

4. Sucessões

1. Sucessões – generalidades

Termo geral de uma sucessão

Exercícios – página 50

1.

1.1. $a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$
 $a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$
 $a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
 $a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$
 $a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$

1.2. $b_1 = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$
 $b_2 = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$
 $b_3 = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$
 $b_4 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3}$
 $b_5 = \frac{5+4}{3} = \frac{9}{3} = 3$

1.3. $c_1 = \frac{3 \times 1 - 2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$
 $c_2 = \frac{3 \times 2 - 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$
 $c_3 = \frac{3 \times 3 - 2}{3 + 1} = \frac{7}{4}$
 $c_4 = \frac{3 \times 4 - 2}{4 + 1} = \frac{10}{5} = 2$
 $c_5 = \frac{3 \times 5 - 2}{5 + 1} = \frac{13}{6}$

1.4. $d_1 = \frac{2^1}{2 \times 1 + 3} = \frac{2}{5}$
 $d_2 = \frac{2^2}{2 \times 2 + 3} = \frac{4}{7}$
 $d_3 = \frac{2^3}{2 \times 3 + 3} = \frac{8}{9}$
 $d_4 = \frac{2^4}{2 \times 4 + 3} = \frac{16}{11}$
 $d_5 = \frac{2^5}{2 \times 5 + 3} = \frac{32}{13}$

1.5. $e_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$
 $e_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$
 $e_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$
 $e_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{2 \times 4} = -\frac{1}{8}$
 $e_5 = \frac{(-1)^{5+1}}{2 \times 5} = \frac{1}{10}$

1.6. $f_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $f_2 = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 1$
 $f_3 = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f_4 = \text{sen}\left(\frac{4\pi}{4}\right) = 0$$

$$f_5 = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

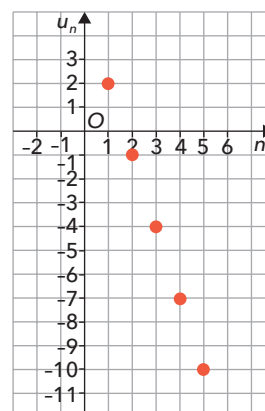
1.7. $g_1 = -1 + 3 = 2$
 $g_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$
 $g_3 = -3 + 3 = 0$
 $g_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$
 $g_5 = -5 + 3 = -2$

1.8. $h_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$
 $h_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$
 $h_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$
 $h_4 = \frac{4}{2-4} = -2$
 $h_5 = \frac{5}{2-5} = -\frac{5}{3}$

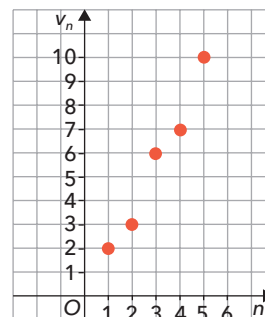
1.9. $i_1 = \frac{(-1)^1 \times 1}{3 \times 1 + 5} = -\frac{1}{8}$
 $i_2 = \frac{(-1)^2 \times 2}{3 \times 2 + 5} = \frac{2}{11}$
 $i_3 = \frac{(-1)^3 \times 3}{3 \times 3 + 5} = -\frac{3}{14}$
 $i_4 = \frac{(-1)^4 \times 4}{3 \times 4 + 5} = \frac{4}{17}$
 $i_5 = \frac{(-1)^5 \times 5}{3 \times 5 + 5} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$

2.

2.1. $u_1 = -3 \times 1 + 5 = 2$
 $u_2 = -3 \times 2 + 5 = -1$
 $u_3 = -3 \times 3 + 5 = -4$
 $u_4 = -3 \times 4 + 5 = -7$
 $u_5 = -3 \times 5 + 5 = -10$



$v_1 = 2 \times 1 = 2$
 $v_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$
 $v_3 = 2 \times 3 = 6$
 $v_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$
 $v_5 = 2 \times 5 = 10$



2.2. $u_n = 41 \Leftrightarrow -3n + 5 = 41 \Leftrightarrow -3n = 36 \Leftrightarrow n = -12$
 Como a solução não é um número natural positivo, então 41 não é termo da sucessão (u_n).
 Se n é ímpar:

$$v_n = 41 \Leftrightarrow 2n = 41 \Leftrightarrow n = \frac{41}{2}$$

Se n é par:

$$v_n = 41 \Leftrightarrow 2n - 1 = 41 \Leftrightarrow 2n = 42 \Leftrightarrow n = 21$$

Logo, 41 é o termo de ordem 21 de (v_n) .

- 2.3.** $u_n < 100 \Leftrightarrow -3n + 5 < 100 \Leftrightarrow -3n < 95 \Leftrightarrow n > -\frac{95}{3}$
 Como $\frac{95}{3} \approx 31,7$, então, a partir do termo de ordem 32, todos os termos da sucessão (u_n) são menores do que 100.

3.

- 3.1.** $u_1 = -3 = 2 \times 1 - 5$
 $u_2 = -1 = 2 \times 2 - 5$
 $u_3 = 1 = 2 \times 3 - 5$
 $u_4 = 3 = 2 \times 4 - 5$
 $u_5 = 5 = 2 \times 5 - 5$
 Assim, $u_n = 2n - 5$.

- 3.2.** $u_1 = -\frac{1}{3} = -1 \times \frac{1}{3 \times 1}$
 $u_2 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3 \times 2}$
 $u_3 = -\frac{1}{9} = -1 \times \frac{1}{3 \times 3}$
 $u_4 = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$
 $u_5 = -\frac{1}{15} = -1 \times \frac{1}{3 \times 5}$
 Assim, $u_n = \frac{(-1)^n}{3n}$.

- 3.3.** $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{1 + 3}$
 $u_2 = \frac{4}{5} = \frac{2 \times 2}{2 + 3}$
 $u_3 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{2 \times 3}{3 + 3}$
 $u_4 = \frac{8}{7} = \frac{2 \times 4}{4 + 3}$
 $u_5 = \frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{2 \times 5}{5 + 3}$
 Assim, $u_n = \frac{2n}{n + 3}$.

- 3.4.** $u_1 = \frac{3}{5} = \frac{3^1}{2 \times 1 + 3}$
 $u_2 = -\frac{9}{7} = -1 \times \frac{3^2}{2 \times 2 + 3}$
 $u_3 = 3 = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2 \times 3 + 3}$
 $u_4 = -\frac{81}{11} = -1 \times \frac{3^4}{2 \times 4 + 3}$
 $u_5 = \frac{243}{13} = \frac{3^5}{2 \times 5 + 3}$
 Assim, $u_n = \frac{(-1)^{n+1} \times 3^n}{2n + 3}$.

Sucessões definidas por recorrência

Exercícios – página 51

4.

- 4.1.** $u_1 = 2$
 $u_2 = 5 = 3 + u_1$

$$u_3 = 8 = 3 + u_2$$

$$u_4 = 11 = 3 + u_3$$

$$u_5 = 3 + u_4$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 4.2.** $u_1 = 2$

$$u_2 = 1 = \frac{1}{2} u_1$$

$$u_3 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u_2$$

$$u_4 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} u_3$$

$$u_5 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} u_4$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 4.3.** $u_1 = 2$

$$u_2 = 4 = 2u_1$$

$$u_3 = 8 = 2u_2$$

$$u_4 = 16 = 2u_3$$

$$u_5 = 32 = 2u_4$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 4.4.** $u_1 = 3$

$$u_2 = -1 \times \frac{1}{3} u_1$$

$$u_3 = -1 \times \frac{1}{3} u_2$$

$$u_4 = -1 \times \frac{1}{3} u_3$$

$$u_5 = -1 \times \frac{1}{3} u_4$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{3} u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

5.

- 5.1.** $u_1 = 5 \times 1 - 7 = -2$

$$u_2 = 5 \times 2 - 7 = 3 = u_1 + 5$$

$$u_3 = 5 \times 3 - 7 = 8 = u_2 + 5$$

$$u_4 = 5 \times 4 - 7 = 13 = u_3 + 5$$

$$u_5 = 5 \times 5 - 7 = 18 = u_4 + 5$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 5.2.** $v_1 = 2 \times 3^{1-1} = 2$

$$v_2 = 2 \times 3^{2-1} = 6 = 3 \times v_1$$

$$v_3 = 2 \times 3^{3-1} = 18 = 3 \times v_2$$

$$v_4 = 2 \times 3^{4-1} = 54 = 3 \times v_3$$

$$v_5 = 2 \times 3^{5-1} = 162 = 3 \times v_4$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

6.

- 6.1.** $u_1 = 5 = 2 \times 1 + 3$

$$u_2 = u_1 + 2 = 5 + 2 = 7 = 2 \times 2 + 3$$

$$u_3 = u_2 + 2 = 7 + 2 = 9 = 2 \times 3 + 3$$

$$u_4 = u_3 + 2 = 9 + 2 = 11 = 2 \times 4 + 3$$

$$u_5 = u_4 + 2 = 11 + 2 = 13 = 2 \times 5 + 3$$

Logo, $u_n = 2n + 3$

6.2. $v_1 = \frac{1}{2} = \frac{3^0}{2}$

$$v_2 = 3 \times v_1 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3^1}{2}$$

$$v_3 = 3 \times v_2 = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}$$

$$v_4 = 3 \times v_3 = 3 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = \frac{3^3}{2}$$

$$v_5 = 3 \times v_4 = 3 \times \frac{27}{2} = \frac{81}{2} = \frac{3^4}{2}$$

Logo, $v_n = \frac{3^{n-1}}{2}$

7.

7.1. $u_1 = 2$

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = 2u_2 - 3u_1 = 2 \times 1 - 3 \times 2 = -4$$

$$u_4 = 2u_3 - 3u_2 = 2 \times (-4) - 3 \times 1 = -11$$

$$u_5 = 2u_4 - 3u_3 = 2 \times (-11) - 3 \times (-4) = -10$$

7.2. $v_1 = a$

$$v_2 = -2v_1 + 3 = -2a + 3$$

$$v_3 = -2v_2 + 3 = -2(-2a + 3) + 3 = 4a - 3$$

$$v_4 = -2v_3 + 3 = -2(4a - 3) + 3 = -8a + 9$$

$$v_5 = -2v_4 + 3 = -2(-8a + 9) + 3 = 16a - 15$$

8. $p_1 = 1$

$$p_2 = 5 = 1 + 4 = 1 + 3 \times 2 - 2$$

$$p_3 = 12 = 5 + 7 = 5 + 3 \times 3 - 2$$

$$p_4 = 22 = 12 + 10 = 12 + 3 \times 4 - 2$$

Logo, $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{n+1} = p_n + 3n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$

2. Progressões aritméticas e geométricas

Exercícios – páginas 52 e 53

9.

9.1. $2 - 1 = 1$

$$4 - 2 = 2$$

Como $2 - 1 \neq 4 - 2$, a sucessão não é uma progressão aritmética.

9.2. $7 - 2 = 5 = 12 - 7 = 17 - 12 = 22 - 17$

Logo, a sucessão é uma progressão aritmética de razão 5.

$$u_n = 2 + (n - 1) \times 5 \Leftrightarrow u_n = 5n - 3$$

O termo geral da sucessão é $u_n = 5n - 3$.

9.3. $28 - 34 = -6 = 22 - 28 = 16 - 22 = 10 - 16$

Logo, a sucessão é uma progressão aritmética de razão -6.

$$u_n = 34 + (n - 1) \times (-6) \Leftrightarrow u_n = -6n + 40$$

O termo geral da sucessão é $u_n = -6n + 40$.

9.4. $4 - 3 = 1$

$$6 - 4 = 2$$

Como $4 - 3 \neq 6 - 4$, a sucessão não é uma progressão aritmética.

10.

10.1. $u_n = u_3 + r(n - 3) \Leftrightarrow u_n = -4 + 2(n - 3) \Leftrightarrow u_n = -4 + 2n - 6$
 $\Leftrightarrow u_n = 2n - 10$

10.2. $u_{10} = u_1 + r(10 - 1) \Leftrightarrow 28 = 10 + 9r \Leftrightarrow 9r = 18 \Leftrightarrow r = 2$

Logo,

$$u_n = u_1 + r(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 10 + 2(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 10 + 2n - 2$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2n + 8$$

10.3. $u_{12} = u_4 + r(12 - 4) \Leftrightarrow -24 = 8 + 8r \Leftrightarrow 8r = -32 \Leftrightarrow r = -4$

Logo,

$$u_n = u_4 + r(n - 4) \Leftrightarrow u_n = 8 - 4(n - 4) \Leftrightarrow u_n = 8 - 4n + 16$$

$$\Leftrightarrow u_n = -4n + 24$$

10.4. $u_2 + u_5 = 12 \Leftrightarrow u_2 + u_2 + r(5 - 2) = 12 \Leftrightarrow 2u_2 + 3 \times 3 = 12$

$$\Leftrightarrow 2u_2 = 12 - 9 \Leftrightarrow u_2 = \frac{3}{2}$$

Logo,

$$u_n = u_2 + r(n - 2) \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} + 3(n - 2) \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2} + 3n - 6$$

$$\Leftrightarrow u_n = 3n - \frac{9}{2}$$

11.

11.1. A sucessão que permite obter o número de cartas da Helena em cada semana é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 12 e cuja razão é 6. Seja (u_n) essa sucessão.

Então, $u_{10} = u_1 + (10 - 1) \times 6 = 12 + 9 \times 6 = 66$.

$$\text{Então, } S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = \frac{12 + 66}{2} \times 10 = 390.$$

Assim, ao fim de 10 semanas a Helena terá 390 cartas.

11.2. $S_n = 300 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 300$

$$\Leftrightarrow \frac{12 + 12 + (n - 1) \times 6}{2} \times n = 300$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 + 18n - 600 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{409}}{2}$$

Logo, $n \approx 8,6$.

A Helena demorará nove semanas para colecionar 300 cartas.

12.

12.1. $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

Logo, a sucessão é uma progressão geométrica de razão 2.

$$u_n = 1 \times 2^{n-1}, \text{ ou seja, } u_n = 2^{n-1}.$$

12.2. $-\frac{6}{3} = \frac{12}{-6} = \frac{-24}{12} = \frac{48}{-24} = -2$

Logo, a sucessão é uma progressão geométrica de razão -2.

$$u_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

12.3. $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$

Logo, a sucessão não é uma progressão geométrica.

12.4. $\frac{50}{100} = \frac{25}{50} = \frac{25}{25} = \frac{4}{25} = \frac{1}{2}$

Logo, a sucessão é uma progressão geométrica de

razão $\frac{1}{2}$.

$$u_n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

13.

$$13.1. u_n = u_3 \times r^{n-3} \Leftrightarrow u_n = 8 \times (-3)^{n-3}$$

$$13.2. u_5 = u_2 \times r^{5-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} = 4 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = -\frac{1}{64} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } u_n = u_2 \times r^{n-2} \Leftrightarrow u_n = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

$$13.3. u_8 = u_4 \times r^{8-4} \Leftrightarrow 96 = 6 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 16 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = -2$$

Como $r > 0$, então $r = 2$.

$$\text{Logo, } u_n = u_4 \times r^{n-4} \Leftrightarrow u_n = 6 \times 2^{n-4}$$

$$13.4. u_9 = u_7 \times r^{9-7} \Leftrightarrow 18 = 9 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \vee r = -\sqrt{2}$$

Como $r < 0$, então $r = -\sqrt{2}$.

$$\text{Logo, } u_n = u_7 \times r^{n-7} \Leftrightarrow u_n = 9 \times (-\sqrt{2})^{n-7}$$

14.

$$14.1. u_{16} = u_3 + (16-3)r \Leftrightarrow 59 = 7 + 13r \Leftrightarrow 13r = 52 \Leftrightarrow r = 4$$

$$\text{Logo, } u_n = u_3 + (n-3)r \Leftrightarrow u_n = 7 + (n-3) \times 4$$

$$\Leftrightarrow u_n = 7 + 4n - 12$$

$$\Leftrightarrow u_n = 4n - 5$$

$$14.2. u_n = 131 \Leftrightarrow 4n - 5 = 131 \Leftrightarrow 4n = 136 \Leftrightarrow n = 34$$

Logo, 131 é o termo de ordem 34 da progressão aritmética (u_n).

$$u_n = 313 \Leftrightarrow 4n - 5 = 313 \Leftrightarrow 4n = 318 \Leftrightarrow n = 79,5$$

Como 79,5 não é um número inteiro positivo, então 313 não é termo da progressão aritmética (u_n).

$$14.3. u_3 + u_4 + \dots + u_{16} = S_{16} - u_1 - u_2 = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 - u_1 - u_2 = \frac{-1 + 59}{2} \times 16 - (-1) - 3 = 462$$

15.

$$15.1. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{u_n} = 3, \forall n \geq 1$$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

$$15.2. \text{O termo geral da sucessão } (u_n) \text{ é } u_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$15.3. u_5 + u_6 + \dots + u_{14} = S_{14} - S_4 = 2 \times \frac{1-3^{14}}{1-3} - 2 \times \frac{1-3^4}{1-3} = 4\,782\,968 - 80 = 4\,782\,888$$

$$15.4. S = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} = 2 \times \frac{1-3^n}{-2} = -(1-3^n) = 3^n - 1$$

$$15.5. S = 242 \Leftrightarrow 3^n - 1 = 242 \Leftrightarrow 3^n = 243 \Leftrightarrow 3^n = 3^5 \Leftrightarrow n = 5$$

Como 5 é um número inteiro positivo, então $n = 5$.

16.

16.1. Como (a_n) é uma progressão aritmética, tem-se:

$$4k + 1 - (2k + 3) = 2k + 3 - (k + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2k - 2 = k + 2$$

$$\Leftrightarrow k = 4$$

$$\text{Logo, } a_1 = 5 \text{ e } a_2 = 11.$$

$$\text{Então, } r = 11 - 5 = 6.$$

$$347 = (5 + n - 1) \times 6$$

$$\Leftrightarrow 342 = (n - 1) \times 6$$

$$\Leftrightarrow n - 1 = 57$$

$$\Leftrightarrow n = 58$$

Assim, 347 é o termo de ordem 58 da sucessão (a_n).

$$16.2. S_{16} = \frac{a_1 + a_{16}}{2} \times 16 = \frac{5 + 5 + (16-1) \times 6}{2} \times 16 = \frac{5 + 95}{2} \times 16 = 800$$

A soma dos 16 primeiros termos da sucessão (a_n) é 800.

17.

17.1. Como a razão entre as medidas dos lados dos triângulos é $\frac{1}{2}$, então a razão entre as medidas das respectivas áreas é $\frac{1}{4}$. Logo, $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}, \forall n \geq 1$, ou seja, (A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$$A_1 = \frac{5a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Cálculo auxiliarPelo Teorema de Pitágoras, sendo h a altura do primeiro triângulo,

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{Então, } h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\text{Logo, } A_n = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

17.2. Uma vez que $|r| < 1$, então

$$S = \frac{A_1}{1-r} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}$$

Logo, a soma de todos os termos da sucessão (A_n) é $\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$.**Exercícios globais – páginas 54 a 57**

18. Opção (C)

$$\text{A opção (A) é falsa porque } u_n = 3 \Leftrightarrow \frac{8n-5}{2n+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 8n - 5 = 6n + 3 \Leftrightarrow 2n = 8 \Leftrightarrow n = 4. \text{ Logo, 3 é o termo de ordem 4 da sucessão } (u_n).$$

$$\text{A opção (B) é falsa porque } u_3 = \frac{8 \times 3 - 5}{2 \times 3 + 1} = \frac{19}{7}.$$

A opção (C) é verdadeira porque $u_n \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{8n-5}{2n+1} \geq 1 \Leftrightarrow 8n - 5 \geq 2n + 1 \Leftrightarrow 6n \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 1,$$

ou seja, qualquer termo da sucessão é sempre maior ou igual a 1.

A opção (D) é falsa porque, como se viu acima, 3 é um termo da sucessão (u_n) e é superior a 2.

19. Opção (B)

$$u_n < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3n+2}{n+3} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 6n+4 < 5n+15 \Leftrightarrow n < 11$$

Logo, há 10 termos da sucessão que são menores que $\frac{5}{2}$.

20. Opção (D)

$$\text{A opção (A) não é a correta porque } u_1 = (-1)^1 + 2 \times 1 = -1 + 2 = 1 \text{ e } 1 \neq -2.$$

$$\text{A opção (B) não é a correta porque } u_1 = (-1)^1 \times (2 \times 1 - 2) = -1 \times 0 = 0 \text{ e } 0 \neq -2.$$

$$\text{A opção (C) não é a correta porque } u_2 = (-1)^2 \times 2 = 2 \text{ e } 2 \neq 4.$$

A opção correta é a (D) porque:

$$u_1 = (-1)^1 \times 2 \times 1 = -2$$

$$u_2 = (-1)^2 \times 2 \times 2 = 4$$

$$u_3 = (-1)^3 \times 2 \times 3 = -6$$

$$u_4 = (-1)^4 \times 2 \times 4 = 8$$

$$u_5 = (-1)^5 \times 2 \times 5 = -10$$

21. Opção (A)

$$u_1 = a$$

$$u_2 = (a+1)(a-1) = a^2 - 1$$

$$u_3 = (a^2 - 1 + 1)(a^2 - 1 - 1) = a^2(a^2 - 2) = a^4 - 2a^2$$

22. Opção (C)

$$S_{100} = 100 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 99r)}{2} = 1 \Leftrightarrow 2u_1 + 99r = 2$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 1 - \frac{99}{2}r$$

$$S_{200} = 300 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{200}}{2} \times 200 = 300$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + (u_1 + 199r)}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2u_1 + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{99}{2}r\right) + 199r = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - 99r + 199r = 3 \Leftrightarrow 100r = 1$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{100} \Leftrightarrow r = 0,01$$

23. Opção (B)

$$u_5 = 324 \Leftrightarrow u_1 \times r^{5-1} = 324 \Leftrightarrow u_1 \times 3^4 = 324$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{324}{81} \Leftrightarrow u_1 = 4$$

24. $u_{15} = u_7 + 8r \Leftrightarrow 94 = 38 + 8r \Leftrightarrow 8r = 56 \Leftrightarrow r = 7$

$$\text{Logo, } u_n = 850 \Leftrightarrow u_7 + (n-7) \times r = 850$$

$$\Leftrightarrow 38 + (n-7) \times 7 = 850$$

$$\Leftrightarrow (n-7) \times 7 = 812$$

$$\Leftrightarrow n-7 = 116$$

$$\Leftrightarrow n = 123$$

Assim, 850 é o termo de ordem 123 da sucessão (u_n) .

25.

25.1. $u_{n+1} - u_n = u_n + 3 - u_n = 3, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Uma vez que 3 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

25.2. $u_n = 2 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = 2 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 1$

25.3. $u_5 + u_6 + \dots + u_{20} = S_{20} - S_4 =$

$$= \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 - \frac{u_1 + u_4}{2} \times 4 =$$

$$= \frac{(3 \times 1 - 1) + (3 \times 20 - 1)}{2} \times 20 -$$

$$- \frac{(3 \times 1 - 1) + (3 \times 4 - 1)}{2} \times 4 =$$

$$= \frac{2 + 59}{2} \times 20 - \frac{2 + 11}{2} \times 4 =$$

$$= 610 - 26 = 584$$

25.4. $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{2 + 3n - 1}{2} \times n = \frac{1 + 3n}{2} \times n =$

$$= \frac{3n^2 + n}{2}$$

26.

26.1. $u_3 = 12$

$$u_{10} = 47 \Leftrightarrow u_3 + (10-3)d = 47 \Leftrightarrow 12 + 7d = 47$$

$$\Leftrightarrow 7d = 35 \Leftrightarrow d = 5$$

$$\text{Logo, } u_n = u_3 + (n-3)d = 12 + (n-3) \times 5 = 12 + 5n - 15 = 5n - 3, \text{ ou seja, } u_n = 5n - 3.$$

26.2. $u_1 = 5 \times 1 - 3 = 2$

$$S_n = 555$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 555$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + 5n - 3}{2} \times n = 555$$

$$\Leftrightarrow (5n - 1)n = 1110$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - n - 1110 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 22\,200}}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 149}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = 15 \vee n = -\frac{74}{5}$$

Logo, é necessário somar os 15 primeiros termos da sucessão.

27.

27.1. A figura 1 é formada por 4 triângulos.

A figura 2 é formada por 8 (= 4 × 2) triângulos.

A figura 3 é formada por 12 (= 4 × 3) triângulos.

Logo, a figura 10 será formada por 4 × 10 = 40 triângulos.

27.2. a)
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

b) $u_{n+1} - u_n = u_n + 4 - u_n = 4, \forall n \geq 1$

Uma vez que 4 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 4.

c) $u_n = 4 + 4(n-1) \Leftrightarrow u_n = 4 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n$

d) $S = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = \frac{4 + 4 \times 20}{2} \times 20 = 840$

28.

28.1. $b_1 = 15$

A sucessão é uma progressão geométrica, uma vez que a razão entre dois termos consecutivos é 0.6.

$$\text{Assim, } b_n = b_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow b_n = 15 \times 0,6^{n-1}.$$

28.2. Uma vez que $|r| < 1, S = \frac{15}{1-0,6} = 37,5$

29. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (constante)

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e o seu primeiro termo é } a.$$

Uma vez que $|r| < 1,$ a soma de todos os termos desta progressão é dada por:

$$S = \frac{a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{2a + \sqrt{2}a}{2-1} = 2a + \sqrt{2}a = a(2 + \sqrt{2})$$

30.

30.1. $u_8 = u_3 \times r^{8-3} \Leftrightarrow 480 = 15 \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$
 Assim, $u_n = u_3 \times r^{n-3} \Leftrightarrow u_n = 15 \times 2^{n-3}$.

30.2. $u_n = 120 \Leftrightarrow 15 \times 2^{n-3} = 120 \Leftrightarrow 2^{n-3} = 8 \Leftrightarrow 2^{n-3} = 2^3$
 $\Leftrightarrow n - 3 = 3 \Leftrightarrow n = 6$
 Logo, 120 é o termo de ordem 6 da sucessão (u_n).

30.3. $u_3 + u_4 + \dots + u_{15} = S_{15} - u_1 - u_2 = u_1 \times \frac{1 - r^{15}}{1 - r} - \frac{15}{4} - \frac{15}{2} =$
 $= \frac{15}{4} \times \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} - \frac{15}{4} - \frac{15}{2} =$
 $= \frac{15}{4} \times \frac{1 - 32768}{-1} - \frac{45}{4} =$
 $= \frac{15}{4} \times 32767 - \frac{45}{4} =$
 $= 122\,865$

Cálculos auxiliares

$$u_1 = 15 \times 2^{-2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = 15 \times 2^{-1} = \frac{15}{2}$$

31. $S_6 = 10\,101 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - r^6}{1 - r} = 10\,101$
 $\Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6}{1 - \frac{3}{4}} = 10\,101$
 $\Leftrightarrow u_1 \times \frac{1 - \frac{729}{4096}}{\frac{1}{4}} = 10\,101$
 $\Leftrightarrow u_1 \times \frac{3367}{1024} = 10\,101$
 $\Leftrightarrow u_1 = 10\,101 \times \frac{1024}{3367}$
 $\Leftrightarrow u_1 = 3072$

Então, $u_5 = u_1 \times r^4 \Leftrightarrow 3072 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 972$.

32. Opção (C)

Como as medidas de amplitude dos ângulos internos do triângulo estão em progressão aritmética e a menor delas é 24° , então

$$24 + (24 + x) + (24 + 2x) = 180 \Leftrightarrow 72 + 3x = 180$$

$$\Leftrightarrow 3x = 108$$

$$\Leftrightarrow x = 36$$

Logo, a amplitude do ângulo maior é $24^\circ + 2 \times 36^\circ = 96^\circ$.

33. Opção (D)

Sendo (b_n) uma progressão geométrica de razão 3, então $b_5 = b_3 \times 3^2$

$$\Leftrightarrow 8x + 1 = (x - 1) \times 9$$

$$\Leftrightarrow 8x + 1 = 9x - 9$$

$$\Leftrightarrow x = 10$$

Assim, $b_4 = b_3 \times 3 = (10 - 1) \times 3 = 27$.

34. Opção (A)

$$S = 5u_1 \Leftrightarrow \frac{u_1}{1 - r} = 5u_1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - r} = 5 \Leftrightarrow 1 - r = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow r = \frac{4}{5}$$

35.

35.1. $S_{n-1} = 15(n-1) - 2(n-1)^2 = 15n - 15 - 2(n^2 - 2n + 1) =$
 $= 15n - 15 - 2n^2 + 4n - 2 = -2n^2 + 19n - 17$

35.2. $u_n = S_n - S_{n-1} = 15n - 2n^2 - (-2n^2 + 19n - 17) =$
 $= 15n - 2n^2 + 2n^2 - 19n + 17 = -4n + 17$

35.3. $u_{n+1} - u_n = -4(n+1) + 17 - (-4n + 17) =$
 $= -4n - 4 + 17 + 4n - 17 = -4, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Uma vez que -4 é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -4 .

36.

36.1. $u_4 = x$
 $u_5 = x + 1$
 $u_6 = x + 3$

Uma vez que u_4, u_5 e u_6 são termos de uma progressão geométrica, tem-se:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo, $u_4 = 1, u_5 = 2$ e $u_6 = 4$.

Então, $r = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$.

Assim, o termo geral desta progressão é $u_n = 2^{n-4}$.

36.2. $u_n > 8 \wedge u_n < 512 \Leftrightarrow 2^{n-4} > 2^3 \wedge 2^{n-4} < 2^9$
 $\Leftrightarrow n - 4 > 3 \wedge n - 4 < 9$
 $\Leftrightarrow n > 7 \wedge n < 13$

Logo, há cinco termos da sucessão no intervalo]8, 13[($u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}$).

37. Como $a, a + b$ e $2b + 3$ são três termos consecutivos de uma progressão aritmética tem-se:

$$2b + 3 - (a + b) = a + b - a \Leftrightarrow 2b + 3 - a - b = b$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

Como $5b - 2, b + 2$ e a são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, tem-se:

$$\frac{a}{b+2} = \frac{b+3}{5b-2} \wedge b + 2 \neq 0 \wedge 5b - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{b+2} = \frac{b+3}{5b-2} \wedge b \neq -2 \wedge b \neq \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 15b - 6 = b^2 + 4b + 4 \wedge b \neq -2 \wedge b \neq \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 11b + 10 = 0 \wedge b \neq -2 \wedge b \neq \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} \wedge b \neq -2 \wedge b \neq \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{11 \pm 9}{2} \wedge b \neq -2 \wedge b \neq \frac{2}{5} \Leftrightarrow b = 10 \vee b = 1$$

Se $b = 1$, então $5b - 2 = b + 2 = a = 3$, logo, a razão da progressão geométrica seria 1, o que contraria o enunciado.

Logo, $a = 3$ e $b = 10$.

38.

38.1. $u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2} \times 1$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2^{-n} + 2^{-n-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2^{-n}(1 + 2^{-1})}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2^{-n-1} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2^{-n-1} \times \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 3 \times 2^{-n-2}$$

$$38.2. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{-n-1-2}}{3 \times 2^{-n-2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Uma vez que $\frac{1}{2}$ é uma constante, fica provado que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$38.3. u_1 = 3 \times 2^{-1-2} = 3 \times 2^{-3} = \frac{3}{8}$$

$$\text{Uma vez que } |r| < 1, \text{ então } S = \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

39.

$$39.1. a_1 = 2 \times 2$$

$$a_2 = 1 \times 1 = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

E assim sucessivamente.

$$\text{Ou seja } a_n = \frac{1}{4} a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}, \forall n \geq 1$$

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica e a sua razão é $\frac{1}{4}$.

$$\text{Assim, } a_n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4 \times 4^{1-n} = 4^{2-n}.$$

$$39.2. S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Como, para $n \geq 1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$, então $\frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$,

peço que $\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{16}{3}$.

Logo, a soma dos n primeiros termos da sucessão é menor do que $\frac{16}{3}$.

$$39.3. \text{Uma vez que } |r| < 1, \text{ então } S = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}.$$