4. Sucessões

Recorda – páginas 56 e 57

1. $2n - 2$, com $n \geq 1$, é uma expressão do termo geral da sequência do número de quadrados vermelhos da n-ésima figura.

$100 - (2n - 2) = -2n + 102$, com $n \geq 1$, é uma expressão do termo geral da sequência do número de quadrados brancos de n-ésima figura.

$-2n + 102 = 82 \Leftrightarrow -2n = -20 \Leftrightarrow n = 10$

É o termo de ordem 10.

2.

a) $f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

A imagem de 1 é 0.

b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

Os objetos que têm 1 por imagem são o $-\sqrt{2}$ e o $\sqrt{2}$.

c) $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

A imagem de 2 é 3.

d) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

Os objetos que têm 1 por imagem são o $-\sqrt{3}$ e o $\sqrt{3}$.

Capítulo 1 – Sucessões – generalidades

Tarefa – As torres de Hanói – página 58

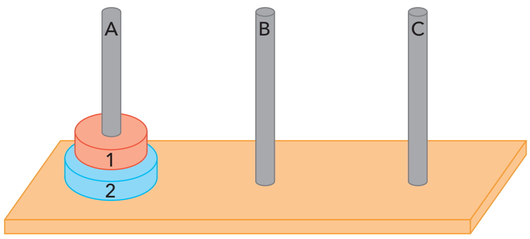
a) A lenda das torres de Brahma conta que, no grande templo de Brahma, em Benares, existem três agulhas de diamante, sobre uma bandeja de metal, simbolizando o centro do mundo. Nestas agulhas estão dispostos 64 discos de ouro puro, colocados por ordem decrescente de tamanho, formando uma torre.

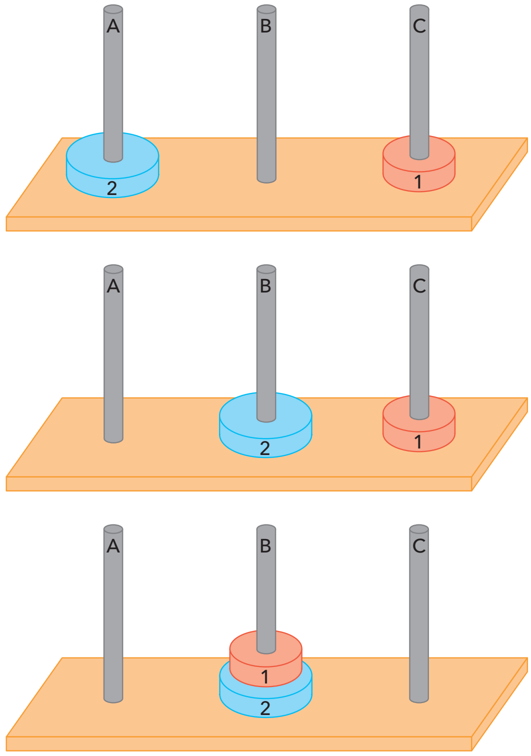
Desde o início do mundo, sacerdotes seguem a tarefa sagrada de mover os discos de uma agulha para a outra, um de cada vez, sem nunca colocar um disco maior sobre um menor. O objetivo é reconstruir a torre na terceira agulha, obedecendo sempre à lei imutável de Brahma.

A lenda prevê que, quando o último disco for colocado na nova agulha, tanto o templo quanto o mundo serão destruídos e reduzidos a pó, acompanhados pelo estrondo de um trovão que marcará o fim dos tempos.

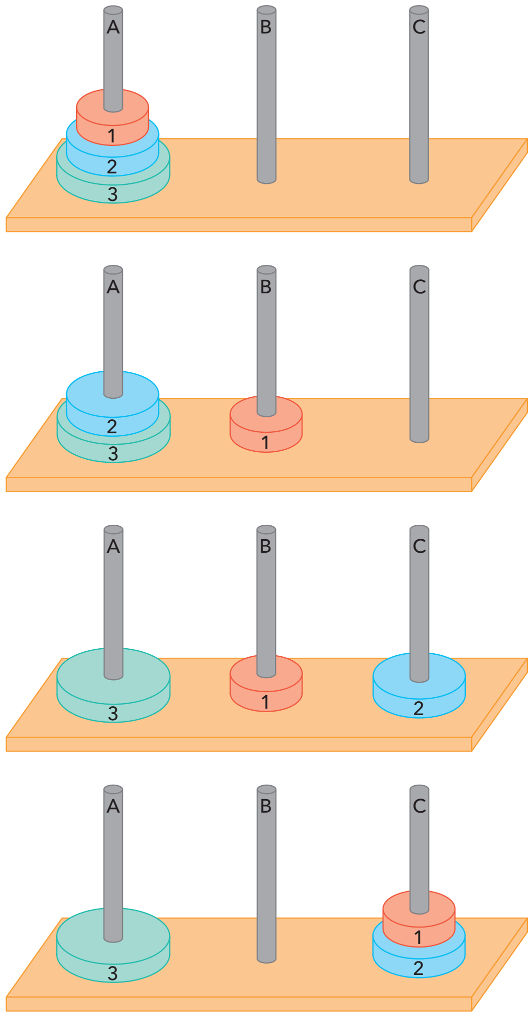
b) Com apenas um disco basta um movimento.

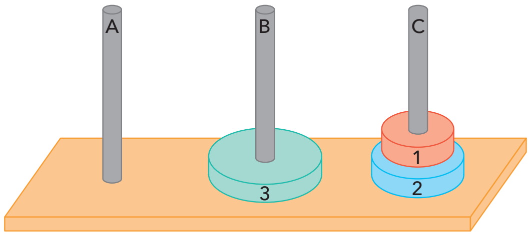
c) Tomando como origem o suporte A e como destino o suporte B, o número mínimo de movimentos para dois discos é 3, como observamos na figura abaixo.

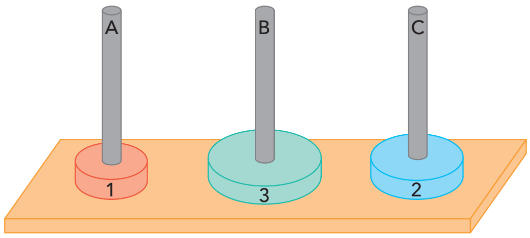


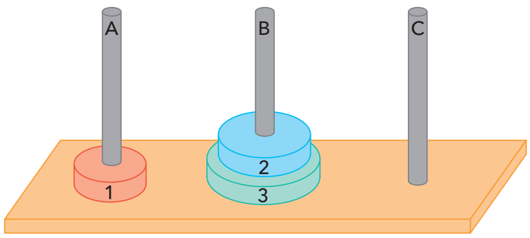


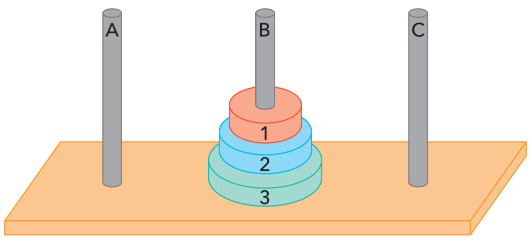
d) Tomando como origem o suporte A e como destino o suporte B, o número mínimo de movimentos para três discos é 7, como observamos nas figuras abaixo.











e) Tomando como origem o suporte A e como destino o suporte B, o número mínimo de movimentos para quatro discos é 15, como observamos na animação que podes consultar em:
https://auladigital.leya.com/share/9279c521-1240-4b75-b94a-86c7f577b46c

f) Para quatro discos, sabendo que para mudar três discos precisamos de sete deslocamentos, deslocamos esses três discos para C e, depois, o disco 4 para B. Deslocamos novamente os discos 1, 2 e 3 para B. Temos, assim, $7 + 1 + 7 = 2 \times 7 + 1$ deslocamentos, ou seja, 15 deslocamentos.

g) Para n discos, sabendo que para mudar $n - 1$ discos precisamos de x deslocamentos, deslocamos esses $n - 1$ discos para C e, depois, o disco n para B. Deslocamos novamente os discos 1, 2, ..., $n - 1$ para B. Temos, assim, $x + 1 + x = 2 \times x + 1$ deslocamentos, ou seja, $2x + 1$ deslocamentos.

h) 1, 3, 7, 15, ...
Conjetura-se que o número mínimo de movimentos necessários para deslocar n discos seja dado por $2^n - 1$.

Exercícios de margem – páginas 60 a 65

1.

a) $u_1 = -10 = -10 \times 1$
$u_2 = -20 = -10 \times 2$
$u_3 = -30 = -10 \times 3$
E, assim, sucessivamente.
Logo, $u_n = -10n$.

b) $u_1 = 1 = \dfrac{1}{2 \times 1 - 1}$
$u_2 = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2 \times 2 - 1}$
$u_3 = \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2 \times 3 - 1}$
E, assim, sucessivamente.
Logo, $u_n = \dfrac{1}{2n - 1}$.

c) $u_1 = \dfrac{4}{3} = \dfrac{1 + 3}{3^1}$
$u_2 = \dfrac{5}{9} = \dfrac{2 + 3}{3^2}$
$u_3 = \dfrac{6}{27} = \dfrac{3 + 3}{3^3}$
E, assim, sucessivamente.
Logo, $u_n = \dfrac{n + 3}{3^n}$.

2.

a) $u_n = 2n - 1$
$u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$
$u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$
$u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$
$u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$
$u_5 = 2 \times 5 - 1 = 9$

b) $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$
$v_1 = 1 + \dfrac{1}{1^2} = 2$
$v_2 = 1 + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{5}{4}$
$v_3 = 1 + \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{10}{9}$
$v_4 = 1 + \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{17}{16}$
$v_5 = 1 + \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{26}{25}$

c) $w_n = \sqrt{n}$
$w_1 = \sqrt{1} = 1$
$w_2 = \sqrt{2}$
$w_3 = \sqrt{3}$
$w_4 = \sqrt{4} = 2$
$w_5 = \sqrt{5}$

d) $t_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
$t_1 = \dfrac{(-1)^1}{1} = -1$
$t_2 = \dfrac{(-1)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$t_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$

$t_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$

$t_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$

e) $s_n = \cos(n\pi)$

$s_1 = \cos(1\pi) = -1$

$s_2 = \cos(2\pi) = 1$

$s_3 = \cos(3\pi) = -1$

$s_4 = \cos(4\pi) = 1$

$s_5 = \cos(5\pi) = -1$

3.

a) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

$u_1 = 0;\ u_2 = 1;\ u_3 = 0;\ u_4 = 1;\ u_5 = 0;\ u_{2026} = 1$

b) $v_n = \begin{cases} n^3 + 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

$v_1 = 1^3 + 1 = 2$

$v_2 = -\frac{1}{2}$

$v_3 = 3^3 + 1 = 28$

$v_4 = -\frac{1}{4}$

$v_5 = 5^3 + 1 = 126$

$v_{2026} = -\frac{1}{2026}$

c) $w_n = \begin{cases} |n-3| & \text{se } n < 10 \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$

$w_1 = |1-3| = 2$

$w_2 = |2-3| = 1$

$w_3 = |3-3| = 0$

$w_4 = |4-3| = 1$

$w_5 = |5-3| = 2$

$w_{2026} = \frac{2026}{2} = 1013$

4. $u_n = \frac{13-2n}{4n+1}$

a) $u_{10} = \frac{13 - 2\times 10}{4\times 10 + 1} = -\frac{7}{41}$

b) $u_n = 10 \Leftrightarrow \frac{13-2n}{4n+1} = 10$

$\Leftrightarrow 13 - 2n = 40n + 10$

$\Leftrightarrow 42n = 3$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{14}\ (\notin \mathbb{N}\backslash\{0\})$

Logo, 10 não é termo da sucessão.

c) $u_5 - u_{20} = \frac{13 - 2\times 5}{4\times 5 + 1} - \frac{13 - 2\times 20}{4\times 20 + 1} = \frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{21}$

d) $u_{n-1} = \frac{13 - 2\times(n-1)}{4\times(n-1)+1} = \frac{13 - 2n + 2}{4n - 4 + 1} = \frac{15-2n}{4n-3}$

$u_{2n} = \frac{13 - 2\times 2n}{4\times 2n + 1} = \frac{13-4n}{8n+1}$

e) $u_n < 0 \Leftrightarrow \frac{13-2n}{4n+1} < 0$

$\Leftrightarrow 13 - 2n < 0$, pois $4n + 1 > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$\Leftrightarrow -2n < -13$

$\Leftrightarrow 2n > 13$

$\Leftrightarrow n > \frac{13}{2}$

O primeiro número natural maior que $\frac{13}{2}$ é 7.

Logo, a partir da ordem 7 todos os termos da sucessão são negativos.

5.

a) • $u_n = 25$

$2n + 1 = 25 \Leftrightarrow 2n = 24$

$\Leftrightarrow n = 12$

Assim, tem-se que 25 é o termo de ordem 12 da sucessão (u_n).

• $v_n = 25$

$(n-3)^2 = 25 \Leftrightarrow n - 3 = 5 \vee n - 3 = -5$

$\Leftrightarrow n = 8 \vee n = -2 \notin \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Assim, tem-se que 25 é o termo de ordem 8 da sucessão (v_n).

b) $u_p = v_p$

$2p + 1 = (p-3)^2 \Leftrightarrow 2p + 1 = p^2 - 6p + 9$

$\Leftrightarrow p^2 - 8p + 8 = 0$

$\Leftrightarrow p = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\times 1\times 8}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow p = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2}$

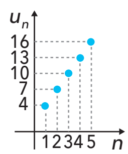
$\Leftrightarrow p = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$

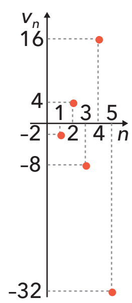
$\Leftrightarrow p = 4 + 2\sqrt{2} \vee p = 4 - 2\sqrt{2}$

Como $(4 + 2\sqrt{2}) \notin \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e $(4 - 2\sqrt{2}) \notin \mathbb{N}\backslash\{0\}$, então a equação $u_p = v_p$ é impossível em $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Assim, a afirmação dada é falsa.

6. $u_n = 3n + 1;\ v_n = (-2)^n$





7. $t_1 = 1$

$t_2 = 1 + 2 = 3$

$t_3 = 3 + 3 = 6$

$t_4 = 6 + 4 = 10$

...

Logo:

$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n,\ \forall\, n > 1 \end{cases}$

8.

a) $a_n = 2n + 1$

$a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$

$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$

Logo:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$$

b) $b_n = 3^n$

$b_1 = 3^1 = 3$

$b_2 = 3^2 = 9$

$b_3 = 3^3 = 27$

$b_4 = 3^4 = 81$

$b_5 = 3^5 = 243$

Logo:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = 3b_{n-1}, \forall\, n > 1 \end{cases}$$

9.

a) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$

$a_1 = 5\ (= 3 \times 1 + 2)$

$a_2 = 5 + 3 = 8\ (= 3 \times 2 + 2)$

$a_3 = 8 + 3 = 11\ (= 3 \times 3 + 2)$

$a_4 = 11 + 3 = 14\ (= 3 \times 4 + 2)$

$a_5 = 14 + 3 = 17\ (= 3 \times 5 + 2)$

Logo, $a_n = 3n + 2$.

b) $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = 2 + b_{n-1}, \forall\, n > 1 \end{cases}$

$b_1 = 3\ (= 2 \times 1 + 1)$

$b_2 = 2 + 3 = 5\ (= 2 \times 2 + 1)$

$b_3 = 2 + 5 = 7\ (= 2 \times 3 + 1)$

$b_4 = 2 + 7 = 9\ (= 2 \times 4 + 1)$

$b_5 = 2 + 9 = 11\ (= 2 \times 5 + 1)$

Logo, $b_n = 2n + 1$.

Aprende fazendo 1 – páginas 66 e 67

1. Opção (A)

$u_{2026} - u_{2025} = 1 - 2 = -1$

2. Opção (B)

$v_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Uma vez que $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, então $\frac{1}{n} > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

pelo que $1 + \frac{1}{n} > 1, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Em particular, tem-se que $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, v_n > 0$.

3. Opção (C)

$w_1 = 4$

$w_2 = 2w_1 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$

$w_3 = 2w_2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$

$w_4 = 2w_3 + 1 = 2 \times 19 + 1 = 39$

4. Opção (B)

$t_1 = 1 = 1^2$

$t_2 = 4 = 2^2$

$t_3 = 9 = 3^2$

$t_4 = 16 = 4^2$

E, assim, sucessivamente.

Logo, $t_n = n^2$.

5.

a) $u_1 = 2 = 2 \times 1$

$u_2 = 4 = 2 \times 2$

$u_3 = 6 = 2 \times 3$

E, assim, sucessivamente.

Logo, $u_n = 2n$.

b) $u_1 = 1 = 1^2$

$u_2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 9 = 3^2$

E, assim, sucessivamente.

Logo, $u_n = n^2$.

c) $u_1 = 3 = 1^2 + 2$

$u_2 = 6 = 2^2 + 2$

$u_3 = 11 = 3^2 + 2$

E, assim, sucessivamente.

Logo, $u_n = n^2 + 2$.

d) $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

$u_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$

$u_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$

E, assim, sucessivamente.

Logo, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

e) $u_1 = 4 = 5 - 1$

$u_2 = 3 = 5 - 2$

$u_3 = 2 = 5 - 3$

E, assim, sucessivamente.

Logo, $u_n = 5 - n$.

6. $u_n = \frac{4n}{n+2}$

a) $u_6 = \frac{4 \times 6}{6+2} = \frac{24}{8} = 3$

b) $u_n = 6 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+2} = 6 \Leftrightarrow 4n = 6n + 12$

$\Leftrightarrow -2n = 12$

$\Leftrightarrow n = -6$

Como $-6 \notin \mathbb{N}\backslash\{0\}$, então 6 não é termo da sucessão (u_n).

c) $u_{10} - u_4 = \frac{4 \times 10}{10+2} - \frac{4 \times 4}{4+2} = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

d) $u_{n+1} = \frac{4(n+1)}{(n+1)+2} + 1 = \frac{4n+4}{n+3}$

$u_n + 1 = \frac{4n}{n+2} + 1 = \frac{4n+n+2}{n+2} = \frac{5n+2}{n+2}$

e) $u_n > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{4n}{n+2} > \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 8n > 5n + 10$, pois $n + 2 > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$\Leftrightarrow 3n > 10$

$\Leftrightarrow n > \frac{10}{3}$

Logo, a partir do termo de ordem 4, todos os termos da sucessão são superiores a $\frac{5}{2}$.

7. **Se *n* ímpar:**

$u_n = 36 \Leftrightarrow n + 2 = 36 \Leftrightarrow n = 34$, que não é um número ímpar.

Assim, se 36 for termo da sucessão, então (u_n) não é um termo de ordem ímpar.

Se *n* par:

$u_n = 36 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6 \ \vee \ n = -6$

Logo, 36 é o 6.º termo da sucessão (u_n).

Se *n* < 5:

$v_n = 36 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6 \ \vee \ n = -6$

Assim, se 36 for termo da sucessão, então (v_n) não é um termo de ordem inferior a 5.

Se *n* ≥ 5:

$v_n = 36 \Leftrightarrow 7n = 36 \Leftrightarrow n = \frac{36}{7}$, que não é um número natural positivo.

Logo, 36 não é um termo da sucessão (v_n).

8. Opção (A)

Observe-se que $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_3 = 1$, $v_4 = -1$ e, assim, sucessivamente, pelo que uma outra forma de definir esta sucessão poderia ser:

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Assim, $v_{2026} = -1$.

9.

a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 1, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = \frac{a}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = a^3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{a} u_n, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$

10.

a) Sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} P_1 = 6\pi \\ P_n = \frac{1}{2} P_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

Termo geral da sucessão: $P_n = 6\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) Se a medida do diâmetro da primeira circunferência é 6, então a medida do raio é 3.

Logo, $A_1 = \pi \times 3^2 = 9\pi$.

Se a razão de semelhança entre as medidas dos diâmetros das circunferências é $\frac{1}{2}$, então a razão de semelhança entre as respetivas áreas é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} A_1 = 9\pi \\ A_n = \frac{1}{4} A_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

Termo geral da sucessão: $A_n = 9\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Capítulo 2 – Progressões aritméticas e geométricas

Tarefa – A lenda de Sissa – página 68

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

Sendo (u_n) uma progressão geométrica de razão r, sabemos que:

- $u_2 = u_1 r$
- $u_3 = u_1 r^2$
- ...
- $u_n = u_1 r^{n-1}$

Logo, S_n pode ser escrito como:

$$S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + ... + u_1 r^{n-1}$$

Colocando u_1 em evidência, tem-se:

$$S_n = u_1 (1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}) \quad \textbf{(1)}$$

Por outro lado, multiplicando S_n por r, obtém-se:

$$r S_n = r u_1 (1 + r + r^2 + ... + r^{n-1})$$

ou, de forma equivalente:

$$r S_n = u_1 (r + r^2 + r^3 + ... + r^n) \quad \textbf{(2)}$$

Subtraindo membro a membro **(1)** e **(2)**, vem que:

$$S_n - r S_n = u_1 (1 - r^n)$$

ou seja:

$$S_n (1 - r) = u_1 (1 - r^n)$$

Portanto, $S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$.

Exercícios de margem – páginas 70 a 83

10.

a) $a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) - 2 - (3n - 2) =$

$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (a_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

b) $b_{n+1} - b_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} =$

$= \frac{(n+2)n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} =$

$= -\frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $-\frac{1}{n(n+1)}$ não é uma constante, então (b_n) não é uma progressão aritmética.

c) $c_{n+1} - c_n = \frac{-2(n+1)^2 + (n+1)}{n+1} - \frac{-2n^2 + n}{n} =$

$= \frac{(n+1)[-2(n+1) + 1]}{n+1} - \frac{n(-2n+1)}{n} =$

$= -2n - 2 + 1 - (-2n + 1) =$

$= -2n - 1 + 2n - 1 = -2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que –2 é uma constante, fica provado que (c_n) é uma progressão aritmética de razão –2.

d) $d_{n+1} - d_n = d_n - \frac{1}{2} - d_n = -\frac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $-\frac{1}{2}$ é uma constante, fica provado que (d_n) é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{2}$.

e) $e_{n+1} - e_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1) = 2 \times 3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 2×3^n não é uma constante, então (e_n) não é uma progressão aritmética.

f) $f_{n+1} - f_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $2n + 1$ não é uma constante, então (f_n) não é uma progressão aritmética.

11.

a) $u_{345} - u_{344} = 5$

b) $u_{2027} - u_{2025} = 2 \times 5 = 10$

c) $u_{n+3} - u_n = 3 \times 5 = 15$

12.

a) $v_{2026} = v_1 + 2025 \times r = 11 + 2025 \times (-3) = -6064$

b) $v_{2026} = v_4 + (2026 - 4) \times r = -\sqrt{5} + 2022 \times 1 = 2022 - \sqrt{5}$

c) $v_{2026} = v_{14} + (2026 - 14) \times r = 11 + 2012 \times r$

Cálculo auxiliar

Cálculo da razão r:

$v_{120} = v_{14} + (120 - 14) \times r \Leftrightarrow 64 = 11 + 106r$

$\Leftrightarrow r = \frac{64 - 11}{106}$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

Assim, $v_{2026} = 11 + 2012 \times \frac{1}{2} = 1017$.

d) Como $v_n - v_{n-1} = -3$, vem que (v_n) é uma progressão aritmética de razão –3.

Assim, $v_{2026} = v_1 + 2025 \times r = 0 + 2025 \times (-3) = -6075$.

13.

a) $u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -10 + (n-1)4$

$\Leftrightarrow u_n = -10 + 4n - 4$

$\Leftrightarrow u_n = 4n - 14$

b) $u_n = u_6 + (n-6)r \Leftrightarrow u_n = -2 + (n-6)5$

$\Leftrightarrow u_n = -2 + 5n - 30$

$\Leftrightarrow u_n = 5n - 32$

c) $u_{26} = u_{10} + (26-10)r \Leftrightarrow 21 = 13 + 16r$

$\Leftrightarrow 8 = 16r$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

$u_n = u_{10} + (n-10)r \Leftrightarrow u_n = 13 + (n-10)\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow u_n = 13 + \frac{1}{2}n - 5$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 8$

d) $u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow u_n = -\sqrt{2} + \sqrt{2}n - \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow u_n = \sqrt{2}n - 2\sqrt{2}$

14. O primeiro múltiplo natural de 4, que está entre 406 e 3002, é o 408, e o último múltiplo natural de 4, neste intervalo, é o 3000.

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

Logo:

$3000 = 408 + (n-k)4 \Leftrightarrow n - k = \frac{30004 - 408}{4}$

$\Leftrightarrow n - k = 648$

Assim, o número de múltiplos naturais de 4 compreendidos entre 406 e 3002 é $n - k + 1 = 649$.

15. Sejam $\ell - r$, ℓ e $\ell + r$ as medidas dos lados do triângulo e r a razão da progressão.

Uma vez que o perímetro do triângulo mede 36 cm, vem que:

$$(\ell - r) + \ell + (\ell + r) = 36 \Leftrightarrow 3\ell = 36 \Leftrightarrow \ell = 12$$

Por outro lado, dado que se trata de um triângulo retângulo, verifica-se que:

$$(\ell + r)^2 = \ell^2 + (\ell - r)^2$$

Como $\ell = 12$, temos que:

$(12 + r)^2 = 12^2 + (12 - r)^2$

$\Leftrightarrow 144 + 24r + r^2 = 144 + 144 - 24r + r^2$

$\Leftrightarrow 24r = 144 - 24r$

$\Leftrightarrow 48r = 144$

$\Leftrightarrow r = 3$

Concluímos, assim, que 9 cm, 12 cm e 15 cm são as medidas dos lados do triângulo.

16. $u_1 + u_{19} = 13$: soma do primeiro e do último termo da progressão aritmética (u_n).

a) $u_2 + u_{18} = 13$: soma do segundo e do penúltimo termo da progressão aritmética (u_n).

b) $u_3 + u_{17} = 13$: soma do terceiro e do antepenúltimo termo da progressão aritmética (u_n).

c) $u_{10} = \frac{13}{2}$: termo central da progressão aritmética (u_n).

17.

a) $S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \times 19 = \frac{-8 + 82}{2} \times 19 = 703$

Cálculos auxiliares

- $a_1 = 5 \times 1 - 13 = -8$
- $a_{19} = 5 \times 19 - 13 = 82$

b) $S = \frac{b_{11} + b_{50}}{2} \times 40 = \frac{-25 - 142}{2} \times 40 = -3340$

Cálculos auxiliares

- $b_{11} = -3 \times 11 + 8 = -25$
- $b_{50} = -3 \times 50 + 8 = -142$

18. O primeiro múltiplo de 3, compreendido entre 35 e 244, é 36 e o último é 243. Assim, pretende-se calcular 36 + 39 + 42 + ... + 243.

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 3 e 1.º termo 36.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$u_n = u_1 + (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = 36 + (n-1)3$

$\Leftrightarrow u_n = 36 + 3n - 3$

$\Leftrightarrow u_n = 3n + 33$

É agora necessário saber a ordem do termo 243:
$u_n = 243 \Leftrightarrow 3n + 33 = 243 \Leftrightarrow n = 70$
Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 70 parcelas.

Logo, $S = \frac{36 + 243}{2} \times 70 = 9765$.

19. Como $u_1 + u_2 = 18$, então, tem-se:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 52 \Leftrightarrow 18 + u_1 + 2r + u_2 + 2r = 52$$
$$\Leftrightarrow 36 + 4r = 52$$
$$\Leftrightarrow 4r = 16$$
$$\Leftrightarrow r = 4$$

Assim:

$$u_1 + u_2 = 18 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 4 = 18$$
$$\Leftrightarrow 2u_1 = 14$$
$$\Leftrightarrow u_1 = 7$$

O termo geral desta progressão aritmética é:
$u_n = 7 + 4(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 7 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n + 3$
Então, $u_{10} = 4 \times 10 + 3 = 43$.

Logo, $S_{10} = \frac{7 + 43}{2} \times 10 = 250$.

20. $S_n = 525 \Leftrightarrow \dfrac{-\frac{39}{2} + u_n}{2} \times n = 525$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{39}{2} + \left(-\frac{39}{2} + \frac{1}{2}(n-1)\right)\right)n = 1050$$
$$\Leftrightarrow \left(-\frac{39}{2} - \frac{39}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)n = 1050$$
$$\Leftrightarrow -\frac{79}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = 1050$$
$$\Leftrightarrow n^2 - 79n - 2100 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{79 \pm \sqrt{79^2 + 4 \times 2100}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = 100 \ \vee \ n = -21$$

Uma vez que n é um número natural positivo, tem-se que $n = 100$.

21.

a) A sucessão do número de páginas lidas pela Isaura é uma progressão aritmética de razão 2 e cujo primeiro termo é 5.
O termo geral desta progressão é:
$u_n = 5 + 2(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 5 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 3$
O dia 7 de dezembro é o décimo segundo dia de leitura da Isaura.
Assim, $u_{12} = 2 \times 12 + 3 = 27$, ou seja, no dia 7 de dezembro a Isaura lê 27 páginas.

b) $S_n = 480 \Leftrightarrow \frac{5 + 2n + 3}{2} \times n = 480$

$$\Leftrightarrow (8 + 2n)n = 960$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 + 8n - 960 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 8 \times 960}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = 20 \ \vee \ n = -24$$

Como n é um número natural positivo, então $n = 20$.
Logo, a Isaura terminará a leitura do livro no dia 15 de dezembro.

22.

a) $14 + 21 + 28 + ... + 224$
As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 7.
Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n - 1)7 \Leftrightarrow u_n = 14 + (n - 1)7$$
$$\Leftrightarrow u_n = 14 + 7n - 7$$
$$\Leftrightarrow u_n = 7n + 7$$

É agora necessário saber a ordem do termo 224:
$u_n = 224 \Leftrightarrow 7n + 7 = 224 \Leftrightarrow n = 31$
Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 31 parcelas. Logo:

$$S = \frac{14 + 224}{2} \times 31 = 3689$$

b) $-22 - 11 + 11 + 22 + ... + 253$
As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 11.
Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n - 1)11 \Leftrightarrow u_n = -22 + (n - 1)11$$
$$\Leftrightarrow u_n = -22 + 11n - 11$$
$$\Leftrightarrow u_n = 11n - 33$$

É agora necessário saber a ordem do termo 253:
$u_n = 253 \Leftrightarrow 11n - 33 = 253 \Leftrightarrow n = 26$
Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 26 parcelas. Logo:

$$S = \frac{-22 + 253}{2} \times 26 = 3003$$

23.

a) $u_1 = 5$; $u_2 = 5 \times 2 = 10$; $u_3 = 10 \times 2 = 20$;
$u_4 = 20 \times 2 = 40$

b) $u_1 = -5$; $u_2 = -5 \times 2 = -10$; $u_3 = -10 \times 2 = -20$;
$u_4 = -20 \times 2 = -40$

c) $u_1 = 5$; $u_2 = 5 \times (-2) = -10$; $u_3 = -10 \times (-2) = 20$;
$u_4 = 20 \times (-2) = -40$

d) $u_1 = \frac{1}{5}$; $u_2 = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$; $u_3 = \frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$;
$u_4 = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$

e) $u_1 = \frac{1}{5}$; $u_2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$; $u_3 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$;
$u_4 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$

24.

a) $\frac{u_{13}}{u_{12}} = 3$

b) $\frac{u_{2017}}{u_{2018}} = \dfrac{1}{\frac{u_{2018}}{u_{2017}}} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{u_{100}}{u_{98}} = \frac{u_{100}}{u_{99}} \times \frac{u_{99}}{u_{98}} = 3 \times 3 = 9$

25.

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3, \forall \ n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$
Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (a_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

b) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n-1-1+n} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 2 é uma constante, fica provado que (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

c) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4 \times (-2)^{n+1}}{4 \times (-2)^n} = (-2)^{n+1-n} = -2, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que –2 é uma constante, fica provado que (c_n) é uma progressão geométrica de razão –2.

d) $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{-\pi \times (\sqrt{2})^{n+1}}{-\pi \times (\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\sqrt{2}$ é uma constante, fica provado que (d_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

e) $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{5^n}} = \frac{3^{n+2} \times 5^n}{5^{n+1} \times 5^{n+1}} = \frac{3}{5}, \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\frac{3}{5}$ é uma constante, fica provado que (e_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{5}$.

26.

a) $u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 4 \times 3^{n-1}$

b) $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2 = r$

Logo:

$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 1 \times 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow u_n = 2^{n-1}$

c) $\frac{u_{50}}{u_{49}} = -1 = r$

Logo:

$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \times (-1)^{n-1}$

d) $u_6 = u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{32}{5} = \frac{1}{5} \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$

Logo:

$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{5} \times 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2^{n-1}}{5}$

e) $u_7 = u_4 \times r^{7-4} \Leftrightarrow 320 = 40 \times r^3$

$\Leftrightarrow r^3 = 8$

$\Leftrightarrow r = 2$

Logo:

$u_n = u_4 \times r^{n-4} \Leftrightarrow u_n = 40 \times 2^{n-4}$

$\Leftrightarrow u_n = 5 \times 2^3 \times 2^{n-4}$

$\Leftrightarrow u_n = 5 \times 2^{n-1}$

f) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4u_n}{3}}{u_n} = \frac{4}{3}$

Logo:

$u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

27. Para que $k + 1$, k e $k + 2$ sejam três termos consecutivos de uma progressão geométrica, tem de se verificar $\frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k}$.

Então:

$\frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k} \Leftrightarrow k^2 = (k+1)(k+2)$

$\Leftrightarrow k^2 = k^2 + 2k + k + 2$

$\Leftrightarrow -3k = 2$

$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$

28.

a) $S_{15} = 1 \times \frac{1 - 3^{15}}{1 - 3} = 7\,174\,453$

b) $S_{15} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{15\,258\,789\,062}{6\,103\,515\,625}$

c) $S_{15} = 3 \times \frac{1 - (-1)^{15}}{1 - (-1)} = 3$

d) $S_{15} = 4 \times 15 = 60$, uma vez que se trata de uma sucessão constante.

29. $v_1 = \frac{6^2}{2} = 18$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{6^{n+2}}{2^{n+1}}}{\frac{6^{n+1}}{2^n}} = \frac{6^{n+2} \times 2^n}{6^{n+1} \times 2^{n+1}} = \frac{6}{2} = 3 = r$

Logo, $S_n = 18 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = -9(1 - 3^n)$.

30. $u_1 = 1$

$r = 2$

$S_{30} = 1 \times \frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} = 1\,073\,741\,823$

Se os seus pais aceitassem as condições, a Joana receberia 1 073 741 823 cêntimos, ou seja, 10 737 418,23 euros.

31. $u_1 = 10\,000$

$r = 1 + 0{,}31 = 1{,}031$

$u_n = 10\,000 \times 1{,}031^{n-1}$

$u_{10} = 10\,000 \times 1{,}031^9 \approx 13\,162$

Ao décimo dia da experiência haverá, aproximadamente, 13 162 bactérias.

32. $u_1 = 4500$

$r = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$u_n = 4500 \times 0{,}85^{n-1}$

$u_4 = 4500 \times 0{,}85^3 \approx 2349$

No quarto ano do estudo, a aldeia terá, aproximadamente, 2764 habitantes.

33.

a) Trata-se da soma de todos os termos da progressão geométrica de primeiro termo 2 e de razão $\frac{1}{2}$.

Assim, a soma pretendida é $\frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

b) Seja (u_n) uma progressão geométrica de primeiro termo 3, de sexto termo $\frac{3}{3125}$ e de razão r.

Cálculo auxiliar

Determinação de r:

$u_6 = u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow \frac{3}{3125} = 3 \times r^5$

$\Leftrightarrow r^5 = \frac{1}{3125}$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{5}$

Assim, a soma pretendida é $\frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4}$.

34. Seja (a_n) a sucessão que representa a área do quadrado de ordem n.

Tem-se que $a_1 = 4^2 = 16$; $a_2 = 2^2 = 4$; $a_3 = 1^2 = 1$; ...

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo 16.

Assim, a soma das áreas dos todos os quadrados pode ser dada por $\frac{a_1}{1-r}$, ou seja, $\frac{16}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{\frac{3}{4}} = \frac{64}{3}$ u.a.

Aprende fazendo 2 – páginas 84 a 86

1.

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}n + 1\right) =$

$= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{5}n - 1 =$

$= \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\frac{2}{5}$ é uma constante, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{5}$.

b) $v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$

$= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$

$= \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 2n - n - 1}{n(n+1)} =$

$= \frac{-1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\frac{-1}{n(n+1)}$ não é uma constante, então (v_n) não é uma progressão aritmética.

c) $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) =$

$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n =$

$= 2n + 2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $2n + 2$ não é uma constante, então (w_n) não é uma progressão aritmética.

d) $x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1)}{n+1} - \frac{n^2 - 2n}{n} =$

$= \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n - 2}{n+1} - \frac{n(n-2)}{n} =$

$= \frac{n^2 - 1}{n+1} - (n-2) =$

$= \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} - n + 2 =$

$= n - 1 - n + 2 =$

$= 1, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 1 é uma constante, então (x_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

e) $y_{n+1} - y_n = y_n - \pi - y_n = -\pi, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $-\pi$ é uma constante, então (y_n) é uma progressão aritmética de razão $-\pi$.

2.

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi^{n+1}}{2\pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que π é uma constante, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão π.

b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3})^{n-1}} = (\sqrt{3})^{n-n+1} = \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\sqrt{3}$ é uma constante, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

c) $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{n^2 + n} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{n^2 + n} =$

$= \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + n} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} =$

$= \frac{n+2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\frac{n+2}{n}$ não é uma constante, então (w_n) não é uma progressão geométrica.

d) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{5}}{\frac{4^n}{5}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 4 é uma constante, então (x_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

e) $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{4}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\frac{1}{5}$ é uma constante, então (y_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

3. Opção (A)

Se $u_n = \frac{2n + 6n^2}{n}$, então:

$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) + 6(n+1)^2}{n+1} - \frac{2n + 6n^2}{n} =$

$= 2 + 6(n+1) - 2 - 6n =$

$= 6n + 6 - 6n =$

$= 6, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 6 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética.

4.

a) O número de bolotas que o esquilo apanha em cada dia é dado por uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo 7.

Assim, o número de bolotas que o esquilo apanha no n-ésimo dia do mês é dado pela expressão:

$u_n = 7 + (n-1) \times 3 =$

$= 7 + 3n - 3 =$

$= 3n + 4$

b) $u_{25} = 3 \times 25 + 4 = 79$

No 25.º dia, o esquilo apanhou 79 bolotas.

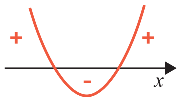
c) $S_n > 1000 \Leftrightarrow \dfrac{7 + 3n + 4}{2} \times n > 1000$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 11n - 2000 > 0$

Cálculo auxiliar

$3n^2 + 11n - 2000 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 + 24\,000}}{6}$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-11 \pm \sqrt{24\,121}}{6}$



Logo, $n \approx -27{,}7 \ \vee \ n \approx 24{,}1$.

Logo, ao fim de 25 dias, o número de bolotas ultrapassou pela primeira vez as 1000 bolotas.

5.

a) $u_{36} = 20 + 35 \times 10 = 370$

A 36.ª prestação foi de 370 euros.

b) $S_{36} = \dfrac{20 + 370}{2} \times 36 = 7020$

A Teresa pagou 7020 euros pelo carro.

6. Opção (D)

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{-2(n+1)}}{2^{-2n}} = 2^{-2n-2+2n} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\dfrac{1}{4}$ é uma constante, então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{4}$.

7. Opção (B)

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2\sqrt{2^{n+1-4}}}{2\sqrt{2^{n-4}}} = \sqrt{\dfrac{2^{n-3}}{2^{n-4}}} = \sqrt{2^{n-3-n+4}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

8. Opção (C)

$v_1 = 4 \times 8 = 32$

$v_2 = 4 \times 4 = 16$

$v_3 = 4 \times 2 = 8$

E, assim, sucessivamente.

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 32 e a razão é $\dfrac{1}{2}$. Assim:

$v_n = 32 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{2^5}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n-6}}$

9. Opção (D)

$13 + 15 + 17 + \ldots + 2017$ é a soma de alguns termos de uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 13.

Então, o termo geral desta progressão é:

$u_n = 13 + (n - 1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 11$

Assim:

$2017 = 2n + 11 \Leftrightarrow n = 1003$

Assim:

$13 + 15 + 17 + \ldots + 2017 = 1003 \times \dfrac{13 + 2017}{2} =$

$= 1\,018\,045$

10. Opção (C)

$\dfrac{u_{1001}}{u_{1002}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{u_{1002}}{u_{1001}} = 2 \Leftrightarrow r = 2$

$S_7 = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \dfrac{1 - 2^7}{1 - 2} = 381$

$\Leftrightarrow u_1 \times 127 = 381$

$\Leftrightarrow u_1 = 3$

Assim, $u_n = 3 \times 2^{n-1}$.

Logo, $u_{10} = 3 \times 2^9$.

11. Opção (A)

Como (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3, então $u_{n+1} - u_n = 3$.

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^{-3u_{n+1}}}{2^{-3u_n}} = 2^{-3(u_{n+1} - u_n)} = 2^{-3 \times 3} =$

$= 2^{-9}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 2^{-9} é uma constante, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2^{-9}.

12. Opção (A)

Seja h a altura do primeiro triângulo.

Pelo teorema de Pitágoras:

$6^2 = 3^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 27$

Logo, $h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Assim, a área do primeiro triângulo é:

$a_1 = \dfrac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

Uma vez que os triângulos são semelhantes, e que os lados de cada triângulo têm metade do comprimento dos lados do triângulo anterior, a razão de semelhança entre os triângulos é $\dfrac{1}{2}$ e a razão entre as suas áreas é $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Então, a sucessão cujo termo geral representa a área, em cm^2, de cada um dos triângulos é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{4}$ e primeiro termo $9\sqrt{3}$. Logo:

$a_n = 9\sqrt{3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \dfrac{9\sqrt{3}}{(2^2)^{n-1}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2^{2n-2}}$

Aprende Fazendo Global – páginas 89 a 93

1. Opção (B)

Seja (u_n) a progressão aritmética a que se refere o enunciado. Então:

$u_{10} = u_1 + (10 - 1)r \Leftrightarrow 81 = u_1 + 9 \times 5$

$\Leftrightarrow u_1 = 81 - 45$

$\Leftrightarrow u_1 = 36$

2. $u_n = 3n + 9$

a) $u_n = 100 \Leftrightarrow 3n + 9 = 100 \Leftrightarrow 3n = 91 \Leftrightarrow n = \dfrac{91}{3}$, que não é um número natural diferente de zero.

Logo, 100 não é termo da sucessão (u_n).

b) $u_p > 400 \Leftrightarrow 3p + 9 > 400$

$\Leftrightarrow 3p > 391$

$\Leftrightarrow p > \dfrac{391}{3}$

Logo, a partir do termo de ordem 131 todos os termos da sucessão são superiores a 400.

c) $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 9 - (3n + 9) =$

$= 3n + 3 + 9 - 3n - 9 =$

$= 3, \ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que 3 é uma constante, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

d) $S_n = 957 \Leftrightarrow \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n = 957$

$\Leftrightarrow (12 + 3n + 9)n = 1914$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 21n - 1914 = 0$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{-21 \pm \sqrt{21^2 + 4 \times 3 \times 1914}}{6}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm 153}{6}$

$\Leftrightarrow n = 22 \ \vee \ n = -87$

Como n tem de ser um número natural diferente de zero, então $n = 22$.

Logo, o número de termos consecutivos a adicionar ao primeiro termo, de forma a obter a soma 957, é 21.

3.

a) $u_n = 20 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} = 20$

$\Leftrightarrow 2n - 1 = 20n$

$\Leftrightarrow -18n = 1$

$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{18}$ $(\notin \mathbb{N}\backslash\{0\})$

Logo, 20 não é termo da sucessão (u_n).

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$

$= \frac{2n^2 + n - 2n^2 - 2n + n + 1}{n(n+1)} =$

$= \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Uma vez que $\frac{1}{n(n+1)}$ não é uma constante, então (u_n) não é uma progressão aritmética.

4. $u_n = 10 + (n-1) \times 2 = 2n + 8$

$u_{15} = 2 \times 15 + 8 = 38$

$S_{15} = \frac{10 + 38}{2} \times 15 = 360$

O estudante fez 360 exercícios diferentes.

5.

a) $u_n = 4 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow u_n = 4 - 3n + 3$

$\Leftrightarrow u_n = -3n + 7$

b) $u_n = -46 + (n-10) \times (-5) \Leftrightarrow u_n = -46 - 5n + 50$

$\Leftrightarrow u_n = -5n + 4$

c) $u_{60} = u_{10} + (60 - 10)r \Leftrightarrow 33 = 8 + 50r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

$u_n = 8 + (n-10) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 8 + \frac{1}{2}n - 5$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 3$

d) $u_{200} = u_{180} + (200 - 180)r \Leftrightarrow 0 = 10 + 20r$

$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

$u_n = 0 + (n - 200) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}n + 100$

e) $u_9 = u_2 + (9-2)r \Leftrightarrow -2 = -16 + 7r \Leftrightarrow r = 2$

$u_n = -16 + (n-2) \times 2 \Leftrightarrow u_n = -16 + 2n - 4$

$\Leftrightarrow u_n = 2n - 20$

f) $u_n = -17 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = -17 + 6n - 6$

$\Leftrightarrow u_n = 6n - 23$

6.

a) $v_n = 4 \times 3^{n-1}$

b) $93\,750 = 150 \times r^{7-3} \Leftrightarrow r^4 = 625 \Leftrightarrow r = 5 \ \vee \ r = -5$

Como $r < 0$, então $r = -5$.

$150 = v_1 \times (-5)^{3-1} \Leftrightarrow 150 = v_1 \times 25 \Leftrightarrow v_1 = 6$

$v_n = 6 \times (-5)^{n-1}$

7. Opção (C)

$u_1 = a$

$u_2 = \frac{1 - u_1}{2} = \frac{1-a}{2}$

$u_3 = \frac{1 - u_2}{2} = \frac{1 - \left(\frac{1-a}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{a}{2}}{2} = \frac{1+a}{4}$

8. Opção (D)

$1 + \pi^1 + \pi^2 + ... + \pi^{2016} + \pi^{2017}$ é a soma dos primeiros 2018 termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 1 e a razão é π.

Então:

$1 + \pi^1 + \pi^2 + ... + \pi^{2016} + \pi^{2017} = 1 \times \frac{1 - \pi^{2018}}{1 - \pi} =$

$= \frac{1 - \pi^{2018}}{1 - \pi}$

9. Opção (B)

$u_1 + u_2 = 12 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r = 12$

$\Leftrightarrow r + r + r = 12$

$\Leftrightarrow 3r = 12$

$\Leftrightarrow r = 4$

10. Opção (A)

$u_n = 1300 \times 1{,}016^{n-1}$

2012 corresponde a $n = 1$, logo 2030 corresponde a $n = 19$.

Assim, em 2030 a população será de $1300 \times 1{,}016^{18}$ milhares de habitantes.

11. $u_n = 3 + (n-1) \times 4 \Leftrightarrow u_n = 3 + 4n - 4$

$\Leftrightarrow u_n = 4n - 1$

$S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 465$

$\Leftrightarrow \frac{3 + 4n - 1}{2} \times n = 465$

$\Leftrightarrow (4n + 2)n = 930$

$\Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 930 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 14\,880}}{8}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm 122}{8}$

$\Leftrightarrow n = 15 \ \vee \ n = -62$

Como n é um número natural diferente do zero, então $n = 15$.

12.

a) $u_n = -3 + (n-1) \times 6 \Leftrightarrow u_n = -3 + 6n - 6$

$\Leftrightarrow u_n = 6n - 9$

b) $u_8 + u_9 + ... + u_{43} = \frac{u_8 + u_{43}}{2} \times (43 - 8 + 1) =$

$= \frac{6 \times 8 - 9 + 6 \times 43 - 9}{2} \times 36 =$

$= 144 \times 36 =$

$= 5184$

c) $S_n = 37\,629 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 37\,629$

$\Leftrightarrow \frac{-3 + 6n - 9}{2} \times n = 37\,629$

$\Leftrightarrow (6n - 12)n = 75\,258$

$\Leftrightarrow 6n^2 - 12n - 75\,258 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 12\,543 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 50\,172}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 224}{2}$

$\Leftrightarrow n = 133 \vee n = -111$

Como n é um número natural diferente de zero, então $n = 113$.

13.

a) $u_n = 1 + (n - 1) \times 0{,}1 \Leftrightarrow u_n = 1 + 0{,}1n - 0{,}1$

$\Leftrightarrow u_n = 0{,}1n + 0{,}9$

$u_n = 100 \Leftrightarrow 0{,}1n + 0{,}9 = 100$

$\Leftrightarrow 0{,}1n = 99{,}1$

$\Leftrightarrow n = 991$

A sequência tem 991 elementos.

b) $S_{991} = \frac{1 + 100}{2} \times 991 = 50\,045{,}5$

14.

a) $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Uma vez que $\frac{1}{3}$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

b) $S_n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

15.

a) $u_1 = 2r$

$u_1 + u_2 = 24 \Leftrightarrow u_1 + u_1 \times r = 24$

$\Leftrightarrow 2r + 2r \times r = 24$

$\Leftrightarrow 2r^2 + 2r - 24 = 0$

$\Leftrightarrow r^2 + r - 12 = 0$

$\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$

$\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm 7}{2}$

$\Leftrightarrow r = -4 \vee r = 3$

Como a razão é positiva, então $r = 3$.

b) $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \Leftrightarrow \frac{5a - 3}{8a} \Leftrightarrow \frac{a + 3}{5a - 3}$

$\Leftrightarrow (5a - 3)^2 = 8a(a + 3)$

$\Leftrightarrow 25a^2 - 30a + 9 = 8a^2 + 24a$

$\Leftrightarrow 17a^2 - 54a + 9 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{54 \pm \sqrt{2304}}{34}$

$\Leftrightarrow a = 3 \vee a = \frac{3}{17}$

$\frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \Leftrightarrow \frac{a + 3}{5a - 3} = \frac{a}{a + 3}$

$\Leftrightarrow (a + 3)^2 = a(5a - 3)$

$\Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = 5a^2 - 3a$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 9a - 9 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{34}$

$\Leftrightarrow a = 3 \vee a = -\frac{3}{4}$

Logo, $a = 3$.

Então, $u_1 = 24$ e $u_2 = 12$.

Assim, $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

16.

a) $u_1 = 2000 \times 1{,}013 = 2026$ euros

$u_4 = 2000 \times 1{,}013^4 \approx 2106$ euros

b) $u_n = 2026 \times 1{,}013^{n-1}$

17. Os tempos de estudo, em minutos, da Isaura, em cada um dos dias, são termos consecutivos de uma progressão aritmética, (u_n), de razão 20.

$u_4 = 180$

$u_n = 180 + (n - 4) \times 20 = 20n + 100$

$u_1 = 20 + 100 = 120$

$S_m = 4320 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 4320$

$\Leftrightarrow \frac{120 + 20m + 100}{2} \times m = 4320$

$\Leftrightarrow (110 + 10m)m = 4320$

$\Leftrightarrow 10m^2 + 110m - 4320 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 11m - 432 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \times (-432)}}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{-11 \pm 43}{2}$

$\Leftrightarrow m = -27 \vee m = 16$

Como $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $m = 16$.

18. Como $a + 4$, $a + 1$ e $-a + \frac{7}{2}$ são três termos de uma progressão geométrica, então:

$\frac{a + 1}{a + 4} = \frac{-a + \frac{7}{2}}{a + 1} \Leftrightarrow (a + 1)^2 = (a + 4) \times \left(-a + \frac{7}{2}\right)$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = -a^2 + \frac{7}{2}a - 4a + 14$

$\Leftrightarrow 2a^2 + \frac{5}{2}a - 13 = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 5a - 26 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 4 \times (-26)}}{2 \times 4}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{441}}{8}$

$\Leftrightarrow a = 2 \vee a = -\frac{13}{4}$

Se $a = 2$, os três termos são $2 + 4$, $2 + 1$ e $-2 + \frac{7}{2}$, ou seja, 6, 3 e $\frac{3}{2}$, o que não é possível, pois, se assim fosse, a razão de (v_n) seria positiva.

Se $a = -\frac{13}{4}$, os três termos são $-\frac{13}{4} + 4, -\frac{13}{4} + 1$ e $\frac{13}{4} + \frac{7}{2}$, ou seja, $\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}$ e $\frac{27}{4}$, o que é possível, pois a razão de (v_n) é negativa.

Assim, $a = -\frac{13}{4}$ e a razão de (v_n) é $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ou seja, –3.

19. Sejam u_1, u_2 e u_3 os três primeiros termos da progressão geométrica referida. Então:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$$

Como $u_1 = 2$, vem que $\frac{u_2}{2} = \frac{u_3}{u_2}$ e, consequentemente, $(u_2)^2 = 2u_3$.

Sabemos também que u_2 e u_3 são o terceiro e o décimo terceiro termos, respetivamente, de uma progressão aritmética. Seja r a razão dessa progressão aritmética.

Tem-se que:

$u_2 = 2 + 2r$ (terceiro termo da progressão aritmética)

$u_3 = 2 + 12r$ (décimo terceiro termo da progressão aritmética)

Então, como $(u_2)^2 = 2u_3$, vem que:

$$(2 + 2r)^2 = 2(2 + 12r) \Leftrightarrow 4 + 8r + 4r^2 = 4 + 24r$$
$$\Leftrightarrow 4r^2 - 16r = 0$$
$$\Leftrightarrow 4r(r - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 4$$

Logo, $u_2 = 2 + 2 \times 4 = 10$.

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{2} = 5$$

Concluímos que $u_n = 2 \times 5^{n-1}$ é uma expressão do termo geral da progressão geométrica e $v_n = 2 + 4(n - 1)$ é uma expressão do termo geral da progressão aritmética.

20. Opção (C)

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n} + \dots\right)}_{\substack{\text{Soma de todos os termos de uma} \\ \text{progressão geométrica de razão} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e 1.º termo 1.}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1} =$$

$$= 2 + \sqrt{2}$$

21. Seja (u_n) a progressão geométrica de razão 2 e (v_n) a progressão aritmética de razão r. Sabe-se que $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}_{\frac{1 - 2^4}{1 - 2} \times u_1} = 75$ e que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 75$.

Assim:

$$\frac{1 - 2^4}{1 - 2} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow \frac{-15}{-1} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

Como $u_1 = v_1$, vem que $\underbrace{5 + v_2 + v_3 + v_4}_{\frac{5 + v_4}{2} \times 4} = 75$.

Assim:

$$\frac{5 + v_4}{2} \times 4 = 75 \Leftrightarrow 5 + v_4 = \frac{75}{2}$$
$$\Leftrightarrow v_4 = \frac{75}{2} - 5$$
$$\Leftrightarrow v_4 = \frac{65}{2}$$

$$v_4 = v_1 + 3r \Leftrightarrow \frac{65}{2} = 5 + 3r \Leftrightarrow r = \frac{55}{6}$$

A razão da progressão aritmética é $\frac{55}{6}$.

22. Opção (B)

$p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6$ é a soma dos sete primeiros termos de uma progressão geométrica

de razão $-\frac{q}{p}$ e primeiro termo p^6.

Assim:

$$p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6 =$$

$$= p^6 \times \frac{1 - \left(-\frac{q}{p}\right)^7}{1 + \frac{q}{p}} = p^6 \times \frac{1 + \frac{q^7}{p^7}}{1 + \frac{q}{p}} =$$

$$= p^6 \times \frac{\frac{p^7 + q^7}{p^7}}{\frac{p + q}{p}} = p^6 \times \frac{(p^7 + q^7)p}{(p + q)p^7} =$$

$$= p^6 \times \frac{p^7 + q^7}{(p + q)p^6} = \frac{p^7 + q^7}{p + q}$$

23. Pretende-se calcular 151 + 153 + … + 413.

As parcelas desta soma estão em progressão aritmética de razão 2.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n - 1)2 \Leftrightarrow u_n = 151 + (n - 1)2$$
$$\Leftrightarrow u_n = 151 + 2n - 2$$
$$\Leftrightarrow u_n = 2n + 149$$

É agora necessário saber a ordem do termo 413:

$$u_n = 413 \Leftrightarrow 2n + 149 = 413 \Leftrightarrow 2n = 264 \Leftrightarrow n = 132$$

Ou seja, a soma que se pretende determinar é constituída por 132 parcelas.

Logo, $S = \frac{151 + 413}{2} \times 132 = 37\,224$.

24. Sejam $u_n = u_1 + (n - 1)r$ e $v_n = v_1 + (n - 1)r'$ os termos gerais de duas progressões aritméticas (u_n) e (v_n), de razões r e r', respetivamente. Seja (w_n) a sucessão cujo termo geral é a soma dos termos gerais de (u_n) e de (v_n).

$$w_n = u_n + v_n = u_1 + (n - 1)r + v_1 + (n - 1)r' =$$
$$= u_1 + v_1 + (n - 1)(r + r')$$

Então:

$$w_{n+1} - w_n =$$
$$= u_1 + v_1 + n(r + r') - (u_1 + v_1 + (n - 1)(r + r')) =$$
$$= u_1 + v_1 + n(r + r') - u_1 - v_1 - n(r + r') + (r + r') =$$
$$= r + r', \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Uma vez que $r + r'$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão aritmética de razão $r + r'$.

25. Sejam $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ e $v_n \times r'^{\,n-1}$ os termos gerais de duas progressões geométricas (u_n) e (v_n), de razões r e r', respetivamente. Seja (w_n) a sucessão cujo termo geral é o produto dos termos gerais de (u_n) e de (v_n).

$$w_n = u_n \times v_n = u_1 \times r^{n-1} \times v_1 \times r'^{\,n-1} =$$
$$= u_1 \times v_1 \times (r \times r')^{n-1}$$

Então:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_1 \times v_1 \times (r \times r')^n}{u_1 \times v_1 \times (r \times r')^{n-1}} =$$
$$= (r \times r')^{n-n+1} =$$
$$= r \times r',\ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

Uma vez que $r \times r'$ é uma constante, então (w_n) é uma progressão geométrica de razão $r \times r'$.

26.

a) $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 \Leftrightarrow x^2 + 1 - x = x + 6 - (x^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = -x^2 + x + 5$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee\ x = -1$$

Uma vez que x é negativo, então $x = -1$.

Assim:

$u_1 = -1$

$u_2 = (-1)^2 + 1 = 2$

$u_3 = -1 + 6 = 5$

b) $r = u_2 - u_1 = 2 - (-1) = 3$

$u_n = u_4 + (n-4) \times r \Leftrightarrow u_n = 2 + (n-4) \times 3$

$\Leftrightarrow u_n = 3n - 10$

27. $\begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 18 \\ u_k \times u_{k+1} \times u_{k+2} = 66 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + r + u_k + 2r = 18 \\ u_k \times (u_k + r) \times (u_k + 2r) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3r = 18 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + r = 6 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 6 - r \\ (6 - r) \times (6 - r + r) \times (6 - r + 2r) = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ (6 - r) \times 6 \times (6 + r) = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 36 - r^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ r^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ r = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} u_k = 11 \\ r = -5 \end{cases}$$

Se $u_k = 1$ e $r = 5$, então $u_{k+1} = 6$ e $u_{k+2} = 11$.

Se $u_k = 11$ e $r = -5$, então $u_{k+1} = 6$ e $u_{k+2} = 1$.

28. Sabemos que $u_{n+1} = u_n + 3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tem-se que:

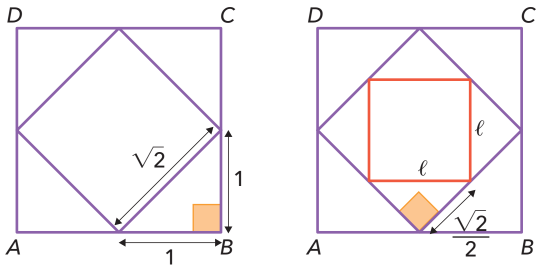
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10^{2u_{n+1}}}{10^{2u_n}} = 10^{2u_{n+1} - 2u_n} =$$
$$= 10^{2(u_n + 3) - 2u_n} =$$
$$= 10^{2u_n + 6 - 2u_n} =$$
$$= 10^6,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

ou seja, (v_n) é uma progressão geométrica de razão igual a 10^6.

29. As áreas dos quadrados das sequências são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Seja (u_n) essa progressão geométrica.

- $u_1 = 2^2 = 4$
- $u_2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$
- $u_3 = 1$
- ...



Cálculo auxiliar

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \ell^2$

$\Leftrightarrow \ell^2 = 1$

A razão da progressão (u_n) é $\frac{1}{2}$.

$$S_n < 8 \Leftrightarrow 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 8 \Leftrightarrow 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} < 8$$
$$\Leftrightarrow 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 8$$
$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$
$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{N}\backslash\{0\}}$$

Logo, a soma das áreas dos n quadrados da sequência é menor do que 8 unidades de área, para qualquer valor de n.

Teste final – páginas 94 a 97

1. Opção (A)

- $u_1 = a$
- $u_2 = -3u_1 - 1 = -3a - 1$
- $u_3 = -3u_2 - 2 = -3 \times (-3a - 1) - 2 = 9a + 3 - 2 = 9a + 1$

$u_3 = 10$, logo $9a + 1 = 10 \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1$.

2. O número de quilómetros percorridos semanalmente são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 2.

O primeiro termo desta sucessão é 5, pelo que o termo geral desta progressão é dado por:

$$5 + 2(n - 1) = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$$

Seja S_n a soma dos quilómetros percorridos pela Susana ao fim de n semanas.

Desta forma:

$$S_n = 320 \Leftrightarrow \frac{5+2n+3}{2} \times n = 320$$
$$\Leftrightarrow \frac{2n+8}{2} \times n = 320$$
$$\Leftrightarrow (n+4) \times n = 320$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 320 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-320)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{1296}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm 36}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-40}{2} \vee n = \frac{32}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = -20 \vee n = 16$$

$n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, logo $n = 16$.

Ao fim de 16 semanas, a Susana terá percorrido, em treino longo, um total de 320 km.

3. Opção (C)

Seja (a_n) a sucessão definida por $a_n = \frac{1}{n}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

$a_{n+1} - a_n$ depende de n, logo (a_n) não é uma progressão aritmética.

Seja (b_n) a sucessão definida por $b_n = n^2$.

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = $$
$$= 2n + 1$$

$b_{n+1} - b_n$ depende de n, logo (b_n) não é uma progressão aritmética.

Seja (c_n) a sucessão definida por $c_n = 2n$.

$c_{n+1} - c_n = 2(n+1) - 2n = 2n + 2 - 2n = 2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

(c_n) é uma progressão aritmética.

Seja (d_n) a sucessão definida por $d_n = 2^n$.

$$d_{n+1} - d_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) =$$
$$= 2^n$$

$d_{n+1} - d_n$ depende de n, logo (d_n) não é uma progressão aritmética.

4. Opção (A)

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{-127}{-1} = 381$$
$$\Leftrightarrow u_1 \times 127 = 381$$
$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127}$$
$$\Leftrightarrow u_1 = 3$$

Desta forma, o termo geral desta progressão é:

$$u_n = 3 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n \times 2^{-1} = \frac{3}{2} \times 2^n$$

5. Tendo em consideração os dados do enunciado, podemos concluir que os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 3 e a razão é 2.

Pretende-se o comprimento do 15.º segmento de reta posicionado na vertical, o que corresponde ao termo de ordem 30.

Desta forma:

$$u_{30} = 3 + (30-1) \times 2 = 3 + 58 = 61$$

O comprimento do 15.º segmento de reta, posicionado na vertical, é 61 cm.

6. Opção (B)

Os comprimentos de cada uma das semicircunferências da sequência são termos consecutivos de uma progressão geométrica (c_n).

- $c_1 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 = \pi$
- $c_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi$
- $c_3 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 4 = 4\pi$
- ...

A razão de (c_n) é 2 e $c_1 = \pi$, logo $c_n = \pi \times 2^{n-1} = \frac{\pi}{2} \times 2^n$.

7. $2u_n - 3u_{n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, logo $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, de onde se conclui que $\frac{2}{3}$ é a razão da progressão.

$$u_2 \times u_4 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow u_2 \times u_2 \times r^2 = \frac{16}{9}$$
$$\Leftrightarrow (u_2)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$
$$\Leftrightarrow (u_2)^2 = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{9}}$$
$$\Leftrightarrow (u_2)^2 = 4$$

Como os termos da progressão são positivos, então $u_2 = 2$.

Assim, o termo geral da progressão pode ser dado por $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

Como se pretende que o termo geral da progressão seja dado na forma $a \times b^n$, em que a e b são números reais, então:

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$$
$$= 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{9}{4} =$$
$$= \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

8. $u_5 = 5 \Leftrightarrow u_1 + 4r = 5$

$$3u_{11} = 4u_7 \Leftrightarrow 3(u_1 + 10r) = 4(u_1 + 6r)$$
$$\Leftrightarrow 3u_1 + 30r = 4u_1 + 24r$$
$$\Leftrightarrow 6r = u_1$$

Assim:

$$\begin{cases} u_1 + 4r = 5 \\ u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6r + 4r = 5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

O termo geral da sucessão (u_n) é:

$$u_n = 3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$$

$u_p = \frac{1}{2}p + \frac{5}{2}$

$S_p = 45 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_p}{2} \times p = 45$

$\Leftrightarrow \frac{3 + 0{,}5p + 2{,}5}{2} \times p = 90$

$\Leftrightarrow (5{,}5 + 0{,}5p)p = 90$

$\Leftrightarrow 0{,}5p^2 + 5{,}5p - 90 = 0$

$\Leftrightarrow p^2 + 11p - 180 = 0$

$\Leftrightarrow p = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4 \times (-180)}}{2}$

$\Leftrightarrow p = \frac{-11 \pm 29}{2}$

$\Leftrightarrow p = -20 \ \vee \ p = 9$

Como $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, então $p = 9$.

9. $a_1 = 2$ e (a_n) é uma progressão geométrica de razão superior a 1.

a_1, a_2, $a_3 - 2$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

$a_2 - a_1 = a_3 - 2 - a_2 \Leftrightarrow a_2 - 2 = a_3 - 2 - a_2$

$\Leftrightarrow 2a_2 = a_3$

Por outro lado:

$a_2 = a_1 \times r = 2r$, onde r é a razão da progressão geométrica.

$a_3 = a_1 \times r^2 = 2r^2$

Logo:

$2 \times 2r = 2r^2 \Leftrightarrow 4r - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow r(4 - 2r) = 0$

$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ 4 = 2r$

$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 2$

Como $r > 1$, então $r = 2$.

Assim, $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Deste modo:

$2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$

Assim, conclui-se que 256 é o 8.º termo.

10. Seja (u_n) a progressão aritmética tal que

$u_1 + u_2 + ... + u_{20} = 50$ e $u_{21} + u_{22} + ... + u_{40} = -50$.

Assim, sabemos que:

$$\begin{cases} \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 50 \\ \frac{u_{21} + u_{40}}{2} \times 20 = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_{20} = 5 \\ u_{21} + u_{40} = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 19r) = 5 \\ (u_1 + 20r)(u_1 + 39r) = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 19r = 5 \\ 2u_1 + 59r = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 5 - 19r \\ 5 - 19r + 59r = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 40r = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 5 - 19 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = \frac{39}{4} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{39}{8} \\ r = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo:

$$S_{80} = \frac{u_1 + u_{80}}{2} \times 80 = \frac{\frac{39}{8} + \left(-\frac{119}{8}\right)}{2} \times 80 = -400$$

Cálculo auxiliar

$u_{80} = u_1 + 79r = \frac{39}{8} + 79 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{119}{8}$

11. $u_n = \frac{3n + (-1)^{n+1}}{n} = 3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Se n é ímpar, $u_n = 3 + \frac{1}{n}$.

$\frac{118}{39} \leq 3 + \frac{1}{n} < \frac{40}{13} \Leftrightarrow \frac{118}{39} - 3 \leq \frac{1}{n} < \frac{40}{13} - 3$

$\Leftrightarrow \frac{118}{39} - \frac{117}{39} \leq \frac{1}{n} < \frac{40}{13} - \frac{39}{13}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{39} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{13}$

$\Leftrightarrow 13 < n \leq 39$

$n \in \{15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$

13 termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{118}{39}, \frac{40}{13}\right[$.

12.
- $u_1 = p - 2$
- $u_2 = -2p$
- $u_3 = -2p - 2$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \Leftrightarrow \frac{-2p}{p - 2} = \frac{-2p - 2}{-2p}$

$\Leftrightarrow 4p^2 = (p - 2)(-2p - 2)$

$\Leftrightarrow 4p^2 = -2p^2 - 2p + 4p + 4$

$\Leftrightarrow 6p^2 - 2p - 4 = 0$

$\Leftrightarrow p = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 6 \times (-4)}}{12}$

$\Leftrightarrow p = \frac{2 \pm 10}{12}$

$\Leftrightarrow p = 1 \ \vee \ p = -\frac{2}{3}$

Como $p \in \mathbb{R}^-$, então $p = -\frac{2}{3}$.

- $u_1 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$
- $u_2 = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$r = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{1}{2}$

A soma de todos os termos da sucessão (u_n) é:

$$\frac{u_1}{1-r} = \frac{-\frac{8}{3}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{8}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{16}{9}$$

13. Opção (C)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-1} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

14. Seja (a_n) a sucessão que representa a área do triângulo de ordem n.

Tem-se que:

- $a_1 = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$
- $a_2 = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{8}$
- $a_3 = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{32}$
- ...

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo $\frac{9}{2}$.

Assim, a soma de todos os termos da sucessão (a_n) pode ser dada por:

$$\frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = 6$$