

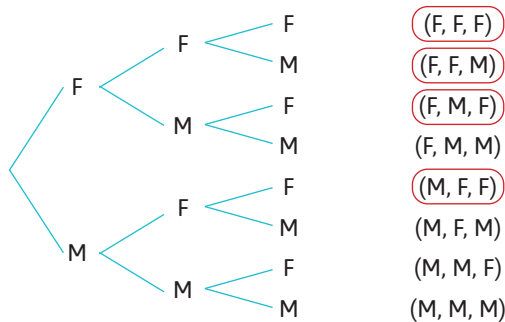
3. Contagem

Recorda – páginas 6 e 7

1. Utilizando a tabela de dupla entrada, construída ao lado na página 6 do manual, verificamos que temos sete números pares cuja soma dos seus algarismos é um número primo, dos 36 números que é possível formar com dois algarismos, usando os algarismos inscritos nas faces de um dado cúbico regular (1, 2, 3, 4, 5, 6): 12, 32, 52, 14, 34, 16, 56.

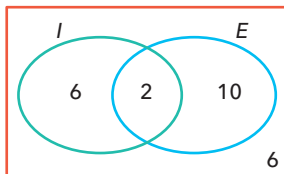
2. F – sexo feminino
M – sexo masculino

1º filho 2º filho 3º filho Resultados possíveis



Existem quatro casos em que pelo menos dois filhos são do sexo feminino.

3.



I – Inglês
E – Economia A
 $24 - 6 = 18$
 $8 + 12 = 20$
 $20 - 18 = 2$ estão inscritos em ambas as disciplinas.
 $8 - 2 = 6$ estão inscritos apenas em Inglês.
 $12 - 2 = 10$ estão inscritos apenas em Economia A.

4. $A =]-2, \pi[$, $B = [-\sqrt{5}, 4]$

a) $A \cap B =]-2, \pi[\cap [-\sqrt{5}, 4] =]-2, \pi[= A$

b) $A \cup B =]-2, \pi[\cup [-\sqrt{5}, 4] = [-\sqrt{5}, 4] = B$

c) $\bar{A} =]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[$

d) $\bar{B} =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[$

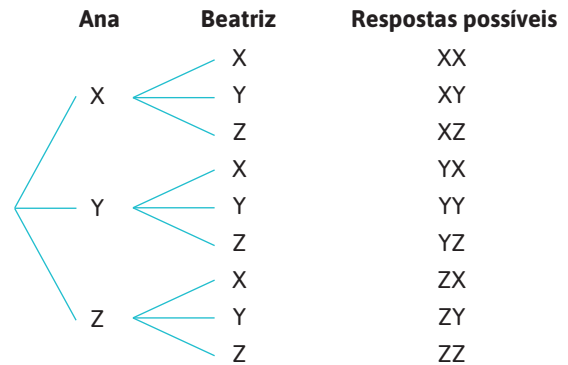
e) $\bar{A} \cap \bar{B} = (]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[) \cap (]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[) =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[= \bar{B}$

f) $\bar{A} \cup \bar{B} = (]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[) \cup (]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]4, +\infty[) =]-\infty, -2] \cup [\pi, +\infty[= \bar{A}$

Capítulo 1 – Princípios gerais de contagem

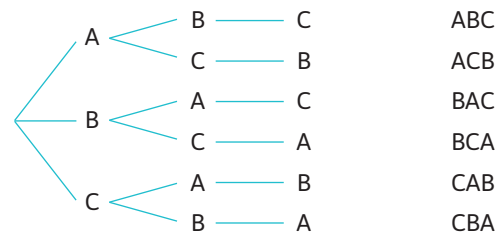
Tarefa – O baile – página 8

a) A Ana pode responder local X, Y ou Z e, por cada uma das respostas da Ana, a Beatriz também pode responder X, Y ou Z. Assim:



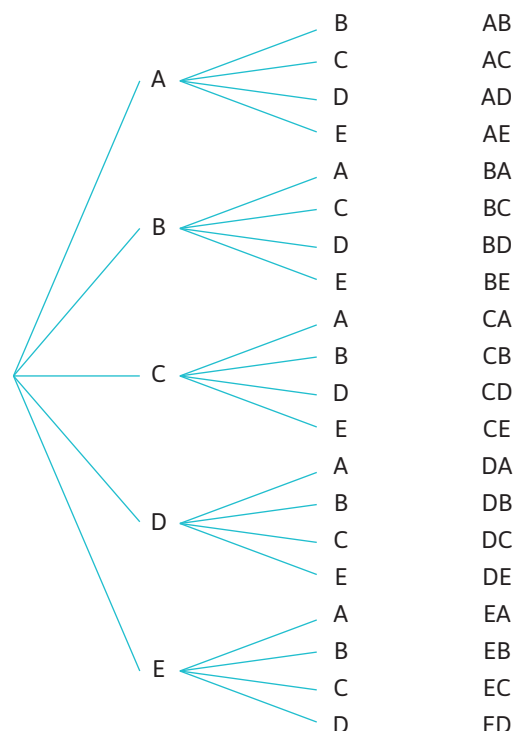
9 respostas possíveis
($3 \times 3 = 9$)

b) 1º lugar 2º lugar 3º lugar Disposições possíveis



6 disposições possíveis
($3 \times 2 \times 1 = 6$)

c) Animação Decoração Responsáveis



20 maneiras possíveis
($5 \times 4 = 20$)

- d) Observa que, se a tarefa é a mesma, podemos utilizar o esquema anterior, em que concluímos existirem 20 maneiras de escolher dois dos cinco amigos para realizarem duas tarefas diferentes, e dividir por 2, pois observa-se que a equipa (AB) (a Ana trata da animação e a Beatriz da decoração) é a mesma equipa (BA) (em que a Beatriz trata da animação e a Ana da decoração), pois a tarefa é a mesma.

Assim, concluímos existirem 10 maneiras distintas de escolher 2 dos 5 amigos para realizar uma mesma tarefa.

$$\left(\frac{5 \times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10\right)$$

Exercícios de margem – páginas 10 a 15

1.
 - a) $2 \times 3 \times 2 = 12$ menus
 - b) $2 \times 1 \times 2 = 4$ menus
2. $12 \times 11 = 132$ maneiras
3. $2 \times (5 \times 1) \times (4 \times 1) \times (3 \times 1) \times (2 \times 1) \times (1 \times 1) = 240$ maneiras
4.
 - a) $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos
 - b) $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos
5. 5 Romance (R); 4 Banda Desenhada (BD) e 3 Policiais (P)
 $1 \text{ R e } 1 \text{ BD} \text{ ou } 1 \text{ R e } 1 \text{ P} \text{ ou } 1 \text{ BD e } 1 \text{ R}$
 $5 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 3 = 47$
6. $\underbrace{2 \times 1}_{\text{lugares à frente}} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{\text{lugares atrás}} = 12$ maneiras
7. $5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 + 10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 = 250\,000$ códigos
8.

Cálculo auxiliar
 $8 + 8 + 8 + x < 27 \Leftrightarrow x < 27 - 24 \Leftrightarrow x < 3$

Logo:
 $4 \times (1 \times 1 \times 1 \times 3) = 12$ códigos
 \uparrow
 0 ou 1 ou 2
9. Copas – rei de paus ou rei de espadas – espadas:
 $13 \times 2 \times 13$
 Copas exceto rei – rei de copas – espadas:
 $12 \times 1 \times 13$
 Copas – rei de espadas – espadas exceto rei:
 $13 \times 1 \times 12$
 Logo:
 $13 \times 2 \times 13 + 12 \times 1 \times 13 + 13 \times 1 \times 12 = 650$ extrações

10. Sem vermelho: $9 \times 8 \times 7$
 Com a faixa central vermelha: $9 \times 1 \times 9$
 Com uma das faixas dos extremos vermelha:
 $2 \times 1 \times 9 \times 8$
 Com duas faixas vermelhas: $1 \times 9 \times 1$
 Logo:
 $9 \times 8 \times 7 + 9 \times 1 \times 9 + 2 \times 1 \times 9 \times 8 + 1 \times 9 \times 1 = 738$ bandeiras

11. Começando por 1, 2 ou 3: $3 \times 9 \times 8 \times 7$
 Começando por 4: $1 \times 5 \times 8 \times 7$
 Logo:
 $3 \times 9 \times 8 \times 7 + 1 \times 5 \times 8 \times 7 = 1792$ números

12.
 - a) $(1 \times 1 \times 6) \times 3 = 18$
 - b) $7 \times 7 \times 3 = 147$
 - c) $4 \times 4 \times 4 = 64$

13.
 - a) Números entre 2400 e 2999: $1 \times 6 \times 8 \times 7$
 Números entre 3000 e 9999: $7 \times 9 \times 8 \times 7$
 Logo:
 $1 \times 6 \times 8 \times 7 + 7 \times 9 \times 8 \times 7 = 3864$ números
 - b) Números entre 2400 e 2499: $1 \times 1 \times 7 \times 7$
 Números entre 2500 e 2999: $1 \times 3 \times 7 \times 7$
 Números entre 3000 e 9999: $4 \times 7 \times 7 \times 7$
 Logo:
 $1 \times 1 \times 7 \times 7 + 1 \times 3 \times 7 \times 7 + 4 \times 7 \times 7 \times 7 = 1568$
 Mas 2400 não é maior que 2400, logo a resposta é $1568 - 1 = 1567$ números.
 - c) Números entre 2400 e 2999: $1 \times 4 \times 5 \times 4$
 Números entre 3000 e 9999: $4 \times 6 \times 5 \times 4$
 Logo:
 $1 \times 4 \times 5 \times 4 + 4 \times 6 \times 5 \times 4 = 560$ números

14.
 - a) $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$
 Logo:
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ divisores
 - b) $1716 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 13$
 Logo:
 $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ divisores
 - c) $75\,600 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$
 Logo:
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ divisores

Aprende fazendo 1 – páginas 16 e 17

1. Opção (C)
 $10 \times 5 \times 5 \times 10 = 2500$ códigos
2. Opção (C)
 $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$ maneiras

3.

a) $4 \times 4 = 16$ maneiras distintas

b) $4 \times 3 = 12$ maneiras distintas

4.

a) $26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456\,976$

b) $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 1\,757\,600$

5. Na primeira posição, não é possível o algarismo zero e, para cada uma das três últimas posições, só há uma opção (o algarismo usado nas primeiras três posições):

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 = 9000$$

6. $30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 235\,989\,936\,000$

7.

a) $5 + 5 \times 5 + 5 \times 5 \times 5 = 155$ números naturais

b) $5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 = 85$ números naturais

8. $\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{número de maneiras de distribuir os quatro amigos condutores pelas quatro motas}} \times \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{\text{número de maneiras de distribuir os três amigos, que não conduzem, pelos quatro lugares das motas disponíveis}} = 576$

9.

a) $9 \times 9 \times 8 = 648$

b) $9 \times 8 \times 7 = 504$

c) $8 \times 7 \times 6 = 336$

d) $9 \times 8 \times 7 + 8 \times 8 \times 7 - 8 \times 7 \times 6 = 616$

10. Opção (B)

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

O número de divisores de 2310 é

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32.$$

11. Opção (D)

Ou começam em 5:

$$\frac{5}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{\quad}{9} \times \frac{\quad}{9} \times \frac{0, 2, 4, 6, 8}{5} \times \frac{\quad}{3}$$

número de posições possíveis para o outro algarismo 5

Ou começam em 6, 7, 8 ou 9:

$$\frac{6, 7, 8, 9}{4} \times \frac{5}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{\quad}{9} \times \frac{0, 2, 4, 6, 8}{5} \times \frac{\quad}{3}$$

três casos onde os dois algarismos 5 podem ser colocados

$$\begin{array}{cccc} \underline{X} & 5 & 5 & \underline{X} \\ \underline{X} & \underline{\quad} & 5 & 5 & \underline{X} \\ \underline{X} & 5 & \underline{\quad} & 5 & \underline{X} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &1 \times 1 \times 9 \times 9 \times 5 \times 3 + 4 \times 1 \times 1 \times 9 \times 5 \times 3 = \\ &= 1215 + 540 = \\ &= 1755 \end{aligned}$$

Capítulo 2 – Arranjos e combinações

Tarefa – Ainda o baile – página 18

a) Cada um dos 15 amigos tem três hipóteses de resposta, logo, no total, existirão $\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}_{15 \text{ amigos}} = 3^{15}$ respostas possíveis.

b) O primeiro amigo a dispor-se para a fotografia tem 15 possibilidades e, por cada uma destas, o seguinte amigo já só tem 14 possibilidades, e o seguinte 13, ... e assim sucessivamente até que ao último amigo resta uma opção.

Assim, uma expressão que dá o número de maneiras de os 15 amigos se disporem lado a lado para a fotografia é $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

c) Como se trata de três tarefas distintas, para tratar, por exemplo, da animação temos 15 possibilidades e, por cada uma destas, temos 14 possibilidades de escolher um amigo que trate do catering e, por cada maneira de escolher quem vai tratar da animação e do catering, temos 13 hipóteses de escolher o amigo que vai tratar da decoração. Assim, no total temos, $15 \times 14 \times 13$, isto é, 2730 maneiras de escolher três dos 15 amigos para realizar as três tarefas distintas.

d) Observe-se, da alínea anterior, que existem 2730 maneiras de escolher três dos 15 amigos para realizar três tarefas distintas. Nestas 2730 maneiras estavam contabilizadas, por exemplo, as maneiras ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA como maneiras diferentes, pois, por exemplo, ABC significa a Ana responsável pela animação, a Beatriz pelo catering e a Carolina pela decoração, enquanto CAB significa a Carolina responsável pela animação, a Ana pelo catering e a Beatriz pela decoração.

No entanto, se a tarefa for a mesma, os casos ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA representam o mesmo grupo de três amigos e, portanto, são iguais.

Observe-se, então, que sendo a tarefa a mesma, cada conjunto de três amigos está a ser contabilizado seis vezes mais. Assim, $\frac{2730}{6} = 455$ é o número de maneiras distintas de escolher três dos 15 amigos para realizar uma mesma tarefa.

Exercícios de margem – páginas 18 a 38

15. ${}^{26}A'_3 = 17\,576$ sequências

16. $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = {}^6A'_4 = 1296$

17. ${}^5A'_{10} = 5^{10} = 9\,765\,625$ chaves

18. $2 + {}^2A'_2 + {}^2A'_3 + {}^2A'_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ sequências

19. ${}^4A'_5 = 4^5 = 1024$ maneiras

20. ${}^2A'_7 = 2^7 = 128$ subconjuntos

21. $2^{12} - 1 - 12 = 4083$ cocktails

22. $2^7 - 1 - 7 = 120$ maneiras

23.

- a) $4! = 24$ formas
 b) $8! = 40\,320$ formas

24.

- a) $9! = 362\,880$ maneiras
 b) $5! \times 4! = 2880$ maneiras
 c) $2 \times 5! \times 4! = 5760$ maneiras
 d) $4! \times 5! \times 6 = 17\,280$ maneiras
 e) ${}^5A_2 \times 7! = 100\,800$ maneiras

25.

- a) $4! = 24$ anagramas
 b) $6! = 720$ anagramas

26. $6! \times 5! = 86\,400$ maneiras

27.

- a) $12! = 479\,001\,600$ formas
 b) $6! \times 4! \times 4! = 414\,720$ formas
 c) $6! \times 4! \times 2! \times 3! = 207\,360$ formas

28.

- a) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$
 b) $\frac{2027!}{2026!} = \frac{2027 \times 2026!}{2026!} = 2027$
 c) $\frac{20! + 18!}{17!} = \frac{20!}{17!} + \frac{18!}{17!} =$
 $= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} + \frac{18 \times 17!}{17!} =$
 $= 20 \times 19 \times 18 + 18 = 6858$

29.

- a) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$
 b) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+2)(n+1)\cancel{(n-1)!}} =$
 $= \frac{1}{(n^2 + 3n + 2)n} = \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$
 c) $\frac{(n+1)! + (n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} =$
 $= n + 1 + \frac{1}{n} = \frac{n^2 + n + 1}{n}$

30.

$$12n! + 5(n+1)! = (n+2)!$$

$$\Leftrightarrow 12n! + 5(n+1) \times n! = (n+2) \times (n+1) \times n!$$

$$\Leftrightarrow 12 + 5(n+1) = (n+2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 12 + 5n + 5 = n^2 + 2n + n + 2$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 5n + 2 - 5 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-15)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 5 \vee n = -3$$

Como $n \geq 0$, então $n = 5$.

31.

- a) $12 \times 11 \times 10 \times 9 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = \frac{12!}{8!}$
 b) $2025 \times 2026 \times 2027 = \frac{2027 \times 2026 \times 2025 \times 2024!}{2024!} =$
 $= \frac{2027!}{2024!}$
 c) $(n+2) \times (n+1) \times n = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$
 d) $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) =$
 $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = \frac{n!}{(n-5)!}$
 e) $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) =$
 $= \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$

32. ${}^{26}A_3 = 15\,600$ seqüências

33. ${}^{12}A_2 = 132$ maneiras

34. ${}^6A_4 = 360$ formas

35. ${}^{12}A_3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

36. ${}^5A_4 \times {}^5A_2 \times 4! = 57\,600$ formas

37. ${}^5C_2 = 10$ subconjuntos

38.

- a) ${}^{10}C_3 = 120$
 b) ${}^{10}C_7 = 120$
 c) ${}^{10}C_{10} = 1$

39. ${}^{50}C_5 \times {}^{12}C_2 = 139\,838\,160$

40.

$$\frac{100 \times 99 \times \dots \times 22 \times 21}{80!} =$$

$$= \frac{100 \times 99 \times \dots \times 22 \times 21 \times 20!}{80! \times 20!} = \frac{100!}{80! \times 20!} = {}^{100}C_{80}$$

${}^{100}C_{80}$ (ou ${}^{100}C_{20}$) é um número natural, pois representa o número de subconjuntos de 80 elementos de um conjunto com 100 elementos (ou o número de subconjuntos de 20 elementos de um conjunto com 100 elementos).

41. ${}^{40}C_{10} = 847\,660\,528$ mãos

42.

- a) ${}^{20}C_{15} = 15\,504$ possibilidades
 b) $1 \times 1 \times {}^{18}C_{13} = 8568$ possibilidades
 c) $2 \times {}^{18}C_{14} + 1 \times 1 \times {}^{18}C_{13} = 14\,688$ possibilidades
 d) ${}^{10}C_5 \times {}^{10}C_{10} = 252$ possibilidades

43. ${}^5C_4 \times {}^{30}C_{21} + {}^5C_3 \times {}^{30}C_{22} + {}^5C_2 \times {}^{30}C_{23} =$
 $= 150\,423\,000$ escolhas

44. ${}^5C_1 \times {}^8C_2 + {}^5C_2 \times {}^8C_1 = 140 + 80 = 220$

45.

a) ${}^7C_3 \times 4! = 840$ números

b) ${}^6C_3 \times 3! \times 3 = 360$ números

46. 9A_4 é o número de maneiras distintas de escolher ordenadamente as quatro amigas a quem a Helena vai oferecer um dos diferentes colares. Por cada uma destas maneiras, existem 5A_3 modos distintos de escolher ordenadamente as amigas a quem a Helena vai oferecer cada uma das diferentes pulseiras. Assim, ${}^9A_4 \times {}^5A_3$ é o número de maneiras diferentes que a Helena tem de presentear as amigas.

9C_7 é o número de maneiras de escolher as sete amigas que vão ser presenteadas, de entre as nove amigas. Por cada uma destas maneiras, existem 7A_4 modos distintos de escolher ordenadamente quatro das sete amigas que vão receber cada um dos colares. Depois de escolhidas as quatro amigas que vão receber os colares, existem $3!$ maneiras diferentes de distribuir as três pulseiras pelas três amigas, ou seja, ${}^9C_7 \times {}^7A_4 \times 3!$ é uma resposta correta.

47. Pretende-se colocar duas peças no tabuleiro, uma peça por cada casa.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou as duas peças são da mesma cor ou as duas peças são de cores diferentes.

Vejamos o primeiro caso. Existem três hipóteses distintas para a escolha da cor (verde, amarela ou encarnada). Por cada uma destas hipóteses, existem ${}^{12}C_2$ maneiras distintas de escolher quais serão as duas casas, de entre as doze, que serão ocupadas pelas duas peças.

Assim, $3 \times {}^{12}C_2$ corresponde ao número de maneiras possíveis de colocar duas peças com a mesma cor no tabuleiro.

Em relação ao segundo caso, existem 3C_2 modos distintos de escolher as duas cores, de entre as três possíveis, das duas peças (cores diferentes). Por cada uma destas maneiras, existem ${}^{12}A_2$ modos distintos de escolher ordenadamente as duas casas, de entre as doze onde vão ser colocadas as duas peças distintas.

Assim, ${}^3C_2 \times {}^{12}A_2$ corresponde ao número de configurações coloridas diferentes em que as duas peças têm cores distintas.

Daqui se conclui que $3 \times {}^{12}C_2 + {}^3C_2 \times {}^{12}A_2$ é uma expressão que permite determinar o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter-se.

48.

a) $\frac{10!}{4!4!} = 6300$ anagramas

Outro processo: ${}^{10}C_4 \times {}^6C_4 \times 2! = 6300$

b) $\frac{10!}{2!3!2!} = 151\,200$ anagramas

Outro processo: ${}^{10}C_2 \times {}^8C_3 \times {}^5C_2 \times 3! = 151\,200$

c) $\frac{11!}{5!2!2!} = 83\,160$ anagramas

Outro processo: ${}^{11}C_5 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2! = 83\,160$

49.

a) ${}^{12}C_5 = 792$ maneiras

b) $3 \times 8 = 24$ maneiras

50.

a) $10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 \times 5 \times 10 = 1\,250\,000$ códigos

b) $10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 3 = 3\,750\,000$ códigos

c) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 78\,125$ códigos

d) ${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times 9^2 \times 5^3 = 2\,126\,250$ códigos

e) ${}^7C_3 \times 5^3 \times 10^4 = 43\,750\,000$ códigos

51.

a) ${}^4C_4 \times {}^{48}C_1 = 48$ maneiras

b) ${}^4C_2 \times {}^{48}C_3 = 103\,776$ maneiras

c) ${}^{26}C_4 \times {}^{26}C_1 = 388\,700$ maneiras

d) ${}^4C_2 \times {}^{48}C_3 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_2 + {}^4C_4 \times {}^{48}C_1 = 108\,336$ maneiras

52.

a) ${}^{12}C_3 \times {}^4C_2 = 1320$

b) Existem três tipos de casos mutuamente exclusivos:

- duas figuras não de copas e três copas não figuras;
- uma figura de copas e uma figura não de copas e duas copas não figuras e uma não copa nem figura;
- duas figuras de copas e uma copa não figura e duas nem copas nem figuras.

$${}^9C_2 \times {}^{10}C_3 + {}^3C_1 \times {}^9C_1 \times {}^{10}C_2 \times {}^{30}C_1 + {}^3C_2 \times {}^{10}C_1 \times {}^{30}C_2 = 53\,820 \text{ maneiras}$$

53. ${}^nC_2 = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 78$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 78$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 156$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -12 \vee n = 13$$

Como $n \geq 2$, então $n = 13$.

54.

a) $4 \times 12 \times 12 \times 16 = 9216$ maneiras

b) $26 \times 26 \times 13 \times 13 = 114\,244$ maneiras

c) Existem dois casos mutuamente exclusivos:

- sair um ás vermelho, duas cartas vermelhas que não ases e uma carta preta que não ás;
- sair um ás preto, e três cartas vermelhas que não ases.

Para o primeiro caso existem $2 \times 24 \times 24 \times 24 \times 4 \times 3$ possibilidades.

Para o segundo caso existem $2 \times 24 \times 24 \times 24 \times 4$ possibilidades.

Assim, o número de maneiras diferentes de extrair exatamente um rei e exatamente três cartas pretas, não necessariamente por esta ordem, é igual a:

$$2 \times 24 \times 24 \times 24 \times 4 \times 3 + 2 \times 24 \times 24 \times 24 \times 4 = 442\,368$$

Aprende fazendo 2 – páginas 39 a 41

1. Opção (A)
 ${}^{15}C_6$ é o número de maneiras de escolher os seis compartimentos, dos 15, para colocar os seis refrigerantes que são iguais entre si.
2. Opção (A)
 ${}^5C_2 = 10$ cordas
3. ${}^{10}C_6 \times {}^4C_4 = 210$ maneiras
4. $3 \times 5! = 360$ modos
5.
 - a) ${}^{28}C_5 = 98\ 280$ formas
 - b)
 - i. ${}^{10}C_5 = 252$ comissões
 - ii. ${}^{28}C_5 - {}^{18}C_5 = 89\ 712$ comissões
 - iii. $1 \times {}^9C_2 \times {}^{18}C_2 = 5508$ comissões
6.
 - a) $3! \times 3! \times 2 = 72$ maneiras
 - b) $3! \times 4! = 144$ maneiras
 - c) $2! \times 2! \times 2! \times 3! = 48$ maneiras
7. Opção (C)
 $\frac{8! \times 4}{4! \times 4!} = 280$ números
8. Opção (B)
 $9! - 2! \times 8! = 282\ 240$
9.
 - a) $4^8 = 65\ 536$ maneiras
 - b) ${}^8C_4 \times 1^4 \times 3^4 = 5670$ casos
10. A resposta correta é a II.
 Se, nos quatro dadores escolhidos, pelo menos dois são do grupo O, então existem três possibilidades mutuamente exclusivas: exatamente dois dadores do grupo O, exatamente três dadores do grupo O ou quatro dadores do grupo O.
 ${}^{10}C_2 \times {}^{10}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher dois dadores do grupo O e dois dadores que não são do grupo O; ${}^{10}C_3 \times {}^{10}C_1$ é o número de maneiras diferentes de escolher três dadores do grupo O e um dador que não é do grupo O; ${}^{10}C_4$ é o número de modos distintos de escolher quatro dadores do grupo O.
 Assim, ${}^{10}C_2 \times {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 \times {}^{10}C_1 + {}^{10}C_4$ é o número de maneiras de escolher, pelo menos, dois dadores do grupo O.
 ${}^{20}C_4 - {}^{10}C_4 - {}^{10}C_1 \times {}^{10}C_3$ também seria uma resposta correta.
 ${}^{20}C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro dadores, de entre os 20, sem quaisquer restrições.
 ${}^{10}C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro dadores que não são do grupo O e ${}^{10}C_1 \times {}^{10}C_3$ é

o número de maneiras de escolher um dador do grupo O e três que não são do grupo O. Se ao número de possibilidades de escolher quaisquer quatro dadores retirarmos o número de possibilidades de não ter nenhum dador do grupo O e exatamente um dador do grupo O, obtemos o número de possibilidades de obtermos, pelo menos, dois dadores do grupo O.

$$\begin{aligned}
 11. \quad {}^nC_2 = 45 &\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \\
 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 45 \\
 &\Leftrightarrow n(n-1) = 90 \\
 &\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-90)}}{2} \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 19}{2} \\
 &\Leftrightarrow n = 10 \vee n = -9
 \end{aligned}$$

Como $n \geq 2$, então $n = 10$.
 São 10 participantes.

12. $n! \times m! \times (m+1) = n! \times (m+1)!$
13. $9! \times {}^{10}A_4 = 1\ 828\ 915\ 200$

Aprende Fazendo Global – páginas 44 a 51

1.
 - a)

R	D	V_1	V_2	V_3	V_4	
4! × 4! ×			6!	= 414 720		

 - 4! é o número de maneiras distintas de os quatro reis permutarem entre si;
 - 4! é o número de maneiras distintas de as quatro damas permutarem entre si;
 - 6! é o número de maneiras distintas de os blocos dos reis, do bloco das damas e dos quatro valetes permutarem entre si.
 - b) Existem três casos mutuamente exclusivos: saírem zero ases ou sair um ás ou saírem dois ases.
 - ${}^{48}C_5$ é o número de maneiras distintas de escolher cinco cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
 - ${}^4C_1 \times {}^{48}C_4$ é o número de maneiras distintas de escolher um ás e quatro cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
 - ${}^4C_2 \times {}^{48}C_3$ é o número de maneiras distintas de escolher dois ases e três cartas que não são ases sem que a ordem interesse.
 Assim, ${}^{48}C_5 + {}^4C_1 \times {}^{48}C_4 + {}^4C_2 \times {}^{48}C_3 = 2\ 594\ 400$ é o número pedido.

b) $4! \times 3! \times 8! = 5\,806\,080$



- 4! é o número de maneiras de os quatro avós se colocarem para a fotografia, permutando entre si;
- 3! é o número de maneiras de as três amigas se colocarem para a fotografia, permutando entre si;
- 8! é o número de maneiras de permutar as restantes seis pessoas entre si e também com o bloco dos avós e das amigas.

c) ${}^{13+n}C_2 = 210 \Leftrightarrow \frac{(13+n)!}{2! \times (13+n-2)!} = 210$
 $\Leftrightarrow \frac{(n+13) \times (n+12) \times (n+11)!}{2 \times (n+11)!} = 210$
 $\Leftrightarrow n^2 + 12n + 13n + 156 = 420$
 $\Leftrightarrow n^2 + 25n - 264 = 0$
 $\Leftrightarrow n = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 1 \times (-264)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow n = \frac{-25 + 41}{2} \vee n = \frac{-25 - 41}{2}$
 $\Leftrightarrow n = 8 \vee n = -33$

Juntaram-se à festa 8 amigos.

11. Opção (B)

Os números primos de 1 a 11 são 2, 3, 5, 7 e 11. Começamos por colocar uma bola amarela em cada uma das cinco caixas com um número primo e fica a sobrar uma bola amarela. Depois, colocamos uma bola branca em cada uma das seis caixas com um número não primo e ficam a sobrar duas bolas brancas.

Existem dois casos mutuamente exclusivos de maneira a colocar as três bolas restantes:

- as bolas brancas que sobram ficam juntas e a bola amarela fica em qualquer caixa: 11×11 maneiras;
- as bolas brancas que sobram ficam separadas e a bola amarela fica em qualquer caixa: ${}^{11}C_2 \times 11$.

Assim, o número pedido é igual a:

$$11 \times 11 + {}^{11}C_2 \times 11 = 726$$

12. Opção (A)

Se a todos os números naturais de cinco algarismos, que se podem formar com os algarismos de 0 a 5, retirarmos todos os números naturais de cinco algarismos diferentes, formados com os algarismos de 0 a 5, obtemos todos aqueles números de cinco algarismos formados com os algarismos de 0 a 5 que têm pelo menos dois algarismos iguais.

Assim, existem 5×6^4 números naturais de cinco algarismos diferentes formados com os algarismos de 0 a 5. Uma vez que o algarismo 0 não pode ocupar a primeira posição, existem cinco alternativas para o algarismo inicial e, para cada uma destas, existem seis alternativas para cada um dos quatro algarismos restantes.

No que diz respeito aos números de cinco algarismos diferentes, formados com os algarismos de 0 a 5, existem $5 \times {}^5A_4$, uma vez que existem cinco alternativas para o algarismo inicial e, para cada

uma destas, existem 5A_4 maneiras de serem escolhidos, ordenadamente, quatro algarismos, dos cinco restantes que irão constituir o número.

$$5 \times 6^4 - 5 \times {}^5A_4 = 5880$$

13.

a) ${}^{20}C_8 \times {}^{12}A_4 = 1\,496\,523\,600$

b) i. ${}^8C_3 \times {}^4C_1 = 224$

ii. $8! \times 4! \times 5 = 4\,838\,400$

14. No contexto da situação descrita, existem duas alternativas mutuamente exclusivas:

- ou o grupo que constituirá a equipa responsável pela organização do evento é constituída por exatamente três professores de treino individualizado, dois professores de aulas de grupo e três professores de pilates;
- ou a equipa é constituída por exatamente três professores de treino individualizado, um professor de aulas de grupo e quatro professores de pilates.

Na primeira alternativa, ${}^8C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^4C_3$ representa o número de maneiras de escolher oito elementos que constituirão a equipa nas condições descritas. Assim, 8C_3 corresponde ao número de maneiras distintas de escolher três professores de treino individualizado, de entre um conjunto de oito. Por cada uma destas maneiras, existem ${}^{10}C_2$ formas distintas de escolher dois professores de aulas de grupo, de entre um total de dez, e, por cada uma destas, existem 4C_3 formas distintas de escolher três professores de pilates, de entre um conjunto de quatro.

Na segunda alternativa, ${}^8C_3 \times 10$ representa o número de maneiras de escolher oito elementos que constituirão a equipa formada, de acordo com os requisitos referidos. Assim, 8C_3 corresponde ao número de maneiras distintas de escolher três professores de treino individualizado, de entre um conjunto de oito. Por cada uma destas maneiras, existem dez alternativas de escolha de um professor de aulas de grupo e, para cada uma destas, existe uma única forma de escolher um grupo de quatro professores de pilates.

Assim, ${}^8C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^4C_3 + {}^8C_3 \times 10$ corresponde a uma expressão que permite determinar o número de equipas distintas.

$${}^8C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^4C_3 + {}^8C_3 \times 10 = {}^8C_3 \times ({}^{10}C_2 \times {}^4C_3 + 10)$$

15. ${}^{30}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco alunos, de entre os 30 alunos da turma sem qualquer restrição.

Se ao número de possibilidades de escolher quaisquer cinco alunos retirarmos o número de possibilidades de não ter nenhum aluno com uma calculadora da marca A e exatamente um aluno com uma calculadora da marca A, obtemos o número de possibilidades de ter pelo menos dois alunos com uma calculadora da marca A.

Assim, ${}^{15}C_5$ é o número de maneiras de escolher cinco alunos que possuem calculadoras da marca B (10 alunos) ou C (5 alunos), e que, portanto, não possuem calculadora da marca A.

$15 \times {}^{15}C_4$ é o número de maneiras de escolher exatamente um aluno com uma calculadora da marca A, pois pode ser escolhido qualquer um dos 15 alunos que possuem uma calculadora da marca A, e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{15}C_4$ formas de escolher quatro alunos que possuem calculadoras da marca B (10 alunos) ou C (5 alunos).

A expressão ${}^{30}C_5 - {}^{15}C_5 - 15 \times {}^{15}C_4$ permite então determinar de quantas maneiras podem ser escolhidos cinco alunos, de modo que, pelo menos, dois deles possuam uma calculadora da marca A.

16. ${}^7C_2 \times n + 7 \times {}^nC_2 = 714$

$$\Leftrightarrow 21n + \frac{n(n-1)}{2} = 714$$

$$\Leftrightarrow 7n^2 - 7n + 42n - 1428 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 5n - 204 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-204)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -17 \notin \mathbb{N}$$

Assim, $n = 12$.

17. $\frac{2}{4 \times 4 \times {}^3C_2} + \frac{4}{5 \times {}^4C_2 \times 2!} + \frac{5}{5 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2}$

Existem três casos mutuamente exclusivos:

- o número começa por 2: o algarismo 0 pode ocupar quatro posições distintas (unidades, dezenas, centenas ou unidades de milhar). Por cada uma destas posições, existem quatro posições diferentes para colocar o algarismo 2 que falta. Por cada uma destas maneiras, existem 3C_2 modos diferentes de escolher as posições dos dois algarismos 4. Finalmente, o algarismo 5 só tem uma posição possível.
- o número começa por 4: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem 4C_2 formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2. Por cada uma destas formas, existem 2! modos distintos de escolher as posições do algarismo 4 e do algarismo 5.
- o número começa por 5: o 0 pode ocupar qualquer uma das cinco posições distintas (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar ou dezenas de milhar). Por cada uma destas posições, existem 4C_2 formas diferentes de escolher as posições para os dois algarismos 2. Por cada uma destas formas, existe apenas uma maneira (2C_2) de colocar os dois algarismos 4 nas posições que sobram.

Assim, o número pedido é igual a:

$$4 \times 4 \times {}^3C_2 + 5 \times {}^4C_2 \times 2! + 5 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 138$$

18. $\frac{7!}{3! \times 2!} - \frac{6!}{3! \times 2!} = 360$ números

19.

a) $5^{10} = 9\,765\,625$

b) ${}^{10}C_4 \times 1^4 \times 5^6 = 3\,281\,250$

c) ${}^{10}C_8 \times 1^8 \times 5^2 + {}^{10}C_9 \times 1^9 \times 5^1 + {}^{10}C_{10} \times 1^{10} \times 5^0 = 1176$

d) ${}^{10}C_0 \times 1^0 \times 5^{10} + {}^{10}C_1 \times 1^1 \times 5^9 + {}^{10}C_2 \times 1^2 \times 5^8 = 46\,875\,000$

20. A resposta correta é a I.

Para que os três pontos escolhidos definam um plano, não podem ser os três colineares. Assim, podemos escolher dois pontos da aresta [AC] e um ponto da aresta [DF] ou escolher dois pontos da aresta [DF] e um ponto da aresta [AC].

3C_2 é o número de maneiras diferentes de escolher dois vértices da aresta [AC]. E, por cada uma destas maneiras, existem três hipóteses para escolher um vértice da aresta [DF]. Logo, ${}^3C_2 \times 3$ é o número de maneiras de escolher dois pontos da aresta [AC] e um ponto da aresta [DF].

Analogamente, 3C_2 é o número de maneiras diferentes de escolher dois vértices da aresta [DF].

E, por cada uma destas maneiras, existem três hipóteses para escolher um vértice da aresta [AC]. Logo, ${}^3C_2 \times 3$ é o número de maneiras de escolher dois pontos da aresta [DF] e um ponto da aresta [AC].

Assim, ${}^3C_2 \times 3 + {}^3C_2 \times 3$ é o número de maneiras de escolher três pontos que definam um plano.

Uma outra resposta correta para este problema é ${}^6C_3 - {}^3C_3 \times 2$.

6C_3 é o número de maneiras distintas de escolher três pontos quaisquer de entre os seis possíveis. ${}^3C_3 \times 2$ é o número de modos distintos de escolher três pontos que não definem um plano. Se ao número de maneiras distintas de escolher três pontos quaisquer, de entre os seis possíveis, retirarmos o número de possibilidades de escolher três pontos que não definem um plano, obtemos o número de maneiras de escolher três pontos que definam um plano.

21. $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320$ maneiras

22.

a) ${}^{10}C_6 \times {}^4C_4 = 210$ modos

b) $\frac{{}^{10}C_5 \times {}^5C_5}{2} = 126$ modos

c) $\frac{{}^{10}C_5 \times {}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2}{5!} = 945$ modos

23. ${}^6C_4 = 15$ casos

24. ${}^6C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 31$

25. Opção (B)

$$2 \times 10 + 2 \times ({}^{10}C_2 - 10) = 90$$

• 2×10 é o número de diagonais das faces laterais, já que o prisma tem dez faces laterais e cada uma delas tem duas diagonais;

• $2 \times ({}^{10}C_2 - 10)$ é o número de diagonais das duas bases: ${}^{10}C_2$ é o número de segmentos de reta definidos pelos vértices de uma das bases, o que inclui os dez lados dessa base, logo ${}^{10}C_2 - 10$ é o número de diagonais de cada uma das bases.

26.

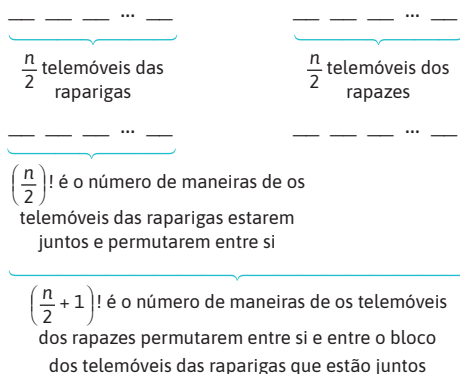
- a) ${}^{14}C_7 \times 7! \times 2 \times 7! \times 2 = 348\,713\,164\,800$
- ${}^{14}C_7$ é o número de maneiras de escolher os sete livros, de entre os 14 que ficarão na primeira prateleira;
 - $7!$ é o número de maneiras de permutar os sete livros entre si;
 - 2 é o número de maneiras de escolher se os livros ficam encostados à direita ou à esquerda;
 - $7!$ é o número de maneiras de permutar os restantes sete livros entre si;
 - 2 é o número de maneiras de escolher se os livros ficam encostados à direita ou à esquerda.

- b) ${}^{14}C_9 \times 9! \times 2 \times 5! \times 2 \times 2 = 697\,426\,329\,600$
- ${}^{14}C_9$ é o número de maneiras de escolher os nove livros, de entre os 14 que ficarão na primeira prateleira;
 - $9!$ é o número de maneiras de permutar os nove livros entre si na primeira prateleira;
 - 2 é o número de maneiras de escolher se os livros ficam encostados à direita ou à esquerda nesta primeira prateleira;
 - $5!$ é o número de maneiras de permutar os restantes cinco livros entre si na segunda prateleira;
 - 2 é o número de maneiras de escolher se os livros ficam encostados à direita ou à esquerda nesta segunda prateleira;
 - 2 é o número de maneiras de escolher a prateleira que fica com os nove livros e a prateleira que fica com os cinco livros.

27. $2! \times {}^8A_2 \times 7! = 564\,480$

Existem $2!$ formas distintas de a Margarida e a Helena permutarem entre si e, para cada uma destas formas, existem 8A_2 modos distintos de selecionar, ordenadamente, duas posições, de entre as oito disponíveis, a serem ocupadas pelo Joaquim e pelo Francisco, de forma que não fiquem juntos (os seis alunos que não são o Joaquim, a Margarida, a Helena e o Francisco e o “bloco” constituído pela Margarida e pela Helena criam oito posições para colocar o Joaquim e o Francisco que, nestas posições, ficam sempre separados). Por fim, para cada uma destas, existem $7!$ formas distintas de permutar os sete elementos restantes, isto é, os seis alunos restantes, juntamente com a Margarida e a Helena que estão juntas e cuja permutação já foi contabilizada.

28. Opção (C)



29. Opção (B)

$n!$ é o número de maneiras de se colocarem lado a lado n amigos, sem restrições.

$2! \times (n-2)! \times (n-1)$ é o número de maneiras de se colocarem lado a lado com o André e o Diogo juntos.

$$n! - 2! \times (n-1)! = n(n-1)! - 2 \times (n-1)! = (n-1)! \times (n-2)$$

é a resposta pedida.

30.

- a) A face hexagonal numerada está numerada com o número primo 2 e a face triangular numerada está numerada com o número 1. Assim, restam-nos os números primos 3, 5 e 7 para distribuir pelas três faces hexagonais restantes, o que pode ser feito de $3!$ maneiras distintas. Por cada uma destas maneiras, existem $3!$ modos distintos de numerar as três faces triangulares, ainda não numeradas, com os números 4, 6 e 8. Assim, $3! \times 3! = 36$ é o número pedido.

b) Existem três casos mutuamente exclusivos:

1º caso: zero números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

2º caso: um número par nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^3C_1 \times {}^3C_2 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

3º caso: dois números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

Logo, o número pedido é igual a:

$$3! \times 3! + {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3! \times 3! \times 2 = 684$$

31. ${}^3A_2 \times {}^4C_3 \times 9! \times 4!$

3A_2 é o número de maneiras distintas de escolher ordenadamente quais os condutores de nacionalidade neerlandesa da carrinha e do automóvel.

A carrinha (exceto o lugar do condutor) será ocupada pelos cinco palestrantes chineses, três palestrantes brasileiros e o palestrante neerlandês que não foi escolhido para conduzir, o que pode ser feito de ${}^4C_3 \times 9!$ maneiras distintas.

O automóvel (exceto o lugar do condutor) será ocupado por um brasileiro, um português, um espanhol e um francês, o que pode ser feito de $4!$ modos distintos.

32. Seja n o número de profissionais que sabem falar apenas alemão. $90 - n$ é, então, o número de profissionais que sabem falar apenas inglês.

Sabe-se que existem 2124 maneiras de escolher esses dois profissionais, de modo que falem ambos inglês ou ambos alemão.

Assim:

$$\begin{aligned} {}^nC_2 + {}^{90-n}C_2 &= 2124 \\ \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(90-n)!}{2!(90-n-2)!} &= 2124 \\ \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!} + \\ &+ \frac{(90-n) \times (89-n) \times (88-n)!}{2!(88-n)!} = 2124 \\ \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{(90-n) \times (89-n)}{2} &= 2124 \\ \Leftrightarrow n^2 - n + 8010 - 90n - 89n + n^2 &= 4248 \\ \Leftrightarrow 2n^2 - 180n + 3762 &= 0 \\ \Leftrightarrow n = \frac{-(-180) \pm \sqrt{(-180)^2 - 4 \times 2 \times 3762}}{2 \times 2} \\ \Leftrightarrow n = \frac{180 \pm \sqrt{2304}}{4} \\ \Leftrightarrow n = \frac{180 - 48}{4} \vee n = \frac{180 + 48}{4} \\ \Leftrightarrow n = 33 \vee n = 57 \end{aligned}$$

Assim, $n = 33$, uma vez que o número de profissionais que sabem falar apenas inglês está em maior número, logo o número de profissionais que sabem falar apenas alemão é 33.

33. $3 \times {}^nC_2 + {}^3C_2 \times {}^nA_2 = 945$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3 \times \frac{n(n-1)}{2} + 3 \times n(n-1) &= 945 \\ \Leftrightarrow n(n-1) \times \left(\frac{3}{2} + 3 \right) &= 945 \\ \Leftrightarrow n(n-1) \times \frac{9}{2} &= 945 \\ \Leftrightarrow n(n-1) &= 210 \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 210 &= 0 \\ \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-210)}}{2} \\ \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2} \\ \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 29}{2} \\ \Leftrightarrow n = 15 \vee n = -14 \\ \text{Como } n \geq 2, \text{ então } n &= 15. \end{aligned}$$

Teste final – páginas 52 e 53

- Opção (C)
 ${}^6C_3 \times 9 \times 8 \times 7 = 10\,080$
- Opção (D)
 $3 \times 3! \times {}^6A_2 = 540$
- Os números ímpares menores do que 1000, com os algarismos todos diferentes, podem ter só um algarismo, dois algarismos ou três algarismos, possibilidades estas que se excluem mutuamente. Assim, existem cinco números ímpares menores do que 1000 só com um algarismo (1, 3, 5, 7 e 9); 8×5 é o número de números ímpares menores do que 1000 só com dois algarismos, pois, para ser ímpar tem que terminar em algarismo ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9) – cinco hipóteses, e por cada uma dessas possibilidades existem oito possibilidades para o algarismo

das dezenas (não pode ser o algarismo escolhido para as unidades nem o zero); $8^2 \times 5$ é o número de números ímpares menores do que 1000 com três algarismos, pois, para ser ímpar tem que terminar em algarismo ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9) – cinco hipóteses, e por cada uma dessas possibilidades existem oito possibilidades para o algarismo das centenas (não pode ser o algarismo escolhido para as unidades nem o zero) e, por cada uma dessas possibilidades, existem oito hipóteses para o algarismo das dezenas (não podem ser os algarismos escolhidos para as unidades nem para as centenas). Logo, $5 + 8 \times 5 + 8^2 \times 5$ é o número de números ímpares inferiores a 1000 que não têm dois algarismos iguais.

- ${}^{10}A_7 = 604\,800$ maneiras
 - Existem dois casos diferentes:
 - ou o Nuno estaciona no primeiro ou no último lugar e existem $2 \times {}^8A_7$ maneiras de o fazer;
 - ou o Nuno estaciona em qualquer um dos oito lugares que não os dos extremos e existem $8 \times 7!$ maneiras de o fazer.
- Assim, existem $2 \times {}^8A_7 + 8 \times 7! = 120\,960$ configurações que permitem satisfazer a vontade do Nuno.

- Opção (D)
Existem 5C_2 maneiras diferentes de escolher duas posições, de entre as cinco para o algarismo 9. Para cada uma destas maneiras, existem oito maneiras de escolher um algarismo diferente de 9 e que pode ocupar uma das três posições disponíveis. Finalmente, e por cada uma das maneiras anteriores, existem ${}^5A'_2$ formas de escolher, ordenadamente e com repetição, duas das cinco vogais existentes para ocupar os dois lugares restantes. É possível, então, formar ${}^5C_2 \times 8 \times 3 \times {}^5A'_2 = {}^5C_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$ códigos diferentes.

- ${}^7C_4 \times 7 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 = 29\,400$ casos
 - $2! \times 6! = 1440$ casos
 - $2 \times 6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 96$ casos

- Seja n o número de rapazes do grupo de amigos.
 ${}^nC_2 + {}^{20-n}C_2 = 91$
- $$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(20-n)!}{2!(18-n)!} &= 91 \\ \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} + \frac{(20-n)(19-n)(18-n)!}{2 \times (18-n)!} &= 91 \\ \Leftrightarrow n(n-1) + (20-n)(19-n) &= 182 \\ \Leftrightarrow n^2 - n + 380 - 39n + n^2 &= 182 \\ \Leftrightarrow 2n^2 - 40n + 198 &= 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - 20n + 99 &= 0 \\ \Leftrightarrow n = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 99}}{2} \\ \Leftrightarrow n = 9 \vee n = 11 \end{aligned}$$
- Como o número de raparigas é maior do que o número de rapazes, então $n = 9$.

8. Opção (B)

$$\underbrace{p \times (p-1) \times (p-1) \times \dots \times (p-1)}_{n \text{ listas}} = p \times (p-1)^{n-1}$$

Para a primeira lista, existem p cores disponíveis e, portanto, p maneiras de a colorir. Por cada uma destas maneiras, existem $(p-1)$ maneiras de pintar a segunda lista, uma vez que a cor utilizada anteriormente não pode ser agora usada para pintar a segunda lista.

Por cada uma destas formas, existem também $(p-1)$ maneiras de pintar a terceira lista, já que só não pode ser utilizada a que foi usada para pintar a lista imediatamente anterior, e assim sucessivamente até perfazer as listas restantes.

9. Pretendemos determinar todos os números naturais pares de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 4, três algarismos 5 e um algarismo 7.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou terminam em 0 ou terminam em 4.

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}_0 \text{ ou } \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}_4$$

$${}^6C_2 \times {}^4C_3 + 5 \times 5 \times {}^4C_3 = 160$$

• No caso de o número terminar em 0, existem 6C_2 maneiras distintas de escolher as posições dos dois algarismos 4 e, por cada uma destas maneiras, existem 4C_3 maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 5. Para cada uma destas maneiras, só existe uma posição para colocar o algarismo 7.

• No caso de o número terminar em 4, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do 0 (não pode ocupar a posição da unidade do milhão) e, por cada uma destas maneiras, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do algarismo 4 restante. Para cada uma destas maneiras, existem 4C_3 maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 5. Feito isto, o algarismo 7 só tem uma maneira de ser colocado.

10. Opção (A)

A expressão que dá o número de maneiras distintas de distribuir os 15 elementos da comitiva pelos 15 lugares disponíveis, de modo que os condutores sejam os dois treinadores e que o dirigente vá no automóvel, é $2 \times {}^{12}C_3 \times 4! \times {}^9A_9$.

Dois é o número de maneiras distintas de escolher, dos dois treinadores, quem vai a conduzir o automóvel e quem vai conduzir a carrinha.

Como o dirigente vai no automóvel, então teremos de escolher três jogadores, de entre os 12 disponíveis. Assim, ${}^{12}C_3$ é o número de modos distintos de escolher quais os três jogadores que, juntamente com o dirigente, ocuparão os quatro lugares (de não condutor) do automóvel e $4!$ é o número de modos de trocar os quatro lugares entre si.

Finalmente, restam nove jogadores para serem distribuídos pelos nove lugares (de não condutor) da carrinha, o que pode ser feito de 9A_9 maneiras distintas.