3. Contagem

1. Princípios gerais de contagem

Exercícios – páginas 40 e 41

1.

1.1. O número de maneiras de escolher o delegado é 25. Para cada uma delas, há 24 maneiras de escolher o subdelegado.
Logo, $25 \times 24 = 600$ é o número de maneiras pedido.

1.2. O número de maneiras de escolher dois alunos inscritos em Espanhol é 13×12.
O número de manerias de escolher dois alunos inscritos em Francês é 12×11.
Logo, o número de maneiras de escolher dois alunos inscritos na mesma disciplina é $13 \times 12 + 12 \times 11 = 288$.

1.3. O número de maneiras de escolher um delegado inscrito em Espanhol e um subdelegado inscrito em Francês é 13×12.
O número de maneiras de escolher um delegado inscrito em Francês e um subdelegado inscrito em Espanhol é 12×13.
Logo, o número de maneiras de escolher dois alunos inscritos em disciplinas diferentes é $13 \times 12 + 12 \times 13 = 312$.

1.4. A Isaura pode ser delegada ou subdelegada. Para cada uma destas hipóteses há 24 maneiras de escolher o outro aluno.
Logo, o número de maneiras de escolher dois alunos, sendo a Isaura um deles é $2 \times 24 = 48$.

2.

2.1. A primeira pessoa a sentar-se tem cinco lugares disponíveis, a segunda pessoa tem quatro lugares, a terceira pessoa tem três lugares, a quarta pessoa tem dois lugares e a última pessoa tem um lugar.
Logo, o número de maneiras de sentar as cinco pessoas nos cinco lugares é $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

2.2. A Helena ocupa a posição central. A próxima pessoa a sentar-se tem quatro lugares disponíveis, a seguinte tem três, a seguinte dois e a última tem um lugar.
Assim, uma resolução para o problema é $4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 24$.

2.3. A Margarida e a Helena podem ficar juntas de duas maneiras diferentes (Margarida/Helena ou Helena/Margarida). Estando as duas juntas, podem ocupar quatro posições diferentes no banco. Sobram então três lugares que vão ser ocupados, de forma ordenada, pelas restantes três amigas.
Assim, uma resolução para o problema é $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$.

3. A primeira risca da bandeira pode ser pintada com qualquer uma das três cores disponíveis. Para a segunda risca não podemos usar a mesma cor que foi usada na risca anterior, pelo que há apenas duas possibilidades. O raciocínio é semelhante até estarem coloridas todas as riscas.
Logo, uma resolução para o problema é $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$.

4.

4.1. Para que o número obtido seja superior a 2000, o algarismo dos milhares não pode ser 1, pelo que há oito possibilidades de ocupar essa posição. Para as restantes posições não há qualquer restrição, pelo que o número de maneiras de preencher cada uma delas é nove.
Então, uma resolução para o problema é $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$.

4.2. Para que o número obtido seja par, o algarismo das unidades tem de ser par, logo há quatro maneiras de preencher essa posição. Para as restantes posições não há qualquer restrição, pelo que o número de maneiras de preencher cada uma delas é nove.
Então, uma resolução para o problema é $9 \times 9 \times 9 \times 4 = 2916$.

4.3. Para que o número obtido seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades tem de ser 5 (o 0 não está incluído nos algarismos disponíveis). Para que o número obtido seja inferior a 5000, o algarismo dos milhares pode ser preenchido de quatro maneiras diferentes, com qualquer um dos algarismos de 1 a 4, inclusive. Para as restantes posições não há qualquer restrição, pelo que o número de maneiras de preencher cada uma delas é nove.
Então, uma resolução para o problema é $4 \times 9 \times 9 \times 1 = 324$.

4.4. O número de maneiras de preencher o algarismo dos milhares é nove. Para cada uma delas, há oito maneiras de preencher o algarismo das centenas sem repetir o algarismo. Para cada uma delas, há sete maneiras de preencher o algarismo das dezenas sem repetir o algarismo. Para cada uma delas, há seis maneiras de preencher o algarismo das unidades sem repetir o algarismo.
Logo, uma resolução para o problema é $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$.

4.5. O número de maneiras de escrever números com quatro algarismos, usando os algarismos de 1 a 9, sem restrições é dado por $9 \times 9 \times 9 \times 9$.
O número de maneiras de escrever números com quatro algarismos, todos diferentes, usando os algarismos de 1 a 9, é dado por $9 \times 8 \times 7 \times 6$.
Assim, uma resolução para o problema é $9 \times 9 \times 9 \times 9 - 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3537$.

4.6. Se o número obtido for inferior a 3000, há duas maneiras de preencher o algarismo dos milhares (com os algarismos 1 ou 2). Para as restantes posições não há qualquer restrição, pelo que o número de maneiras de preencher cada uma delas é nove.
Se o número obtido é superior a 3000 e inferior a 3500, há uma maneira de preencher o algarismo dos milhares (com o algarismo 3). Para cada uma delas há quatro maneiras de preencher o algarismo

das centenas (com os algarismos 1, 2, 3 e 4). Para as restantes posições não há qualquer restrição, pelo que o número de maneiras de preencher cada uma delas é nove.
Então, uma resolução para o problema é $2 \times 9 \times 9 \times \times 9 + 1 \times 4 \times 9 \times 9 = 1782$.

5.

5.1. O Joaquim pode escolher e ler o livro de José Saramago de seis maneiras diferentes, pode escolher o livro de Eça de Queiroz de cinco maneiras diferentes, o livro de Fernando Pessoa de cinco maneiras diferentes e o livro de Camilo Castelo Branco de duas maneiras diferentes.
Assim, uma resolução para o problema é $6 \times 5 \times 5 \times 2 = = 300$.

5.2. Sendo os quatros livros do mesmo autor, não poderão ser de Camilo Castelo Branco, uma vez que o Joaquim só tem dois livros deste autor.
O número de maneiras de escolher e ler quatro livros de José Saramago é $6 \times 5 \times 4 \times 3$.
O número de maneiras de escolher e ler quatro livros de Eça de Queiroz ou de Fernando Pessoa é $5 \times 4 \times 3 \times 2$.
Assim, uma resolução para o problema é $6 \times 5 \times 4 \times \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 600$.

6. O número de maneiras de sentar os cinco passageiros que preferem lugares de frente é dado por $6 \times 5 \times \times 4 \times 3 \times 2$. Para cada uma delas, há 4×3 maneiras de sentar os dois passageiros que preferem lugares de costas. Para cada uma delas, há $3 \times 2 \times 1$ maneiras de sentar os restantes três passageiros nos restantes três lugares.
Logo, uma resolução para o problema é $6 \times 5 \times 4 \times \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 51\,840$.

7.

7.1. Decompondo o número em fatores primos, obtém-se $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.
Logo, o número de divisores naturais de 2310 é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$.

7.2. Decompondo o número em fatores primos, obtém-se $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$.
Logo, o número de divisores naturais de 2700 é $3 \times 4 \times 3 = 36$.

8. O número de maneiras de escrever números com os algarismos todos diferentes usando os algarismos de 1 a 5 é dado por $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. O menor desses números é 12 345 e o maior desses números é 54 321.
Assim, uma resolução para o problema é $5 \times 4 \times 3 \times \times 2 \times 1 = 120$.

9.

9.1. O algarismo das dezenas de milhar pode ser preenchido de nove maneiras diferentes, uma vez o algarismo 0 não pode ser utilizado. O algarismo dos milhares pode ser preenchido de nove maneiras diferentes, pois pode utilizar-se o algarismo 0, mas não se pode repetir o algarismo das dezenas de milhar. Os restantes algarismos podem ser preenchidos de $8 \times 7 \times 6$ maneiras diferentes, pois em cada posição não se pode utilizar os algarismos usados nas posições anteriores.
Então, uma resolução para o problema é $9 \times 9 \times 8 \times \times 7 \times 6 = 27\,216$.

9.2. Para o número ser múltiplo de 5 o algarismo das unidades pode ser 0 ou 5, logo, há duas maneiras de o ocupar. O algarismo das dezenas de milhar pode ser preenchido de nove maneiras diferentes, uma vez o algarismo 0 não pode ser utilizado. Para as restantes posições não há qualquer restrição, pelo que o número de maneiras de preencher cada uma delas é 10.
Logo, uma resolução para o problema é $9 \times 10 \times 10 \times \times 10 \times 2 = 18\,000$.

9.3. O algarismo das dezenas de milhar pode ser preenchido de nove maneiras diferentes, uma vez o algarismo 0 não pode ser utilizado. Há quatro maneiras de escolher a posição ocupada pelo número diferente de zero, que pode ser preenchida por com qualquer um dos algarismos diferentes de 0. As restantes posições são obrigatoriamente preenchidas com o algarismo zero. Logo, uma resolução para o problema é $9 \times 1 \times 1 \times 1 \times 9 \times 4 = 324$.

9.4. O algarismo das dezenas de milhar pode ser preenchido de nove maneiras diferentes, uma vez o algarismo 0 não pode ser utilizado. O algarismo das unidades é igual ao algarismo das dezenas de milhar. O algarismo dos milhares pode ser preenchido de 10 maneiras diferentes e é igual ao algarismo das dezenas. O algarismo das centenas por ser preenchido de 10 maneiras diferentes.
Assim, uma resolução para o problema é $9 \times 10 \times \times 10 \times 1 \times 1 = 900$.

9.5. O algarismo das dezenas de milhar pode ser preenchido de nove maneiras diferentes, uma vez o algarismo 0 não pode ser utilizado. Cada um dos restantes algarismos pode ser preenchido de nove maneiras diferentes já que se pode utilizar qualquer algarismo exceto o que tiver sido usado na posição anterior.
Então, uma resolução para o problema é $9 \times 9 \times 9 \times \times 9 \times 9 = 59\,049$.

2. Arranjos e combinações

Arranjos e permutações

Exercícios – páginas 42 e 43

10.

10.1. $\dfrac{6!}{3 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{3 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{3} = 10$

10.2. $\dfrac{8!}{4! \times 3!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 5 = 280$

10.3. $\dfrac{9!}{5! + 6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times (1 + 6)} = 9 \times 8 \times 6 = 432$

10.4. ${}^5A_2 \times 3! = \frac{5!}{3!} \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

10.5. $\frac{{}^5A_3}{4!} = \frac{\frac{5!}{2!}}{4!} = \frac{5!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{5}{2}$

10.6. $\frac{6}{4!} - \frac{12}{6!} = \frac{6}{4!} - \frac{12}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{6 \times 6 \times 5 - 6 \times 2}{6 \times 5 \times 4!} =$
$= \frac{6 \times 5 - 2}{5 \times 4!} = \frac{28}{120} = \frac{7}{30}$

11.

11.1. O número de maneiras de cinco pessoas ocuparem cinco lugares é $5! = 120$.

11.2. O número de maneiras de ocupar o lugar do condutor é dois. Para cada uma delas, há 4! maneiras de as restantes quatro pessoas ocuparem os restantes quatro lugares.
Assim, uma resolução para o problema é $2 \times 4! = 48$.

11.3. Depois de a Liliana e o João ocuparem os seus lugares, o que só pode ser feito de uma maneira, as restantes três pessoas podem ocupar os restantes três lugares de 3! maneiras.
Assim, uma resolução para o problema é $3! = 6$.

12.

12.1. Há nove maneiras de escolher uma sinfonia de Beethoven, 20 maneiras de escolher uma sinfonia de Mozart e oito maneiras de escolher uma sinfonia de Schubert.
Logo, o número de apresentações que respeitam as condições do enunciado é $9 \times 20 \times 8 = 1440$.

12.2. Há nove maneiras de escolher uma sinfonia de Beethoven, 20 maneiras de escolher uma sinfonia de Mozart e oito maneiras de escolher uma sinfonia de Schubert. O número de maneiras de ordenar as três sinfonias escolhidas é 3!.
Logo, o número de apresentações que respeitam as condições do enunciado é $9 \times 20 \times 8 \times 3! = 8640$.

12.3. O número de maneiras de escolher, de forma ordenada, três das 37 sinfonias apresentadas é ${}^{37}A_3 = 46\,620$.

13.

13.1. O número de maneiras de sete pessoas ocuparem sete posições é $7! = 5040$.

13.2. O número de maneiras de ordenar os três homens entre si é 3!. O número de maneiras de ordenar o conjunto formado pelo grupo dos homens e cada uma das quatro mulheres é 5!.
Assim, uma resolução para o problema é $3! \times 5! = 720$.

13.3. O número de maneiras de ordenar os três homens entre si é 3!. O número de maneiras de ordenar as quatro mulheres entre si é 4!. Há duas maneiras diferentes de ordenar estes dois grupos.
Logo, uma resolução para o problema é $2 \times 3! \times 4! =$
$= 288$.

13.4. Para que não haja duas mulheres juntas, as pessoas devem ser colocadas de forma alternada: MHMHMHM, onde M representa uma mulher e H representa um homem. O número de maneiras de ordenar os três homens entre si é 3!. O número de maneiras de ordenar as quatro mulheres entre si é 4!.
Assim, uma resolução para o problema é $3! \times 4! = 144$.

14.

14.1. As letras ES, por esta ordem, podem ocupar cinco posições diferentes. O número de maneiras de as restantes quatro letras ocuparem os restantes quatro lugares é 4!
Assim, uma resolução para o problema é $5 \times 4! = 120$.

14.2. As letras ESC podem ser organizadas de 3! maneiras diferentes. O número de maneiras de ordenar o conjunto formado pelo grupo de letras ESC e cada uma das restantes três letras é 4!.
Assim, uma resolução para o problema é $3! \times 4! = 144$.

14.3. O número de vogais e de consoantes é o mesmo, logo há duas maneiras de as intercalar, começando por vogal ou começando por consoante. O número de maneiras de ordenar as três consoantes é 3!. O número de maneiras de ordenar as três vogais é 3!.
Logo, uma resolução para o problema é $2 \times 3! \times 3! = 72$.

14.4. Após a colocação da letra E no primeiro lugar e da letra A no último lugar, o número de maneiras de ordenar as restantes quatro letras é 4!.
Assim, uma resolução para o problema é $4! = 24$.

14.5. O número de maneiras de escrever palavras em que a letra E ocupe o primeiro lugar e a letra A ocupe o último lugar é $4! = 24$, de acordo com a alínea anterior.
Se a letra E ocupar o primeiro lugar e a letra A não ocupar o último lugar, há quatro posições possíveis que a letra A pode ocupar e o número de maneiras de ordenar as restantes quatro letras nos quatro lugares possíveis é 4!.
O caso em que a letra A ocupa o último lugar e a letra E não ocupa o primeiro lugar é semelhante a este.
Então, uma resolução para o problema é $2 \times 4 \times 4! +$
$+ 4! = 216$.

15. O número de maneiras de escolher duas das linhas do tabuleiro é seis (A + B, A + C, A + D, B + C, B + D, C + D). O número de maneiras de colocar de forma ordenadas as oito fichas com números ímpares nos oito quadrados dessas duas filas é 8!. As restantes sete fichas podem ocupar, de forma ordenada, sete dos restantes oito lugares de ${}^8A_7$ maneiras diferentes.
Logo, uma resolução para o problema é $6 \times 8! \times {}^8A_7 =$
$= 9\,754\,214\,400$.

16.

16.1. O número de maneiras de ordenar a Matilde e o Martim é 2!. O número de maneiras de ordenar o

conjunto formado pela Matilde e pelo Martim e cada uma das restantes $n - 2$ pessoas é $(n - 2 + 1)! = (n - 1)!$.
Assim, uma resolução para o problema é $2! \times (n - 1)! = 2(n - 1)!$.

16.2. O número de maneiras de sentar, de forma ordenada, n pessoas em n lugares é $n!$.
O número de maneiras de a Matilde e o Martim ficarem juntos é $2! \times (n - 1)!$, de acordo com a alínea anterior.
Logo, o número de maneiras de a Matilde e o Martim ficarem separados é $n! - 2! \times (n - 1)! = (n - 2)(n - 1)!$.

16.3. O número de maneiras de ordenar a Matilde, o Martim e o Duarte é $3!$. O número de maneiras de ordenar o conjunto formado pela Matilde, pelo Martim e pelo Duarte e cada uma das restantes $n - 3$ pessoas é $(n - 3 + 1)! = (n - 2)!$.
Assim, uma resolução para o problema é $3! \times (n - 2)! = 6(n - 2)!$.

16.4. O número de maneiras de ordenar a Matilde, o Martim e o Duarte é $3!$. O número de maneiras de ordenar o Guilherme e a Francisca é $2!$ O número de maneiras de ordenar o conjunto formado pela Matilde, pelo Martim e pelo Duarte, o conjunto formado pelo Guilherme e pela Francisca e cada uma das restantes $n - 5$ pessoas é $(n - 5 + 2)! = (n - 3)!$.
Assim, uma resolução para o problema é $3! \times 2! \times (n - 3)! = 12(n - 3)!$.

17. Para que o número formado seja par e a soma dos seus algarismos seja ímpar dois casos se podem dar: ou um dos algarismos é ímpar ou três dos algarismos são ímpares.
No primeiro caso, como o último algarismo tem de ser par, sobram quatro posições possíveis para colocar o algarismo ímpar, ou seja, há quatro maneiras diferentes de escolher a posição do algarismo ímpar. Para cada uma delas, existem cinco maneiras de escolher esse algarismo ímpar. Para cada posição do algarismo ímpar e para cada valor deste, existem $4!$ maneiras diferentes de as quatro bolas com algarismos pares ocuparem os restantes quatro lugares. Há, então, $4 \times 5 \times 4!$ nas condições do primeiro caso.
No segundo caso, como o último algarismo tem de ser par e três algarismos são ímpares, o quinto algarismo tem de ser par. Como o último algarismo tem de ser par, sobram quatro posições possíveis para colocar o outro algarismo par, ou seja, há quatro maneiras diferentes de escolher a posição do segundo algarismo par. Para cada uma delas, existem ${}^4A_2$ maneiras de escolher ordenadamente dois dos quatro algarismos pares para colocar nas respetivas posições. Para cada uma delas, existem ${}^5A_3$ maneiras de escolher ordenadamente três dos cinco algarismos ímpares para ocuparem os restantes três lugares. Há então $4 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2$ nas condições do segundo caso.
Uma resposta correta ao problema é, então, $4 \times 5 \times 4! + 4 \times {}^5A_3 \times {}^4A_2$.

Combinações

Exercícios – páginas 44 e 45

18.

18.1. ${}^7C_4 \times 3! = \dfrac{7!}{4! \times 3!} \times 3! = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

18.2. ${}^6C_4 \times {}^4A_2 = \dfrac{6!}{4! \times 2!} \times \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} =$
$= 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 180$

18.3. $\dfrac{{}^5C_3}{4!} = \dfrac{\frac{5!}{3! \times 2!}}{4!} = \dfrac{5!}{3! \times 2! \times 4!} = \dfrac{5 \times 4!}{6 \times 2 \times 4!} = \dfrac{5}{12}$

18.4. $\dfrac{{}^8C_2 \times {}^6C_3}{6!} = \dfrac{\frac{8!}{6! \times 2!} \times \frac{6!}{3! \times 3!}}{6!} = \dfrac{8!}{2 \times 3! \times 3! \times 6!} =$
$= \dfrac{8 \times 7}{2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2} = \dfrac{7}{9}$

19.

19.1. O número de maneiras de escolher aleatoriamente cinco entre 37 pessoas é ${}^{37}C_5 = 435\,897$.

19.2. O número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos 15 professores de Matemática é ${}^{15}C_2$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos 12 professores de Biologia e Geologia é ${}^{12}C_2$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente um dos 10 professores de Física e Química é ${}^{10}C_1$.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^{15}C_2 \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_1 = 69\,300$.

19.3. O número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 15 professores de Matemática é ${}^{15}C_3$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos restantes 22 professores, não incluindo os professores de Matemática, é ${}^{22}C_2$.
Logo, uma resolução para o problema é ${}^{15}C_3 \times {}^{22}C_2 = 105\,105$.

19.4. Podem escolher-se zero, um ou dois professores de Biologia e Geologia.
Havendo zero professores de Biologia e Geologia, o número de maneiras de escolher aleatoriamente cinco dos 25 professores restantes é ${}^{25}C_5$.
O número de maneiras de escolher aleatoriamente um dos 12 professores de Biologia e Geologia e quatro dos restantes 25 professores é ${}^{12}C_1 \times {}^{25}C_4$.
O número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos 12 professores de Biologia e Geologia e três dos restantes 25 professores é ${}^{12}C_2 \times {}^{25}C_3$.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^{25}C_5 + {}^{12}C_1 \times {}^{25}C_4 + {}^{12}C_2 \times {}^{25}C_3 = 356\,730$.

20. ${}^{64}C_{10}$ é o número de maneiras colocar aleatoriamente as 10 peças brancas em 10 das 64 casas do tabuleiro. Por cada uma destas maneiras, há ${}^{54}C_{12}$ maneiras de colocar aleatoriamente as 12 peças pretas em 12 das restantes 54 casas do tabuleiro. Assim, ${}^{64}C_{10} \times {}^{54}C_{12}$ é uma resposta correta.
${}^{64}C_{22}$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente 22 das 64 casas do tabuleiro onde se vão

colocar as 22 peças. Para cada uma destas maneiras, há ${}^{22}C_{10}$ maneiras de escolher aleatoriamente 10 das 22 casas para colocar as 10 peças brancas, ficando as peças pretas nas restantes 12 casas. Assim, ${}^{64}C_{22} \times {}^{22}C_{10}$ é também uma resposta correta.

21.

21.1. A palavra PERMUTACAO tem dois A e as restantes oito letras são todas diferentes.
O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das 10 posições a serem ocupadas pelos A é ${}^{10}C_2$. As restantes oito letras podem ser ordenadas de 8! maneiras diferentes.
O número de anagramas da palavra PERMUTACAO é, então, ${}^{10}C_2 \times 8! = 1\,814\,400$.

21.2. A palavra ARRANJO tem dois A, dois R e as restantes três letras são todas diferentes.
O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das sete posições a serem ocupadas pelos A é ${}^{7}C_2$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das restantes cinco posições a serem ocupadas pelos R é ${}^{5}C_2$. As restantes três letras podem ser ordenadas de 3! maneiras diferentes.
O número de anagramas da palavra ARRANJO é, então, ${}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times 3! = 1260$.

21.3. A palavra COMBINACAO tem dois A, dois C, dois O e as restantes quatro letras são todas diferentes.
O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das 10 posições a serem ocupadas pelos A é ${}^{10}C_2$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das restantes oito posições a serem ocupadas pelos C é ${}^{8}C_2$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das restantes seis posições a serem ocupadas pelos O é ${}^{6}C_2$. As restantes 4 letras podem ser ordenadas de 4! maneiras diferentes.
O número de anagramas da palavra COMBINACAO é, então, ${}^{10}C_2 \times {}^{8}C_2 \times {}^{6}C_2 \times 4! = 453\,600$.

22.

22.1. Depois de preenchida a primeira linha com as quatro peças azuis, é preciso colocar as restantes 12 peças, das quais nove são amarelas e três têm cores diferentes. ${}^{12}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das 12 posições possíveis. Para cada uma destas maneiras, há 3! maneiras de colocar de forma ordenada as três peças de cores diferentes nas três posições escolhidas.
Assim, ${}^{12}C_3 \times 3! = 1320$ é uma resolução para o problema.

22.2. Pelo menos uma das diagonais tem de ficar preenchida por peças amarelas.
Preenchendo uma das diagonais com peças amarelas, sobram cinco peças amarelas. Restam 12 posições onde se podem colocar estas peças, então, ${}^{12}C_5$ é o número de maneiras de colocar aleatoriamente as cinco peças amarelas restantes nas 12 posições possíveis. Para cada uma destas maneiras, há ${}^{7}A_3$ de colocar ordenadamente as três peças de cores diferentes nas sete posições que sobram (16 – 4 – 5 = 7). As peças restantes são todas da mesma cor e ficam nas posições que restam. Assim, ${}^{12}C_5 \times {}^{7}A_3$ é o número de maneiras de ocupar apenas uma das diagonais com peças amarelas. Como há duas diagonais, isso pode ser feito de $2 \times {}^{12}C_5 \times {}^{7}A_3$ maneiras diferentes.
Porém, $2 \times {}^{12}C_5 \times {}^{7}A_3$ contabiliza o dobro das vezes o caso em que as duas diagonais são preenchidas em simultâneo. Logo, temos de subtrair o número de maneiras de preencher as duas diagonais em simultâneo. Assim, se se preencherem as duas diagonais com peças amarelas, restam quatro peças azuis e quatro peças de cores diferentes para colocar em oito posições restantes. ${}^{8}C_4$ é o número de maneiras de colocar aleatoriamente as quatro peças azuis em quatro dos oito lugares restantes. Para cada uma destas maneiras, há 4! maneiras de colocar as restantes peças de quatro cores diferentes nos quatro lugares restantes. Assim, ${}^{8}C_4 \times 4!$ é o número de maneiras de preencher as duas diagonais em simultâneo com peças amarelas.
Então, $2 \times {}^{12}C_5 \times {}^{7}A_3 - {}^{8}C_4 \times 4! = 330\,960$ é uma resolução do problema.

23.

23.1. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente duas das quatro damas é ${}^{4}C_2$, que é o mesmo que o número de maneiras de selecionar aleatoriamente dois dos quatro reis. O número de maneiras de ordenar estas quatro cartas é 4!.
${}^{4}C_2 \times {}^{4}C_2 \times 4! = 864$ é, então, uma resolução para problema.

23.2. O número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos quatro naipes é ${}^{4}C_2$. O número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das 13 cartas de um determinado naipe é ${}^{13}C_2$. O número de maneiras de ordenar estas quatro cartas é 4!.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^{4}C_2 \times {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_2 \times 4! = 876\,096$.

23.3. O número de maneiras de escolher aleatoriamente um dos quatro naipes é quatro. O número de maneiras de escolher aleatoriamente três das 13 cartas desse naipe é ${}^{13}C_3$. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente uma das restantes 39 cartas é 39. O número de maneiras de ordenar estas quatro cartas é 4!.
Então, uma resolução para o problema é $4 \times {}^{13}C_3 \times 39 \times 4! = 1\,070\,784$.

23.4. Há três alternativas diferentes de forma a respeitar a condição de num dos extremos da sequência de cartas estar uma figura: pode existir uma figura em ambos os extremos ou em apenas um deles, à esquerda ou à direita.
O número de maneiras de selecionar e ordenar duas das 12 figuras, que ocuparão os dois extremos, é ${}^{12}A_2$. Para cada uma delas, ${}^{50}A_2$ é o número de maneiras de selecionar e ordenar duas das restantes 40 cartas para ocuparem os lugares disponíveis. Assim, o número de maneiras de ocupar os dois extremos com figuras é ${}^{12}A_2 \times {}^{50}A_2$.

O número de maneiras de selecionar uma das 12 figuras, para ocupar um dos extremos, é 12. O número de maneiras de escolher uma carta que não seja figura para ocupar o outro extremo é 40. Para cada uma delas, ${}^{50}A_2$ é o número de maneiras de selecionar e ordenar duas das restantes 50 cartas para ocuparem os lugares disponíveis. Assim, o número de maneiras de ocupar apenas um dos extremos com figuras é $12 \times 40 \times {}^{50}A_2$.
Logo, uma resolução para o problema é ${}^{12}A_2 \times {}^{50}A_2 + 2 \times 12 \times 40 \times {}^{50}A_2 = 2\,675\,400$.

23.5. Para que pelo menos duas das cartas sejam ases, há três alternativas: duas das cartas são ases, três das cartas são ases ou as quatro cartas são ases.
O número de maneiras de selecionar aleatoriamente dois dos quatro ases é ${}^{4}C_2$. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente duas das restantes 48 cartas é ${}^{48}C_2$. Logo, o número de maneiras de selecionar dois ases e duas outras cartas é ${}^{4}C_2 \times {}^{48}C_2$.
O número de maneiras de selecionar aleatoriamente três dos quatro ases é ${}^{4}C_3 = 4$. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente uma das restantes 48 cartas é 48. Logo, o número de maneiras de selecionar três ases e uma outra carta é 4×48.
Existe apenas uma maneira de selecionar os quatro ases.
O número de maneiras de ordenar as quatro cartas selecionadas é 4!.
Assim, o número de maneiras de formar sequências com pelo menos dois ases é $({}^{4}C_2 \times {}^{48}C_2 + 4 \times 48 + 1) \times 4! = 167\,064$.

23.6. Para que exista no máximo um ás, há duas alternativas: uma das cartas é um ás ou nenhuma das cartas é um ás.
O número de maneiras de selecionar aleatoriamente um dos quatro ases é quatro. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente duas das 12 figuras é ${}^{12}C_2$. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente uma das restantes 36 cartas é 36. Assim, o número de maneiras de selecionar um ás, duas figuras e uma outra carta é $4 \times {}^{12}C_2 \times 36$.
O número de maneiras de selecionar aleatoriamente duas das 12 figuras é ${}^{12}C_2$. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente duas das restantes 36 cartas é ${}^{36}C_2$. Assim, o número de maneiras de selecionar duas figuras e duas outras cartas, ou seja, zero ases, é ${}^{12}C_2 \times {}^{36}C_2$.
O número de maneiras de ordenar as quatro cartas selecionadas é 4!.
Logo, o número de maneiras de formar sequências com duas figuras e no máximo um ás é $(4 \times {}^{12}C_2 \times 36 + {}^{12}C_2 \times {}^{36}C_2) \times 4! = 1\,226\,016$.

23.7. Há três alternativas diferentes para a resolução deste problema: o rei e o ás são de ouros e as outras duas cartas são de outros naipes, o rei ou o às são de ouros, exatamente uma das outras duas cartas é de ouros e nem o rei nem o ás são de ouros sendo as outras duas as cartas de ouros.
Relativamente à primeira alternativa, estando selecionados o rei e o ás de ouros, resta selecionar aleatoriamente duas das restantes 39 cartas que não são de ouros, o que pode ser feito de ${}^{39}C_2$ maneiras diferentes.
Em relação à segunda alternativa, estando selecionado o rei de ouros (ou o ás de ouros) , o número de maneiras de selecionar um ás que não seja de ouros é três. O número de maneiras de selecionar uma carta de ouros, exceto o rei (ou o ás, respetivamente), é 12. O número de maneiras de selecionar uma das restantes cartas é 38. Assim, há $3 \times 12 \times 38 \times 2$ maneiras de o rei ou o ás serem de ouros.
Quanto à terceira alternativa, há três maneiras de selecionar um rei que não seja de ouros e há três maneiras de selecionar um ás que não seja de ouros. O número de maneiras de selecionar aleatoriamente duas das 13 cartas de ouros é ${}^{13}C_2$. Assim, há $3 \times 3 \times {}^{13}C_2$ maneiras de nem o rei nem o ás serem de ouros.
Finalmente, há duas maneiras de ordenar as duas cartas centrais, uma vez que o rei e o ás ocupam posições fixas.
Então, uma resolução para o problema é $({}^{39}C_2 + 3 \times 12 \times 38 \times 2 + 3 \times 3 \times {}^{13}C_2) \times 2 = 8358$.

24. Seja N o movimento de andar para norte e E o movimento de andar para este.

24.1. Determinar o número de caminhos existentes entre A e B é equivalente a determinar o número de anagramas (palavras com ou sem significado escritas com as mesmas letras) compostos por 5E e 3N, ou seja, de colocar 5E e 3N em 8 posições. O número de maneiras de colocar os 5E é ${}^{8}C_5$. Para cada uma delas, há apenas uma forma de colocar os 3N.
Logo, uma resolução para o problema é ${}^{8}C_5 = 56$.

24.2. Um caminho entre A e B que passe por C é composto por duas partes: de A a C e de C a B.
Seguindo um raciocínio semelhante à alínea anterior, o número de maneiras de percorrer o caminho entre A e C corresponde ao número de maneiras de colocar 2E e 1N em 3 posições e é ${}^{3}C_2$. O número de maneiras de percorrer o caminho entre C e B corresponde ao número de maneiras de colocar 3E e 2N em 5 posições e é ${}^{5}C_3$.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^{3}C_2 \times {}^{5}C_3 = 30$.

24.3. Já vimos que o número de caminhos entre A e B é ${}^{8}C_5$ e que o número de caminhos entre A e B passando por C é ${}^{3}C_2 \times {}^{5}C_3$. Logo, o número de caminhos entre A e B que não passam por C é ${}^{8}C_5 - {}^{3}C_2 \times {}^{5}C_3 = 56 - 30 = 26$.

24.4. Um caminho entre A e B que passe por C e por D é composto por três partes: de A a C, de C a D e de D a B.
O número de maneiras de percorrer o caminho entre A e C corresponde ao número de maneiras de colocar 2E e 1N em três posições e é ${}^{3}C_2$, que também é o número de maneiras de percorrer o caminho entre C e D. O número de maneiras de percorrer o caminho entre D e B corresponde ao número de maneiras de colocar 1E e 1N em duas

posições e é dois.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times$ $\times\, 2 = 18$.

24.5. Já vimos que o número de caminhos entre A e B é ${}^8C_5$ e que o número de caminhos entre A e B passando por C e por D é ${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2$. Logo, o número de caminhos entre A e B que não passam por C ou por D é ${}^8C_5 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 56 - 18 = 38$.

24.6. Anteriormente, vimos que o número de caminhos entre A e B passando por C é ${}^3C_2 \times {}^5C_3$. Analogamente, o número de caminhos entre A e B passando por D é ${}^6C_4 \times 2$. Ao somarmos estes dois valores estamos a contar duplamente o número de caminhos entre A e B que passam por C e por D, que são ${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2$, como foi visto antes.
Assim, uma resposta ao problema é ${}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times$ $\times\, 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 30 + 30 - 18 = 42$.

24.7. O número de caminhos entre A e B é ${}^8C_5$ e o número de caminhos entre A e B que passam por C ou por D é ${}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2$. Logo, o número de caminhos entre A e B que não passam por C nem por D é ${}^8C_5 - ({}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2) =$ $= 56 - 42 = 14$.

Exercícios globais – páginas 46 a 49

25. Opção (A)
O algarismo 1 pode ocupar qualquer uma das quatro posições. Para cada posição ocupada pelo algarismo 1 há $9 \times 9 \times 9$ maneiras de preencher as restantes três posições com algarismos diferentes de 1.
Logo, a opção correta é a (A), pois $4 \times 9 \times 9 \times 9 = 2916$.

26. Opção (B)
O número de maneiras de selecionar e ordenar duas das 18 equipas é ${}^{18}A_2$.

27. Opção (B)
O número de maneiras de selecionar e ordenar duas das quatro cartas de copas nas duas primeiras posições é ${}^4A_2$. Para cada uma delas, há 8! maneiras de ordenar as restantes 8 cartas nas restantes 8 posições.
Então, a opção correta é a (B) pois ${}^4A_2 \times 8! = 483\,840$.

28. Opção (D)
Para cada uma das primeiras cinco questões de escolha múltipla, há quatro hipóteses de resposta, pelo que o número de maneiras de responder a estas questões é 4^5.
Para cada uma das restantes 10 questões, há duas hipóteses de resposta, pelo que o número de maneiras de responder a estas questões é 2^{10}.
Então, a opção correta é a (D) pois $4^5 \times 2^{10} = 1\,048\,576$.

29. Opção (B)
Há sete sinais com uma bandeira.
Há ${}^7A_2$ sinais possíveis com duas bandeiras.
Há ${}^7A_3$ sinais possíveis com três bandeiras.
Há ${}^7A_4$ sinais possíveis com quatro bandeiras.
Há ${}^7A_5$ sinais possíveis com cinco bandeiras.
Há ${}^7A_6$ sinais possíveis com seis bandeiras.
Há ${}^7A_7$ sinais possíveis com sete bandeiras.
Logo, uma resolução para o problema é $7 + {}^7A_2 + {}^7A_3 +$ $+ {}^7A_4 + {}^7A_5 + {}^7A_6 + {}^7A_7 = 7 + 42 + 210 + 840 + 2520 +$ $+ 5040 + 5040 = 13\,699$.

30. Opção (C)
Para que o número seja par, o algarismo das unidades tem de ser 2 ou 4.
No caso em que o algarismo das unidades é 4, há ${}^7C_2$ maneiras de preencher duas das restantes sete posições com os algarismos 1, e há ${}^5C_3$ maneiras de preencher três das restantes cinco posições com os algarismos 2, sendo que os algarismos 3 só podem ser colocados de uma maneira nos dois lugares restantes. Ou seja, há ${}^7C_2 \times {}^5C_3$ maneiras de escrever um número em que o algarismo das unidades seja 4.
No caso em que o algarismo das unidades é 2, há ${}^7C_2$ maneiras de preencher duas das restantes sete posições com os algarismos 1, há ${}^5C_2$ maneiras de preencher duas das restantes cinco posições com os algarismos 2, há ${}^3C_2$ maneiras de preencher duas das restantes três posições com os algarismos 3 e o algarismo 4 fica na posição restante. Ou seja, há ${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2$ maneiras de escrever um número em que o algarismo das unidades seja 2.
Logo, uma resolução para o problema é ${}^7C_2 \times {}^5C_3 +$ $+ {}^7C_2 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 840$.

31.
31.1. Se um dos algarismos 4 ocupar a posição das dezenas de milhar, então há ${}^4C_2$ maneiras de escolher duas das quatro posições restantes para colocar os outros dois 4 e há 9×9 maneiras de preencher as duas posições restantes com os algarismos diferentes de 4. Ou seja, há ${}^4C_2 \times 9^2$ números nestas condições.
Se nenhum dos algarismos 4 ocupar a posição das dezenas de milhar então há ${}^4C_3 = 4$ maneiras de escolher três das restantes quatro posições para serem ocupadas por esses algarismos; a posição das dezenas de milhar pode ser ocupada por um dos algarismos restantes, com exceção do 0, ou seja, há oito maneiras de o fazer; a última posição pode ser ocupada por qualquer dos algarismos diferentes de 4. Então, há $4 \times 8 \times 9$ números nestas condições.
Logo, uma resposta para o problema é ${}^4C_2 \times 9^2 + 4 \times$ $\times\, 8 \times 9 = 774$.

31.2. Para que o produto dos algarismos seja par é necessário que pelo menos um dos algarismos seja par, ou seja, que não sejam todos ímpares.
Há 9×10^4 números de cinco algarismos, dos quais 5^5 têm os algarismos todos ímpares. Assim, há $9 \times 10^4 - 5^5 = 86\,875$ números de cinco algarismos cujo produto dos respetivos algarismos é par.

32. Há oito maneiras de escolher uma das oito linhas. Depois de escolhida a linha, há ${}^8C_2$ maneiras de colocar os cavalos brancos nessa linha. Há agora sete maneiras de escolher uma das restantes sete linhas. Depois de escolhida essa linha, há ${}^8C_2$

maneiras de colocar os cavalos pretos nessa linha. Então, uma resolução para o problema é $8 \times {}^{8}C_2 \times 7 \times {}^{8}C_2 = 43\ 904$.

33. Há ${}^{12}C_4$ maneiras de escolher aleatoriamente quatro dos 12 espaços para colocar as garrafas que são iguais. ${}^{8}A_6$ é o número de maneiras de colocar ordenadamente as seis garrafas diferentes nos oito espaços disponíveis.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^{12}C_4 \times {}^{8}A_6 = 9\ 979\ 200$.

34. As comissões formadas têm de ter alunos de ambos os sexos.
Então, existem duas possibilidades mutuamente exclusivas: escolher duas raparigas e um rapaz ou escolher dois rapazes e uma rapariga. $15 \times {}^{13}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher aleatoriamente uma das 15 raparigas e, para cada uma delas, escolher aleatoriamente dois dos 13 rapazes. $13 \times {}^{15}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher aleatoriamente um dos 13 rapazes e, para cada uma delas, escolher aleatoriamente duas das 15 raparigas. Assim, $15 \times {}^{13}C_2 + 13 \times {}^{15}C_2$ é uma resposta correta.
Por outro lado, ${}^{28}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 28 alunos da turma, independentemente do sexo. ${}^{13}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 13 rapazes. ${}^{15}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das 15 raparigas. Se ao número de maneiras de escolhermos três pessoas retirarmos o número de maneiras de escolher três raparigas e o número de maneiras de escolher três rapazes, obtemos o número de maneiras de escolher comissões de três pessoas formadas por pessoas de ambos os sexos. Assim, ${}^{28}C_3 - {}^{13}C_3 - {}^{15}C_3$ também é uma resposta correta.

35. No que respeita à cor, há duas formas diferentes de escolher 10 das 12 bandeiras para colocar numa fila: podem escolher-se quatro bandeiras de uma cor, quatro de uma outra cor e duas da cor restante ou podem escolher-se três bandeiras de uma cor, três de outra cor e quatro da cor restante.
Relativamente ao primeiro caso, há ${}^{3}C_2$ maneiras diferentes de escolher aleatoriamente duas da três cores das quais se vão se usa as quatro bandeiras; para cada uma destas maneiras, há ${}^{10}C_4$ maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as quatro bandeiras de uma das cores escolhidas; e, para cada uma desta maneiras, há ${}^{6}C_4$ maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as quatro bandeiras da outra cor escolhida, ficando as bandeiras da terceira cor nos lugares que sobram.
No segundo caso, ${}^{3}C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente as duas cores das quais se vão selecionar três bandeiras; para cada uma desta maneiras, há ${}^{10}C_3$ maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as três bandeiras de uma das cores escolhidas; para cada uma desta maneiras, há ${}^{7}C_3$ maneiras de escolher aleatoriamente os lugares na fila para as três bandeiras da outra cor escolhida, ficando as bandeiras da terceira cor nos lugares que sobram.
Assim, ${}^{3}C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^{6}C_4 + {}^{3}C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^{7}C_3$ é uma resposta correta ao problema.

36. Opção (D)
Há duas hipóteses: o primeiro e o último algarismos estão na linha 4 – 5 – 6 ou na linha 7 – 8 – 9. Para cada uma das hipóteses, o número de maneiras de obter um código nas condições pedidas é o mesmo: $3 \times 3 \times 2 \times 2$.
Assim, a resposta é $2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$.

37. Opção (C)
O número de maneiras de sentar os 25 alunos nos 30 lugares disponíveis é ${}^{30}A_{25}$.
O Mário e o Diogo podem ficar juntos por qualquer ordem de 2! maneiras. Para cada uma delas, há cinco filas possíveis onde podem ficar juntos. E, para cada uma delas, há cinco posições que podem ocupar nessa fila. Os restantes 23 alunos podem ser colocados nos restantes 28 lugares de ${}^{28}A_{23}$ maneiras diferentes. Assim, o número de maneiras de o Mário e o Diogo ficarem juntos é dado por $2! \times 5 \times 5 \times {}^{28}A_{23}$.
Então, o número de maneiras de o Mário e o Diogo não ficarem juntos é ${}^{30}A_{25} - 2! \times 5 \times 5 \times {}^{28}A_{23}$.

38.

38.1. O número de maneiras de ordenar os alunos do 10.º ano é 3!. O número de maneiras de ordenar os alunos do 11.º ano é 3!. O número de maneiras de ordenar os alunos do 12.º ano é 3!. O número de maneiras de ordenar os três grupos de alunos é 3!.
Logo, $3! \times 3! \times 3! \times 3! = 1296$ é uma resolução para o problema.

38.2. Há três alternativas para escolher ordenar os elementos deste grupo nas condições do enunciado: a Raquel e a Vitória estão ambas na fotografia, a Raquel está na fotografia e a Vitória não está, ou nenhuma delas está na fotografia.
Se a Raquel e a Vitória fizerem parte do grupo que será fotografado, então resta escolher os outros três elementos o que pode ser feito de ${}^{7}C_3$ maneiras. O número de maneiras de ordenar as cinco pessoas escolhidas para tirar a fotografia é 5!. Há então ${}^{7}C_3 \times 5!$ maneiras de tirar fotografias com a Raquel e a Vitória.
Se a Raquel estiver na fotografia, mas a Vitória não, há ${}^{7}C_4$ maneiras de escolher aleatoriamente os restantes quatro elementos do grupo a serem fotografados. O número de maneiras de ordenar as cinco pessoas escolhidas para tirar a fotografia é 5!. Há então ${}^{7}C_4 \times 5!$ maneiras de tirar fotografias com a Raquel e sem a Vitória.
Se nenhuma das duas estiver na fotografia, há ${}^{7}A_5$ maneiras de escolher e ordenar cinco dos restantes sete elementos para serem fotografados.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^{7}C_3 \times 5! + {}^{7}C_4 \times 5! + {}^{7}A_5 = 10\ 920$

39. A palavra MATEMATICA tem 2M, 3A, 2T, 1E, 1I, 1C.

39.1. ${}^6A_5 = 720$ é o número de maneiras de escolher e ordenar cinco das seis letras diferentes presentes na palavra MATEMATICA.

39.2. ${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das cinco posições a serem ocupadas pelos três A. ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco letras diferentes restantes. 2! é o número de maneiras de ordenar as duas letras diferentes.
Assim, ${}^5C_3 \times {}^5C_2 \times 2! = 200$ é o número de maneiras de cumprir as condições do enunciado.

39.3. As letras iguais podem ser M, A ou T, ou seja, há três maneiras de escolher as letras iguais. ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelas duas letras iguais. ${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das cinco letras diferentes restantes. 3! é o número de maneiras de ordenar as três letras diferentes.
Assim, $3 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 3! = 1800$ é o número de maneiras de cumprir as condições do enunciado.

39.4. As letras iguais podem ser M, A ou T, logo, há ${}^3C_2$ maneiras de escolher dois pares de letras iguais. ${}^4C_1$ é o número de maneiras de escolher uma das quatro letras restantes. ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas por um dos pares de letras iguais. ${}^3C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das três posições restantes a serem ocupadas pelo outro par de letras iguais.
Logo, uma resolução para o problema é ${}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^5C_2 \times {}^3C_2 = 360$.

39.5. Há três alternativas possíveis para escrever palavras que cumpram as condições do enunciado: com um A, com dois A e com três A.
O número de maneiras de escrever palavras com um A é ${}^5C_4 \times 5!$, onde ${}^5C_4$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente as restantes quatro letras de entre as cinco disponíveis e 5! é o número de maneiras de ordenar as cinco letras escolhidas.
O número de maneiras de escrever palavras com dois A é ${}^5C_2 \times {}^5C_3 \times 3!$, onde ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois A, ${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das cinco letras restantes e 3! é o número de maneiras de ordenar as três letras diferentes.
O número de maneiras de escrever palavras com três A é ${}^5C_3 \times {}^5C_2 \times 2!$, onde ${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das cinco posições a serem ocupadas pelos três A, ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco letras diferentes restantes e 2! é o número de maneiras de ordenar as duas letras diferentes.
Assim, uma resolução para o problema é ${}^5C_4 \times 5! + {}^5C_3 \times {}^5C_2 \times 3!\ {}^5C_2 \times {}^5C_3 \times 2! = 1400$.

39.6. Há três hipóteses diferentes de escrever palavras nas condições do enunciado de: com dois M (ou dois T) e três A, com dois M (ou dois T) e dois A ou com dois M (ou dois T) e três letras diferentes.
O número de maneiras de escrever palavras com dois M (ou dois T) e três A é ${}^5C_2$, onde ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois M (ou dois T), havendo apenas uma maneira de colocar os três A nas posições restantes.
O número de maneiras de escrever palavras com dois M (ou dois T) e dois A é ${}^5C_2 \times {}^3C_2 \times 4$, onde ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois M (ou dois T), ${}^3C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das três posições restantes a serem ocupadas pelos A e quatro é o número de maneiras de escolher a letra a ser colocada na posição que falta.
O número de maneiras de escrever palavras com dois M (ou dois T) e três letras diferentes é ${}^5C_2 \times {}^5C_3 \times 3!$, onde ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois M (ou dois T), ${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das cinco letras restantes e 3! é o número de maneiras de ordenar as três letras diferentes.
Assim, uma resolução para o problema é $2 \times ({}^5C_2 + {}^5C_2 \times {}^3C_2 \times 4 + {}^5C_3 \times {}^5C_2 \times 3!) = 1460$.

40.

40.1. Só há uma maneira de colocar os DVD ordenados por ordem crescente.
O número de maneiras de ordenar este conjunto de DVD e os restantes seis DVD é 7!. Assim, uma resolução para o problema é $1 \times 7! = 5040$.

40.2. O número de maneiras de arrumar os seis DVD que não fazem parte da trilogia "O Senhor dos Anéis" é 6!. Há ${}^7C_3$ maneiras de escolher três dos sete espaços criados entre os seis DVD já arrumados, onde poderão ser colocados os DVD da trilogia. 3! é o número de maneiras de ordenar os três DVD da trilogia nos três espaços escolhidos. Logo, uma resolução para o problema é $6! \times {}^7C_3 \times 3! = 151\,200$.

41. Há duas alternativas que cumprem as condições do enunciado: preencher as restantes três faces quadradas com três números pares ou preencher as restantes três faces quadradas com dois números pares e um número ímpar.
O número de maneiras de maneiras de escolher e ordenar três dos cinco números pares disponíveis é ${}^5A_3$, que é o número de maneiras de preencher as três faces quadradas livres. Para cada uma delas, há 8! maneiras de preencher as restantes oito faces com os oito números disponíveis. Assim, a primeira alternativa pode ser realizada de ${}^5A_3 \times 8!$ maneiras.
Existem três faces que podem ser preenchidas com um dos cinco algarismos ímpares disponíveis. ${}^5A_2$ é o número de maneiras de maneiras de escolher e ordenar dois dos cinco números pares disponíveis nas duas restantes faces quadradas. Para cada uma delas, há 8! maneiras de preencher as restantes oito faces com os oito números disponíveis.

Assim, a segunda alternativa pode ser realizada de $3 \times 5 \times {}^5A_2 \times 8!$ maneiras.
Logo, uma resolução para o problema é ${}^5A_3 \times 8! + 3 \times 5 \times {}^5A_2 \times 8!$.

42. ${}^{n+3}C_2 = 21$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+3)!}{(2! \times (n+3-2)!} = 21$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2 \times (n+1)!} = 21$

$\Leftrightarrow (n+2)(n+3) = 42$

$\Leftrightarrow n^2 + 5n - 36 = 0$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-5 \pm 13}{2}$

$\Leftrightarrow n = -9 \ \vee \ n = 4$

Como n tem de ser inteiro e positivo, então $n = 4$.

43. ${}^nC_2 + {}^{30-n}C_2 = 219$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!} + \dfrac{(30-n)!}{2!\,(28-n)!} = 219$

$\Leftrightarrow n(n-1) + (30-n)(29-n) = 438$

$\Leftrightarrow n^2 - n + 870 - 30n - 29n + n^2 = 438$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 60n + 432 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 30n + 216 = 0$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \times 1 \times 216}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{30 \pm 6}{2}$

$\Leftrightarrow n = 12 \ \vee \ n = 18$

Uma vez que n representa o número de bolas azuis e que há mais bolas azuis do que bolas brancas, então $n = 18$.