarrow 4 + 16k - 12 + 9k + 24 + 144k = 6$

$\Leftrightarrow 169k = -10$

$\Leftrightarrow k = -\frac{10}{169}$

Assim, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(1 + 4 \times \left(-\frac{10}{169}\right), 4 - 3 \times \left(-\frac{10}{169}\right), 2 + 12 \times \left(-\frac{10}{169}\right)\right)$, isto é, $\left(\frac{129}{169}, \frac{706}{169}, \frac{218}{169}\right)$.

A distância entre o ponto A e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{129}{169}\right)^2 + \left(4 - \frac{706}{169}\right)^2 + \left(2 - \frac{218}{169}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{40}{169}\right)^2 + \left(\frac{30}{169}\right)^2 + \left(\frac{120}{169}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16\,900}{169^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{100}{169}} =$$

$$= \frac{10}{13}$$

12. Para se saber a medida do raio da superfície esférica, é necessário determinar a distância entre o seu centro e o plano α.

O plano α é definido por $2x + y + z - 3 = 0$, logo um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{n}(2, 1, 1)$.

A reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto C tem a seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 4) + k(2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, os pontos da reta são da forma:

$(-1 + 2k, k, 4 + k), k \in \mathbb{R}$

Substituindo na equação do plano:

$2(-1 + 2k) + k + 4 + k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -2 + 4k + k + 4 + k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 6k = 1$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(-1 + \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 4 + \frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right)$.

Assim, a distância entre o ponto C e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(4 - \frac{25}{6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Logo, o raio da superfície esférica é $\sqrt{\frac{1}{6}}$ e a sua equação é $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{1}{6}$.

Aprende Fazendo Global – páginas 184 a 194

1. Opção (B)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} =$

$= ||\overrightarrow{DC}|| \times ||\overrightarrow{DB}|| \times \cos(B\hat{D}C) =$

$= a \times a \times \cos 60°$ $\quad$ ($\triangle[BCD]$ é equilátero)

$= a^2 \times \frac{1}{2} =$

$= \frac{a^2}{2}$

2. Opção (A)

$\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

Como $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\, \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$

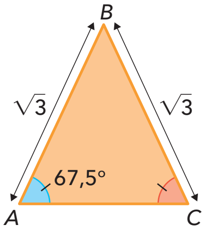
$\Leftrightarrow \text{tg}\, \alpha = \pm \frac{\sqrt{8}}{8}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\, \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\, \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$

Como o declive da reta r é $\text{tg}\, \alpha$, das opções apresentadas, apenas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$ cumpre as condições.

3. Opção (B)



$A\hat{B}C = 180° - 2 \times 67{,}5° = 45°$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot (-\overrightarrow{BC}) =$

$= -||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| \times \cos(A\hat{B}C) =$

$= -\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos 45° =$

$= -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

4.

a) Opção (A)

Sabe-se que a reta t é tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto A, logo as retas t e AB são perpendiculares. Assim, $m_t = -\frac{1}{m_{AB}}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$

$m_{AB} = -\frac{5}{4}$

$m_t = \frac{4}{5}$

Como a reta r é paralela à reta t, então os seus declives são iguais.

A equação reduzida da reta r é, então, da forma $y = \frac{4}{5}x + b$.

Cálculo auxiliar

C é o ponto médio de [AB].

Assim, $C = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Como $C \in r$, vem que:

$$\frac{3}{2} = \frac{4}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow b = \frac{7}{10}$$

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$.

b) Como C é o centro da circunferência e $[AB]$ é o seu diâmetro, então a reta AC é a reta AB. Assim, $m_{AC} = -\frac{4}{5}$ e, como $\text{tg}\,\alpha = m_{AC}$, vem que $\text{tg}\,\alpha = -\frac{5}{4}$.

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1 + \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{41}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{41}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\text{sen}^2\alpha + \frac{16}{41} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{16}{41}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{25}{41}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}} \vee \text{sen}\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

Como α é a inclinação da reta AC, $\alpha \in [0, \pi[$.

Assim, $\text{sen}\,\alpha > 0$.

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

c) $$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}) =$$

$$= r \times r \times \cos(\pi - \beta) =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{41}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{41\sqrt{3}}{8}$$

Cálculos auxiliares

Seja r o raio da circunferência e β a amplitude do ângulo ACD:

- $r = \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+25}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$
- $A_{\text{setor circular}} = \frac{\beta \times \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2}{2} = \frac{41}{8}\beta$

Logo:

$\frac{41\pi}{8} = \frac{41}{8}\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{48}\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

5.

a) $C(2, -1)$

$m = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x + b$

Como o ponto $C(2, -1)$ pertence à reta, vem que:

$-1 = \sqrt{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -1 - 2\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x - 1 - 2\sqrt{3}$

b) $\overrightarrow{OA} = (-2, -4)$ $\quad m_{OA} = \frac{-4}{-2} = 2$

$y = -\frac{1}{2}x + b$

Seja M o ponto médio de $[OA]$: $M(-1, -2)$.

Como o ponto $M(-1, -2)$ pertence à reta, vem que:

$$-2 = -\frac{1}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow -2 - \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow -\frac{5}{2} = b$$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

c) $\overrightarrow{CA} = (-2, -4) - (2, -1) = (-4, -3)$

$m_{CA} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ $\quad m_t = -\frac{4}{3}$

$y = -\frac{4}{3}x + b$

Como o ponto $A(-2, -4)$ pertence à reta, vem que:

$$-4 = -\frac{4}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow -4 = \frac{8}{3} + b$$

$$\Leftrightarrow -\frac{20}{3} = b$$

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$

d) $$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) =$$

$$= 5 \times 5 \times \cos\frac{5\pi}{6} =$$

$$= 25 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Cálculo auxiliar

$\alpha \times r = \frac{25\pi}{6} \Leftrightarrow 5\alpha = \frac{25\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$

e) $O\hat{C}A = (\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}})$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CO}\| \times \|\overrightarrow{CA}\|}$$

$\overrightarrow{CO} = (0, 0) - (2, -1) = (-2, 1)$

$\|\overrightarrow{CO}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{CA} = (-2, -4) - (2, -1) = (-4, -3)$

$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{(-2, 1) \cdot (-4, -3)}{5\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{8 - 3}{5\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, ou seja, $(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CA}}) \approx 63{,}4°$.

6. Opção (B)

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 =$$

$$= 2^2 + 2 \times 1 \times \cos\frac{2\pi}{3} - 2 \times 1^2 =$$

$$= 4 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 =$$

$$= 4 - 1 - 2 =$$

$$= 4 - 3 =$$

$$= 1$$

7. Opção (D)

$\vec{r}(-2, 4)$ $\quad m_r = \frac{4}{-2} = -2$

$s: (6a - 3)x - 3y = 1 \Leftrightarrow -3y = -(6a - 3)x + 1$

$\Leftrightarrow y = (2a - 1)x - \frac{1}{3}$

$m_s = 2a - 1$

r e s são perpendiculares se $m_r \times m_s = -1$:

$-2 \times (2a - 1) = -1 \Leftrightarrow 2a - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2a = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

8. $m_s = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ $\qquad s: y = -\sqrt{3}x + b'$

$m_r = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$B(-2\sqrt{3}, 0)$ pertence à reta r.

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$

Como $B(-2\sqrt{3}, 0)$ pertence à reta r, vem que:

$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2\sqrt{3}) + b \Leftrightarrow b = 2$

$r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

$A(\sqrt{3}, a)$

Como $a \in r$, então:

$a = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + 2 \Leftrightarrow a = 3$

$A(\sqrt{3}, 3)$

Como $A(\sqrt{3}, 3)$ pertence à reta s, então:

$3 = -\sqrt{3} \times \sqrt{3} + b' \Leftrightarrow b' = 6$

Logo, $s: y = -\sqrt{3}x + 6$.

9.

a) Opção (C)

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, pois $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{AD}$ são vetores perpendiculares.

b) Opção (A)

Como o plano é paralelo ao plano ABC, então é definido por uma equação do tipo:

$$6x + 2y - 3z + d = 0$$

Como contém o ponto $F(10, 5, 6)$, então:

$6 \times 10 + 2 \times 5 - 3 \times 6 + d = 0$

$\Leftrightarrow 60 + 10 - 18 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -52$

Logo, o plano é definido pela equação

$6x + 2y - 3z - 52 = 0$, ou seja, $3x + y - \frac{3}{2}z - 26 = 0$.

c) O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[EF]$: $\left(\frac{7+10}{2}, \frac{11+5}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{17}{2}, 8, 5\right)$

$d(E, F) = \sqrt{(10-7)^2 + (5-11)^2 + (6-4)^2} =$

$= \sqrt{9 + 36 + 4} =$

$= 7$

$r = \frac{7}{2}$

A equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[EF]$ é:

$$\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + (y-8)^2 + (z-5)^2 = \frac{49}{4}$$

d) C é o ponto de interseção de reta FC com o plano ABC.

$$FC: (x, y, z) = (10, 5, 6) + k(6, 2, -3), k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas de um ponto genérico da reta FC são do tipo $(10 + 6k, 5 + 2k, 6 - 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

$6(10 + 6k) + 2(5 + 2k) - 3(6 - 3k) - 101 = 0$

$\Leftrightarrow 60 + 36k + 10 + 4k - 18 + 9k - 101 = 0$

$\Leftrightarrow 49k = 49$

$\Leftrightarrow k = 1$

$C(10 + 6, 5 + 2, 6 - 3)$, ou seja, $C(16, 7, 3)$.

10. $P(2, 0\ c)$, com $c \in \mathbb{R}^-$

$B\hat{A}P = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}}) = \frac{\pi}{3}$

$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AP}||}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{20}{\sqrt{20} \times \sqrt{20 + c^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{\sqrt{400 + 20c^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{400 + 20c^2} = 40$

$\Leftrightarrow 400 + 20c^2 = 1600$

$\Leftrightarrow 20c^2 = 1200$

$\Leftrightarrow c^2 = 60$

$\Leftrightarrow c = \pm\sqrt{60}$

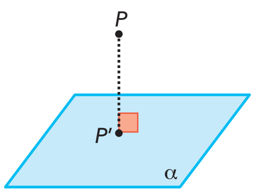
$\Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{15}$

Como $c < 0$, então $c = -2\sqrt{15}$.

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0) - (0, 4, 0) = (2, -4, 0)$
- $\overrightarrow{AP} = (2, 0, c) - (0, 4, 0) = (2, -4, c)$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 4 + 16 = 20$
- $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$
- $||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{4 + 16 + c^2} = \sqrt{20 + c^2}$

11.



$\alpha: 4x - 7y + 5z - 14 = 0$

$P(13, -21, 17)$

Seja P' a projeção ortogonal de P sobre α.

Seja r a reta perpendicular a α que passa em P e que pode ser definida por:

$$(x, y, z) = (13, -21, 17) + k(4, -7, 5), k \in \mathbb{R}$$

$(13 + 4k, -21 - 7k, 17 + 5k)$, $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico de r.

Determinemos P':

$4(13 + 4k) - 7(-21 - 7k) + 5(17 + 5k) - 14 = 0$

$\Leftrightarrow 52 + 16k + 147 + 49k + 85 + 25k - 14 = 0$

$\Leftrightarrow 90k = -270$

$\Leftrightarrow k = -3$

$k = -3 \curvearrowright P'(13 + 4 \times (-3), -21 - 7 \times (-3), 17 + 5 \times (-3))$

$P'(1, 0, 2)$

$d = \sqrt{(13-1)^2 + (-21-0)^2 + (17-2)^2} =$

$= \sqrt{144 + 441 + 225} =$

$= 9\sqrt{10}$

12. Opção (A)

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{1}{3}x + 1$, e α é a sua inclinação, logo sabemos que $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$.

Como $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10}$

$\text{tg}(2022\pi + \alpha) + \cos^2(2021\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha + \cos^2(\pi + \alpha) =$

$= \text{tg}\,\alpha + (-\cos\alpha)^2 =$

$= \text{tg}\,\alpha + \cos^2\alpha =$

$= \frac{1}{3} + \frac{9}{10} =$

$= \frac{37}{30}$

13. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

$C(1, -2)$ $\quad r = 4$ $\quad A\hat{C}B = \alpha$

$\alpha \times r = \frac{10\pi}{3} \Leftrightarrow 4\alpha = \frac{10\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{10\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot (-\overrightarrow{CB}) =$

$= -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= -\|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) =$

$= -4 \times 4 \times \cos\frac{5\pi}{6} =$

$= -16 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= 8\sqrt{3}$

14. Opção (C)

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 10$

$\Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 9$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = 3 \vee \text{tg}\,\alpha = -3$

Como $\cos\alpha < 0$, e α é a inclinação da reta r, então $\alpha \in]90°, 180°[$, logo $\text{tg}\,\alpha < 0$, ou seja, $\text{tg}\,\alpha = -3$.

Assim, $m_r = -3$. Logo, o declive de uma reta perpendicular à reta r terá de ser igual a $\frac{1}{3}$.

15. $x^2 + (y-4)^2 = 16$ representa a circunferência de centro $C(0, 4)$ e raio 4.

a) Seja $P(a, 2)$ tal que $O\hat{C}P = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}}) = \frac{\pi}{3}$.

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{CO} = (0, -4)$
- $\|\overrightarrow{CO}\| = 4$
- $\overrightarrow{CP} = (a, 2) - (0, 4) = (a, -2)$
- $\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{a^2 + 4}$
- $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 + 8 = 8$

$\cos(\widehat{\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CP}}) = \frac{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CP}}{\|\overrightarrow{CO}\| \times \|\overrightarrow{CP}\|}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{8}{4 \times \sqrt{a^2 + 4}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4} = 4$

$\Leftrightarrow a^2 + 4 = 16$, pois os dois membros da equação anterior são não negativos.

$\Leftrightarrow a^2 = 12$

$\Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$

Como P pertence ao 2.º quadrante, então $a = -2\sqrt{3}$.

A abcissa do ponto P é igual a $-2\sqrt{3}$.

b) $A(x_A, 5)$

$(x_A)^2 + (5-4)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_A)^2 = 15 \Leftrightarrow x_A = \pm\sqrt{15}$

Como A pertence ao 1.º Q, então $x_A = \sqrt{15}$.

$\overrightarrow{AC} = (0, 4) - (\sqrt{15}, 5) = (-\sqrt{15}, -1)$

$m_{AC} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

$m_t = -\sqrt{15}$

t: $y = -\sqrt{15}x + b$

Como $A(\sqrt{15}, 5)$ pertence à reta, vem que:

$5 = -\sqrt{15} \times \sqrt{15} + b \Leftrightarrow 5 + 15 = b \Leftrightarrow 20 = b$

t: $y = -\sqrt{15}x + 20$

$B(b', 0)$

$0 = -\sqrt{15}b' + 20 \Leftrightarrow b' = \frac{20}{\sqrt{15}}$

$\Leftrightarrow b' = \frac{20\sqrt{15}}{15}$

$\Leftrightarrow b' = \frac{4\sqrt{15}}{3}$

$B\left(\frac{4\sqrt{15}}{3}, 0\right)$

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{4\sqrt{15}}{3}, 0\right) - (15, 5) = \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, -5\right)$
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\frac{15}{9} + 25} = \sqrt{\frac{80}{3}} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{r \times \|\overrightarrow{AB}\|}{2} =$

$= \frac{4 \times \frac{4\sqrt{15}}{3}}{2} =$

$= \frac{8\sqrt{15}}{3}$ u.a.

16. Seja D o centro da circunferência, $D(0, 1)$.

- $A(x, 0)$, com $x > 0$

$$x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

$A(1, 0)$

- $B(0, y)$, com $y > 0$

$$0^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow y - 1 = \pm\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{2} \ \vee \ y = 1 - \sqrt{2}$$

$B\left(0, 1 + \sqrt{2}\right)$

- $r: y = mx + b$, onde $m = -\dfrac{1}{m_{AD}} = 1$.

Cálculo auxiliar

$A(1, 0)$ $\quad$ $D(0, 1)$

$m_{AD} = \dfrac{1-0}{0-1} = -1$

$y = x + b$

Como $A \in r$, vem que:

$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

$r: y = x - 1$

- $s: y = 1 + \sqrt{2}$

- C é o ponto de interseção das retas r e s:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2} = x - 1 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$C\left(2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$

Assim, a área do trapézio $[OACB]$ é:

$$A_{[OACB]} = \frac{\overline{BC} + \overline{OA}}{2} \times \overline{OB} = \frac{\left(2 + \sqrt{2}\right) + 1}{2} \times \left(1 + \sqrt{2}\right) =$$
$$= \frac{\left(3 + \sqrt{2}\right) \times \left(1 + \sqrt{2}\right)}{2} =$$
$$= \frac{3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2}{2} =$$
$$= \frac{5 + 4\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}\right) \text{ u.a.}$$

17. Seja C o centro da circunferência: $C(-3, 1)$

$$\overrightarrow{CT} = T - C = (-6, -3) - (-3, 1) =$$
$$= (-3, -4)$$

O declive da reta CT é igual a $\dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$.

Como a reta t é perpendicular à reta CT, o declive da reta t é igual a $-\dfrac{1}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{3}{4}$.

A equação reduzida da reta t é do tipo $y = -\dfrac{3}{4}x + b$.

Como $T(-6, -3)$ pertence à reta, vem que:

$$-3 = -\frac{3}{4} \times (-6) + b \Leftrightarrow -3 = \frac{9}{2} + b$$
$$\Leftrightarrow b = -\frac{15}{2}$$

Logo, a equação reduzida da reta t é $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{2}$.

O ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial é a projeção ortogonal de O sobre a reta t. Consideremos a reta perpendicular a t, e que passa em O, definida por $y = \dfrac{4}{3}x$. Determinemos a interseção desta reta com a reta t:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2} = \frac{4}{3}x \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 90 = 16x \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x = 90 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{18}{5}\right) - \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

As coordenadas são $\left(-\dfrac{18}{5}, -\dfrac{24}{5}\right)$.

18.

a) Opção (D)

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$$

Sabemos que $P(a, 3, 1)$, com $a < 0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a+1)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2 = 10$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a + 1 = 3 \ \vee \ a + 1 = -3$

$\Leftrightarrow a = 2 \ \vee \ a = -4$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Seja C o centro da superfície esférica.

$\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α, logo:

$$\overrightarrow{CP} = (-4, 3, 1) - (-1, 2, 1) =$$
$$= (-3, 1, 0)$$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é da forma $-3x + y + d = 0$.

Como P pertence ao plano, vem que

$-3 \times (-4) + 3 + d = 0$ e, portanto, $d = -15$.

Assim, $-3x + y - 15 = 0$ é uma equação do plano pretendido, o que é equivalente a $3x - y + 15 = 0$.

b) $C(-1, 2, 1)$ e $C'(-1, -2, 1)$

Tem-se que $C'\hat{O}C = \left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right)$ e que

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC'}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}.$$

Então:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{(-1, -2, 1) \cdot (-1, 2, 1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{1 - 4 + 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, isto é, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) \approx 109{,}5^\circ$.

19.

a) Opção (D)

Averiguemos qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta BD e que passa no ponto F:

- $(x, y, z) = (10, 5, 6) + k(-4, 0, 1), k \in \mathbb{R}$
  O ponto de coordenadas $(10, 5, 6)$ pertence à reta.
  $(-4, 0, 1) \cdot (-1, 9, 4) = 4 + 4 = 8$, logo a reta definida acima não é perpendicular à reta BD.
- $(x, y, z) = (10, 5, 6) + k(-6, 2, 3), k \in \mathbb{R}$
  O ponto de coordenadas $(10, 5, 6)$ pertence à reta.
  $(-6, 2, 3) \cdot (-1, 9, 4) = 6 + 18 + 12 = 36$, logo a reta definida acima não é perpendicular à reta BD.
- $(x, y, z) = (7, 2, 0) + k(-1, -1, 2), k \in \mathbb{R}$
  $(10, 5, 6) = (7, 2, 0) + k(-1, -1, 2)$
  $\Leftrightarrow (10, 5, 6) = (7 - k, 2 - k, 2k)$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 7 - k \\ 5 = 2 - k \\ 6 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -3 \\ k = 3 \end{cases} \text{ Condição impossível.}$$

  O ponto de coordenadas $(10, 5, 6)$ não pertence à reta.
- $(x, y, z) = (-16, 3, 4) + k(13, 1, 1), k \in \mathbb{R}$
  $(10, 5 ,6) = (-16, 3, 4) + k(13, 1, 1)$
  $\Leftrightarrow (10, 5, 6) = (-16 + 13k, 3 + k, 4 + k)$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = -16 + 13k \\ 5 = 3 + k \\ 6 = 4 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$$

  Logo, o ponto de coordenadas $(10, 5, 6)$ pertence à reta.
  $(13, 1, 1) \cdot (-1, 9, 4) = -13 + 9 + 4 = 0$, logo a reta definida acima é perpendicular à reta BD.

b) O ponto B é a interseção do plano BCF com a reta BD.

Determinemos, então, uma equação do plano BCF.

$\overrightarrow{FE} = E - F = (7, 11, 4) - (10, 5, 6) =$
$= (-3, 6, -2)$

Uma equação do plano BCF é do tipo
$-3x + 6y - 2z + d = 0$.

Como $F(10, 5, 6)$ pertence ao plano:
$-3 \times 10 + 6 \times 5 - 2 \times 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$

BCF: $-3x + 6y - 2z + 12 = 0$

BD: $(x, y, z) = (3, -9, -1) + k(-1, 9, 4), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico da reta BD: $(3 - k, -9 + 9k, -1 + 4k)$, com $k \in \mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta BD na equação do plano BCF:

$-3(3 - k) + 6(-9 + 9k) - 2(-1 + 4k) + 12 = 0$
$\Leftrightarrow -9 + 3k - 54 + 54k + 2 - 8k + 12 = 0$
$\Leftrightarrow 49k = 49$
$\Leftrightarrow k = 1$

$B(3 - 1, -9 + 9, -1 + 4)$
$B(2, 0, 3)$

$\overrightarrow{BE} = E - B = (7, 11, 4) - (2, 0, 3) =$
$= (5, 11, 1)$

c) $O\hat{E}F = \widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}}$

$\overrightarrow{EO} = O - E = (-7, -11, -4)$

$\overrightarrow{EF} = F - E = (3, -6, 2)$

$\|\overrightarrow{EO}\| = \sqrt{49 + 121 + 16} = \sqrt{186}$

$\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}}) = \frac{\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{EF}}{\|\overrightarrow{EO}\| \times \|\overrightarrow{EF}\|}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}}) = \frac{-21 + 66 - 8}{7\sqrt{186}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}}) = \frac{37}{7\sqrt{186}}$$

Logo, $\cos(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}}) = \cos^{-1}\left(\frac{37}{7\sqrt{186}}\right)$, ou seja, $\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EF}} \approx 67^{\circ}$.

20.

a) Opção (C)

Sabemos que $\vec{n}(-2, -3, 6)$ é um vetor normal ao plano da base do cone.

Se a reta é paralela ao plano, qualquer vetor diretor da reta terá de ser perpendicular a qualquer vetor do plano.

Assim:

- $(-2, -3, 6)$ é um vetor diretor da reta definida em (A), o que exclui esta opção;
- $(-2, -3, 6) \cdot (6, 0, -2) = -12 - 12 = -24 \neq 0$, o que exclui a opção (B);
- $(-2, -3, 6) \cdot (3, 2, 2) = -6 - 6 + 12 = 0$
  $(0, 0, 6) = (-6, -4, 2) + k(3, 2, 2)$

  $$\begin{cases} 0 = -6 + 3k \\ 0 = -4 + 2k \\ 6 = 2 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$$

  Assim, (C) é a opção correta.
- $(-2, -3, 6) \cdot (3, 4, 3) = -6 - 12 + 18 = 0$
  $(0, 0, 6) = (-6, -4, 2) + k(3, 4, 3)$

  $$\begin{cases} 0 = -6 + 3k \\ 0 = -4 + 4k \\ 6 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ Condição impossível.}$$

  A reta definida na opção (D) não contém o ponto V, o que exclui essa opção.

b) VA: $(x, y, z) = (0, 0, 6) + k(-2, -3, 6)$, com $k \in \mathbb{R}$

$\underbrace{(-2k, -3k, 6 + 6k)}_{\text{Ponto genérico de } VA}$, com $k \in \mathbb{R}$

$-2(-2k) - 3(-3k) + 6(6 + 6k) + 13 = 0$
$\Leftrightarrow 4k + 9k + 36 + 36k + 13 = 0$
$\Leftrightarrow 49k = -49$
$\Leftrightarrow k = -1$

$A(2, 3, 0)$

$\overrightarrow{AV} = (0, 0, 6) - (2, 3, 0) = (-2, -3, 6)$

$h = \|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

$\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 7 = \frac{28\pi}{3} \Leftrightarrow 7r^2 = 28 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = \pm 2$

Como $r > 0$, então $r = 2$.

21.

a) Opção (A)

O plano DCH é paralelo ao plano ABG, logo é definido por uma equação do tipo:

$$-\frac{3}{2}x - y + z + d = 0$$

Como o vértice $H(3, 8, 15)$ pertence ao plano DCH, então:

$$-\frac{3}{2} \times 3 - 8 + 15 + d = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} - \frac{16}{2} + \frac{30}{2} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{5}{2}$$

Logo, o plano DCH pode ser definido por:

$$-\frac{3}{2}x - y + z - \frac{5}{2} = 0$$

b) $B\hat{A}H = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}})$

As coordenadas do ponto A são do tipo $(a, 0, 0)$, e o ponto A pertence ao plano ABG, logo:

$$-\frac{3}{2}a - 0 + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}a = -6$$

$$\Leftrightarrow a = 4$$

Assim, $A(4, 0, 0)$.

As coordenadas do ponto B são do tipo $(0, b, 0)$, e o ponto B pertence ao plano ABG, logo:

$$-\frac{3}{2} \times 0 - b + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow -b = -6$$

$$\Leftrightarrow b = 6$$

Assim, $B(0, 6, 0)$.

Sabemos que $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}{||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AH}||}$.

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{AB} = (0, 6, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 6, 0)$
- $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$
- $\overrightarrow{AH} = (3, 8, 15) - (4, 0, 0) = (-1, 8, 15)$
- $||\overrightarrow{AH}|| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 15^2} = \sqrt{1 + 64 + 225} = \sqrt{290}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = (-4, 6, 0) \cdot (-1, 8, 15) = 4 + 48 = 52$

Tem-se que:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{52}{\sqrt{52} \times \sqrt{290}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{52}{2\sqrt{3770}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{26}{\sqrt{3770}}$$

Logo, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{26}{\sqrt{3770}}\right)$ e $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) \approx 65°$.

c) Um vetor diretor da reta pretendida é um vetor normal ao plano xOy, por exemplo, o vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$.

Determinemos as coordenadas do ponto G.

G é o ponto de interseção da reta GH com o plano ABG.

Comecemos por definir vetorialmente a reta GH:

$$(x, y, z) = (3, 8, 15) + k(-3, -2, 2),\ k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta GH é do tipo $(3 - 3k, 8 - 2k, 15 + 2k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano ABG, obtemos:

$$-\frac{3}{2}(3 - 3k) - (8 - 2k) + (15 + 2k) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}k - 8 + 2k + 15 + 2k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9 + 9k - 16 + 4k + 30 + 4k + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 17k = -17$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

Para $k = -1$, obtemos o ponto de coordenadas $(3 + 3, 8 + 2, 15 - 2) = (6, 10, 13)$.

Logo, $G(6, 10, 13)$.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano xOy e que contém o ponto G é:

$$(x, y, z) = (6, 10, 13) + k(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$$

d) $B(0, 6, 0)$ e $H(3, 8, 15)$

$P(a^3, 6, a),\ a \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{BH} = H - B = (3, 2, 15)$

$\overrightarrow{HP} = P - H = (a^3 - 3, -2, a - 15)$

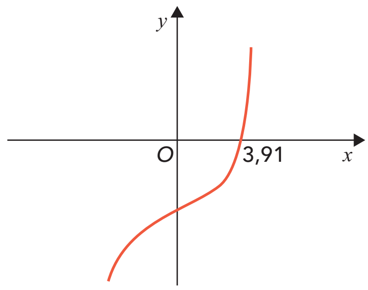
Para que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{HP}$ tem que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HP} = 0$, isto é:

$3(a^3 - 3) + 2 \times (-2) + 15 \times (a - 15) = 0$

$\Leftrightarrow 3a^3 - 9 - 4 + 15a - 225 = 0$

$\Leftrightarrow 3a^3 + 15a - 238 = 0$

Introduzindo na calculadora a função $x \mapsto 3x^3 + 15x - 238 = 0$, pretende-se determinar o seu zero.



Assim, $a \approx 3{,}91$.

Como a abcissa do ponto P é a^3, o valor pretendido é, aproximadamente, 59,78.

22.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 5, 0) - (11, -1, 2) =$

$= (-3, 6, -2)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (13, 2, 8) - (11, -1, 2) =$

$= (2, 3, 6)$

$\dfrac{-3}{2} \neq \dfrac{6}{3}$, logo os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$ não são colineares e, por conseguinte, os pontos A, B e E também não são colineares.

Basta, então, provar que o plano definido pela equação $6x + 2y - 3z - 58 = 0$ contém os pontos A, B e E:

- $A(11, -1, 2)$

  $6 \times 11 + 2 \times (-1) - 3 \times 2 - 58 = 0$

  $\Leftrightarrow 66 - 2 - 6 - 58 = 0$

  $\Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira

  O ponto A pertence ao plano definido por $6x + 2y - 3z - 58 = 0$.

- $B(8, 5, 0)$

  $6 \times 8 + 2 \times 5 - 3 \times 0 - 58 = 0 \Leftrightarrow 48 + 10 - 58 = 0$

  $\Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira

  O ponto B pertence ao plano definido por $6x + 2y - 3z - 58 = 0$.
- $E(13, 2, 8)$

  $6 \times 13 + 2 \times 2 - 3 \times 8 - 58 = 0 \Leftrightarrow 78 + 4 - 24 - 58 = 0$

  $\Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira

  O ponto E pertence ao plano definido por $6x + 2y - 3z - 58 = 0$.

  Mostramos assim que o plano ABE pode ser definido pela equação $6x + 2y - 3z - 58 = 0$.

b) $C = D + \overrightarrow{AB} = (5, -3, 5) + (-3, 6, -2) = (2, 3, 3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (11, -1, 2) = (-9, 4, 1)$

Uma equação vetorial da reta AC pode, então, ser $(x, y, z) = (2, 3, 3) + k(-9, 4, 1),\ k \in \mathbb{R}$.

c) Opção (C)

Pretende-se uma condição que defina a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo, logo o seu centro é equidistante de quaisquer destes vértices, em particular, dos vértices C e E.

O centro é o ponto médio de $[CE]$:

$C = (2, 3, 3)$ e $E = (13, 2, 8)$

$$\text{Centro} = \left(\frac{2+13}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

Como $[CE]$ é um diâmetro da superfície esférica:

$$\text{raio} = \frac{d(C, E)}{2} = \frac{\sqrt{(13-2)^2 + (2-3)^2 + (8-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{121+1+25}}{2} = \frac{\sqrt{147}}{2}$$

Portanto, a condição pedida é

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{147}}{2}\right)^2, \text{ ou seja,}$$

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}.$$

d) $\overrightarrow{OE} = E - O = (13, 2, 8) - (0, 0, 0) = (13, 2, 8)$

O plano α é perpendicular à reta OE, logo é definido por uma equação do tipo $13x + 2y + 8z + d = 0$.

Como a origem O pertence ao plano α, então $d = 0$.

Logo, o plano α pode ser definido por $13x + 2y + 8z = 0$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (2, 3, 6)$

Equação vetorial da reta BF:

$(x, y, z) = (8, 5, 0) + k(2, 3, 6),\ k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta BE é do tipo $(8 + 2k, 5 + 3k, 6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$13(8 + 2k) + 2(5 + 3k) + 8(6k) = 0$

$\Leftrightarrow 104 + 26k + 10 + 6k + 48k = 0$

$\Leftrightarrow 80k = -114$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{114}{80}$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{57}{40}$

Para $k = -\dfrac{57}{40}$, obtemos o ponto P de coordenadas:

$$\left(8 + 2 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 5 + 3 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 6 \times \left(-\frac{57}{40}\right)\right) = \left(\frac{103}{20}, \frac{29}{40}, -\frac{171}{20}\right)$$

Logo, a distância do ponto P ao plano xOy é o valor absoluto da cota de P, isto é, $\dfrac{171}{20}$, ou seja, 8,55.

23.

a) Opção (D)

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 10$$

Assim, C é o centro da superfície esférica e tem coordenadas $(-1, 2, 1)$.

Para a reta ser perpendicular ao plano xOy, o seu vetor diretor tem de ser colinear com o vetor $(0, 0, 1)$. Assim, as opções (A) e (B) não podem ser uma equação da reta pretendida.

Vejamos a qual das retas representadas, nas opções (C) e (D), o ponto $C(-1, 2, 1)$ pertence:

$(x, y, z) = (1, -2, -1) + k(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (1, -2, -1) + k(0, 0, 1),\ k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (1, -2, -1 + k) \longrightarrow$ não existe nenhum valor real de k nestas condições.

$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1),\ k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1),\ k \in \mathbb{R}$

$(-1, 2, 1) = (-1, 2, 3 - k)$, que é uma proposição verdadeira, para $k = 2$.

Logo, a reta de equação $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$ contém o ponto $C(-1, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano xOy.

b) Sabemos que $P(a, 3, 1)$, com $a < 0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a + 1)^2 + (3 - 2)^2 + (1 - 1)^2 = 10$

$\Leftrightarrow (a + 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a + 1 = 3 \ \lor\ a + 1 = -3$

$\Leftrightarrow a = 2 \ \lor\ a = -4$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Como C é o centro da superfície esférica, $\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α:

$\overrightarrow{CP} = (-4, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (-3, 1, 0)$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é $-3(x + 4) + (y - 3) = 0$, que é equivalente a $-3x + y - 15 = 0$.

c) $C(-1, 2, 1)$ e $A(-1, -2, 1)$

Tem-se que $A\hat{O}C = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$ e que

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}. \text{ Então:}$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{(-1, -2, 1) \cdot (-1, 2, 1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{1 - 4 + 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = -\frac{1}{3}$$

Logo, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, isto é, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \approx 109{,}5^\circ$.

24.

a) Opção (D)

Sendo a esfera tangente ao plano xOy e de centro E, o seu raio é a cota do ponto E, isto é, 2.

Assim, uma condição que define a esfera é:

$$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-2)^2 \leq 2^2$$

b) Seja α o plano mediador do segmento de reta $[BE]$.

O vetor $\overrightarrow{BE}$, de coordenadas $(-1, 5, 2)$, é um vetor normal ao plano α, logo uma equação do plano α é da forma $-x+5y+2z+d=0$, $d \in \mathbb{R}$.

$B = E + \overrightarrow{EB} = (-2, 5, 2) + (1, -5, -2) =$

$= (-1, 0, 0)$

Seja M o ponto médio de $[BE]$:

$$M = \left(\frac{-1+(-2)}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

Como $M \in \alpha$, vem que:

$$-\left(-\frac{3}{2}\right)+5\times\frac{5}{2}+2\times 1+d=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{25}{2}+2+d=0$$

$$\Leftrightarrow d=-16$$

Assim, uma equação de α é $-x+5y+2z-16=0$.

c) Seja a o lado do quadrado $[ABCD]$, base da pirâmide.

Sabemos que o volume da pirâmide é 30 e que a sua altura é a ordenada do ponto E, isto é, 5.

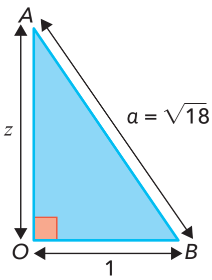
Assim:

$$30 = \frac{1}{3}\times a^2 \times 5 \Leftrightarrow a^2 = \frac{90}{5} \Leftrightarrow a^2 = 18$$

Logo, $a = \sqrt{18}$, pois $a > 0$.

Como A pertence ao semieixo positivo Oz, as coordenadas de A são da forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}^+$.

Da alínea anterior, tem-se que as coordenadas de B são $(-1, 0, 0)$.



$$z^2+1^2=\left(\sqrt{18}\right)^2 \Leftrightarrow z^2=17$$

Logo, $z=\sqrt{17}$ e, assim, $A\left(0, 0, \sqrt{17}\right)$.

25. $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})} =$

$= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}} =$

$= \sqrt{6^2+2\times 0+3^2} =$

$= \sqrt{45} =$

$= 3\sqrt{5}$

$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})} =$

$= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}} =$

$= \sqrt{6^2-2\times 0+3^2} =$

$= \sqrt{45} =$

$= 3\sqrt{5}$

26.

a) **i.** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OF} =$

$= 4\times 4\times\cos 45^\circ + 4\times 4\times\cos 90^\circ =$

$= 16\times\frac{\sqrt{2}}{2}+0 =$

$= 8\sqrt{2}$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

ii. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = 4\times 8\times\cos 90^\circ = 0$

iii. $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DF} = 8\times 4\sqrt{2}\cos 45^\circ =$

$= 32\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 32$

> **Cálculo auxiliar**
>
> Pelo teorema de Pitágoras:
>
> $\overline{DF}^2 = 4^2+4^2 \Leftrightarrow \overline{DF}^2 = 32$
>
> Logo, $\overline{DF} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
>
> Como $\overline{HF} = \overline{DF}$ e $[DH]$ é um diâmetro da circunferência,
>
> $H\hat{D}F = \frac{180^\circ-90^\circ}{2} = 45^\circ$.

b) $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ $\qquad E\hat{D}C = \frac{45^\circ\times 6}{2} = 135^\circ$

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{DC}\|\times\|\overrightarrow{DE}\|\times\cos 135^\circ =$

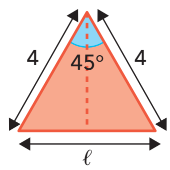
$= \ell\times\ell\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell^2 =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(8\text{ sen}(22{,}5^\circ))^2 =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\times 64\text{ sen}^2(22{,}5^\circ) =$

$= -32\sqrt{2}\text{ sen}^2(22{,}5^\circ)$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $\text{sen}(22{,}5^\circ) = \frac{\frac{\ell}{2}}{4} \Leftrightarrow \text{sen}(22{,}5^\circ) = \frac{\ell}{8}$
>
> $\Leftrightarrow \ell = 8\text{ sen}(22{,}5^\circ)$
>
> 
>

c) Já foi visto que $\ell = \sqrt{32}\,\frac{\text{sen}(22{,}5^\circ)}{\text{sen }135^\circ}$.

$D\hat{A}H = 90^\circ$, já que o triângulo $[DAH]$ está inscrito numa semicircunferência.

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{DH}^2 = \overline{HA}^2+\overline{DA}^2 \Leftrightarrow 8^2 = \left(\sqrt{32}\,\frac{\text{sen}(22{,}5^\circ)}{\text{sen }135^\circ}\right)^2+\overline{DA}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{DA}^2 = 64-32\left(\frac{\text{sen}(22{,}5^\circ)}{\text{sen }135^\circ}\right)^2$$

Logo, $\overline{DA} = \sqrt{64-32\left(\frac{\text{sen}(22{,}5^\circ)}{\text{sen }135^\circ}\right)^2}$.

$[DH]$ é um diâmetro da circunferência e $G\hat{H}A = 135^\circ$, por se tratar de um ângulo interno do octógono.

Logo, $D\hat{H}A = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$.

Então, $H\hat{D}A = 180^\circ - 90^\circ - 67{,}5^\circ = 22{,}5^\circ$.

Assim, $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DA} =$

$= 8\times\sqrt{64-32\left(\frac{\text{sen}(22{,}5^\circ)}{\text{sen }135^\circ}\right)^2}\times\cos 225^\circ \approx 54{,}62.$

27. $\overline{AC}^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$= (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) =$

$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} =$

$= ||\overrightarrow{BC}||^2 + ||\overrightarrow{BA}||^2 - 2||\overrightarrow{BC}||\ ||\overrightarrow{BA}|| \cos(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) =$

$= \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{BA} \times \cos(\widehat{BC, BA})$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

28. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

Assim:

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) =$

$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB} =$

$= \overline{CD} \times \overline{AD} \cos 180^\circ + \overline{CD} \times \overline{DB} \times \cos 90^\circ \times \overline{DB} \times$

$\times \overline{AD} \cos 90^\circ + \overline{DB} \times \overline{DB} \cos 0^\circ =$

$= -\overline{DA} \times \overline{DC} + 0 + 0 + \overline{BD}^2 =$

$= -\overline{DA} \times \overline{DC} + \overline{BD}^2$

Uma vez que $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B, tem-se:

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{CA} \times \overline{CB} \cos 90^\circ = 0$

Logo:

$-\overline{DA} \times \overline{DC} + \overline{BD}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{DA} \times \overline{DC} = \overline{BD}^2$

29. De acordo com a sugestão do enunciado, $A(a, 0, 0)$, $C(0, a, 0)$, $V\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 3a\right)$.

$\overrightarrow{AC} = (-a, a, 0)$

$\overrightarrow{AV} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 3a\right)$

$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + 0^2} =$

$= \sqrt{2a^2} =$

$= \sqrt{2}a$

$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3a)^2} =$

$= \sqrt{\frac{19}{2}}a$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 =$

$= a^2$

Seja α a amplitude do ângulo que uma aresta lateral faz com a diagonal da base concorrente com ela.

$\cos \alpha = \dfrac{a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{19}{2}}a} =$

$= \dfrac{a^2}{\sqrt{19a^2}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{19}}$

Assim, $\alpha \approx 76{,}74^\circ$.

30.

a) O ponto A pertence ao eixo Ox, logo é da forma $(x, 0, 0)$. Substituindo na equação do plano ABC:

$2x + 0 + 0 = 8 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $A(4, 0, 0)$.

O ponto B pertence ao eixo Oy, logo é da forma $(0, y, 0)$. Substituindo na equação do plano ABC:

$0 + 2y + 0 = 8 \Leftrightarrow y = 4$

Logo, $B(0, 4, 0)$.

O ponto C pertence ao eixo Oz, logo é da forma $(0, 0, z)$. Substituindo na equação do plano ABC:

$0 + 0 + z = 8 \Leftrightarrow z = 8$

Logo, $C(0, 0, 8)$.

b) Se o plano é paralelo ao plano ABC, então tem como vetor normal, por exemplo, $\vec{n}(2, 2, 1)$, que é um vetor normal ao plano ABC.

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto $D(-1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano ABC é:

$2(x + 1) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2 + 2y - 2 + z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y + z = 2$

c) $M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) =$

$= (2, 2, 0)$

$\overrightarrow{CM} = (2, 2, 0) - (0, 0, 8) =$

$= (2, 2, -8)$

Logo, uma equação vetorial da reta CM é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 8) + k(2, 2, -8),\ k \in \mathbb{R}$$

d) Uma reta que passe pela origem do referencial, e que seja perpendicular ao plano ABC, é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(2, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Os pontos desta reta são da forma $(2k, 2k, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto P é um desses pontos e pertence ao plano ABC, logo:

$2 \times 2k + 2 \times 2k + k = 8 \Leftrightarrow 9k = 8$

$\Leftrightarrow k = \frac{8}{9}$

Assim, $P\left(\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

O raio da esfera é dado por:

$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{576}{81}} =$

$= \frac{8}{3}$

Logo, uma condição que define a esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{64}{9}$$

31.

a) Um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{n}(3, 2, 6)$.

Um vetor normal ao plano β é, por exemplo, $\vec{m}(1, 1, -1)$.

$\vec{n} \cdot \vec{m} = 3 + 2 - 6 = -1$

Logo, os planos α e β não são perpendiculares.

b) VC é uma reta perpendicular ao plano α. Assim, um vetor diretor de VC é o vetor $\vec{n}(3, 2, 6)$. Como C pertence a esta reta, uma equação vetorial de VC é:

$$(x, y, z) = \left(1, 3, -\frac{1}{2}\right) + k(3, 2, 6),\ k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta VC, e também, em particular, o ponto V, são da forma $\left(1+3k, 3+2k, -\frac{1}{2}+6k\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Assim, $\overrightarrow{CV} = (3k, 2k, 6k)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\|\overrightarrow{CV}\| = 14 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2 + (6k)^2} = 14$$
$$\Leftrightarrow 49k^2 = 196$$
$$\Leftrightarrow k^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow k = 2 \ \vee \ k = -2$$

Como C pertence ao primeiro octante, $k = \frac{14}{7}$.

Logo:

$$V = \left(1 + 3 \times 2, 3 + 2 \times 2, -\frac{1}{2} + 6 \times 2\right) =$$
$$= \left(7, 7, \frac{23}{2}\right)$$

c) Se o plano γ é paralelo ao plano α, então um seu vetor diretor é $\vec{n}(3, 2, 6)$.

O ponto V pertence ao plano γ.

Então, uma equação do plano γ, que contém o ponto V e é paralelo ao plano α, é:

$$3(x-7) + 2(y-7) + 6\left(z - \frac{23}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x - 21 + 2y - 14 + 6z - 69 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x + 2y + 6z - 104 = 0$$

Teste final – páginas 195 a 197

1. Opção (A)

Uma vez que o hexágono regular $[ABCDEF]$ tem de perímetro $6\sqrt{3}$, a medida de cada um dos seus lados é $\sqrt{3}$. Além disso, o hexágono regular $[ABCDEF]$ pode ser inscrito numa circunferência de raio igual a $\sqrt{3}$. Assim, $\|\overrightarrow{AD}\| = 2\sqrt{3}$.

$$\overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{FC}}_{\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{FC}} =$$
$$= \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + 0 =$$
$$= \underbrace{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BD}$$
$$= \|\overrightarrow{DB}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| \times \cos 180^\circ =$$
$$= -3^2 =$$
$$= -9$$

Cálculo auxiliar

$\|\overrightarrow{DB}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AD}\|^2$

Assim:

$\|\overrightarrow{DB}\|^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{DB}\|^2 + 3 = 12$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{DB}\|^2 = 9$

Logo, $\|\overrightarrow{DB}\| = 3$.

2. Opção (B)

Sabendo que a reta r é perpendicular à reta s, podemos concluir que $m_r \times m_s = -1$.

$m_r = 2\sqrt{3} + 3a$

$m_s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Assim:

$$(2\sqrt{3} + 3a) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 3a = \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow 3a = -\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Opção (D)

Para que o ângulo AOP seja agudo, é necessário que se verifique $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} > 0$, sendo $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OP}$ vetores não colineares.

Uma vez que o ponto P pertence à reta r, as suas coordenadas são $(4 - 3k, 1 + k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{OA} = (2, 4)$ e $\overrightarrow{OP} = (4 - 3k, 1 + k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} > 0 \ \wedge \ \frac{4-3k}{2} \neq \frac{1+k}{4}$$
$$\Leftrightarrow (2, 4) \cdot (4 - 3k, 1 + k) > 0 \ \wedge \ 16 - 12k \neq 2 + 2k$$
$$\Leftrightarrow 2(4 - 3k) + 4(1 + k) > 0 \ \wedge \ 14k \neq 14$$
$$\Leftrightarrow 8 - 6k + 4 + 4k > 0 \ \wedge \ k \neq 1$$
$$\Leftrightarrow -2k > -12 \ \wedge \ k \neq 1$$
$$\Leftrightarrow k < 6 \ \wedge \ k \neq 1$$

C.S. $=]-\infty, 1[\cup]1, 6[$

4. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto I, ponto de interseção da reta perpendicular ao plano α, e que contém o ponto P, com o plano α.

O vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é um vetor normal ao plano α, logo é um vetor diretor de qualquer reta que lhe seja perpendicular.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto P é:

$$(x, y, z) = (-3, 4, -1) + k(2, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta é do tipo $(-3 + 2k, 4 - k, -1 + k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$2(-3 + 2k) - (4 - k) + (-1 + k) - 7 = 0$

$\Leftrightarrow -6 + 4k - 4 + k - 1 + k - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 6k = 18$

$\Leftrightarrow k = 3$

Para $k = 3$, obtemos o ponto de coordenadas $(-3 + 2 \times 3, 4 - 3, -1 + 3) = (3, 1, 2)$.

Logo, $I(3, 1, 2)$.

Seja P' o simétrico do ponto P em relação ao plano α.

As coordenadas de P' podem ser obtidas por $I + \overrightarrow{PI}$.

$\overrightarrow{PI} = I - P = (3, 1, 2) - (-3, 4, -1) = (6, -3, 3)$

Assim, $P' = (3, 1, 2) + (6, -3, 3) = (9, -2, 5)$.

5. As coordenadas do ponto C em função de α são $(3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$.

Uma vez que os pontos B e C têm a mesma ordenada, podemos concluir que as coordenadas do ponto B, em função de α, são $(-3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$.

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha) - (0, 0) = (-3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha) - (0, 0) = (3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow (-3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha) \cdot (3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha) = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow -9\cos^2\alpha + 9\,\text{sen}^2\alpha = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

$\text{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, pelo que:

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 3$$

$\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, logo $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$.

$m_{OC} = \text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$

A reta OC passa pela origem do referencial, pelo que a sua equação reduzida é $y = -\sqrt{3}x$.

6.

a) Opção (B)

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo ao centro a que corresponde o arco de circunferência AB:

$$\alpha \times 5 = \frac{25\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\alpha$, logo:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 \times 5 \times \cos\frac{5\pi}{6} = 25 \times \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

b) $\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -1) - (-2, -4) = (4, 3)$

$$m_{AC} = \frac{3}{4}$$

$$m_t \times \frac{3}{4} = -1 \Leftrightarrow m_t = -\frac{4}{3}$$

Assim, a equação reduzida da reta t é do tipo $y = -\dfrac{4}{3}x + b$.

Como $A(-2, -4)$ pertence à reta t, vem que:

$$-4 = -\frac{4}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow -4 = \frac{8}{3} + b$$

$$\Leftrightarrow b = -4 - \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{20}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta t é $y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{20}{3}$.

7. $\overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{CM}$ são vetores simétricos, pois têm a mesma direção, sentidos opostos e a mesma norma (M é o ponto médio de $[BC]$).

Assim:

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} =$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}) =$$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BM} + (-\overrightarrow{BM})$, pois $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BM}$.

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

$= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ c.q.m.

8.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 2) - (-2, 5, 0) = (3, -6, 2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3, 2, 8) - (-2, 5, 0) = (5, -3, 8)$

$\dfrac{4}{5} \neq \dfrac{-6}{-3}$, logo os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, de onde se conclui que os pontos A, B e C não são colineares e, portanto, definem um plano.

Resta-nos provar que os pontos A, B e C pertencem ao plano definido por $6x + 2y - 3z + 2 = 0$.

$A(-2, 5, 0)$

$6 \times (-2) + 2 \times 5 - 3 \times 0 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -12 + 10 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira, logo A pertence ao plano.

$B(1, -1, 2)$

$6 \times 1 + 2 \times (-1) - 3 \times 2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 6 - 2 - 6 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira, logo B pertence ao plano.

$C(3, 2, 8)$

$6 \times 3 + 2 \times 2 - 3 \times 8 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 18 + 4 - 24 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Proposição verdadeira, logo C pertence ao plano.

Uma equação cartesiana do plano ABC é $6x + 2y - 3z + 2 = 0$.

b) Opção (D)

Uma vez que o plano β é paralelo à reta BC, isso significa que um vetor normal a β é perpendicular a um vetor diretor da reta BC, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{BC}$, cujas coordenadas são $(2, 3, 6)$ e, portanto, $\vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Além disso, o ponto de coordenadas $(-1, 2, -1)$ tem de pertencer ao plano. Assim:

(A) $\vec{n}_\beta$ é colinear a $\overrightarrow{BC}$, logo $\vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$.

(B) $\vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{BC} = (3, 2, -2) \cdot (2, 3, 6) = 6 + 6 - 12 = 0$

Verifiquemos se o ponto de coordenadas $(-1, 2, -1)$ pertence ao plano:

$3 \times (-1) + 2 \times 2 - 2 \times (-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0 \longrightarrow$ Falso, logo o ponto não pertence ao plano.

(C) $\vec{n}_\beta$ é colinear a $\overrightarrow{BC}$, logo $\vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0$.

(D) $\vec{n}_\beta \cdot \overrightarrow{BC} = (-3, -2, 2) \cdot (2, 3, 6) = -6 - 6 + 12 = 0$

Verifiquemos se o ponto de coordenadas $(-1, 2, -1)$ pertence ao plano:

$-3 \times (-1) - 2 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ Verdadeiro, logo o ponto pertence ao plano.

c) O centro da superfície esférica de diâmetro [*AD*] é o ponto médio de [*AD*].

Determinemos as suas coordenadas:

$$\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{5+5}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 5, 1\right)$$

O raio da superfície esférica de diâmetro [*AD*] é igual a $\frac{\overline{AD}}{2}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{(3+2)^2 + (5-5)^2 + (2-0)^2} =$$
$$= \sqrt{25+4} =$$
$$= \sqrt{29}$$

O raio da superfície esférica de diâmetro [*AD*] é igual a $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

A equação reduzida da superfície esférica de diâmetro [*AD*] é:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = \frac{29}{4}$$

d) $A\hat{B}D = \widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BD}\|}$$

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{BA} = (-2, 5, 0) - (1, -1, 2) = (-3, 6, -2)$
- $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$
- $\overrightarrow{BD} = (3, 5, 2) - (1, -1, 2) = (2, 6, 0)$
- $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$
- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-3, 6, 2) \cdot (2, 6, 0) = -6 + 36 + 0 = 30$

Tem-se que $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{30}{7 \times \sqrt{40}}$.

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{30}{7 \times \sqrt{40}}\right)$ e $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) \approx 47^{\circ}$.