

## 2. Produto escalar

### 1. Declive e inclinação de uma reta

#### Exercícios – páginas 26 e 27

1.

1.1.  $m = 2$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \wedge 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$$

Logo,  $\alpha \approx 63,4^\circ$ .

1.2.  $x + 3y = 5 \Leftrightarrow 3y = -x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

$$m = -\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \wedge 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$$

Logo,  $\alpha \approx 161,6^\circ$ .

1.3. Um vetor diretor da reta é  $\vec{u}(1, 5)$ .

$$m = \frac{5}{1} = 5$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 5 \wedge 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$$

Logo,  $\alpha \approx 78,7^\circ$ .

1.4. Um vetor diretor da reta é  $\vec{u}(1, -4)$ .

$$m = -\frac{4}{1} = -4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -4 \wedge 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$$

Logo,  $\alpha \approx 104,0^\circ$ .

2.

2.1.  $3y = \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0 \leq \alpha < \pi$$

Logo,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

2.2.  $x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$

$$m = -1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \wedge 0 \leq \alpha < \pi$$

Logo,  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ .

2.3. Um vetor diretor da reta é  $\vec{u}(1, -\sqrt{3})$ .

$$m = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \wedge 0 \leq \alpha < \pi$$

Logo,  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .

2.4. Um vetor diretor da reta é  $\vec{u}(\sqrt{3}, -1)$ .

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0 \leq \alpha < \pi$$

Logo,  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ .

3. A reta  $a$  passa nos pontos de coordenadas  $(-3, 0)$  e  $(0, 1)$ , logo o seu declive é dado por  $m_a = \frac{1-0}{0-(-3)} = \frac{1}{3}$ .

A inclinação de  $a$  é a amplitude  $\alpha$  tal que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \wedge 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ , ou seja,  $\alpha \approx 18,4^\circ$ .

A reta  $b$  passa nos pontos de coordenadas  $(0, 3)$  e  $(4, 0)$ , logo o seu declive é dado por  $m_b = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$ .

A inclinação de  $b$  é a amplitude  $\beta$  tal que  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4} \wedge 0^\circ \leq \beta < 180^\circ$ , ou seja,  $\beta \approx 143,1^\circ$ .

A reta  $c$  passa nos pontos de coordenadas  $(3, 3)$  e  $(0, 0)$ , logo o seu declive é dado por  $m_c = \frac{3-0}{3-0} = 1$ .

A inclinação de  $c$  é a amplitude  $\gamma$  tal que  $\operatorname{tg} \gamma = 1 \wedge 0^\circ \leq \gamma < 180^\circ$ , ou seja,  $\gamma = 45^\circ$ .

A reta  $d$  passa nos pontos de coordenadas  $(-1, 3)$  e  $(0, 1)$ , logo o seu declive é dado por:  $m_d = \frac{3-1}{-1-0} = -2$ .

A inclinação de  $d$  é a amplitude  $\delta$  tal que  $\operatorname{tg} \delta = -2 \wedge 0^\circ \leq \delta < 180^\circ$ , ou seja,  $\delta \approx 116,6^\circ$ .

4.

4.1.  $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Assim, a equação reduzida da reta é da forma  $y = \sqrt{3}x + b$ .

Como o ponto  $A$  pertence à reta, tem-se:

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 3\sqrt{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta é  $y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ .

Se o declive da reta é  $\sqrt{3}$ , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(1, \sqrt{3})$ .

Assim, uma equação vetorial da reta pode ser  $(x, y) = (-2, \sqrt{3}) + k(1, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$ .

4.2.  $m = \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta é da forma

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Como o ponto  $B$  pertence à reta, tem-se:

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, a equação reduzida da reta é  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ .

Se o declive da reta é  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(-3, \sqrt{3})$ .

Então, uma equação vetorial da reta pode ser

$$(x, y) = (\sqrt{3}, -1) + k(-3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}.$$

4.3.  $m = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$

Assim, a equação reduzida da reta é da forma  $y = -x + b$ .

Como a reta interseca o eixo  $Oy$  em  $y = 5$ , tem-se que a equação reduzida da reta é  $y = -x + 5$ .

Se o declive da reta é  $-1$ , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(-1, 1)$ .

Então, uma equação vetorial da reta pode ser

$$(x, y) = (0, 5) + k(-1, 1), k \in \mathbb{R}.$$

4.4.  $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta é da forma

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Como a reta interseca o eixo  $Ox$  em  $x = -1$ , tem-se:

$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 Logo, a equação reduzida da reta é  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
 Se o declive da reta é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , então um vetor diretor da reta pode ser, por exemplo, o vetor de coordenadas  $(3, \sqrt{3})$ .  
 Então, uma equação vetorial da reta pode ser  $(x, y) = (-1, 0) + k(3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$ .

5.

5.1.  $r: -\sqrt{3}x + 3y = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

$$m_r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Um vetor diretor da reta  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(3, \sqrt{3})$ .  
 Um ponto da reta  $r$  é o ponto  $B(0, \sqrt{3})$ .  
 Assim, uma equação vetorial da reta  $r$  é, por exemplo,  $(x, y) = (0, \sqrt{3}) + k(3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$ .

5.2. Uma vez que  $m_r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , então  $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge 0 \leq \alpha < \pi$ .  
 Logo,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

5.3.  $m_r = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Como a reta  $r$  é perpendicular à reta  $s$ , então  $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ .

O ponto  $B(0, \sqrt{3})$  é um ponto da reta  $s$ .  
 Assim, a equação reduzida da reta  $s$  é  $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ .

5.4.  $A(x, 0)$

Como  $A$  pertence à reta  $r$ , vem que  $-\sqrt{3}x + 3 \times 0 = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -3$ .  
 Logo,  $A(-3, 0)$ .  
 $m_s = -\sqrt{3}$

Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(1, -\sqrt{3})$ , que também é vetor diretor de qualquer reta paralela à reta  $s$ .  
 Logo, uma equação vetorial da reta paralela à reta  $s$  e que passa no ponto  $A$  pode ser  $(x, y) = (-3, 0) + k(1, -\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$ .

6.  $\widehat{OAB} = 55^\circ$

$\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \widehat{CBA} = 60^\circ$ , porque  $[ABC]$  é equilátero.  
 Seja  $\alpha$  a inclinação da reta  $AC$ .  
 $\alpha = 55^\circ + 60^\circ = 115^\circ$   
 Seja  $D$  o ponto de interseção da reta  $BC$  com o eixo  $Ox$ .  
 $\widehat{ABD} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$   
 $\widehat{BDA} = 180^\circ - 120^\circ - 55^\circ = 5^\circ$   
 Seja  $\beta$  a inclinação da reta  $BC$ .  
 $\beta = 180^\circ - 5^\circ = 175^\circ$

7.  $m_{AC} = \text{tg } \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Então,  $AC: y = -\sqrt{3}x$ .  
 Uma equação que define a circunferência é  $x^2 + y^2 = 16$ .  
 Como o ponto  $A$  pertence à reta  $AC$ , então é do tipo  $(x, -\sqrt{3}x)$  e, como pertence à circunferência, tem-se  $x^2 + (-\sqrt{3}x)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 3x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 4$ .

Como  $A$  é um ponto do segundo quadrante, então  $x = -2$  e, portanto,  $A(-2, 2\sqrt{3})$ .

O ponto  $B$  pertence à reta  $BC$ , de equação  $x = 4$ , e à reta  $AB$ , paralela ao eixo  $Ox$ . Logo,  $B(4, 2\sqrt{3})$ .

O ponto  $C$  pertence à reta  $BC$ , de equação  $x = 4$ , logo é do tipo  $(4, y)$ . Como também pertence à reta  $AC$ , então  $y = -\sqrt{3} \times 4 = -4\sqrt{3}$ . Assim,  $C(4, -4\sqrt{3})$ .

Então,  $\overline{AB} = 4 - (-2) = 6$  e  $\overline{BC} = 2\sqrt{3} - (-4\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ .  
 Logo,  $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$  u.a.

8.  $A(5, 0)$

Se  $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ , então a inclinação da reta  $AB$  é  $\frac{2\pi}{3}$  e o seu declive é  $\text{tg } \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ .

Logo,  $AB: y = -\sqrt{3}x + b$ .

Como  $A$  é um ponto da reta  $AB$ , vem que

$$0 = -\sqrt{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = 5\sqrt{3}$$

Assim,  $AB: y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$ .

$CD: y = 2x + 4$  e o ponto  $C$  é o ponto de interseção da reta  $CD$  com o eixo  $Oy$ . Logo,  $C(0, 4)$ .

$D(x, 0)$  e  $D$  pertence à reta  $CD$ , então  $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -2$ . Logo,  $D(-2, 0)$ .

O ponto  $B$  tem a mesma ordenada do ponto  $C$ , ou seja,  $B(x, 4)$ , e pertence à reta  $AB$ . Então,  $4 = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 5\sqrt{3} - 4 \Leftrightarrow x = 5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

Logo,  $B\left(5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}, 4\right)$ .

Assim,  $\overline{AD} = 5 - (-2) = 7$ ,  $\overline{BC} = 5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$  e  $\overline{CO} = 4$ .

$$\text{Logo, } A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{CO} =$$

$$= \frac{7 + 5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}}{2} \times 4 =$$

$$= \left(12 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \times 2 =$$

$$= \left(24 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \text{ u.a.}$$

## 2. Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço

### Exercícios – páginas 28 e 29

9.

9.1.  $\overline{AB} \cdot \overline{FE} = 2 \times 2 \times \cos 0^\circ = 4$

9.2.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$

9.3.  $\overline{AH} \cdot \overline{ED} = 2 \times 2 \times \cos 180^\circ = -4$

9.4.  $\overline{GH} \cdot \overline{BC} = 2 \times 2 \times \cos 135^\circ = -2\sqrt{2}$

**Cálculo auxiliar**

$$\alpha = \frac{180^\circ \times (8 - 2)}{8} = 135^\circ, \text{ sendo } \alpha \text{ a amplitude de um ângulo interno do octógono.}$$

10.

10.1.  $\overline{AB} \cdot \overline{LI} = 2 \times 4 \times \cos 0^\circ = 8$

**Cálculo auxiliar**

$$\overline{LI} = 2\overline{AB} = 2 \times 2 = 4$$

Os vetores  $\overline{AB}$  e  $\overline{LI}$  têm a mesma direção, logo  $(\overline{AB}, \overline{LI}) = 0^\circ$ .

10.2.  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EK} = 2 \times 5 \times \cos 90^\circ = 0$

**Cálculo auxiliar**

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} = 2$

$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AG} = 5$

Os vetores  $\overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{EK}$  são vetores perpendiculares,  $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EK}) = 90^\circ$ .

10.3.  $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{JG} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = -8$

**Cálculo auxiliar**

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JG} = 2\overrightarrow{AB} = 2 \times 2 = 4$

O vetor  $\overrightarrow{BE}$  tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor  $\overrightarrow{IJ}$ . O vetor  $\overrightarrow{JG}$  tem a mesma direção e o mesmo sentido que  $\overrightarrow{IH}$ .

Logo,  $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{JG}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IH}) = 120^\circ$ .

10.4.  $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CF} = 2 \times 4 \times \cos 120^\circ = -4$

**Cálculo auxiliar**

$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AB} = 2$

$\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AB} = 2 \times 2 = 4$

O vetor  $\overrightarrow{CF}$  tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor  $\overrightarrow{HG}$ .

Logo,  $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HG}) = 120^\circ$ .

10.5.  $\overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{LE} = 4 \times \sqrt{29} \times \cos(\widehat{KLE}) = 4 \times \sqrt{29} \times \frac{2\sqrt{29}}{29} = 8$

**Cálculo auxiliar**

Pelo teorema de Pitágoras,

$\overrightarrow{LE}^2 = 2^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{LE}^2 = 29$

Ou seja,  $\overrightarrow{LE} = \sqrt{29}$ .

Assim,  $\cos(\widehat{KLE}) = \frac{\overrightarrow{LK}}{\overrightarrow{LE}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ .

10.6.  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EL} = 2 \times \sqrt{29} \times \cos(180^\circ - \widehat{KLE}) =$   
 $= 2 \times \sqrt{29} \times \left(-\frac{2\sqrt{29}}{29}\right) = -4$

11.

11.1.  $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} =$   
 $= -2 + 0 =$   
 $= -2$

11.2.  $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} =$   
 $= \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 =$   
 $= 5^2 - 2^2 =$   
 $= 21$

11.3.  $(-\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = -2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} =$   
 $= -2\|\overrightarrow{v}\|^2 + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} =$   
 $= -2 \times 2^2 - 2 =$   
 $= -10$

11.4.  $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} =$   
 $= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} =$   
 $= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \|\overrightarrow{v}\|^2 =$   
 $= -2 - 0 + 2^2 =$   
 $= 2$

12.

12.1.  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{u,v}) = \sqrt{3} \times 6 \times \cos \frac{\pi}{6} =$   
 $= \sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$

**Cálculo auxiliar**

$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

12.2.  $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} =$   
 $= \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 =$   
 $= 3 - 18 + 36 =$   
 $= 21$

13. Seja  $\alpha = (\widehat{u,v})$ . Tem-se que  $\text{tg } \alpha = -\frac{2}{5}$ . Então:

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   
 $\Leftrightarrow \frac{29}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   
 $\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{29}$   
 $\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5\sqrt{29}}{29}$

Como  $\tan \alpha < 0$ , então o ângulo formado pelos

vetores  $\overrightarrow{u}$  e  $\overrightarrow{v}$  é obtuso, logo  $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$ .

Assim,  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos \alpha =$   
 $= 5 \times 4 \times \left(-\frac{5\sqrt{29}}{29}\right) =$   
 $= -\frac{100\sqrt{29}}{29}$

14. Se  $\overrightarrow{AB} = a$  e  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ , então  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}a$  e  $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}a$ . Então,

$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}) =$   
 $= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$   
 $= \frac{1}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \cos(180^\circ) + 0 + 0 + a \times a \times \cos(0^\circ) =$   
 $= -\frac{2}{9}a^2 + a^2 =$   
 $= \frac{7}{9}a^2$

15.  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{ED} = 29$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = 29$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AD} = 29$   
 $\Leftrightarrow \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \times \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \times \cos(180^\circ) + 0 + 0 +$   
 $+ \left(\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right) \times \frac{7}{5}\overrightarrow{AB} \times \cos(0^\circ) = 29$   
 $\Leftrightarrow -\frac{6}{25}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}^2 = 29$   
 $\Leftrightarrow \frac{29}{25}\overrightarrow{AB}^2 = 29$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 = 25$   
 Logo,  $\overrightarrow{AB} = 5$ .

16.  $A_{\text{superfície}} = 54 \Leftrightarrow A_{\text{face}} = 9$

Logo, a medida da aresta do cubo é 3.

Então,  $\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PH} =$   
 $= (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CG}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH}) =$   
 $= \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG} +$   
 $+ \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GH} =$   
 $= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \cos(0^\circ) + 0 + 0 + 0 + 3 \times 3 \times \cos(0^\circ) + 0 =$   
 $= \frac{9}{4} + 9 =$   
 $= \frac{45}{4}$

$$\begin{aligned}
 17. \quad & \| \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \|^2 = \\
 & = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \\
 & = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} + \\
 & \quad + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \\
 & = 2^2 + 0 + 2 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6} + 0 + 2^2 + 2 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} + \\
 & \quad + 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6} + 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} + 1^2 = \\
 & = 4 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = \\
 & = 4 + \sqrt{3} + 4 + 1 + \sqrt{3} + 1 + 1 = \\
 & = 11 + 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 3^2 - 1^2 = 8 \\
 & \|(\vec{u} + \vec{v})\| = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} = \\
 & \quad = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\
 & \quad = \sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} + 1^2} = \\
 & \quad = \sqrt{9 + 3 + 1} = \\
 & \quad = \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|(\vec{u} - \vec{v})\| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} = \\
 & \quad = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = \\
 & \quad = \sqrt{3^2 - 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} + 1^2} = \\
 & \quad = \sqrt{9 - 3 + 1} = \\
 & \quad = \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

Seja  $\alpha$  amplitude do ângulo formado pelos vetores  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$ .

$$\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{13} \times \sqrt{7}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

Logo,  $\alpha \approx 33^\circ$ .

### 3. Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores e perpendicularidade de vetores e de retas

#### Exercícios – páginas 30 a 32

19.

$$19.1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 0) \cdot (1, 3) = 2 \times 1 + 0 \times 3 = 2$$

O ângulo formado pelos vetores pode ser agudo ou nulo.

Como os vetores não são colineares, então o ângulo é agudo.

$$19.2. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, \sqrt{5}) \cdot (5, -\sqrt{5}) = 1 \times 5 + \sqrt{5} \times (-\sqrt{5}) = 5 - 5 = 0$$

O ângulo formado pelos vetores é reto.

$$19.3. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3) \cdot (-4, 1) = 2 \times (-4) + (-3) \times 1 = -8 - 3 = -11$$

O ângulo formado pelos vetores pode ser obtuso ou raso.

Como os vetores não são colineares, então o ângulo é obtuso.

$$19.4. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2) \cdot (-1, 2) = 1 \times (-1) + (-2) \times 2 = -1 - 4 = -5$$

O ângulo formado pelos vetores pode ser obtuso ou raso.

Como os vetores são colineares, então o ângulo é raso.

20.

$$20.1. \quad 5x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = 5x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x - 2$$

O declive desta reta é  $\frac{5}{2}$ , logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é  $-\frac{2}{5}$ .

Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma  $y = -\frac{2}{5}x + b$ .

Como a reta contém o ponto A:

$$1 = -\frac{2}{5} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{5}$$

Logo, a equação pedida é  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ .

$$20.2. \quad (x, y) = (0, 1) + k(1, -3), k \in \mathbb{R}$$

O declive desta reta é -3, logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é  $\frac{1}{3}$ .

Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma  $y = \frac{1}{3}x + b$ .

Como a reta contém o ponto A:

$$1 = \frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$

Logo, a equação pedida é  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ .

21.

$$21.1. \quad r: y = \frac{1}{2}x + 2$$

Um vetor diretor de  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(2, 1)$ .

$$s: 2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$$

Um vetor diretor de  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(2, 3)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{|7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é, aproximadamente,  $29,7^\circ$ .

$$21.2. \quad r: (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$$

Um vetor diretor de  $r$  é, por exemplo,  $\vec{r}(2, -1)$ .

$$s: (x, y) = (1, 2) + k(-3, 1), k \in \mathbb{R}$$

Um vetor diretor de  $s$  é, por exemplo,  $\vec{s}(-3, 1)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times (-3) + (-1) \times 1 = -7$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{|-7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é, aproximadamente,  $8,1^\circ$ .

22.

$$22.1. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2 + 2a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a = -4$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

O valor de  $a$  é -1.

$$22.2. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3 + a^2 - 2a - a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$$

Os valores de  $a$  são 1 e 2.

**23.**  $2x + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$   
Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-3, 2)$ .

**23.1.**  $s: y = 2x + 1$   
Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(1, 2)$ .  
Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  não são colineares porque  $-\frac{3}{1} \neq \frac{2}{2}$ .  
Logo, as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes.  
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-3, 2) \cdot (1, 2) = -3 \times 1 + 2 \times 2 = -3 + 4 = 1$   
Como  $\vec{r} \cdot \vec{s} \neq 0$ , então as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes oblíquas.

**23.2.**  $s: (x, y) = (0, 5) + k(3, -2), k \in \mathbb{R}$   
Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(3, -2)$ .  
Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são colineares porque  $-\frac{3}{3} = \frac{2}{-2}$ .  
Logo, as retas  $r$  e  $s$  são coincidentes ou paralelas.  
O ponto de coordenadas  $(0, 5)$  pertence à reta  $s$ , mas não pertence à reta  $r$ , já que a ordenada na origem desta reta é 2.  
Assim, as retas  $r$  e  $s$  são estritamente paralelas.

**23.3.**  $s: (x, y) = (1, 0) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$   
Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(2, 3)$ .  
Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  não são colineares porque  $-\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$ .  
Logo, as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes.  
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-3, 2) \cdot (2, 3) = -3 \times 2 + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$   
Como  $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0$ , então as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes perpendiculares.

**23.4.**  $s: (x, y) = (-3, 4) + k(3, -2), k \in \mathbb{R}$   
Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(3, -2)$ .  
Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são colineares porque  $-\frac{3}{3} = \frac{2}{-2}$ .  
Logo, as retas  $r$  e  $s$  são coincidentes ou estritamente paralelas.  
O ponto de coordenadas  $(-3, 4)$  pertence à reta  $s$ .  
 $2 \times (-3) + 3 \times 4 = -6 + 12 = 6$   
Então, o ponto de coordenadas  $(-3, 4)$  também pertence à reta  $r$ .  
Logo, as retas  $r$  e  $s$  são coincidentes.

**24.**  $A = \frac{15\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha \times 20}{2} = \frac{15\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$   
Logo,  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \sqrt{20} \times \sqrt{20} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 20 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10\sqrt{2}$

**25.**  
**25.1.**  $m_r = m_{AB} = \frac{3 - 1}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Assim,  $r: y = \frac{1}{3}x + b$ .

O ponto  $A(-2, 1)$  pertence à reta  $r$ , logo

$1 = \frac{1}{3} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}$ .

Então,  $r: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ .

**25.2.**  $m_s = \text{tg } 135^\circ = -1$   
Assim,  $s: y = -x + b$ .  
O ponto  $C(0, 4)$  pertence à reta  $s$ .  
Então,  $s: y = -x + 4$ .

**25.3.**  $p: y = -x + b$   
O ponto  $A(-2, 1)$  pertence à reta  $p$ , logo  $1 = -(-2) + b$

$\Leftrightarrow b = -1$ .  
Então,  $p: y = -x - 1$ .

**25.4.**  $m_r = \frac{1}{3}$ , logo  $m_q = -3$ .  
Um vetor diretor da reta  $q$  pode ser  $\vec{q}(1, -3)$ .  
Logo,  $q: (x, y) = (4, 3) + k(1, -3), k \in \mathbb{R}$ .

**25.5.**  $r: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$   
 $s: y = -x + 4$   
Assim,  $\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = -x + 4 \Leftrightarrow x + 5 = -3x + 12 \Leftrightarrow 4x = 7$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

Logo,  $y = \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{9}{4}$ .

Então, o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$  tem coordenadas  $\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$ .

**25.6.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(3, 1)$ .  
Um vetor diretor da reta  $s$  é  $\vec{s}(1, -1)$ .  
 $\vec{r} \cdot \vec{s} = 3 \times 1 + 1 \times (-1) = 3 - 1 = 2$   
 $\|\vec{r}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$   
 $\|\vec{s}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$   
Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $r$  e  $s$ .  
 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{10} \times \sqrt{2}}$   
Logo,  $\alpha \approx 63^\circ$ .

**25.7.**  $\text{tg } \beta = \frac{1}{3}$   
Assim,  $1 + \text{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$   
 $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$   
 $\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$   
 $\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{10}$   
 $\Leftrightarrow \cos \beta = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}$   
Como  $\text{tg } \beta > 0$ , então  $\beta$  é a amplitude de um ângulo agudo e  $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \beta = 1 - \frac{9}{10}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2 \beta = \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow \text{sen } \beta = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

Como  $\beta$  é a amplitude de um ângulo agudo, então  $\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

Logo,  $\text{sen } \beta + \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ .

**25.8.** Seja  $t$  a reta perpendicular a  $r$  que contém o ponto  $C$ .  
 $m_r = \frac{1}{3}$ , logo  $m_t = -3$  e  $t: y = -3x + b$ .

Como  $C(0, 4)$  pertence à reta  $t$ , então  $t: y = -3x + 4$ .  
Seja  $D$  o ponto de interseção das retas  $r$  e  $t$ .

$\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = -3x + 4 \Leftrightarrow x + 5 = -9x + 12 \Leftrightarrow 10x = 7$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$

$$y = -3 \times \frac{7}{10} + 4 = \frac{19}{10}$$

$$\text{Logo, } D\left(\frac{7}{10}, \frac{19}{10}\right).$$

$$\text{Então } \overline{CD} = \sqrt{\left(0 - \frac{7}{10}\right)^2 + \left(4 - \frac{19}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{7}{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Logo, a distância do ponto } C \text{ à reta } r \text{ é } \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

26. Como  $C$  pertence à reta  $r$  e tem abscissa positiva, então é da forma  $(k, 3, 3)$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ .

$$\overline{BA} = A - B = (0, 0, -6)$$

$$\overline{BC} = C - B = (k, -3, -3)$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 + 0 + 18 = 18$$

$$\|\overline{BA}\| = 6$$

$$\|\overline{BC}\| = \sqrt{k^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18 + k^2}$$

Logo,

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \|\overline{BA}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$\Leftrightarrow 18 = 6 \times \sqrt{18 + k^2} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{18 + k^2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{18 + k^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 18 + k^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{18}$$

$$\text{Uma vez que } k \in \mathbb{R}^+, \text{ então } k = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

27. O triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ , uma vez que o lado  $[AC]$  é um diâmetro da circunferência.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{BC}}{8} \Leftrightarrow \overline{BC} = 8 \cos \alpha$$

$$\text{Assim, } \overline{BC} \cdot \overline{AC} = 16$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} \times \overline{AC} \times \cos \alpha = 16$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos \alpha \times 8 \times \cos \alpha = 16$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

Como  $\alpha$  é a amplitude de um ângulo agudo, então

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Logo, } \alpha = 60^\circ.$$

28. Uma vez que  $\overline{OA} = a$  e  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$ , então  $A(a, 0)$ .

O ponto  $D$  é o ponto médio do segmento de reta  $[OA]$ , logo  $D\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ .

$$\text{Como } \overline{AE} = \overline{CF} = \frac{1}{3} \overline{BC} = \frac{1}{3} \overline{OA} = \frac{1}{3} a, \text{ logo } E\left(a, \frac{1}{3} a\right).$$

Além disso, como o ponto  $E$  é o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ , então  $B\left(a, \frac{2}{3} a\right)$  e  $F\left(\frac{1}{3} a, \frac{2}{3} a\right)$ .

Assim,

$$\overline{DE} = \left(a, \frac{1}{3} a\right) - \left(\frac{a}{2}, 0\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$$

$$\overline{DF} = \left(\frac{1}{3} a, \frac{2}{3} a\right) - \left(\frac{a}{2}, 0\right) = \left(-\frac{a}{6}, \frac{2a}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \overline{DE} \cdot \overline{DF} &= \frac{a}{2} \times \left(-\frac{a}{6}\right) + \frac{a}{3} \times \frac{2a}{3} = \\ &= -\frac{a^2}{12} + \frac{2a^2}{9} = \frac{5a^2}{36} \end{aligned}$$

29.

- 29.1. Como  $\overline{OA} = a$  e  $A$  pertence ao eixo  $Ox$ , então  $A(a, 0, 0)$ . Uma vez que o sólido é um prisma quadrangular regular, então  $\overline{OE} = \overline{OA} = a$ . Além disso,  $E$  pertence ao eixo  $Oz$ , logo  $E(0, 0, a)$ .

Como  $\overline{OC} = 2\overline{OE} = 2a$  e  $C$  pertence ao eixo  $Oy$ , então  $C(0, 2a, 0)$ .

Além disso, também se tem que  $B(a, 2a, 0)$ .

Assim,

$$\overline{AB} = B - A = (0, 2a, 0)$$

$$\overline{CE} = E - C = (0, -2a, a)$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} \cdot \overline{CE} = 0 + 2a \times (-2a) + 0 = -4a^2.$$

- 29.2.  $\overline{CA} = A - C = (a, -2a, 0)$

$$\overline{CE} = E - C = (0, -2a, a)$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CE} = a \times 0 + (-2a) \times (-2a) + 0 \times a = 4a^2$$

$$\|\overline{CA}\| = \sqrt{a^2 + (-2a)^2 + 0^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$$

$$\|\overline{CE}\| = \sqrt{0^2 + (-2a)^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Assim, } \cos(\widehat{ACE}) = \frac{4a^2}{a\sqrt{5} \times a\sqrt{5}} = \frac{4}{5}. \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

$$\text{Logo, } \widehat{ACE} \approx 37^\circ.$$

#### 4. Equações cartesianas de planos no espaço

##### Exercícios – páginas 33 a 35

30.

$$30.1. \quad 2(x - 1) + 1(y - 1) + 3(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 + y - 1 + 3z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 3z - 9 = 0$$

$$30.2. \quad -3(x - 1) + 1(y + 1) + 0(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3 + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 4 = 0$$

$$30.3. \quad 1(x - 0) - 2(y + 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 2 + z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z - 3 = 0$$

$$30.4. \quad 0(x - 2) + 4(y - 1) + 0(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0$$

$$31. \quad \alpha: 3x + 2y - 4z + 1 = 0$$

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}(3, 2, -4)$ .

- 31.1. Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-6, -4, 8)$ .

Tem-se que  $\vec{r} = -2\vec{n}$ , ou seja, os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$  são colineares.

Logo, a reta  $r$  é concorrente perpendicular ao plano  $\alpha$ .

- 31.2. Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(0, 2, 1)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (0, 2, 1) \cdot (3, 2, -4) = 0 + 4 - 4 = 0$$

Logo, a reta  $r$  está contida no plano  $\alpha$  ou é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

$A(2, 1, 2)$  é um ponto pertencente à reta  $r$ .

Tem-se que  $3 \times 2 + 2 \times 1 - 4 \times 2 + 1 = 1 \neq 0$ .

Logo, o ponto  $A$  não pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que a reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

- 31.3. Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(3, 4, -1)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (3, 4, -1) \cdot (3, 2, -4) = 9 + 8 - 4 = 13 \neq 0$$

Logo, a reta  $r$  é concorrente perpendicular ao plano  $\alpha$  ou é concorrente oblíqua ao plano  $\alpha$ .  
Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$  não são colineares porque  $\frac{3}{3} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{-1}{-4}$ .

Logo, a reta  $r$  é concorrente oblíqua ao plano  $\alpha$ .

**31.4.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(4, -2, 2)$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (4, -2, 2) \cdot (3, 2, -4) = 12 - 4 - 8 = 0$$

Logo, a reta  $r$  está contida no plano  $\alpha$  ou é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

$A(1, 0, 1)$  é um ponto pertencente à reta  $r$ .

$$\text{Tem-se que } 3 \times 1 + 2 \times 0 - 4 \times 1 + 1 = 0.$$

Logo, o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$ , pelo que a reta  $r$  está contida no plano  $\alpha$ .

**32.**  $\alpha: 2x - 3y + z + 2 = 0$

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n}_\alpha(2, -3, 1)$ .

**32.1.**  $\beta: 3x + 2y + 2z + 1 = 0$

Um vetor normal ao plano  $\beta$  é  $\vec{n}_\beta(3, 2, 2)$ .

Os vetores  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$  não são colineares porque  $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ .

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são concorrentes perpendiculares ou concorrentes oblíquos.

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 2 \times 3 - 3 \times 2 + 1 \times 2 = 2 \neq 0$$

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são concorrentes oblíquos.

**32.2.**  $\beta: -2x + 3y - z + 2 = 0$

Um vetor normal ao plano  $\beta$  é  $\vec{n}_\beta(-2, 3, -1)$ .

Os vetores  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$  são colineares porque  $\vec{n}_\beta = -\vec{n}_\alpha$ . Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são coincidentes ou paralelos.

O termo independente de  $\alpha$  é  $d_\alpha = 2$  e o termo independente de  $\beta$  é  $d_\beta = 2$ . Então  $d_\beta \neq -d_\alpha$ .

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são estritamente paralelos.

**32.3.**  $\beta: x + y + z - 3 = 0$

Um vetor normal ao plano  $\beta$  é  $\vec{n}_\beta(1, 1, 1)$ .

Os vetores  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$  não são colineares porque  $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{1}$ .

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são concorrentes perpendiculares ou concorrentes oblíquos.

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 2 \times 1 - 3 \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são concorrentes perpendiculares.

**32.4.**  $\beta: 4x - 6y + 2z + 4 = 0$

Um vetor normal ao plano  $\beta$  é  $\vec{n}_\beta(4, -6, 2)$ .

Os vetores  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$  são colineares porque  $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$ .

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são coincidentes ou estritamente paralelos.

O termo independente de  $\alpha$  é  $d_\alpha = 2$  e o termo independente de  $\beta$  é  $d_\beta = 4$ . Então,  $d_\beta = 2d_\alpha$ .

Logo, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são coincidentes.

**33.**

**33.1.**  $y = 3$

**33.2.**  $A(3, 0, 0)$

$C(0, 3, 0)$

$$\vec{AC} = C - A = (-3, 3, 0)$$

$$\text{Logo, } \alpha: -3(x - 3) + 3(y - 0) + 0(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 9 + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y - 3 = 0$$

**33.3.**  $E(3, 3, 3)$

$$\vec{CE} = E - C = (3, 0, 3)$$

Logo,  $CE: (x, y, z) = (3, 3, 3) + k(3, 0, 3), k \in \mathbb{R}$ .

**33.4.** Os pontos da reta  $CE$  são da forma  $(3 + 3k, 3, 3 + 3k), k \in \mathbb{R}$ .

Substituindo na equação do plano  $\alpha$ :

$$3 + 3k - 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Logo,  $P(3 + 1 \times 3, 3, 3 + 1 \times 3)$ , ou seja,  $P(6, 3, 6)$ .

**33.5.** Seja  $r$  a reta perpendicular ao plano  $\beta$  e que passa no ponto  $A$ .

$$r: (x, y, z) = (3, 0, 0) + k(2, 3, -1), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta  $r$  são da forma  $(3 + 2k, 3k, -k), k \in \mathbb{R}$ .

Substituindo na equação do plano  $\beta$ :

$$2(3 + 2k) + 3 \times 3k - (-k) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 + 4k + 9k + k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14k = -7$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

A reta  $r$  intersecta o plano  $\beta$  no ponto de coordenadas

$$\left(3 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right), -\left(-\frac{1}{2}\right)\right), \text{ ou seja,}$$

$$\left(2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A distância entre este ponto e o ponto  $A$  é:

$$\sqrt{(3 - 2)^2 + \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Assim, a distância do ponto  $A$  ao plano  $\beta$  é  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ .

**34.**

**34.1.**  $\vec{BC} = C - B = (0, 1, 1) - (2, 1, -3) = (-2, 0, 4)$

Assim, uma equação do plano  $\alpha$  é:

$$-2(x - 1) + 4(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 + 4z - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 4z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 2z - 3 = 0$$

**34.2.**  $\vec{AB} = B - A = (2, 1, -3) - (1, -1, 2) = (1, 2, -5)$

Como o plano  $\alpha$  é perpendicular à reta  $AB$ , o vetor  $\vec{AB}$  é um vetor normal ao plano  $\alpha$ .

Além disso, o ponto  $C$  pertence ao plano, assim, uma equação do plano  $\alpha$  é:

$$1(x - 0) + 2(y - 1) - 5(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 2 - 5z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 5z + 3 = 0$$

**34.3.**  $\vec{BC} = C - B = (0, 1, 1) - (2, 1, -3) = (-2, 0, 4)$

Seja  $\vec{n}_\beta$  um vetor normal ao plano  $\beta$ .

Como o plano  $\beta$  é paralelo à reta  $BC$ , então  $\vec{n}_\beta \cdot \vec{BC} = 0$ . Então, por exemplo,  $\vec{n}_\beta(4, 0, 2)$ .

Além disso, o ponto  $A$  pertence ao plano  $\beta$ , pelo que uma equação deste plano é:

$$4(x - 1) + 0(y + 1) + 2(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 2z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2z - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - z - 4 = 0$$

**34.4.** Um vetor normal ao plano  $\delta$  definido por

$$3x + 2y + 4z - 1 = 0 \text{ é } \vec{n}(3, 2, 4).$$

Como os planos são paralelos, o vetor  $\vec{n}$  é também um vetor normal ao plano referido.

Além disso, o ponto  $B$  pertence ao plano  $\delta$ , pelo que uma equação deste plano é:

$$3(x - 2) + 2(y - 1) + 4(z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6 + 2y - 2 + 4z + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + 4z + 4 = 0$$

**35.**

**35.1.**  $B$  é o ponto de interseção da reta  $BC$  com o plano  $xOy$ :

$$(x, y, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) + k(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k = -2 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

$C$  é o ponto de interseção da reta  $BC$  com o plano  $yOz$ :

$$(0, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) + k(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} - k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

O ponto  $A$  pertence ao eixo  $Oy$ , logo é da forma  $(0, y, 0)$ . Como  $[OAC]$  é um triângulo equilátero, a ordenada de  $C$  é metade da ordenada de  $A$ , logo  $A(0, \sqrt{3}, 0)$ .

**35.2.** Um vetor diretor da reta  $BC$  é  $\vec{u}(-1, 0, 1)$ .

Como o plano  $\alpha$  é perpendicular à reta  $BC$ , então o vetor  $\vec{u}$  é um vetor normal ao plano  $\alpha$ .

Como o ponto  $A$  pertence ao plano  $\alpha$ , então uma equação deste plano é:

$$-1(x - 0) + 0(y - \sqrt{3}) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + z = 0$$

**35.3.** Um vetor diretor da reta  $BC$  é  $\vec{u}(-1, 0, 1)$ .

Seja  $\vec{n}_\beta$  um vetor normal ao plano  $\beta$ .

Como o plano  $\beta$  é paralelo à reta  $BC$ , então  $\vec{n}_\beta \cdot \vec{BC} = 0$ .

Então, por exemplo,  $\vec{n}_\beta(1, 1, 1)$ .

Além disso, o ponto  $A$  pertence ao plano  $\beta$ , pelo que uma equação deste plano é:

$$1(x - 0) + 1(y - \sqrt{3}) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - \sqrt{3} + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - \sqrt{3} = 0$$

**36.**

**36.1.** Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{a}(1, 2, -1)$ . Este vetor é também normal ao plano  $\beta$ , uma vez que os planos são paralelos.

Como o ponto  $A$  pertence ao plano  $\beta$ , então:

$$1(x - 1) + 2(y - 3) - 1(z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2y - 6 - z - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow x + 2y - z - 9 = 0$ , que é uma equação cartesiana do plano  $\beta$ .

**36.2.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-1, 1, 2)$ .

Como a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\gamma$  então  $\vec{r}$  é um vetor normal ao plano  $\gamma$ .

Além disso,  $A(1, 3, -2)$  é um ponto do plano.

Logo,  $-1(x - 1) + 1(y - 3) + 2(z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow -x + 1 + y - 3 + 2z + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow -x + y + 2z + 2 = 0$ , que é uma equação cartesiana do plano  $\gamma$ .

**36.3.** Um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(-1, 1, 2)$ . Um vetor diretor do eixo  $Ox$  é  $\vec{v}(1, 0, 0)$ .

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{v}\| = 1$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -1$$

Seja  $\theta$  a amplitude do ângulo que a reta  $r$  faz com o eixo das abcissas.

$$\cos \theta = \frac{|-1|}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$$

Logo,  $\theta \approx 65,9^\circ$ .

**37.** Seja  $C$  o centro da superfície esférica.

$$C(2, -1, 1)$$

$$\vec{CP} = P - C = (3, 1, 0) - (2, -1, 1) = (1, 2, -1)$$

$\vec{CP}$  é um vetor normal ao plano tangente à superfície esférica no ponto  $P$ .

Assim, uma equação desse plano é:

$$1(x - 3) + 2(y - 1) - 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + 2y - 2 - z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z - 5 = 0$$

**38.**

**38.1.** A reta  $AD$  é perpendicular ao plano  $ABF$ . Um vetor diretor da reta  $AD$  é  $\vec{n}(6, 2, -3)$ , que é um vetor normal ao plano  $ABF$ .

Assim,  $AD: (x, y, z) = (17, 1, -1) + k(6, 2, -3), k \in \mathbb{R}$ .

**38.2.** Um vetor normal ao plano  $ABF$  é  $\vec{n}(6, 2, -3)$ .

Um vetor normal ao plano  $\alpha$ ,  $\vec{u}$ , tem de satisfazer a condição  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ .

Por exemplo,  $\vec{u}(0, 3, 2)$ .

Assim, uma equação do plano  $\alpha$  é:

$$0(x - 17) + 3(y - 1) + 2(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3 + 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y + 2z - 1 = 0$$

**38.3.** Um vetor normal ao plano  $ABF$  é  $\vec{n}(6, 2, -3)$ .

O plano  $CHG$  é estritamente paralelo ao plano  $ABF$ .

Logo,  $\vec{n}$  também é um vetor normal ao plano  $CHG$ .

Como  $D(17, 1, -1)$  pertence ao plano  $CHG$ , então uma equação deste plano é:

$$6(x - 17) + 2(y - 1) - 3(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 102 + 2y - 2 - 3z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2y - 3z - 107 = 0$$

**38.4.** O ponto  $E$  é o ponto de interseção da reta  $EH$  com o plano  $ABF$ .

$$EH: (x, y, z) = (1, -2, 14) + k(-12, -4, 6), k \in \mathbb{R}$$

Logo,  $(1 - 12k, -2 - 4k, 14 + 6k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  são as coordenadas de um ponto genérico desta reta.  
 Substituindo na equação do plano:  
 $6(1 - 12k) + 2(-2 - 4k) - 3(14 + 6k) - 58 = 0$   
 $\Leftrightarrow 6 - 72k - 4 - 8k - 42 - 18k - 58 = 0$   
 $\Leftrightarrow -98 - 98k = 0$   
 $\Leftrightarrow k = -1$   
 Assim,  $E(13, 2, 8)$ .

**Exercícios globais – páginas 36 a 39**

39. Opção (C)

Seja  $m$  o declive da reta  $r$ .

$$m = \operatorname{tg} 150^\circ \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se  $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , então são vetores diretores da reta  $r$ , por exemplo,  $(-3, \sqrt{3})$  ou  $(-\sqrt{3}, 1)$ .

Das equações dadas, apenas uma apresenta um destes vetores, não havendo qualquer equação com outro vetor diretor colinear com estes.

40. Opção (B)

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{BA} &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BA} = \\ &= \frac{1}{2} \|\overline{AB}\| \times \|\overline{BA}\| \times \cos 180^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times (-1) = \\ &= -2 \end{aligned}$$

41. Opção (D)

$$\begin{aligned} r: x - 2y = 3 &\Leftrightarrow 2y = x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ m_r &= \frac{1}{2}, \text{ logo } m_s = -2. \end{aligned}$$

Apenas uma das equações apresentadas tem declive  $-2$ .

42. Opção (D)

Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é, por exemplo,  $(1, 1, -1)$ .  
 Na opção (A), um vetor normal ao plano dado é  $(3, 2, 5)$ . Então  $(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5) = 3 + 2 - 5 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$ . No entanto,  $3 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 3 - 12 = 11$ , pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$ , mas não contém o ponto A.  
 Na opção (B), um vetor normal ao plano dado é  $(4, -1, 3)$ . Então  $(1, 1, -1) \cdot (4, -1, 3) = 4 - 1 - 3 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$ . No entanto,  $4 \times 2 - 1 + 3 \times 3 + 1 = 17$ , pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$ , mas não contém o ponto A.  
 Na opção (C), um vetor normal ao plano dado é  $(5, -2, 3)$ . Então  $(1, 1, -1) \cdot (5, -2, 3) = 5 - 2 - 3 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$ . No entanto,  $5 \times 2 - 2 \times 1 + 3 \times 3 + 7 = 24$ , pelo que o ponto A não pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$ , mas não contém o ponto A.  
 Na opção (D), um vetor normal ao plano dado é  $(2, 1, 3)$ . Então  $(1, 1, -1) \cdot (2, 1, 3) = 2 + 1 - 3 = 0$ , pelo que este plano é perpendicular a  $\alpha$ .  
 Além disso,  $2 \times 2 + 1 + 3 \times 3 - 14 = 0$ , pelo que o ponto A pertence a este plano. Logo, o plano dado é perpendicular a  $\alpha$  e contém o ponto A.

43. Opção (B)

$(\overline{AB}, \overline{BC})$  é um ângulo agudo, pelo que  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} > 0$ .  
 $(\overline{AB}, \overline{CD})$  é um ângulo obtuso, pelo que  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} < 0$ .  
 $(\overline{AB}, \overline{DE})$  é um ângulo obtuso, pelo que  $\overline{AB} \cdot \overline{DE} < 0$ .  
 $(\overline{AB}, \overline{EA})$  é um ângulo agudo, pelo que  $\overline{AB} \cdot \overline{EA} > 0$ .

44. Opção (D)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 0, a) \cdot (a, 0, -a) = 0 + 0 - a^2 = -a^2 < 0, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 Os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são colineares.  
 Logo, o ângulo formado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é obtuso.

45. Opção (C)

$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 4 - 9 = -5$ , logo a opção (A) é verdadeira.  
 $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2 + 9 = 11$ , logo a opção (B) é verdadeira.  
 $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 4\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 - 5\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\|\vec{v}\|^2 = 8 + 5 + 18 = 31$ , logo a opção (C) é falsa.  
 $2\vec{u} \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 + 6 \times (-1) = 8 - 6 = 2$ , logo a opção (D) é verdadeira.

46. Opção (A)

$\vec{r}(m, 2, m)$  é um vetor diretor da reta  $r$ .  
 $\vec{a}(1, -1, 1)$  é um vetor normal ao plano  $\alpha$ .  
 Para que a reta  $r$  seja perpendicular ao plano  $\alpha$  estes dois vetores têm de ser colineares.  
 Assim,  $\frac{m}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{m}{1}$ , pelo que  $m = -2$ .

47. Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo de  $\vec{u}$  com  $\vec{u} + \vec{v}$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u} + \vec{v}\| \times \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} &= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow 2^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} &= 5\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} &= 5\sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

48.

48.1  $m = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$

Assim, AC:  $y = -\sqrt{3}x + b$ .

Como o ponto A pertence à reta AC, então

$$3 = -\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = 3 + \sqrt{3}$$

Logo, AC:  $y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$  e  $C(0, 3 + \sqrt{3})$ .

48.2  $\overline{AB} = B - A = (-3, -2)$

$$m_{AB} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Logo,  $m_t = -\frac{3}{2}$ .

Assim, t:  $y = -\frac{3}{2}x + b$ .

Como  $B \in t: 1 = -\frac{3}{2} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -2$

Logo, t:  $y = -\frac{3}{2}x - 2$ .

49.

49.1  $\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

Logo, o raio da circunferência é  $\frac{\sqrt{41}}{2}$ .

Seja C o ponto médio de [AB].

$$\text{Então, } C = \left( \frac{3-1}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = \left( 1, \frac{3}{2} \right).$$

C é o centro da circunferência.

Então, uma equação da circunferência de diâmetro [AB] é:

$$(x-1)^2 + \left( y - \frac{3}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{41}}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left( y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{41}{4}$$

$$49.2. \overline{AB} = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$$

$$\text{O declive da reta AB é dado por } m = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}.$$

A inclinação da reta AB é  $\alpha$  tal que  $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{4}$  e  $0 \leq \alpha < \pi$ , ou seja,  $\alpha \approx 2,25$  radianos.

49.3. Uma vez que o declive da reta AB é  $-\frac{5}{4}$ , o declive de uma reta qualquer perpendicular à reta AB é  $\frac{4}{5}$ .

Assim, a equação pedida é da forma  $y = \frac{4}{5}x + b$ .

Como  $E(1, 1)$  pertence a esta reta, tem-se:

$$1 = \frac{4}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

Logo, a equação pedida é  $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$ .

$$49.4. \overline{AF} = (-1, -2) - (3, -1) = (-4, -1)$$

$$\overline{BF} = (-1, -2) - (-1, 4) = (0, -6)$$

$$\|\overline{AF}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\overline{BF}\| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$$

$$\overline{AF} \cdot \overline{BF} = -4 \times 0 + (-1) \times (-6) = 6$$

Assim, sendo  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas AF e BF, tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{|6|}{\sqrt{17} \times 6} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Logo,  $\alpha \approx 75,96^\circ$ .

49.5. Seja  $\beta = (\widehat{CA}, \widehat{CD})$ .

$$\frac{2\pi}{\frac{41}{4}\pi} = \frac{\beta}{\frac{41\pi}{24}} \Leftrightarrow \frac{8}{41} = \frac{24\beta}{41\pi}$$

$$\Leftrightarrow 24\beta = \frac{8 \times 41\pi}{41}$$

$$\Leftrightarrow 24\beta = 8\pi$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{8\pi}{24}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{DC} = \|\overline{AC}\| \|\overline{DC}\| \cos \beta =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{41}{4} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{41}{8}$$

$$49.6. \overline{AC} = C - A = \left( 1, \frac{3}{2} \right) - (3, -1) = \left( -2, \frac{5}{2} \right)$$

$$m_{AC} = \frac{\frac{5}{2}}{-2} = -\frac{5}{4}$$

Logo,  $m_t = \frac{4}{5}$ .

Assim,  $t: y = \frac{4}{5}x + b$ .

$$A \in t, \text{ logo } -1 = \frac{4}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{17}{5}$$

$$\text{Então, } t: y = \frac{4}{5}x - \frac{17}{5}.$$

50. Opção (C)

$x^2 + y^2 = 3$  é uma equação da circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{3}$ .

A reta  $r$  é tangente a esta circunferência no ponto de coordenadas  $(\sqrt{3}, 0)$ , que é um dos pontos de interseção da reta com o eixo  $Ox$ . Logo,  $r: x = \sqrt{3}$  e um vetor diretor da reta  $r$  é  $\vec{r}(0, 1)$ .

Seja  $P(x, y)$  um ponto da reta  $s$ .

$$\text{Assim, } (1, \sqrt{2}) \cdot (x-1, y-\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 + \sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ que é a equação reduzida da reta } s.$$

Como o declive da reta  $s$  é  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , um vetor diretor desta reta é  $\vec{s}(-2, \sqrt{2})$ .

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (0, 1) \cdot (-2, \sqrt{2}) = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{r}\| = 1$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$$

Logo, sendo  $\alpha$  a amplitude, em graus, do ângulo das duas retas,

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1 \times \sqrt{6}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ) \text{ e, portanto, } \alpha \approx 55^\circ.$$

51. Opção (A)

$$\overline{AE} \cdot \overline{ED} =$$

$$= (\overline{AB} + \overline{BE}) \cdot (\overline{EC} + \overline{CD}) =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{EC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BE} \cdot \overline{EC} + \overline{BE} \cdot \overline{CD} =$$

$$= 0 + a \times a \times \cos 180^\circ + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \cos 0^\circ + 0 =$$

$$= -a^2 + \frac{a^2}{4} =$$

$$= -\frac{3}{4}a^2$$

52.  $\overline{BP} \cdot \overline{CQ} =$

$$= (\overline{BA} + \overline{AP}) \cdot (\overline{CA} + \overline{AQ}) =$$

$$= \overline{BA} \cdot \overline{CA} + \overline{BA} \cdot \overline{AQ} + \overline{AP} \cdot \overline{CA} + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} =$$

$$= 0 + \|\overline{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\overline{AB}\| \times \cos 180^\circ + \|\overline{AB}\| \times \frac{1}{2} \|\overline{AB}\| \times \cos 180^\circ + 0 =$$

$$= -\frac{1}{2} \|\overline{AB}\|^2 - \frac{1}{2} \|\overline{AB}\|^2 =$$

$$= -\|\overline{AB}\|^2$$

53.

53.1. Seja  $C(a, b, c)$ .

$$\overline{OC} = 2\overline{OA}$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) - (0, 0, 0) = 2((1, 2, 3) - (0, 0, 0))$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = 2(1, 2, 3)$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (2, 4, 6)$$

Logo,  $C(2, 4, 6)$ .

$$D = \left( \frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (2, -1, 1)$$

53.2.  $\overline{CD} = (2, -1, 1) - (2, 4, 6) = (0, -5, -5)$

Logo, uma equação vetorial da reta CD é

$$(x, y, z) = (2, 4, 6) + k(0, -5, -5), k \in \mathbb{R}.$$

**53.3.**  $\overline{AB} = (3, -4, -1) - (1, 2, 3) = (2, -6, -4)$   
 Assim,  $AB: (x, y, z) = (1, 2, 3) + s(2, -6, -4), s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2s \\ 4 - 5k = 2 - 6s \\ 6 - 5k = 3 - 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ 5k = 2 + 6 \times \frac{1}{2} \\ 5k = 3 + 4 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Assim, o ponto de interseção das retas  $CD$  e  $AB$  tem coordenadas  $(2, -1, 1)$ , ou seja, trata-se do ponto  $D$ .

**53.4.**  $\overline{CD} = (0, -5, -5)$   
 $\overline{AB} = (2, -6, -4)$   
 $\overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0 + 30 + 20 = 50$   
 $\|\overline{CD}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$   
 $\|\overline{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{56}$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $CD$  e  $AB$ .

$$\cos \alpha = \frac{50}{\sqrt{50} \times \sqrt{56}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Logo,  $\alpha \approx 19^\circ$ .

**53.5. a)** Um vetor normal ao plano  $AOB$  é  $\vec{n}(1, 1, -1)$ .  
 Como o plano  $\alpha$  é paralelo ao plano  $AOB$ , então  $\vec{n}$  é também um vetor normal ao plano  $\alpha$ .  
 Além disso, o ponto  $E$  pertence ao plano  $\alpha$ .  
 Assim, uma equação do plano  $\alpha$  é:  
 $1(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow x - 1 + y - 1 - z + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$

**b)** Seja  $r$  uma reta perpendicular ao plano  $AOB$  que passa pelo ponto  $E$ .  
 Um vetor diretor da reta  $r$  é um vetor normal ao plano  $AOB$ , por exemplo,  $(1, 1, -1)$ .  
 Assim, uma equação vetorial da reta  $r$  é  
 $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$   
 Os pontos da reta  $r$  são da forma  
 $(1 + k, 1 + k, 1 - k), k \in \mathbb{R}$ .  
 Substituindo na equação do plano  $AOB$ , obtém-se:  
 $1 + k + 1 + k - 1 + k = 0 \Leftrightarrow 3k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$   
 Logo, o ponto  $P$  de interseção da reta  $r$  com o plano  $AOB$  tem coordenadas  $(1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ .

$$\begin{aligned} \text{Então, } \overline{EP} &= \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Ou seja, a distância entre o ponto  $E$  e o plano  $AOB$  é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**54.**  
**54.1.**  $O(0, 0, 0)$   
 $D(3, 4, 4)$ , por se tratar do centro da superfície esférica referida no enunciado.  
 $G(0, 0, z)$ , uma vez que a aresta  $[OG]$  está contida no eixo  $Oz$  e  $G$  pertence à superfície esférica.  
 Logo,  $(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 + (z - 4)^2 = 25$   
 $\Leftrightarrow (z - 4)^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow z - 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow z = 4$

Assim,  $G(0, 0, 4)$ .  
 $A = O + \overline{GD} = (0, 0, 0) + (3, 4, 0) = (3, 4, 0)$   
 $\overline{OG} = 4 = \overline{AD}$ , logo  $\overline{AB} = 8 = \overline{OC}$ .  
 Assim,  $C(0, 8, 0)$ .  
 $F = G + (0, 8, 0) = (0, 8, 4)$   
 De forma análoga se conclui que  $E(3, 12, 4)$  e  $B(3, 12, 0)$ .

A projeção ortogonal de  $H$  no plano  $xOy$  é o ponto médio de  $[OA]$ , ou seja, o ponto de coordenadas  $(\frac{3}{2}, 2, 0)$ .

Logo,  $H(\frac{3}{2}, 2, 8)$ .

A projeção ortogonal de  $I$  no plano  $xOy$  é o ponto médio de  $[CB]$ , ou seja, o ponto de coordenadas  $(\frac{3}{2}, 10, 0)$ .

Logo,  $I(\frac{3}{2}, 10, 8)$ .

**54.2.**  $H(\frac{3}{2}, 2, 8)$   
 $D(3, 4, 4)$   
 $\overline{HD} = (\frac{3}{2}, 2, -4)$  é um vetor diretor da reta  $HD$  e é perpendicular a qualquer vetor normal ao plano  $\alpha$ .  
 Um vetor normal ao plano  $\alpha$  é  $(m, -m, m - 1)$ .  
 Assim,  $(\frac{3}{2}, 2, -4) \cdot (m, -m, m - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2}m - 2m - 4m + 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow -\frac{9}{2}m = -4$   
 $\Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$

**54.3.**  $\vec{u}(4, 0, 3)$  é um vetor normal ao plano  $FGA$  e a qualquer outro plano que seja paralelo a  $FGA$ .  
 Assim, uma equação cartesiana do plano paralelo a  $FGA$  e que contém o ponto  $C$  é dada por:  
 $4(x - 0) + 0(y - 8) + 3(z - 0) = 0$   
 $\Leftrightarrow 4x + 3z = 0$

**54.4.**  $\overline{OE} = (3, 12, 4)$   
 Logo,  $OE: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(3, 12, 4), k \in \mathbb{R}$   
 Assim, os pontos da reta  $OE$  são da forma  $(3k, 12k, 4k), k \in \mathbb{R}$ .  
 Substituindo na equação do plano  $FGA$ , tem-se:  
 $4 \times 3k + 3 \times 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow 24k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$   
 Logo, o ponto de interseção da reta  $OE$  com o plano  $FGA$  tem coordenadas  $(\frac{3}{2}, 6, 2)$ .

$$54.5. \overline{IE} = (3, 12, 4) - \left(\frac{3}{2}, 10, 8\right) = \left(\frac{3}{2}, 2, -4\right)$$

$$IE: (x, y, z) = (3, 12, 4) + k\left(\frac{3}{2}, 2, -4\right), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos  $P$  da reta  $IE$  são da forma

$$\left(3 + \frac{3}{2}k, 12 + 2k, 4 - 4k\right), k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \overline{BP} &= \left(3 + \frac{3}{2}k, 12 + 2k, 4 - 4k\right) - (3, 12, 0) = \\ &= \left(\frac{3}{2}k, 2k, 4 - 4k\right), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\overline{IE} \cdot \overline{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}, 2, -4\right) \cdot \left(\frac{3}{2}k, 2k, 4 - 4k\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}k + 4k - 16 + 16k = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{89}{4}k = 16$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{64}{89}$$

Logo,  $\overline{BP} = \left(\frac{96}{89}, \frac{128}{89}, \frac{100}{89}\right)$ , que é colinear com  $(24, 32, 25)$ .

Assim, uma equação vetorial da reta que passa pelo vértice  $B$  e é concorrente e perpendicular à reta  $IE$  é, por exemplo,  $(x, y, z) = (3, 12, 0) + k(24, 32, 25)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

$$54.6. a) \overline{OE} = (3, 12, 4)$$

$$\overline{OG} = (0, 0, 4)$$

$$\overline{OE} \cdot \overline{OG} = 0 + 0 + 16 = 16$$

$$\|\overline{OE}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\|\overline{OG}\| = 4$$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $OE$  e  $OG$ .

$$\cos \alpha = \frac{16}{13 \times 4} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

Logo,  $\alpha \approx 72,1^\circ$ .

$$b) \overline{OE} = (3, 12, 4)$$

$$\overline{OA} = (3, 4, 0)$$

$$\overline{OE} \cdot \overline{OA} = 9 + 48 + 0 = 57$$

$$\|\overline{OE}\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\|\overline{OA}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

Seja  $\beta$  a amplitude do ângulo formado pelas retas  $OE$  e  $OA$ .

$$\cos \beta = \frac{57}{13 \times 5} \quad (0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ)$$

Logo,  $\beta \approx 28,7^\circ$ .

$$54.7. C(0, 8, 0)$$

$$D(3, 4, 4)$$

$$\overline{CD} = D - C = (3, -4, 4)$$

O vetor  $\overline{CD}$  é um vetor normal ao plano mediador de  $[CD]$ .

Seja  $M$  o ponto médio de  $[CD]$ .

$$M = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{8+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 6, 2\right)$$

Assim, uma equação do plano mediador de  $[CD]$  é:

$$3\left(x - \frac{3}{2}\right) - 4(y - 6) + 4(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{9}{2} - 4y + 24 + 4z - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4y + 4z + \frac{23}{2} = 0$$

$$54.8. D(3, 4, 4)$$

$$G(0, 0, 4)$$

$$\overline{DG} = G - D = (-3, -4, 0)$$

Assim, uma equação cartesiana do plano tangente, no ponto  $G$ , à superfície esférica de centro  $D$  que passa em  $G$  é:

$$-3(x - 0) - 4(y - 0) + 0(z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 4y = 0$$

54.9. Seja  $r$  a reta perpendicular ao plano  $FGA$  e que passa no ponto  $P$ .

$$r: (x, y, z) = (2, 1, 3) + k(4, 0, 3), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos da reta  $r$  são da forma  $(2 + 4k, 1, 3 + 3k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Fazendo a interseção da reta  $r$  com o plano  $FGA$ :

$$4(2 + 4k) + 3(3 + 3k) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 16k + 9 + 9k - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25k = -5$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$$

O ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $FGA$

tem coordenadas  $\left(\frac{6}{5}, 1, \frac{12}{5}\right)$ .

Assim, a distância do ponto  $P$  ao plano  $FGA$  é:

$$\sqrt{\left(\frac{6}{5} - 2\right)^2 + (1 - 1)^2 + \left(\frac{12}{5} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$$