

5. Funções

Recorda – páginas 6 a 11

1.

Monómio	Coefficiente	Parte literal	Grau
$\frac{x^5}{2}$	$\frac{1}{2}$	x^5	5
$-4x^3$	-4	x^3	3
xyz	1	xyz	3
$3x^2$	3	x^2	2

2.

Polinómio	Termos	Coefficientes	Grau	Completo
$\sqrt{3}x^5$	$\sqrt{3}x^5$	$\sqrt{3}$	5	Não
$4x^3 - \frac{3}{2}$	$4x^3; -\frac{3}{2}$	$4; -\frac{3}{2}$	3	Não
$4x^2 + x + \sqrt{2}$	$4x^2; x; \sqrt{2}$	$4; 1; \sqrt{2}$	2	Sim
$x^6 + \sqrt[3]{2}x^5 - \frac{2}{3}$, por exemplo.	$x^6; \sqrt[3]{2}x^5; -\frac{2}{3}$	$1; \sqrt[3]{2}; -\frac{2}{3}$	6	Não

3.

a) $A(x) + B(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 10 =$
 $= x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 + x^2 - 2x + 2 - 10 =$
 $= x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x - 8$

Grau 4

b) $B(x) + C(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10 - x^2 + \frac{5}{2}x^3 - x^4 =$
 $= x^4 - x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^3 + x^2 - x^2 - 10 =$
 $= \frac{1}{2}x^3 - 10$

Grau 3

c) $B(x) - C(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10 + x^2 - \frac{5}{2}x^3 + x^4 =$
 $= x^4 + x^4 - 2x^3 - \frac{5}{2}x^3 + x^2 + x^2 - 10 =$
 $= 2x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 2x^2 - 10$

Grau 4

d) $A(x) - (B(x) + C(x)) =$
 $= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2 - (x^4 - 2x^3 + x^2 - 10 - x^2 + \frac{5}{2}x^3 - x^4) =$
 $= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 2 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 10 + x^2 - \frac{5}{2}x^3 + x^4 =$
 $= -x^4 + x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x^2 + x^2 - 2x + 2 + 10 =$
 $= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 12$

Grau 3

4.

a) $A(x) \times B(x) = 3x^6 \times (x^2 - 2x + 1) = 3x^8 - 6x^7 + 3x^6$
 Grau 8

b) $B(x) \times C(x) = (x^2 - 2x + 1) \times (-x^3 + 2x) =$
 $= -x^5 + 2x^3 + 2x^4 - 4x^2 - x^3 + 2x =$
 $= -x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x$

Grau 5

c) $A(x) \times (-C(x)) = 3x^6 \times (x^3 - 2x) =$
 $= 3x^9 - 6x^7$

Grau 9

d) $B(x) \times B(x) = (x^2 - 2x + 1) \times (x^2 - 2x + 1) =$
 $= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1 =$
 $= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Grau 4

e) $A(x) \times (B(x) + C(x)) = 3x^6 \times (x^2 - 2x + 1 - x^3 + 2x) =$
 $= 3x^6 \times (x^2 - x^3 + 1) =$
 $= 3x^8 - 3x^9 + 3x^6 =$
 $= -3x^9 + 3x^8 + 3x^6$

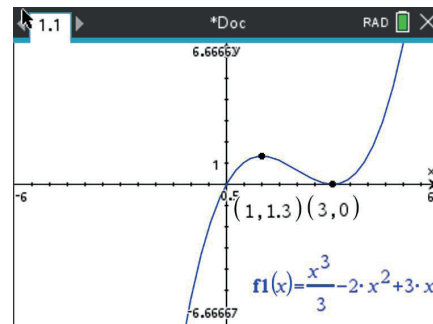
Grau 9

5.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$

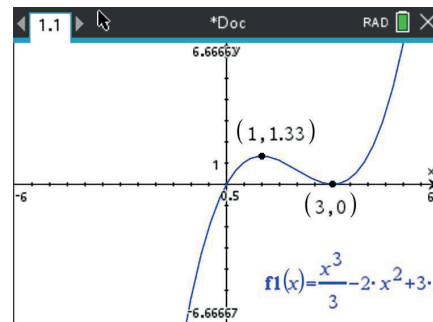
b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -8$

6.



f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e em $[3, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[1, 3]$.

7.



1,33 é máximo relativo em $x = 1$.

0 é mínimo relativo em $x = 3$.

8.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 9}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 3$

O zero de f é 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x^2 + 3x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 2 \times 4}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

Os zeros de f são $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$ e $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 2x^2 + 3x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 4}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4} \end{aligned}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .
 f não tem zeros.

9. $x^2 > 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 1 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

C.S. = $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

Capítulo 1 – Funções cúbicas e quárticas

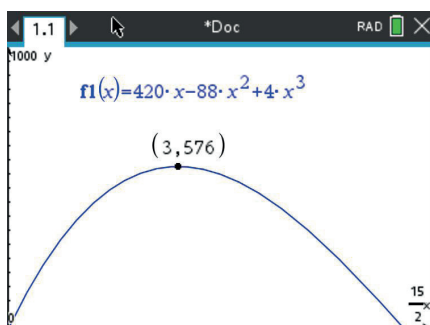
Tarefa – A caixa – página 12

a) Como se pretende cortar quatro quadrados de lado x cm, então $x > 0$.
Como a largura da caixa é de 14 cm, então $14 - 2x > 0$, ou seja, $2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$.
Assim, $0 < x < 7$.

b) i. A base da caixa terá $(30 - 2x)$ cm de comprimento e $(14 - 2x)$ cm de largura.
Logo, uma expressão da área da base da caixa é:
 $(30 - 2x)(14 - 2x) = 420 - 60x - 28x + 4x^2 = 420 - 88x + 4x^2$

ii. Para obtermos uma expressão que represente o volume da caixa, basta multiplicar a expressão da área da base da caixa por x , que representa a altura da caixa:
 $(420 - 88x + 4x^2) \times x = 420x - 88x^2 + 4x^3$, com $0 < x < 7$

c) Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:
 $f_1(x) = 420x - 88x^2 + 4x^3$, com $0 < x < 7$



O volume máximo da caixa obtém-se para $x = 3$, ou seja, a base da caixa é um retângulo com 24 cm de

comprimento e 8 cm de largura e a altura da caixa é de 3 cm.
O valor do volume máximo é de 576 cm^3 .

Exercícios de margem – páginas 13 a 31

- 1.
- a) Às 10 horas, decorreram 2 horas desde as 8 horas.
 $P(2) = -2^3 + 6 \times 2^2 + 15 \times 2 = -8 + 24 + 30 = 46$
O trabalhador produziu 46 litros de gelado.
- b) $P(1) = -1^3 + 6 \times 1^2 + 15 \times 1 = -1 + 6 + 15 = 20$
 $P(2) - P(1) = 46 - 20 = 26$
Entre as 9 horas e as 10 horas, o trabalhador produziu 26 litros de gelado.

Função	Gráfico	Nº de zeros	Extremos	Comportamento no infinito	Contra-domínio
a) f		1	Não tem extremos.	Quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ tende para $-\infty$. Quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para $+\infty$.	\mathbb{R}
b) g		1	Não tem extremos.	Quando x tende para $-\infty$, $g(x)$ tende para $+\infty$. Quando x tende para $+\infty$, $g(x)$ tende para $-\infty$.	\mathbb{R}
c) h		3	Tem um mínimo relativo e um máximo relativo.	Quando x tende para $-\infty$, $h(x)$ tende para $-\infty$. Quando x tende para $+\infty$, $h(x)$ tende para $+\infty$.	\mathbb{R}
d) i		2	Tem um mínimo relativo e um máximo relativo.	Quando x tende para $-\infty$, $i(x)$ tende para $+\infty$. Quando x tende para $+\infty$, $i(x)$ tende para $-\infty$.	\mathbb{R}
e) j		1	Não tem extremos.	Quando x tende para $-\infty$, $j(x)$ tende para $-\infty$. Quando x tende para $+\infty$, $j(x)$ tende para $+\infty$.	\mathbb{R}

3. Ao cuidado do aluno.

4.

Função	Gráfico	Nº de zeros	Extremos	Comportamento no infinito	Contra-domínio
a) f		1	Tem um mínimo absoluto (0).	Quando x tende para -∞ ou para +∞, f(x) tende para +∞.	[0, +∞[
b) g		1	Tem um máximo absoluto (0).	Quando x tende para -∞ ou para +∞, g(x) tende para -∞.] -∞, 0]
c) h		0	Tem um mínimo absoluto (5).	Quando x tende para -∞ ou para +∞, h(x) tende para +∞.	[5, +∞[
d) i		2	Tem um mínimo absoluto (-0,105).	Quando x tende para -∞ ou para +∞, i(x) tende para +∞.	[-0,105; +∞[
e) j		3	Tem um máximo relativo (0), um mínimo relativo (-8,789) e um máximo absoluto (64).	Quando x tende para -∞ ou para +∞, j(x) tende para -∞.] -∞, 64]
f) k		4	Tem um mínimo absoluto (-81) e um máximo relativo (45,563).	Quando x tende para -∞ ou para +∞, k(x) tende para +∞.	[-81, +∞[

5.

a)
$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \\ -2x^3 \qquad \qquad + 2 \\ \hline -3x^2 + 4x - 6 \end{array}$$

 $Q(x) = 2$
 $R(x) = -3x^2 + 4x - 6$

b)
$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \\ -2x^3 - 6x^2 - 2x \\ \hline -9x^2 + 2x - 8 \\ +9x^2 + 27x + 9 \\ \hline 29x + 1 \end{array}$$

$Q(x) = 2x - 9$
 $R(x) = 29x + 1$

c)
$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \\ -2x^3 + 8x^2 \\ \hline 5x^2 + 4x - 8 \\ -5x^2 + 20x \\ \hline 24x - 8 \\ -24x + 96 \\ \hline 88 \end{array}$$

 $Q(x) = -2x^2 - 5x - 24$
 $R(x) = 88$

6.

a)
$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 2 \\ -x^2 - 4x \\ \hline x + 2 \\ -x - 4 \\ \hline -2 \end{array}$$

Assim: $2 + 5x + x^2 = (x + 4)(x + 1) - 2$

b)
$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^2 + 3 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 3 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline -2x^2 + 3 \\ 2x^2 - 2x \\ \hline -2x + 3 \end{array}$$

Assim: $3 - 3x^2 + x^4 = (x - x^2) \times (-x^2 - x + 2) + (-2x + 3)$

c)
$$\begin{array}{r} x^5 - 1 \\ -x^5 + x^4 \\ \hline x^4 - 1 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline x^3 - 1 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Assim: $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

d)
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 20x + 10 \\ -\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 \\ \hline -\frac{5}{2}x^2 - 20x + 10 \\ +\frac{5}{2}x^2 + \frac{45}{2}x \\ \hline \frac{5}{2}x + 10 \\ -\frac{5}{2}x - \frac{45}{2} \\ \hline -\frac{25}{2} \end{array}$$

Assim: $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 20x + 10 = \left(\frac{1}{3}x + 3\right) \times \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}\right) - \frac{25}{2}$

Como $P(-1) = 0$, $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(3) = 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ e $P(\sqrt{2}) \neq 0$, conclui-se assim que, dos valores apresentados, as raízes de $P(x)$ são $-1, 0, 1$ e 3 .

- b)** Sabe-se que, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, a é uma raiz de $P(x)$ se e só se $P(x)$ foi divisível por $x - a$. Como vimos na alínea anterior, $-1, 0, 1$ e 3 são raízes de $P(x)$, enquanto $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{2}$ não o são. Assim, podemos concluir que $P(x)$ é divisível pelos polinómios $A(x) = x + 1$, $B(x) = x$, $C(x) = x - 1$ e $F(x) = x - 3$, não sendo divisível pelos polinómios $D(x) = x - \frac{1}{2}$ e $E(x) = x - \sqrt{2}$.

13.

a) $P(x) = x^4 - kx^2 + x + 3$

Para que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ seja 2, tem-se que $P(1) = 2$, isto é:

$$1^4 - k \times 1^2 + 1 + 3 = 2 \Leftrightarrow 1 - k + 4 = 2 \Leftrightarrow k = 3$$

- b)** $P(x)$ é divisível por $x + 2$ se e só se $P(-2) = 0$. Assim:
 $(-2)^4 - k \times (-2)^2 + (-2) + 3 = 0 \Leftrightarrow 16 - 4k - 2 + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow -4k = -17 \Leftrightarrow k = \frac{17}{4}$

- 14.** Consideremos o polinómio $A(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$. $A(x)$ é divisível por $x + 1$ se e só se $A(-1) = 0$ e o resto da divisão de $A(x)$ por $x - 2$ é igual a 6 se $A(2) = 6$. Logo:

$$\begin{cases} A(-1) = 0 \\ A(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + a \times (-1) + b = 0 \\ 2^3 - 2 \times 2^2 + a \times 2 + b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 - a + b = 0 \\ 8 - 8 + 2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 2a + (3 + a) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim, $a = 1$ e $b = 4$.

15. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

- a)** $P(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 + 5 = 1 + 3 - 9 + 5 = 0$, logo 1 é raiz de $P(x)$.

- b)** 1 é raiz de $P(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -9 & 5 \\ 1 & & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x - 5)$$

Vejamos se 1 é raiz do polinómio quociente $Q(x)$ obtido: $Q(1) = 1^2 + 4 \times 1 - 5 = 0$.

Como 1 é raiz de $Q(x)$, vamos dividir $Q(x)$ por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & -5 \\ 1 & & 1 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = (x - 1)(x + 5)$$

Assim, $P(x) = (x - 1) \times (x^2 + 4x - 5) = (x - 1)(x - 1)(x + 5) = (x - 1)^2(x + 5)$ e, como 1 já não é raiz do polinómio $x + 5$, conclui-se que 1 é a raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$.

16. $A(x) = 2x^6 - 2x^5 - 10x^4 + 2x^3 + 16x^2 + 8x$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 \end{array}$$

Verifica-se que 0 é raiz de $A(x)$ e que $A(x) = (x - 0) \times (2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 16x + 8)$, mas 0 não é raiz do polinómio $2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 16x + 8$, logo 0 é uma raiz simples de $A(x)$.

b)

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 \\ 2 & & 4 & 4 & -12 & -20 & -8 & 0 \\ \hline & 2 & 2 & -6 & -10 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & & 4 & 12 & 12 & -4 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & 4 & 20 & 52 & 100 & & \\ \hline & 2 & 10 & 26 & 50 & 100 & & \end{array}$$

$$Q_1(x) = 2x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 4x$$

$$R_1(x) = 0$$

$$Q_2(x) = 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

$$R_2(x) = 0$$

Verifica-se que 2 é raiz de $A(x)$ e que também é raiz de $Q_1(x)$, mas já não é raiz de $Q_2(x)$.

Conclui-se, assim, que 2 é raiz dupla de $A(x)$.

c)

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 \\ -1 & & -2 & 4 & 6 & -8 & -8 & 0 \\ \hline & 2 & -4 & -6 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & & -2 & 6 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & -6 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & & 2 & 8 & -8 & 0 & & \\ \hline & 2 & -8 & 8 & 0 & 0 & & \\ -1 & & -2 & 10 & -18 & & & \\ \hline & 2 & -10 & 18 & -18 & & & \end{array}$$

$$Q_1(x) = 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x$$

$$Q_2(x) = 2x^4 - 6x^2 + 8x$$

$$Q_3(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$$

Verifica-se que -1 é raiz de $A(x)$ e também é raiz de $Q_1(x)$ e de $Q_2(x)$, mas já não é de $Q_3(x)$.

Conclui-se, assim, que -1 é raiz tripla de $A(x)$.

Aprende fazendo 1 – páginas 32 e 33

1.

a) $A(x) = 2x^2 + 2x + 3$ e $B(x) = x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x + 3 \\ -2x^2 - 2x - 4 \\ \hline -1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x + 2) \times 2 + (-1)$$

$$Q(x) = 2 \text{ e } R(x) = -1$$

b) $A(x) = x^3 - 1$ e $B(x) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \\ -x^2 + x \\ \hline x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 - 1 = (x^2 - 1)x + (x - 1)$$

$$Q(x) = x \text{ e } R(x) = x - 1$$

c) $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6$ e $B(x) = x - 3$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 0x - 6 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline -6 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 6 = (x - 3)x^2 - 6$$

$$Q(x) = x^2 \text{ e } R(x) = -6$$

d) $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6$ e $B(x) = x^2 + 2$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 0x - 6 \\ -x^3 - 2x \\ \hline -3x^2 - 2x - 6 \\ 3x^2 + 6 \\ \hline -2x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 2 \\ \hline x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$$-\frac{3x^2}{x^2} = -3$$

$$x^3 - 3x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x - 3) + (-2x)$$

$$Q(x) = x - 3 \text{ e } R(x) = -2x$$

e) $A(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3$ e $B(x) = x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3 \\ -x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline x^2 + x + 3 \\ -x^2 - x - 1 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ \hline x^2 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$\frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 1 \text{ e } R(x) = 2$$

f) $A(x) = 2x^6 - x^5 + 4x^4 + x^2 + 8x - 4$ e $B(x) = x^3 + 2x - 1$

$$\begin{array}{r} 2x^6 - x^5 + 4x^4 + 0x^3 + x^2 + 8x - 4 \\ -2x^6 + 4x^4 + 2x^3 \\ \hline -x^5 + 0x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 4 \\ +x^5 + 2x^3 - x^2 \\ \hline 4x^3 + 0x^2 + 8x - 4 \\ -4x^3 - 8x + 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + 2x - 1 \\ \hline 2x^2 - x^2 + 4 \end{array}$$

$$\frac{2x^6}{x^3} = 2x^3$$

$$\frac{-x^5}{x^2} = -x^3$$

$$\frac{4x^3}{x^3} = 4$$

$$2x^6 - x^5 + 4x^4 + x^2 + 8x - 4 = (x^3 + 2x - 1)(2x^3 - x^2 + 4) + 0$$

$$Q(x) = 2x^3 - x^2 + 4 \text{ e } R(x) = 0$$

g) $A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{15}{4} + \frac{13}{12}x + \frac{13}{8}x^2$ e $B(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r} \frac{x^3}{3} + \frac{13}{8}x^2 + \frac{13}{12}x - \frac{15}{4} \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{8} \\ \hline \frac{2x^2}{3} + \frac{13}{12}x - \frac{15}{4} \\ -\frac{2x^2}{3} + \frac{9}{4}x \\ \hline \frac{10}{3}x - \frac{15}{4} \\ -\frac{10}{3}x + \frac{15}{4} \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} \\ \hline \frac{x^2}{2} + 3x + 5 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{3x^3}{6x} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{2x^3}{3} = \frac{6x^3}{2x} = 3x$$

$$\frac{10x}{3} - \frac{2x}{3} = \frac{10x}{2x} = 5$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{13}{8}x^2 + \frac{13}{12}x - \frac{15}{4} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{2} + 3x + 5\right) + 0$$

$$Q(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 5 \text{ e } R(x) = 0$$

2.

a) $A(x) = 5x^2 + 3x - 1$ e $B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & 3 & -1 \\ -1 & & -5 & 2 \\ \hline & 5 & -2 & 1 \end{array}$$

$$x + 1 = x - (-1)$$

$$5x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(5x - 2) + 1$$

$$Q(x) = 5x - 2 \text{ e } R(x) = 1$$

b) $A(x) = 2x^2 - 4$ e $B(x) = x - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 0 & -4 \\ \sqrt{2} & & 2\sqrt{2} & 4 \\ \hline & 2 & 2\sqrt{2} & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 4 = (x - \sqrt{2})(2x + 2\sqrt{2})$$

$$Q(x) = 2x + 2\sqrt{2} \text{ e } R(x) = 0$$

c) $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 24$ e $B(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -10 & 24 \\ 2 & & 4 & 0 & -20 \\ \hline & 2 & 0 & -10 & 4 \end{array}$$

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(2x^2 - 10) + 4$$

$$Q(x) = 2x^2 - 10 \text{ e } R(x) = 4$$

d) $A(x) = -2x^3 + 4x + 5$ e $B(x) = x + \frac{1}{2}$
 $x + \frac{1}{2} = x - \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 0 & 4 & 5 & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \\ \hline & -2 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{13}{4} \end{array}$$

$$-2x^3 + 4x + 5 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(-2x^2 + x + \frac{7}{2}\right) + \frac{13}{4}$$

$$Q(x) = -2x^2 + x + \frac{7}{2} \text{ e } R(x) = \frac{13}{4}$$

e) $A(x) = 4x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 5$ e $B(x) = x$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -1 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 4 & -1 & 5 & -4 & 5 \end{array} \quad x = x - 0$$

$$4x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = x(4x^3 - x^2 + 5x - 4) + 5$$

$$Q(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 4 \text{ e } R(x) = 5$$

f) $A(x) = x^5 + 6x^4 + 2x^2 + 36x - 5$ e $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 6 & 0 & 2 & 36 & -5 \\ -2 & -2 & -8 & 16 & -36 & 0 & \\ \hline & 1 & 4 & -8 & 18 & 0 & -5 \end{array} \quad x + 2 = x - (-2)$$

$$\begin{aligned} x^5 + 6x^4 + 2x^2 + 36x - 5 &= \\ &= (x + 2)(x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 18x) + (-5) \\ Q(x) &= x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 18x \text{ e } R(x) = -5 \end{aligned}$$

3.

a) $A(1) = 2 \times 1^4 - 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 2 - 1 - 4 + 3 = 0$

b) $A(-1) = 2 \times (-1)^4 - (-1)^2 - 4 \times (-1) + 3 = 2 - 1 + 4 + 3 = 8$

c) $A(0) = 2 \times 0^4 - 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

d) $A(\sqrt{3}) = 2 \times (\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}) + 3 = 2 \times 9 - 3 - 4\sqrt{3} + 3 = 18 - 4\sqrt{3}$

4. Opção (D)

• Averiguemos o valor lógico da afirmação I:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -9 & -27 & -15 \\ -1 & -3 & -3 & 12 & 15 \\ \hline & 3 & -12 & -15 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 15 & \\ \hline & 3 & -15 & 0 & \\ -1 & -3 & -3 & 15 & \\ \hline & 3 & -18 & -3 & \\ & 3 & -18 & -3 & \end{array}$$

-1 é raiz de $A(x)$.

-1 é raiz de $3x^2 - 12x - 15 = Q(x)$.

-1 não é raiz de $3x - 15$.

Observa-se que -1 é raiz dupla de $A(x)$ e não de multiplicidade 3, logo a afirmação I é falsa.

• Averiguemos o valor lógico da afirmação II:

$$\begin{array}{r|rr} 3x^3 - 9x^2 - 27x - 15 & x^2 - x \\ -3x^3 + 3x^2 & 3x - 6 \\ \hline -6x^2 - 27x - 15 & Q(x) \\ 6x^2 - 6x & \\ \hline -33x - 15 & \end{array}$$

A afirmação II é verdadeira.

5. Opção (B)

Seja $P(x) = 2x^3 + kx^2 + 3x + 1$.

7 é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ se $P(2) = 7$.

Assim, $2 \times 2^3 + k \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 7$

$\Leftrightarrow 16 + 4k + 6 + 1 = 7 \Leftrightarrow 4k = -16 \Leftrightarrow k = -4$.

6. Opção (D)

Seja $P(x) = x^5 - 3x + x^2 + 2(m - 1)$.

$P(x)$ é divisível por $x + 1$ se $P(-1) = 0$. Assim:

$(-1)^5 - 3 \times (-1) + (-1)^2 + 2(m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 3 + 1 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

7. Seja $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se e só se -1 é uma raiz de $P(x)$, isto é, $P(-1) = 0$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é 40 se $P(3) = 40$.

Assim:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(3) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 + c \times (-1) + 2 = 0 \\ a \times 3^3 + 2 \times 3^2 + c \times 3 + 2 = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2 - c + 2 = 0 \\ 27a + 18 + 3c + 2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - c = -4 \\ 27a + 3c = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 4 \\ 27a + 3c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 - a \\ 27a + 3(4 - a) = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27a + 12 - 3a = 20 \\ 24a = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{24} \\ c = 4 - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$a = \frac{1}{3}$ e $c = \frac{11}{3}$

8. Opção (C)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -k & m & 3 \\ 1 & 1 & 1 - k & 1 - k + m & \\ \hline & 1 & 1 - k & 1 - k + m & 4 - k + m \\ 1 & 1 & 1 & 2 - k & \\ \hline & 1 & 2 - k & 3 - 2k + m & \end{array}$$

Para que 1 seja raiz dupla de $P(x)$ tem que verificar-se:

$$\begin{cases} 4 - k + m = 0 \\ 3 - 2k + m = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} m = k - 4 \\ 3 - 2k + k - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ k = -1 \end{cases}$$

9. Opção (B)

Seja $P(x) = x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é $P(-1)$.

Assim, $P(-1) = (-1)^n + 1$:

- se n é ímpar, $P(-1) = -1 + 1 = 0$.
- se n é par, $P(-1) = 1 + 1 = 2$.

10. Opção (C)

• Se $P(x)$ é divisível por $x - 4$, então $P(4) = 0$.

• Se dividindo $P(x)$ por $x - 1$ se obtém um quociente $Q(x)$ e resto igual a -21 , então $P(x) = (x - 1) \times Q(x) - 21$.

Pretende-se saber o resto da divisão de $Q(x)$ por $x - 4$, ou seja, $Q(4)$.

Como $P(x) = (x - 1) \times Q(x) - 21$, então:

$$P(4) = (4 - 1) \times Q(4) - 21 \Leftrightarrow 0 = 3 \times Q(4) - 21$$

$$\Leftrightarrow Q(4) = \frac{21}{3}$$

$$\Leftrightarrow Q(4) = 7$$

11. Opção (A)

$$P(-a) + P(a) =$$

$$= \underbrace{(-a)^{2n+1}}_{\substack{-a^{2n+1}, \\ \text{pois } 2n+1 \\ \text{é ímpar}}} - \underbrace{(-a)^{2n}}_{\substack{a^{2n}, \\ \text{pois } 2n \text{ é} \\ \text{par}}} - (-a) + 1 + a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 =$$

$$= -a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 + a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 =$$

$$= -2a^{2n} + 2 = 2(1 - a^{2n})$$

Exercícios de margem – páginas 35 a 52

17.

a) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4) \times (x + 4)$

b) $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times 4x + 4^2 =$
 $= (x - 4)^2 =$
 $= (x - 4)(x - 4)$

c) $9 - 16x^2 = 3^2 - (4x)^2 =$
 $= (3 - 4x)(3 + 4x)$

d) $x^2 - 16x = x(x - 16)$

e) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+7}{2} \vee x = \frac{-3-7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -5$$

f) $2x^2 + 6x - 20 = 2(x^2 + 3x - 10) = 2(x + 5)(x - 2)$

Pela alínea anterior,
 $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$.

g) $-x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = -(x + 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 4 \times (-1) \times 1}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{-2} \vee x = \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{1}{3}$$

18. Seja $P(x)$ o polinómio de segundo grau que admite 5 como zero duplo.

Tem-se que $P(x) = a(x - 5)^2$, onde a é um número real não nulo.

Como $P(x)$ tem resto igual a 8, quando dividido pelo polinómio $x - 3$, então tem-se que $P(3) = 8$, logo:

$$a \times (3 - 5)^2 = 8 \Leftrightarrow a \times 4 = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

Assim, $P(x) = 2(x - 5)^2$ ou $P(x) = 2x^2 - 20x + 50$.

19.

a) $x^3 + 6x^2 - 7x = x(x^2 + 6x - 7) = x(x - 1)(x + 7)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6+8}{2} \vee x = \frac{-6-8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -7$$

b) $4x^3 - 11x^2 - 3x = x(4x^2 - 11x - 3) =$

$$= x \times 4 \times \left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 3) =$$

$$= 4x \left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 3)$$

Cálculo auxiliar

$$4x^2 - 11x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 4 \times (-3)}}{2 \times 4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11+13}{8} \vee x = \frac{11-13}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{4}$$

c) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + 5)(x^2 - 4) = (x + 5)(x - 2)(x + 2)$

Cálculo auxiliar

	1	5	-4	-20
-5		-5	0	20
	1	0	-4	0

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + 5)(x^2 - 4)$$

d) $8x^3 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x + 2)$

Cálculo auxiliar

	8	0	0	1
$-\frac{1}{2}$		-4	2	-1
	8	-4	2	0

$$8x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 8 \times 2}}{2 \times 8} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{16}$$

Equação impossível em \mathbb{R} , ou seja, o polinómio $8x^2 - 4x + 2$ não tem raízes reais.

Cálculos auxiliares

$\bullet x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

	-4	0	5	0	-1
1		-4	-4	1	1
	-4	-4	1	1	0
-1		4	0	-1	
	-4	0	1	0	

$Q(x) = -4x^2 + 1$

$\bullet -4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

$\bullet -4x^2 + 1 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

20. $P(x) = 2x^3 - 14x + 12 \quad D(x) = x - 2$

	2	0	-14	12
2		4	8	-12
	2	4	-6	0 = R(x)

$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 4x - 6)$

Vamos agora fatorizar o polinómio $2x^2 + 4x - 6$.

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Assim, $2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 3)(x - 1)$.

Logo, $P(x) = 2(x - 2)(x + 3)(x - 1)$.

22. Aplicando sucessivas vezes a regra de Ruffini, obtém-se:

	2	-2	-10	2	16	8	0
0		0	0	0	0	0	0
	2	-2	-10	2	16	8	0
-1		-2	4	6	-8	-8	
	2	-4	-6	8	8	0	
-1		-2	6	0	-8		
	2	-6	0	8	0		
-1		-2	8	-8			
	2	-8	8	0			
2		4	-8				
	2	-4	0				
2		4					
	2	0					

Conclui-se que $A(x) = x^1(x + 1)^3(x - 2)^2 \times 2$, isto é, $m = 1$, $n = 3$, $p = 2$ e $B(x) = 2$.

21.

a) $3x^4 - 6x^2 = 3x^2(x^2 - 2) = 3x^2 \times (x^2 - (\sqrt{2})^2) = 3x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x + 2)(x + 2)$

Cálculos auxiliares

	1	1	-5	-1	8	-4
1		1	2	-3	-4	4
	1	2	-3	-4	4	0
1		1	3	0	-4	
	1	3	0	-4	0	
1		1	4	4		
	1	4	4	0		

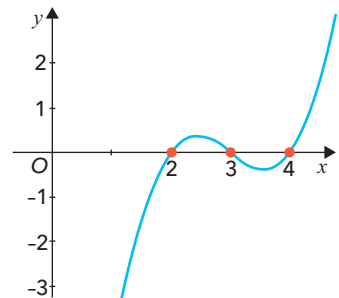
$\bullet Q(x) = x^2 + 4x + 4$

$\bullet x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

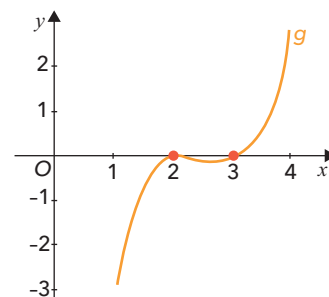
c) $-4x^4 + 5x^2 - 1 = (x^2 - 1)(-4x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1) \times (-4)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = -4(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

23.

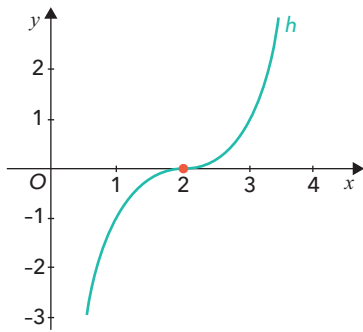
a) $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$



b) $g(x) = (x - 2)^2(x - 3)$



c) $h(x) = (x - 2)^3$



24.

a) $f(x) = (x - 1)^3 = (x - 1)^2(x - 1) = (x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, por exemplo.

b) $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$, por exemplo.

c) $f(x) = x(x - 1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$, por exemplo.

25.

a) Como sabemos que f é uma função polinomial de grau 3, que tem dois zeros, 0 e 2, sendo um deles, 0, o zero simples e 2 o zero duplo, então, a expressão analítica que define f é do tipo:

$$f(x) = a(x - 0)(x - 2)^2 = ax(x - 2)^2$$

Como $f(1) = 2$, então $a \times 1 \times (1 - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Logo, uma expressão analítica que define a função f é:

$$f(x) = 2x(x - 2)^2 = 2x(x^2 - 4x + 4) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$$

b) Como sabemos que -1, 2 e 4 são zeros simples de g , então a expressão analítica que define g é do tipo $g(x) = a(x - (-1))(x - 2)(x - 4) = a(x + 1)(x - 2)(x - 4)$.

Como $g(0) = -8$, então $a(0 + 1)(0 - 2)(0 - 4) = -8$

$$\Leftrightarrow 8a = -8 \Leftrightarrow a = -1.$$

Logo, uma expressão analítica que define a função g é:

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x + 1)(x - 2)(x - 4) = \\ &= -(x^2 - 2x + x - 2)(x - 4) = \\ &= -(x^2 - x - 2)(x - 4) = \\ &= -(x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x - 2x + 8) = \\ &= -x^3 + 5x^2 - 2x - 8 \end{aligned}$$

26. Como $A(x)$ tem grau 3, -1 é uma raiz de multiplicidade 2 e $A(x)$ é divisível por $x - 2$. Então, $A(x)$ é da forma $A(x) = a(x + 1)(x + 1)(x - 2)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x - 1$ é -12, então $A(1) = -12$. Logo:

$$a \times (1 + 1)(1 + 1)(1 - 2) = -12 \Leftrightarrow a \times (-4) = -12 \Leftrightarrow a = 3$$

Assim:

$$\begin{aligned} A(x) &= 3(x + 1)^2(x - 2) = \\ &= 3(x^2 + 2x + 1)(x - 2) = \\ &= 3(x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2) = \\ &= 3(x^3 - 3x - 2) = \\ &= 3x^3 - 9x - 6 \end{aligned}$$

27.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

O polinômio tem um único zero: 3

b) $2x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$$

O polinômio tem dois zeros: $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ e $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$

c) $2x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

Equação impossível em \mathbb{R} . O polinômio não tem zeros.

d) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 + x - 6)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + 5}{2} \vee x = \frac{-1 - 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3$$

O polinômio tem 3 zeros: -3, 0 e 2

e) $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$

O polinômio tem um único zero: 1

28.

a) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

Consideremos a mudança de variável $y = x^2$.

Então:

$$y^2 - 8y + 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 15}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \vee y = 3$$

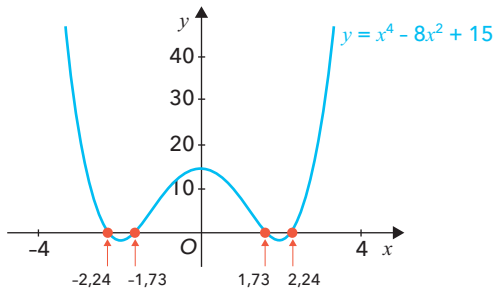
Substituindo y por x^2 , vem que:

$$x^2 = 5 \vee x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

$$C.S. = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$$

- b) Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos os zeros, com arredondamento às centésimas, da função definida por $y = x^4 - 8x^2 + 15$.



Assim, C.S. = $\{-2,24; -1,73; 1,73; 2,24\}$.

29. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 0$

- a) $P(x)$ é divisível por $x - 2$, já que $P(2) = 6 \times 2^3 + 2^2 - 31 \times 2 + 10 = 0$.

b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 0$

Cálculo auxiliar

	6	1	-31	10
2		12	26	-10
	6	13	-5	0

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x - 2)(6x^2 + 13x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee 6x^2 + 13x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 6 \times (-5)}}{2 \times 6} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{12} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-13 + 17}{12} \vee x = \frac{-13 - 17}{12} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4}{12} \vee x = \frac{-30}{12} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{5}{2} \\ \text{C.S.} &= \left\{ 2, \frac{1}{3}, -\frac{5}{2} \right\} \end{aligned}$$

30. $A(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + x - 15 = 0$

Cálculo auxiliar

	1	5	1	-15
-3		-3	-6	15
	1	2	-5	0

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 2x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x^2 + 2x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 + \sqrt{6} \vee x = -1 - \sqrt{6} \\ \text{C.S.} = \{-3, -1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}\} \end{aligned}$$

31.

a) $f(-2) = 4 \times (-2)^3 + 8 \times (-2)^2 - (-2) - 2 = -32 + 32 + 2 - 2 = 0$

Logo, -2 é um zero da função f .

b) $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$

	4	8	-1	-2
-2		-8	0	2
	4	0	-1	0

$$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Logo, os outros zeros de f são $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

c) Assim, $f(x) = 4(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

32.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow -5x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

O zero de f é $\frac{1}{5}$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -1$$

Os zeros de g são $\frac{4}{3}$ e -1 .

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 24 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 = 24$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{24}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{3}$$

O zero de h é $2\sqrt[3]{3}$.

d) $i(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 16x = 0$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -x^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \vee x = -4$$

Os zeros de i são $0, 4$ e -4 .

e) $j(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee 2x^2 - 1 = 0$

Cálculo auxiliar

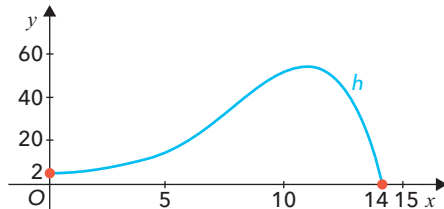
	2	-8	7	4	-4
2		4	-8	-2	4
	2	-4	-1	2	0
2		4	0	-2	
	2	0	-1	0	

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

O zeros de j são $2, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

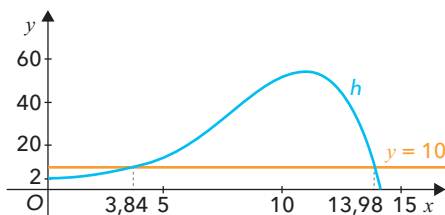
33.

a)



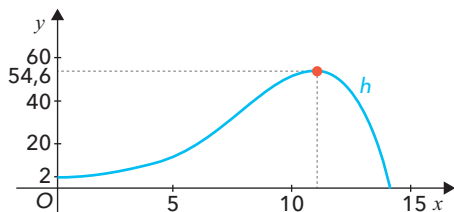
- i. Pretende-se determinar $h(0)$.
 $h(0) = 2$, ou seja, a trajetória da montanha-russa começa a 2 metros do chão.
- ii. Pretende-se determinar o valor de x positivo tal que $h(x) = 0$.
 $x \approx 14$, ou seja, o final do trilho da montanha-russa encontra-se a, aproximadamente, 14 metros do ponto inicial.

b) Pretende-se determinar os valores de x tais que $h(x) = 10$:



O trilho da montanha-russa encontra-se a 10 metros do chão quando $x \approx 3,84$ e $x \approx 13,98$.

c) Pretende-se determinar o máximo da função h :



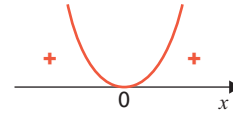
Este modelo de montanha-russa não atende à restrição do seu trilho não poder ultrapassar os 20 metros de altura ao chão, pois a altura máxima atingida nesta montanha-russa é de, aproximadamente, 54,6 metros.

34.

a) $x^3 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) \geq 0$

Cálculos auxiliares

$\bullet x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$



$\bullet x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
x^2	+	0	+	+
$x - 4$	-	-	0	+
$x^2(x - 4)$	-	0	-	+

Assim:

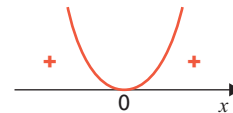
$x^3 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \geq 4$

C.S. = $\{0\} \cup [4, +\infty[$

b) $x^2 < x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x) < 0$

Cálculos auxiliares

$\bullet x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$



$\bullet 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	0	+	+
$1 - x$	+	+	0	-
$x^2(1 - x)$	+	0	+	-

Assim:

$x^2 < x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x > 1$

C.S. = $]1, +\infty[$

c) $x^3 - 5x^2 - x \geq -5 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - x + 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 5) \geq 0$

Cálculos auxiliares

	1	-5	-1	5
1		1	-4	-5
	1	-4	-5	0

$\bullet A(x) = (x - 1)(x^2 - 4x - 5)$

$\bullet x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 6}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$

Logo, $A(x) = (x - 1)(x^2 - 4x - 5) = (x - 1)(x + 1)(x - 5)$.

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$
$x - 1$	-	-	0	+	+
$x + 1$	-	0	+	+	+
$x - 5$	-	-	-	0	+
$(x - 1)(x + 1)(x - 5)$	-	0	+	0	+

Assim:

$x^3 - 5x^2 - x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 5$

C.S. = $[-1, 1] \cup [5, +\infty[$

d) $-3x^3 + 20x^2 - 27x + 10 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(-3x^2 + 17x - 10) < 0$
 $\Leftrightarrow -3(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5) < 0$

Cálculos auxiliares

	-3	20	-27	10
1	-3	17	-10	
	-3	17	-10	0

• $B(x) = (x-1)(-3x^2 + 17x - 10)$
 • $-3x^2 + 17x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times (-3) \times (-10)}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{169}}{-6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm 13}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-6} \vee x = \frac{-30}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 5$

Logo, $B(x) = (x-1)(-3x^2 + 17x - 10) = (x-1) \times (-3) \left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5) = -3(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5)$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	5	$+\infty$
$-3(x-1)$	+	+	0	-	-
$x - \frac{2}{3}$	-	0	+	+	+
$x-5$	-	-	-	0	+
$-3(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5)$	+	0	-	0	-

Assim:

$-3x^3 + 20x^2 - 27x + 10 < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 1 \vee x > 5$
 C.S. = $\left] \frac{2}{3}, 1 \right[\cup]5, +\infty[$

35.

a) $B(-1) = (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - 16 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 15 = 1 - 2 - 16 + 2 + 15 = 0$

Logo, -1 é zero de $B(x)$.

$B(3) = 3^4 + 2 \times 3^3 - 16 \times 3^2 - 2 \times 3 + 15 = 81 + 54 - 144 - 6 + 15 = 0$

Logo, 3 é zero de $B(x)$.

b) $B(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x^2 + 4x - 5) = 0$
 $\Leftrightarrow x+1=0 \vee x-3=0 \vee x^2 + 4x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{-4+6}{2} \vee x = \frac{-4-6}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = 1 \vee x = -5$

C.S. = $\{-5, -1, 1, 3\}$

c) $B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 \leq 0$

Cálculo auxiliar
 Como -1 e 3 são zeros de $B(x)$, então $B(x)$ é divisível por $x+1$ e por $x-3$.

	1	2	-16	-2	15
-1	-1	-1	17	-15	
	1	1	-17	15	0
3	3	12	-15		
	1	4	-5	0	

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x^2 + 4x - 5) \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+5)(x-1) \leq 0$

x	$-\infty$	-5	-1	1	3	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	0	+
$x+5$	-	0	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$B(x)$	+	0	-	0	-	+

$B(x) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1 \vee 1 \leq x \leq 3$

C.S. = $[-5, -1] \cup [1, 3]$

36.

a) $(-x+1)(x^2 - 5x + 6) > 0$

Cálculos auxiliares

• $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$
 • $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$-x+1$	+	0	-	-	-
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	0	+
$(-x+1)(x^2 - 5x + 6)$	+	0	-	0	-

C.S. = $] -\infty, 1[\cup]2, 3[$

b) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Cálculo auxiliar

	2	1	-5	2
1	2	3	-2	
	2	3	-2	0

$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$2x^2 + 3x - 2$	+	0	-	0	+
$2x^3 + x^2 - 5x + 2$	-	0	+	0	+

C.S. = $] -\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

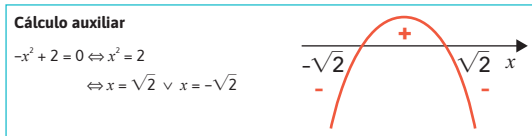
c) $x^4 < 27x \Leftrightarrow x^4 - 27x < 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 27) < 0$

Cálculo auxiliar
 $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x^3 - 27$	-	-	0	+
$x^4 - 27x$	+	0	-	+

C.S. = $]0, 3[$

d) $-x^4 + 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(-x^2 + 2) \geq 0$



x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$-x^2 + 2$	-	0	+	+	+	0	-
$-x^4 + 2x^2$	-	0	+	0	+	0	-

C.S. = $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

37.

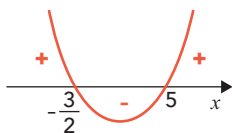
- a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$
- b) $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[$
- c) $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [0, 2] \cup [3, +\infty[$
- d) $f(x + 4) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4, -1[$

38.

a) Como f é uma função quadrática, comecemos por determinar os valores de x tais que $f(x) = 0$ e fazemos um esboço da parábola que representa esta função.

$2x^2 - 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times (-15)}}{2 \times 2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{7 + 13}{4} \vee x = \frac{7 - 13}{4}$
 $\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -\frac{3}{2}$



Assim, verifica-se que:

- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{3}{2}, 5[$;
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]5, +\infty[$.

isto é:

- f é negativa em $]-\frac{3}{2}, 5[$;
- f é positiva em $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]5, +\infty[$.

b) 1.º processo

	3	3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
-1		-3	0	$\frac{1}{3}$
	3	0	$-\frac{1}{3}$	0

$g(x) = (x + 1)\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right) = 3(x + 1)\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) = 3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3(x + 1)$	-	0	+	+	+	+	+
$x + \frac{1}{3}$	-	-	-	0	+	+	+
$x - \frac{1}{3}$	-	-	-	-	-	0	+
$3(x + 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$	-	0	+	0	-	0	+

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) < 0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) > 0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) < 0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) > 0}$

Conclui-se assim que:

- g é negativa em $]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$;
- g é positiva em $]-1, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$.

2.º processo

Nota: Em alternativa a considerar

$g(x) = 3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$, podíamos ter optado

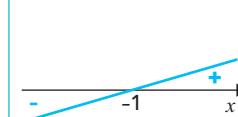
por considerar $g(x) = 3(x + 1)\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)$ e construir o seguinte quadro de sinais:

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3(x + 1)$	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - \frac{1}{9}$	+	+	+	0	-	0	+
$3(x + 1)\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)$	-	0	+	0	-	0	+

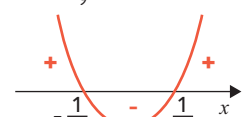
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) < 0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) > 0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) < 0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g(x) > 0}$

Cálculos auxiliares

• $y = 3(x + 1)$



• $y = x^2 - \frac{1}{9}$



39.

a)

Cálculos auxiliares

	-1	2	5	-6	0
3		-3	-3	6	0
	-1	-1	2	0	0

• $f(x) = (x - 3)(-x^2 - x^2 + 2x) = (x - 3) \times x \times (-x^2 - x + 2)$

• $-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 + 3}{-2} \vee x = \frac{1 - 3}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$= (x - 3) \times x \times (-1)(x + 2)(x - 1) = -x(x - 3)(x + 2)(x - 1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \vee x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2 \vee x = 1$

Assim, além de 3, as raízes do polinómio são 0, -2 e 1.

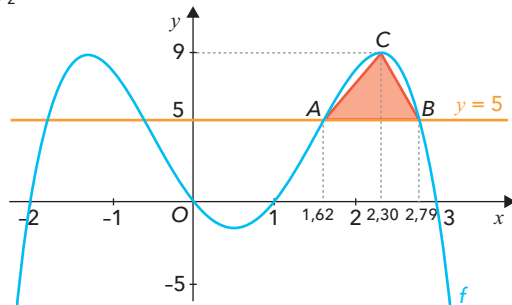
- b) Da alínea anterior, sabemos que $f(x) = -x(x-3)(x+2)(x-1)$.
 Pretende-se determinar os valores de x para os quais $f(x) < 0$.

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$-x$	+	+	0	-	-	-
$x-3$	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+	-

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee 0 < x < 1 \vee x > 3$
 $x \in]-\infty, -2[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[$

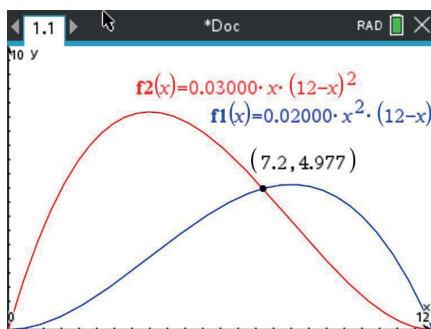
- c) Recorrendo à calculadora gráfica, numa janela adequada, obtemos o gráfico da função f e a reta de equação $y = 5$:

$y_1 = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6x$
 $y_2 = 5$



$A(1,62; 5)$ $B(2,79; 5)$ $C(2,30; 9)$
 Sendo b a base e h a altura do triângulo $[ABC]$, então $b = x_B - x_A = 2,79 - 1,62 = 1,17$ e $h = y_C - 5 = 9 - 5 = 4$.
 Assim, $A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{1,17 \times 4}{2} \approx 2,3$ u.a.

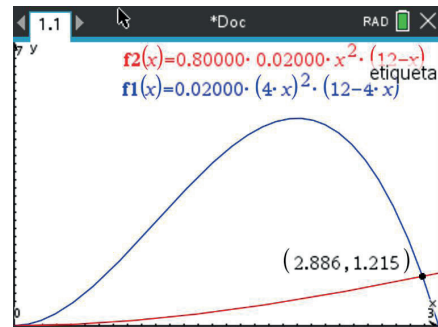
40. a) Pretendemos resolver, com recurso à calculadora gráfica, a condição $f(t) < g(t)$, com $0 \leq t \leq 12$.
 Usando x como variável independente:
 $f_1(x) = 0,02x^2(12-x)$, com $0 \leq x \leq 12$
 $f_2(x) = 0,03x(12-x)^2$, com $0 \leq x \leq 12$



$f(t) < g(t) \Leftrightarrow 0 < t < 7,2$
 $0,2 \times 60 = 12$

A concentração do antibiótico no sangue administrado pelo método oral é inferior àquela administrada pelo método intravenoso durante as primeiras 7 horas e 12 minutos.

- b) Pretendemos resolver a equação $f(4t) = f(t) - 0,2f(t)$, ou seja, $f(4t) = 0,8f(t)$, com $0 \leq t \leq 3$
 $f_1(t) = 0,02(4t)^2(12-4t)$, com $0 \leq t \leq 3$
 $f_2(t) = 0,8 \times 0,02t^2(12-t)$, com $0 \leq t \leq 3$



$a \approx 2,886$
 $4a - a = 3a \approx 8,658$
 $0,658 \times 60 \approx 39$
 A amplitude do intervalo é de 8 horas e 39 minutos.

Aprende fazendo ② – páginas 54 e 55

1. a) $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$

Cálculo auxiliar
 $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-12)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$

- b) $3x^2 + 5x - 22 = 3\left(x + \frac{11}{3}\right)(x-2)$

Cálculo auxiliar
 $3x^2 + 5x - 22 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-22)}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 17}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3} \vee x = 2$

- c) $2x^2 + x - 15 = 2\left(x - 3\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

Cálculo auxiliar
 $2x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-15)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 11}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{5}{2}$

- d) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$

- e) $x^3 + 10x^2 + 25x = x(x^2 + 10x + 25) = x(x+5)^2 = x(x+5)(x+5)$

- f) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x^2 - 2x - 3) = (x+1)(x-3)(x+1)$

Cálculo auxiliar

	1	-1	-5	-3
-1		-1	2	3
	1	-2	-3	0

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

g) $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x + 9) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 + 2x + 3)$

Cálculo auxiliar

	3	4	5	-6
$\frac{2}{3}$		2	4	6
	3	6	9	0

$x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$
Equação impossível em \mathbb{R} .

O polinómio $x^2 + 2x + 3$ não admite raízes reais, logo não pode ser decomposto em fatores.

h) $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = (x - 1)(2x^2 + 9x + 4) = (x - 1)2(x + 4)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(x - 1)(x + 4)\left(x + \frac{1}{2}\right) =$

Cálculo auxiliar

	2	7	-5	-4
1		2	9	4
	2	9	4	0

$2x^2 + 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 2 \times 4}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -\frac{1}{2}$

i) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 1)(x^2 - x - 6) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Cálculo auxiliar

	1	-1	-7	1	6
-1		-1	2	5	-6
	1	-2	-5	6	0
1		1	-1	-6	
	1	-1	-6	0	

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

j) $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 = (x - 1)(x - 3)(2x^2 + 5x + 2) = (x - 1)(x - 3)2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(x - 1)(x - 3)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Cálculo auxiliar

	2	-3	-12	7	6
1		2	-1	-13	-6
	2	-1	-13	-6	0
3		6	15	6	
	2	5	2	0	

$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$

k) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 = (x + 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$

Cálculo auxiliar
Os divisores inteiros de -1 são 1 e -1.

	1	-2	0	2	-1
1		1	-1	-1	1
	1	-1	-1	1	0
-1		-1	2	-1	
	1	-2	1	0	

2. a) -2 e -1 são raízes do polinómio de 2º grau $P(x)$. Então, $P(x) = a(x + 2)(x + 1)$, $a \neq 0$.

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é 18, vem que $P(1) = 18$, ou seja:

$a(1 + 2)(1 + 1) = 18 \Leftrightarrow a \times 3 \times 2 = 18 \Leftrightarrow a \times 6 = 18$

$\Leftrightarrow a = \frac{18}{6} \Leftrightarrow a = 3$

Logo, $P(x) = 3(x + 2)(x + 1) = 3(x^2 + 2x + x + 2) = 3(x^2 + 3x + 2) = 3x^2 + 9x + 6$.

b) 5 é raiz dupla e 0 é raiz simples do polinómio de 3º grau $P(x)$. Então:

$P(x) = a(x - 5)(x - 5)(x - 0)$ ($a \neq 0$) = $ax(x - 5)(x - 5)$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 4$ é 8:

$P(4) = 8 \Leftrightarrow a \times 4 \times (4 - 5) \times (4 - 5) = 8$

$\Leftrightarrow 4a \times (-1) \times (-1) = 8 \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$

Logo, $P(x) = 2x(x - 5)(x - 5) = 2x(x^2 - 10x + 25) = 2x^3 - 20x^2 + 50x$.

3. a) $P(-3) = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + 27 = -27 - 3 \times 9 + 27 + 27 = 0$

Como $P(-3) = 0$, -3 é uma raiz de $P(x)$.

b)

	1	-3	-9	27
-3		-3	18	-27
	1	-6	9	0

$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x + 3)(x^2 - 6x + 9) =$

$= (x + 3)(x - 3)^2 = (x + 3)(x - 3)(x - 3)$

3 é uma raiz dupla de $P(x)$.

c) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)(x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 3 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = 3$

C.S. = $\{-3, 3\}$

d) $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
x + 3	-	0	+	+
x - 3	-	-	0	+
x - 3	-	-	0	+
P(x)	-	0	+	+

Cálculos auxiliares
• $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
• $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

C.S. = $[-3, +\infty[$

4. Como 1 e -1 são raízes simples e -2 é uma raiz dupla do polinómio de quarto grau, então $P(x) = a(x-1)(x+1)(x+2)(x+2) (a \neq 0)$.

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x + \frac{1}{2}$ é 27, vem:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 27$$

$$\Leftrightarrow a\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right) = 27$$

$$\Leftrightarrow a \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 27$$

$$\Leftrightarrow -\frac{27}{16}a = 27$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{16 \times 27}{27}$$

$$\Leftrightarrow a = -16$$

Logo:

$$P(x) = -16(x-1)(x+1)(x+2)(x+2) =$$

$$= -16(x^2-1)(x^2+4x+4) =$$

$$= -16(x^4+4x^3+4x^2-x^2-4x-4) =$$

$$= -16(x^4+4x^3+3x^2-4x-4) =$$

$$= -16x^4-64x^3-48x^2+64x+64$$

5.

- a) Começemos por fatorizar o polinómio

$$P(x) = 2x^3 - 6x + 4.$$

Cálculo auxiliar

	2	0	-6	4
1		2	2	-4
	2	2	-4	0

$$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2 \times (-4)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$P(x) = 2x^3 - 6x + 4 = (x-1)(2x^2 + 2x - 4) =$$

$$= (x-1)2(x+2)(x-1) =$$

$$= 2(x-1)(x-1)(x+2)$$

$$2x^3 - 6x = -4 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x-1 = 0 \vee x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 \vee x = -2$$

$$\text{C.S.} = \{1, -2\}$$

- b) Começemos por fatorizar o polinómio

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9.$$

Cálculo auxiliar

	2	-7	0	9
3		6	-3	-9
	2	-1	-3	0

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9 = (x-3)(2x^2 - x - 3) =$$

$$= (x-3)2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1) =$$

$$= 2(x-3)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 2(x-3)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 0 \vee x - \frac{3}{2} = 0 \vee x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \left\{-1, \frac{3}{2}, 3\right\}$$

- c) Começemos por fatorizar o polinómio

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

Cálculo auxiliar

	1	-2	0	2	-1
-1		-1	3	-3	1
	1	-3	3	-1	0
1		1	-2	1	
	1	-2	1	0	

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x+1)(x-1)(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= (x+1)(x-1)(x-1)^2 =$$

$$= (x+1)(x-1)(x-1)(x-1)$$

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee x-1 = 0 \vee x-1 = 0 \vee x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 1 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 1\}$$

- d) Começemos por fatorizar o polinómio

$$P(x) = 4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4.$$

Cálculo auxiliar

	4	-12	1	12	4
2		8	-8	-14	-4
	4	-4	-7	-2	0
2		8	8	2	
	4	4	1	0	

$$P(x) = 4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4 =$$

$$= (x-2)(x-2)(4x^2 + 4x + 1) =$$

$$= (x-2)(x-2)(2x+1)(2x+1)$$

$$4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-2)(2x+1)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x-2 = 0 \vee 2x+1 = 0 \vee 2x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$

- e) Começemos por fatorizar o polinómio

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2.$$

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 5x + 4) =$$

$$= x^2(x+4)(x+1) =$$

$$= x \times x(x+4)(x+1)$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1$$

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \times x(x+4)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0 \vee x+4 = 0 \vee x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0 \vee x = -4 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{0, -4, -1\}$$

6.

a) $P(1) = 6 \times 1^3 - 7 \times 1^2 - 14 \times 1 + 15 = 6 - 7 - 14 + 15 = 0$
 Como $P(1) = 0$, 1 é raiz de $P(x)$.

b) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = (x - 1)(6x^2 - x - 15) =$
 $= (x - 1)6 \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) =$
 $= 6(x - 1) \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

Cálculo auxiliar

	6	-7	-14	15
1		6	-1	-15
	6	-1	-15	0

$$6x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 6 \times (-15)}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 19}{12} \Leftrightarrow x = \frac{20}{12} \vee x = -\frac{18}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{3}{2}$$

c) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - \frac{5}{3} = 0 \vee x + \frac{3}{2} = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{3}{2}$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{5}{3}, 1, -\frac{3}{2} \right\}$$

d) $P(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1) \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \vee 1 < x < \frac{5}{3}$

Cálculos auxiliares

$$\bullet x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \bullet x - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \quad \bullet x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - \frac{5}{3}$	-	-	-	-	-	0	+
$x + \frac{3}{2}$	-	0	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]1, \frac{5}{3}[$$

7.

a) Começamos por fatorizar o polinómio $P(x) = x^3 - x^2$.

$$P(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1) = x \times x(x - 1)$$

$$x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \times x(x - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \vee 0 < x < 1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
x	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x \times x \times (x - 1)$	-	0	-	0	+

Cálculos auxiliares

$$\bullet x = 0$$

$$\bullet x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$$

b) Começamos por fatorizar o polinómio

$$P(x) = 3x^3 + 2x - 5.$$

$$P(x) = 3x^3 + 2x - 5 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 5)$$

Cálculo auxiliar

	3	0	2	-5
1		3	3	5
	3	3	5	0

$$3x^2 + 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 3 \times 5}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-51}}{6}$$

Equação impossível em R.

$$3x^3 + 2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 1[$$

c) $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = (x + 3)(x + 2)(x^2 - x - 2) =$
 $= (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$

Cálculo auxiliar

	1	4	-1	-16	-12
-3		3	-3	12	12
	1	1	-4	-4	0
-2		-2	2	4	
	1	-1	-2	0	

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \vee -2 \leq x \leq -1 \vee x \geq 2$$

x	$-\infty$	-3		-2		-1		2	$+\infty$
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	-	0	+	+
$x + 1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x + 3) \times (x + 2) \times (x - 2) \times (x + 1)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, -3] \cup [-2, -1] \cup [2, +\infty[$$

d) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) =$
 $= x \times x \times (x - 3)(x - 2)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 > 0 \Leftrightarrow x \times x \times (x - 3)(x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \vee 0 < x < 2 \vee x > 3$$

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
x	-	0	+	+	+	+	+
x	-	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	-	-	0	+	+	+
$x \times x \times (x - 3) \times (x - 2)$	+	0	+	0	-	0	+

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$$

e) $P(x) = -x^4 + 3x^3 - 4x = x(-x^3 + 3x^2 - 4) =$
 $= x(x+1)(-x^2 + 4x - 4) =$
 $= -x(x+1)(x^2 - 4x + 4) =$
 $= -x(x+1)(x-2)^2 =$
 $= -x(x+1)(x-2)(x-2)$

Cálculo auxiliar

	-1	3	0	-4
-1		1	-4	4
	-1	4	-4	0

$-x^4 + 3x^3 - 4x < 0 \Leftrightarrow -x(x+1)(x-2)(x-2) < 0$
 $\Leftrightarrow -x(x+1)(x-2)(x-2) > 0$
 $\Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 2 \vee x > 2$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
x+1	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	-	0
x-2	-	-	-	-	0
$x(x+1)(x-2) \times x(x-2)$	+	0	-	0	+

C.S. = $]-\infty, -1[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

8.

a) $(2x-3)(1-2x)B(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \vee \frac{3}{2} < x < 2$

Cálculos auxiliares

- $\cdot 2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
- $\cdot 1-2x=0 \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
2x-3	-	-	-	-	0	+	+
1-2x	+	+	0	-	-	-	-
B(x)	-	0	-	-	0	+	+
$(2x-3) \times (1-2x) \times B(x)$	+	0	+	0	-	0	+

C.S. = $]\frac{1}{2}, 1[\cup]\frac{3}{2}, 2[$

b) $(-x^2 + 2x)B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(-x+2)B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
-x+2	+	+	+	+	0
B(x)	-	0	-	0	-
$x(-x+2) \times B(x)$	+	0	-	0	+

Cálculos auxiliares

- $\cdot x=0$
- $\cdot -x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$

C.S. = $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

c) $(-x^2 + 6x - 9)B(x) \leq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 6x + 9)B(x) \leq 0$
 $\Leftrightarrow -(x-3)^2 B(x) \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x-3)B(x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \vee x=0 \vee x=3$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
x-3	-	-	-	-	0	+
x-3	-	-	-	-	0	+
B(x)	-	0	-	0	-	-
$(x-3) \times (x-3) \times B(x)$	-	0	-	0	-	-

C.S. = $\{0, 3\} \cup [1, 2]$

9. Opção (B)

$-x^2 - 2x + 3 = -(x-1)(x+3)$

Cálculo auxiliar

$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)}$
 $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
$-(x-1)$	+	+	0	-	-
x+3	-	0	+	+	+
A(x)					
$(-x^2 - 2x + 3) \times A(x)$	+	0	-	0	-

C.S. = $]-\infty, -3] \cup [1, 4[$

Observe-se que, nestas condições, A(x) terá de ser um polinómio tal que:

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
A(x)	-	-	-	0	+

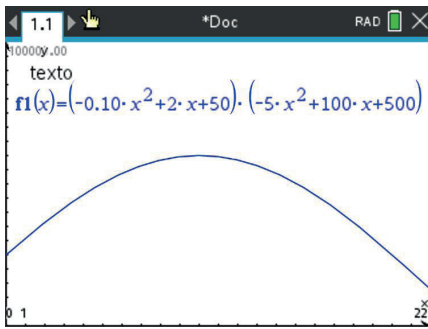
Assim, das hipóteses apresentadas, tem-se que $A(x) = x - 4$.

Capítulo 2 – Operações com funções

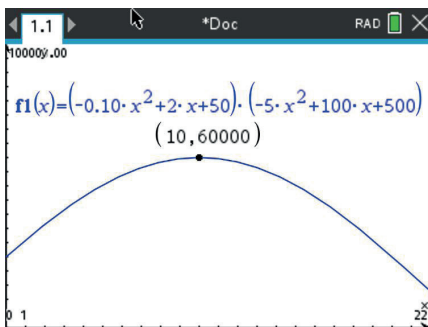
Tarefa – O lago – página 56

- a) Sabendo que o número médio de peixes, por metro cúbico de água no lago, em função do tempo x, em anos, é dado por $f(x) = -0,1x^2 + 2x + 50$, $0 \leq x \leq 22$, e que o volume de água do lago, em metros cúbicos, ao longo do tempo x, em anos, é dado por $g(x) = -5x^2 + 100x + 500$, $0 \leq x \leq 22$, então uma expressão da função h que representa a biomassa total de peixes no lago, isto é, a quantidade de peixes em todo o volume de água disponível, em função do tempo x, em anos, é dada por:
 $f(x) \times g(x) = (-0,1x^2 + 2x + 50) \times (-5x^2 + 100x + 500)$, $0 \leq x \leq 22$

b) Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos:



c) Com recurso às capacidades gráficas da calculadora, obtemos:



O número máximo de peixes que o lago terá, segundo este modelo, será de 60 000 exemplares.

Exercícios de margem – páginas 57 a 64

41.

a) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$
 $(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

b) g é uma função afim, logo é do tipo $g(x) = ax + b$.

$$a = \frac{3 - 2}{0 - 1} = -1$$

Como $(0, 3)$ pertence ao gráfico da função, então $b = 3$.

Logo, $g(x) = -x + 3$.

i. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x + 3$$

ii. $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - (-x + 3) = x^2 + x - 3$$

iii. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x^2(-x + 3) = -x^3 + 3x^2$$

42.

a) $D_f =]-\infty, 4]$

$$D_g = [-6, 6]$$

b) i. $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + 1 = 3$

ii. $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 2 - 1 = 1$

iii. $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 6 \times 0 = 0$

iv. $\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{6}{-1} = -6$

v. $\left(\frac{f}{g}\right)(6)$ não está definida, pois 6 não pertence ao domínio de f .

c) i. $D_{f+g} = D_f \cap D_g =]-\infty, 4] \cap [-6, 6] = [-6, 4]$

ii. $D_{f-g} = D_f \cap D_g =]-\infty, 4] \cap [-6, 6] = [-6, 4]$

iii. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g =]-\infty, 4] \cap [-6, 6] = [-6, 4]$

iv. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$
 $=]-\infty, 4] \cap \{x \in [-6, 6]; x \neq 2\} = [-6, 4] \setminus \{2\}$

v. $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap \{x \in D_f; f(x) \neq 0\} = [-6, 6] \cap]-\infty, 4] = [-6, 4]$

43.

a) Sabe-se que f é uma função afim e que g é uma função cúbica, logo a reta representada na figura é o gráfico da função f .

Procuram-se os valores de x para os quais o gráfico de g se encontra acima ou interseja o gráfico de f :
 $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, 6]$

b) $(f \times g)(x) < 0$

x	$-\infty$	-2	4	6	$+\infty$	
Sinal de f	-	-	-	-	0	+
Sinal de g	+	0	-	0	+	0
Sinal de $f \times g$	-	0	-	0	-	-

A função $f \times g$ é negativa em

$$]-\infty, -2[\cup]4, 6[\cup]6, +\infty[.$$

Logo, $(f \times g)(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]4, 6[\cup]6, +\infty[.$

44.

a) $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$

i. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

ii. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Cálculo auxiliar

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

iii. $D_{\frac{f}{h}} = D_f \cap \{x \in D_h; h(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Cálculo auxiliar

$$-5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

iv. $D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap \{x \in D_f; f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 1 \neq 0 \text{ é uma condição universal.}$$

b) $(f \times g)(2) + \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = f(2) \times g(2) + \frac{f(-1)}{g(-1)} =$
 $= 5 \times 4 + \frac{2}{-2} = 20 - 1 = 19$

Cálculos auxiliares

- $f(2) = 2^2 + 1 = 5$
- $g(2) = 2 \times 2 = 4$
- $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$
- $g(-1) = 2 \times (-1) = -2$

c) i. $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Zeros de $f - g$:

$$(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Zeros de $f - g$: 1

ii. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Zeros de $f \times g$:

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \vee 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -1 \vee x = 0 \end{aligned}$$

condição impossível

Zeros de $f \times g$: 0

iii. $D_{f+h} = D_f \cap D_h = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Zeros de $f + h$:

$$\begin{aligned} (f + h)(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) + h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 + (-5x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 + 1}{2} \vee x = \frac{5 - 1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Zeros de $f + h$: 2 e 3

d) $(g - h)(x) = g(x) - h(x) = 2x - (-5x + 5) = 7x - 5$

$$7x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{7} \text{ e } 7x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{7}$$

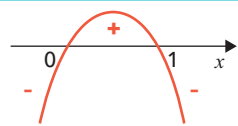
$g - h$ é positiva em $\left] \frac{5}{7}, +\infty \right[$ e é negativa em $\left] -\infty, \frac{5}{7} \right[$.

e) $(g \times h)(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \times h(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} 2x \times (-5x + 5) \leq 0 &\Leftrightarrow -10x^2 + 10x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} -10x^2 + 10x = 0 &\Leftrightarrow 10x(-x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10x = 0 \vee -x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$



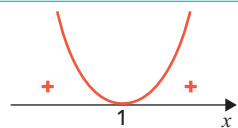
C.S. = $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

f) $(f - g)(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$



C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

g) $(f + h)(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + h(x) > 0$

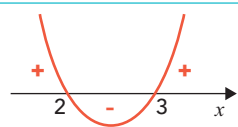
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + 1 + (-5x + 5) > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 2 \vee x > 3 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Da alínea iii., sabemos que:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$



C.S. = $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

45.

a) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (3x^2 + 6x - 8) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

	1	-3	-6	8
1		1	-2	-8
	1	-2	-8	0

$$(f - g)(x) = (x - 1) \times (x^2 - 2x - 8)$$

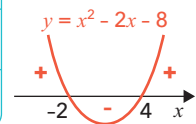
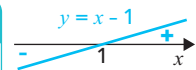
Cálculo auxiliar

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + 6}{2} \vee x = \frac{2 - 6}{2}$$

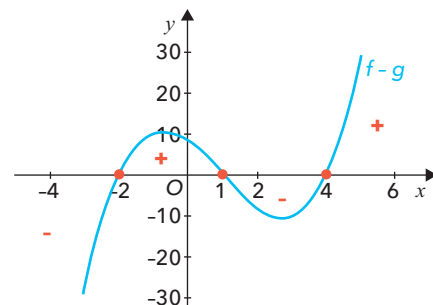
$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$		
Sinal de $x - 1$	-	-	0	+	+		
Sinal de $x^2 - 2x - 8$	+	0	-	-	0	+	
Sinal de $f - g$	-	0	+	0	-	0	+



$f - g$ é negativa em $]-\infty, -2[\cup]1, 4[$ e é positiva em $]-2, 1[\cup]4, +\infty[$.

b)



$f - g$ é negativa em $]-\infty, -2[\cup]1, 4[$ e é positiva em $]-2, 1[\cup]4, +\infty[$.

46.

a) $C(50) = 4 \times 50 + 500 = 700$ euros

$$R(50) = 60 \times 50 - 0,25 \times 50^2 = 2375 \text{ euros}$$

$$L(50) = R(50) - C(50) = 2375 - 700 = 1675 \text{ euros}$$

b) $C(2) = 4 \times 2 + 500 = 508$ euros

$$R(2) = 60 \times 2 - 0,25 \times 2^2 = 119 \text{ euros}$$

$$L(2) = R(2) - C(2) = -389 \text{ euros}$$

c) $C(180) = 4 \times 180 + 500 = 1220$ euros

$$R(180) = 60 \times 180 - 0,25 \times 180^2 = 2700 \text{ euros}$$

$$L(180) = R(180) - C(180) = 1480 \text{ euros}$$

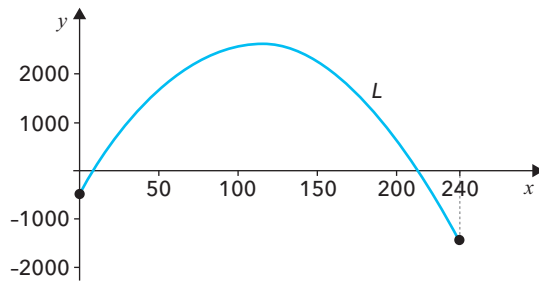
d) $C(240) = 4 \times 240 + 500 = 1460$ euros

$$R(240) = 60 \times 240 - 0,25 \times 240^2 = 0 \text{ euros}$$

$$L(240) = R(240) - C(240) = -1460 \text{ euros}$$

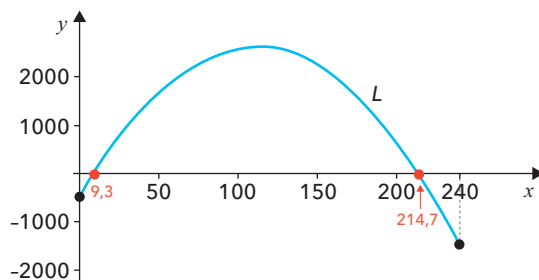
47.

a)



i. Pretende-se determinar para que valores de x se tem $L(x) = 0$, ou seja, os zeros da função L .

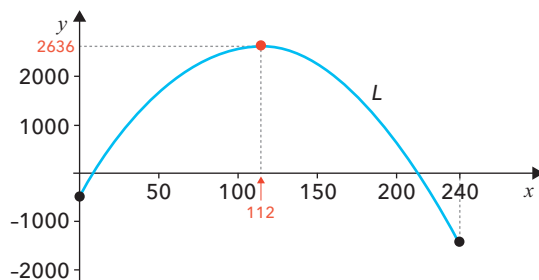
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:



A loja precisa de vender num mês cerca de 9 ou 215 bicicletas para atingir o ponto de equilíbrio.

ii. Pretende-se determinar para que valor de x se tem o lucro máximo e qual é o valor desse máximo, ou seja, o maximizante e o máximo da função L .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:



O lucro máximo ocorre quando a loja vende num mês 112 bicicletas e o lucro máximo é de 2636 euros.

Aprende fazendo ③ – páginas 65 a 67

1. Opção (C)

A afirmação I é verdadeira, pois

$$\begin{aligned} D_{f \times g} &= D_f \cap D_g = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

A afirmação II é falsa, pois pode ter domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou não, uma vez que $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$.

Suponhamos que g é uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e não tem zeros. Então:

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap \{x \in D_g; \underbrace{g(x) \neq 0}_{\text{condição universal}}\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Suponhamos que g é uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e tem um único zero igual a 2. Então:

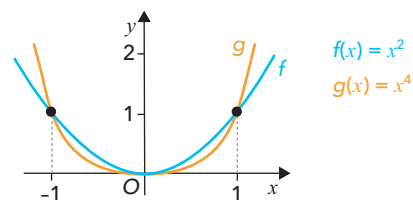
$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \end{aligned}$$

2.

a) O Joaquim tem razão, uma vez que, por exemplo, para $x = \frac{1}{2}$, verifica-se que $x^2 > x^4$, já que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^4, \text{ pois } \frac{1}{4} > \frac{1}{16}.$$

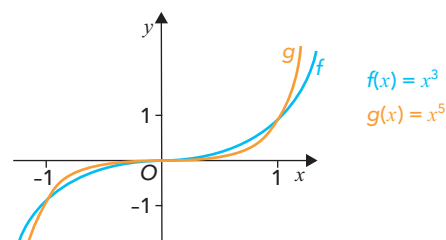
b)



Verifica-se que o gráfico de f se encontra acima do gráfico de g para $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.

3.

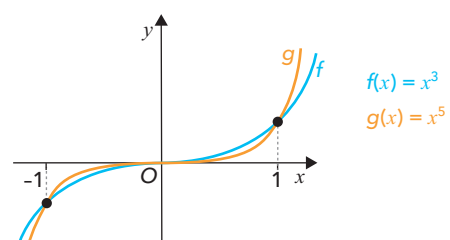
a)



b) $h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

- h é positiva para os valores de x tais que $f(x) - g(x) > 0$, ou seja, $f(x) > g(x)$, o que, pela análise dos gráficos de f e de g representados na alínea anterior, se verifica para $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

- h é negativa para os valores de x tais que $f(x) - g(x) < 0$, ou seja, $f(x) < g(x)$, o que, pela análise dos gráficos de f e de g representados na alínea anterior, se verifica para $x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.



x	$-\infty$	-1		1		2		4	$+\infty$
Sinal de f	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Sinal de g	+	0	-	-	-	0	+	0	-
Sinal de $f \times g$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

A função $f \times g$ é negativa em $]-\infty, -1[\cup]1, 2[\cup]4, +\infty[$ e é positiva em $]-1, 1[\cup]2, 4[$.

5. Opção (D)

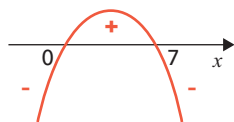
$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R}; -x^2 + 6x \neq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 6\} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x = 0 &\Leftrightarrow x(-x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6 \end{aligned}$$

- b) f é uma função afim, logo $f(x) = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$.
 $m = \text{tg } 45^\circ = 1$ e $(0, 0) \in$ gráfico de f , logo $b = 0$.
 Assim, $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= x + (-x^2 + 6x) = \\ &= -x^2 + 7x \\ -x^2 + 7x = 0 &\Leftrightarrow x(-x + 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7 \end{aligned}$$



Conclui-se assim que a função $f + g$ é positiva em $]0, 7[$ e é negativa em $]-\infty, 0[\cup]7, +\infty[$.

6. Opção (B)

x	$-\infty$	-3	-1		1		4	$+\infty$
$1 - x^2$	-	-	-	0	+	0	-	-
Sinal de f	-	0	+	+	+	0	-	0
Sinal de g	+	0	-	0	+	0	+	0

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [-1, 4]$$

7. Opção (B)

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = -x^2 + 4x + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + k = 0$$

Para que a função não tenha zeros reais:

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Leftrightarrow 4^2 - 4 \times (-1) \times k < 0 \\ &\Leftrightarrow 16 + 4k < 0 \\ &\Leftrightarrow 4k < -16 \\ &\Leftrightarrow k < -4 \end{aligned}$$

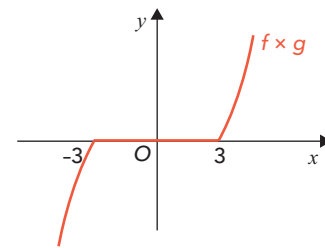
Ou seja, $k \in]-\infty, -4[$.

8. Sabe-se que f é uma função quadrática, com zeros -3 e 3 , positiva em $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ e negativa em $]-3, 3[$.

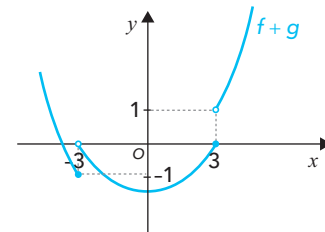
g pode ser definida por ramos da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -3 \\ 0 & \text{se } -3 < x \leq 3 \\ 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

- a) Assim, $(f \times g)(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } x \leq -3 \\ 0 & \text{se } -3 < x \leq 3 \\ f(x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$



- b) $(f + g)(x) = \begin{cases} f(x) - 1 & \text{se } x \leq -3 \\ f(x) & \text{se } -3 < x \leq 3 \\ f(x) + 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$



9. Opção (C)

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
Sinal de f	-	0	+	+	+
Sinal de g	+	+	+	0	-
Sinal de h	-	0	+	0	-

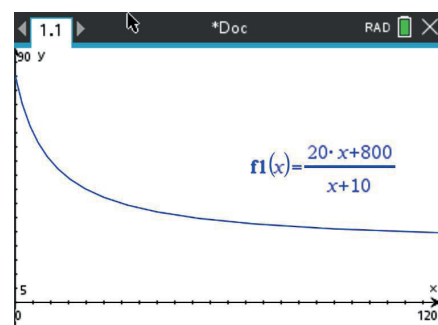
Capítulo 3 – Funções racionais

Tarefa – O chá – página 68

a) $T(0) = \frac{20 \times 0 + 800}{0 + 10} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$

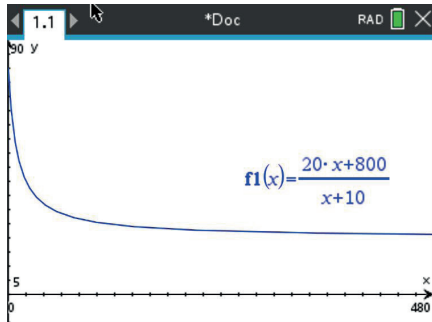
O chá é vertido para a chávena a uma temperatura de $80 \text{ }^\circ\text{C}$.

- b) i. Recorrendo à calculadora gráfica:

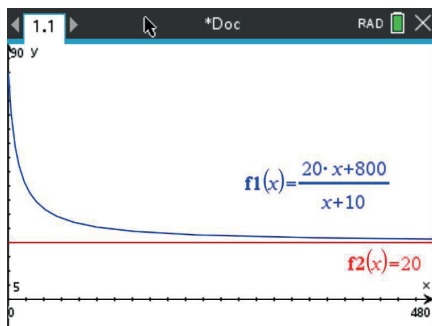


Por observação da representação gráfica, somos levados a conjecturar que a temperatura do chá diminui ao longo do tempo.

- ii. Recorrendo à calculadora gráfica, e utilizando uma nova janela de visualização $[0, 480] \times [0, 90]$, obtivemos:



Por observação da representação gráfica acima, parece-nos que a temperatura ambiente da cozinha da Ana será de 20 °C, já que, à medida que o tempo passa, a temperatura está a aproximar-se de 20.



Exercícios de margem – páginas 69 a 75

48.

- a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- b) $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- c) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
- d) $D_i = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$
condição universal em \mathbb{R}
- e) $D_j = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{-5}\}$
- f) $D_k = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 5x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

Cálculo auxiliar
 $-x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

49.

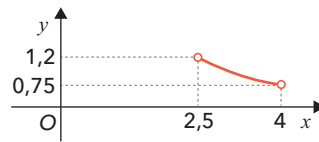
- a) Para a área do retângulo ser 3 m² e, no mínimo, o seu comprimento variar entre 2,5 e 4, então a largura L deve variar entre 0,75 e 1,2, pois:

$$2,5 \times L = 3 \Leftrightarrow L = \frac{3}{2,5} \Leftrightarrow L = 1,2 \text{ e}$$

$$4 \times L = 3 \Leftrightarrow L = \frac{3}{4} \Leftrightarrow L = 0,75$$

- b) $L \times C = 3 \Leftrightarrow L = \frac{3}{C}$

c)



50.

- a) Por exemplo, se $x = 10\,000$, tem-se que:
 $f(10\,000) = \frac{2}{10\,000} = 0,0002 < 0,001$
- b) Por exemplo, se $x = 1\,000\,000$, tem-se que:
 $f(1\,000\,000) = \frac{2}{1\,000\,000} = 0,000\,002 < 10^{-5}$
- c) Por exemplo, se $x = 0,000\,01$, tem-se que:
 $f(0,000\,01) = \frac{2}{0,000\,01} = 200\,000 > 10\,000$
- d) Por exemplo, se $x = 0,000\,000\,001$, tem-se que:
 $f(0,000\,000\,001) = \frac{2}{0,000\,000\,001} = 2\,000\,000\,000 > 10^8$.

51.

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x + 3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Equação da assíntota vertical: $x = -3$

Equação da assíntota horizontal: $y = 1$

Quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ tende para 1.

$$g(x) = -4 - \frac{5}{x - 6}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{6\}$$

$$D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

Equação da assíntota vertical: $x = 6$

Equação da assíntota horizontal: $y = -4$

Quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, $g(x)$ tende para -4 .

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{7-x} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{-(x-7)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{x-7} \end{aligned}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{7\}$$

$$D'_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Equação da assíntota vertical: $x = 7$

Equação da assíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$

Quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$,

$h(x)$ tende para $\frac{1}{2}$.

52.

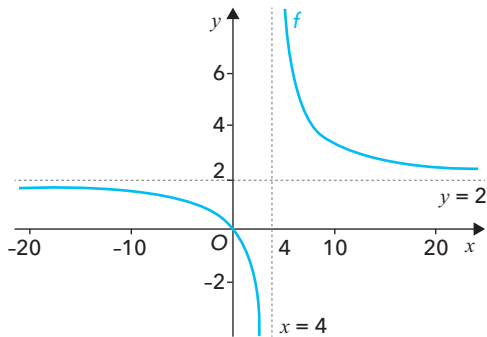
- a) Uma função f cujo gráfico é uma hipérbole de assíntotas de equações $x = 4$ e $y = 2$ é uma função que pode ser definida por uma expressão do tipo

$$f(x) = 2 + \frac{b}{x - 4}$$

Como sabemos que o gráfico de f passa na origem do referencial, então $0 = 2 + \frac{b}{0 - 4}$, ou seja, $b = 8$.

Assim, uma expressão que define a função f é $f(x) = 2 + \frac{8}{x-4}$.

b) Observemos o gráfico da função f .



- i. Quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para 2.
- ii. Quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ tende para 2.
- iii. Quando x tende para 4 por valores superiores a 4, $f(x)$ tende para $+\infty$.
- iv. Quando x tende para 4 por valores inferiores a 4, $f(x)$ tende para $-\infty$.

53.

a) $\frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2x}{x+1} = 2 + \frac{-2}{x+1}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 2x \quad | \quad x+1 \\ -2x-2 \quad | \\ \hline -2 \end{array}$$

c) $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} x+1 \quad | \quad x-1 \\ -x+1 \quad | \\ \hline 2 \end{array}$$

d) $\frac{2x+1}{3-x} = -2 + \frac{-7}{x-3}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 2x+1 \quad | \quad -x+3 \\ -2x+6 \quad | \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\frac{2x+1}{-x+3} = -2 + \frac{7}{-x+3} = -2 + \frac{-7}{x-3}$$

e) $\frac{10x-2}{5x-5} = 2 + \frac{8}{x-1}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 10x-2 \quad | \quad 5x-5 \\ -10x+10 \quad | \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\frac{10x-2}{5x-5} = 2 + \frac{8}{5x-5} = 2 + \frac{8}{5(x-1)} = 2 + \frac{8}{x-1}$$

f) $\frac{3-3x}{4x+1} = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{4}}{x+\frac{1}{4}}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} -3x+3 \quad | \quad 4x+1 \\ +3x+\frac{3}{4} \quad | \\ \hline \frac{15}{4} \end{array}$$

$$\frac{-3x+3}{4x+1} = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{4}}{4x+1} = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{4}}{4\left(x+\frac{1}{4}\right)} = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{16}}{x+\frac{1}{4}}$$

54.

a) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

Equação da assíntota horizontal: $y = 2$

Equação da assíntota vertical: $x = 0$

b) $f(x) = 2 + \frac{-2}{x+1}$

Equação da assíntota horizontal: $y = 2$

Equação da assíntota vertical: $x = -1$

c) $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$

Equação da assíntota horizontal: $y = 1$

Equação da assíntota vertical: $x = 1$

d) $f(x) = -2 + \frac{-7}{x-3}$

Equação da assíntota horizontal: $y = -2$

Equação da assíntota vertical: $x = 3$

e) $f(x) = 2 + \frac{\frac{8}{5}}{x-1}$

Equação da assíntota horizontal: $y = 2$

Equação da assíntota vertical: $x = 1$

f) $f(x) = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{16}}{x+\frac{1}{4}}$

Equação da assíntota horizontal: $y = -\frac{3}{4}$

Equação da assíntota vertical: $x = -\frac{1}{4}$

55. Uma expressão que define a função f é $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.

Como sabemos que as retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são assíntotas ao gráfico de f , então $a = -2$ e $c = 1$.

Tem-se, então, que $f(x) = -2 + \frac{b}{x-1}$.

Como o ponto $A(-1, 0)$ pertence ao gráfico de f , vem que:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{b}{-1-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 - \frac{b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow b = -4$$

Assim, $a = -2$, $b = -4$ e $c = 1$.

56.

- a) A garrafa de água foi tirada do frigorífico à temperatura de 10 °C, ou seja, $T(0) = 10$.

Assim:

$$10 = \frac{40 \times 0 + k}{0 + 2} \Leftrightarrow k = 20$$

b) $T(x) = \frac{40x + 20}{x + 2} = 40 - \frac{60}{x + 2}$

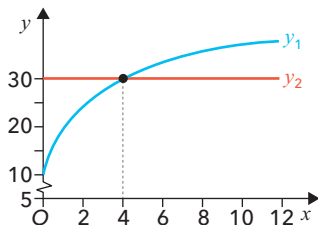
Sabe-se, então, que a reta de equação $y = 40$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f , o que significa que quando x tende para $+\infty$, se tem $T(x)$ a tender para 40.

No contexto do problema tal significa que, com o passar das horas, a temperatura da garrafa de água tende para 40 °C.

$$T(x) < 30$$

$$y_1 = \frac{40x + 20}{x + 2}$$

$$y_2 = 30$$



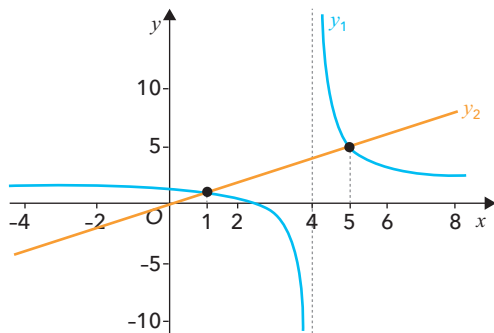
Verifica-se que $T(x) < 30 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$, ou seja, a garrafa de água esteve a uma temperatura inferior a 30 °C durante 4 minutos.

57.

- a) Pretende-se determinar os valores de x para os quais se verifica $f(x) > x$.

$$y_1 = \frac{2x - 5}{x - 4}$$

$$y_2 = x$$



Assim, verifica-se que $f(x) > x$ para $x \in]-\infty, 1[\cup]4, 5[$.

b) $f(x) = \frac{2x - 5}{x - 4} = 2 + \frac{3}{x - 4}$

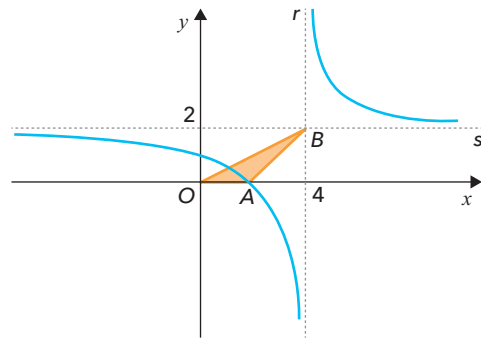
Cálculo auxiliar

$$\frac{2x - 5}{x - 4} = \frac{-2x + 8}{2} + \frac{3}{x - 4}$$

Sabemos que a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f é $y = 2$ e que a equação da assíntota vertical ao gráfico de f é $x = 4$.

Assim, as coordenadas do ponto B são (4, 2), já que B é o ponto de interseção das duas assíntotas.

As coordenadas do ponto A são $(\frac{5}{2}, 0)$, pois A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.



Assim, a área do triângulo [OAB] pode ser dada por

$$\frac{\frac{5}{2} \times 2}{2} = \frac{5}{2} \text{ u.a.}$$

58.

a) $P(6) = 90 - \frac{80}{6 + 2} = 80$

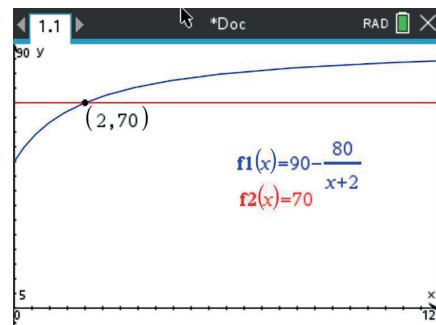
A percentagem de assinantes, no final do primeiro semestre, que terão assistido à série Z, foi de 80%.

- b) Pretendemos resolver a condição $S(t) > 70$.

Recorrendo à calculadora gráfica, e usando x como variável independente:

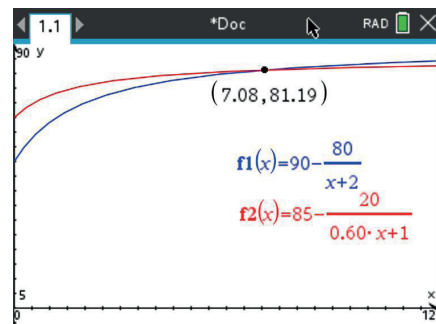
$$f_1(x) = 90 - \frac{80}{x + 2}$$

$$f_2(x) = 70$$



Assim, $t > 2$, ou seja, a partir de 1 de março de 2025 mais de 70% dos assinantes assistiram à série Z.

- c) Pretendemos resolver a condição $Z(t) > W(t)$.



Assim, $t > 7,08$, ou seja, durante o mês de agosto a percentagem de audiências da série Z ultrapassa a da série W. Como $0,08 < 0,5$, tal ocorre durante a primeira quinzena de agosto.

59. Pretende-se determinar t de tal modo que:

$$N(t + 1) = N(t) + 0,05N(t)$$

isto é:

$$N(t + 1) = 1,05 N(t)$$

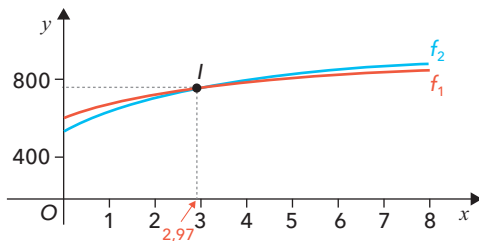
ou seja:

$$\frac{250(t + 1) + 504}{0,25(t + 1) + 1} = 1,05 \times \frac{250t + 504}{0,25t + 1}$$

Usando a letra x como variável independente e recorrendo à calculadora gráfica:

$$f_1(x) = \frac{250(t + 1) + 504}{0,25(t + 1) + 1}$$

$$f_2(x) = 1,05 \times \frac{250t + 504}{0,25t + 1}$$



$I(2,97; 750,93)$

Assim, $x \approx 2,97$.

Como $0,97 \times 60 = 58$, tem-se que o instante pretendido é de 2 horas e 58 minutos.

Aprende fazendo (4) – páginas 79 a 81

1. Opção (D)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1} = 2 - \frac{3}{x + 1}$$

$$D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Cálculo auxiliar	
$\frac{2x - 1}{x + 1}$	$\frac{x + 1}{2}$
$\frac{-2x - 2}{-3}$	

- 2.

- a) Por exemplo:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x - 3} \text{ e } g(x) = 1 + \frac{4}{x - 5}$$

Os gráficos das funções f e g têm ambos a reta de equação $y = 1$ como assíntota horizontal ao seu gráfico. A assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 3$, enquanto a assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x = 5$.

- b) Por exemplo:

$$f(x) = 7 + \frac{2}{x - 6} \text{ e } g(x) = 8 + \frac{4}{x - 6}$$

Os gráficos das funções f e g têm ambos a reta de equação $x = 6$ como assíntota vertical ao seu gráfico. A assíntota horizontal ao gráfico de f é a reta de equação $y = 7$, enquanto a assíntota horizontal ao gráfico de g é a reta de equação $y = 8$.

3. Opção (D)

O gráfico da função f é uma hipérbole, pelo que a sua expressão analítica poderá ser do tipo

$$f(x) = a + \frac{b}{x - c}, \quad a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

Como as retas de equações $x = -4$ e $y = -3$ são as assíntotas ao gráfico da função f , podemos concluir que $a = -3$ e $c = -4$, de onde resulta que:

$$f(x) = -3 + \frac{b}{x - (-4)} = -3 + \frac{b}{x + 4}$$

Uma vez que o gráfico da função f intersesta o eixo

Oy no ponto de ordenada $-\frac{7}{4}$, então:

$$f(0) = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{0 + 4} = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{b}{4} = -\frac{7}{4} + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow b = 5$$

Desta forma, uma expressão analítica da função f é

$$f(x) = -3 + \frac{5}{x + 4}.$$

4. Opção (A)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : a + bx \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

A reta de equação $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f , logo $\frac{2}{b} = -1 \Leftrightarrow b = -2$.

Uma vez que a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , vem que:

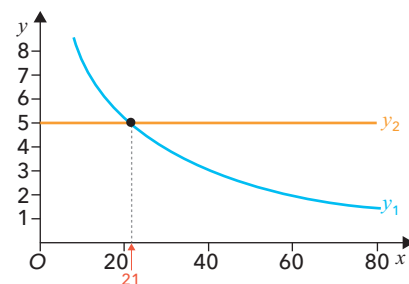
$$-\frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

- 5.

a) $\ell \times (15 + x) = 180 \Leftrightarrow \ell = \frac{180}{15 + x}$

- b) Pretende-se determinar os valores de x tais que $\ell \leq 5$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:

$$y_1 = \frac{180}{15 + x} \quad y_2 = 5$$



Determinando a sua interseção, conclui-se que os valores reais de x para os quais a largura do retângulo não excede 5 metros são os valores superiores ou iguais a 21, ou seja:

$$\frac{180}{15 + x} \leq 5 \Leftrightarrow x \geq 21$$

6. Opção (B)

f é uma função racional cujo gráfico é uma hipérbole, pelo que pode ser definida por $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$, sendo a, b e c números reais.

As retas de equações $x = 2$ e $y = 3$ são assíntotas ao gráfico da função f , pelo que $f(x) = 3 + \frac{b}{x-2}$.

O ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertence ao gráfico de f , logo:

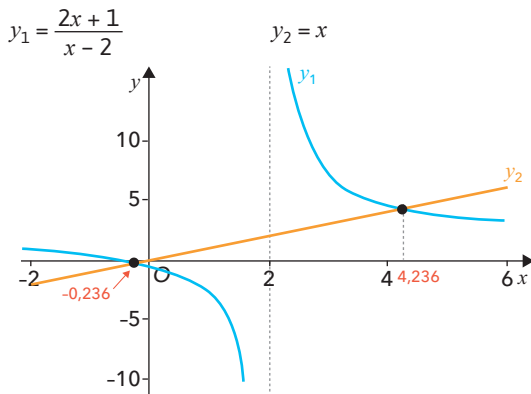
$$\begin{aligned} f(-1) = 2 &\Leftrightarrow 3 + \frac{b}{-1-2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{-3} = -1 \\ &\Leftrightarrow b = 3 \end{aligned}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \frac{3}{x-2} = \\ &= \frac{3x-6+3}{x-2} = \\ &= \frac{3x-3}{x-2} \end{aligned}$$

7.

a) Pretende-se determinar os valores de x para os quais se verifica $f(x) > x$.



Assim, verifica-se que $f(x) > x$ para $x \in]-\infty; -0,236[\cup]2; 4,236[$.

b) $\frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$

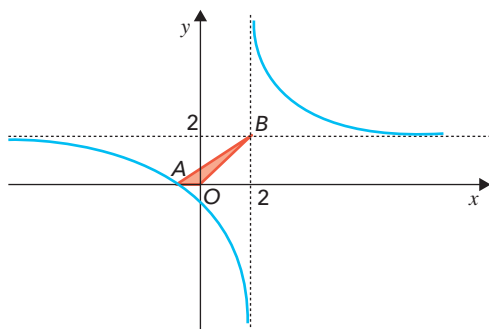
A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f e a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

r: $x = 2$

s: $y = 2$

B(2, 2)

As coordenadas do ponto A são $(-\frac{1}{2}, 0)$, pois A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.



$$A_{[OAB]} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right| \times 2}{2} = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

8.

a) Uma das mangueiras enche o tanque em 10 horas, logo, ao fim de 1 hora, o tanque está $\frac{1}{10}$ cheio.

Outra das mangueiras enche o tanque em 5 horas, logo, ao fim de 1 hora, o tanque está $\frac{1}{5}$ cheio.

A terceira mangueira enche o tanque em t horas, logo, ao fim de 1 hora, o tanque está $\frac{1}{t}$ cheio.

Estando as três mangueiras a funcionar simultaneamente, ao fim de uma hora o tanque está $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{t}$ cheio, ou seja, está $\frac{3t+10}{10t}$ cheio.

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{t} &= \frac{t+2t+10}{10t} = \\ &= \frac{3t+10}{10t} \end{aligned}$$

Assim, se numa hora está $\frac{3t+10}{10t}$ cheio, em h horas

estará totalmente cheio, isto é, $\frac{1}{\frac{3t+10}{10t}} = \frac{h}{1}$, ou seja, $h = \frac{10t}{3t+10}$.

Conclui-se, então, que a expressão do número de horas necessárias para que o tanque fique cheio

pode ser dada por:

$$H(t) = \frac{10t}{3t+10}, \text{ com } t > 0$$

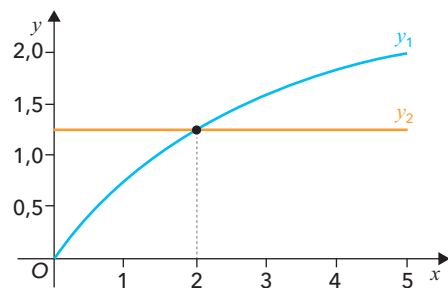
b)

Pretende-se calcular o valor de t para o qual $H(t) = 1,25$ (1 hora e 15 minutos são 1,25 horas).

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se os gráficos:

$$y_1 = \frac{10t}{3t+10}$$

$$y_2 = 1,25$$



Determinando a interseção dos gráficos, conclui-se que $t = 2$, ou seja, $H(t) = 1,25 \Leftrightarrow t = 2$, o que, no contexto do problema, significa que é necessário que a terceira mangueira seja tal que consiga encher o tanque em 2 horas, para que, quando as três mangueiras estiverem a funcionar simultaneamente, o enchimento do tanque seja feito em 1 hora e 15 minutos.

Aprende Fazendo **Global** – páginas 90 a 100

1. Opção (C)

	1	-9	26	-18	-27	27
3		3	-18	24	18	-27
	1	-6	8	6	-9	0
3		3	-9	-3	9	
	1	-3	-1	3		0
3		3	0	-3		
	1	0	-1			0
3		3	9			
	1	3				8

2. Opção (C)

$$\begin{cases} A(1) = 0 \\ A(-1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 1 + b + c = 0 \\ -1 + 1 - b + c = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ c = b - 4 \end{cases}$$

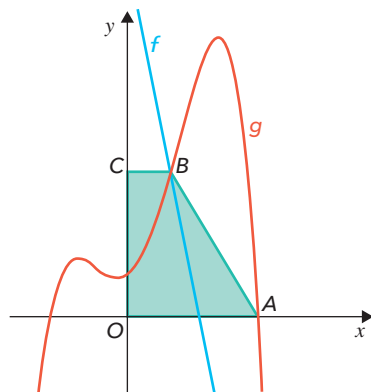
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + b - 4 = -2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

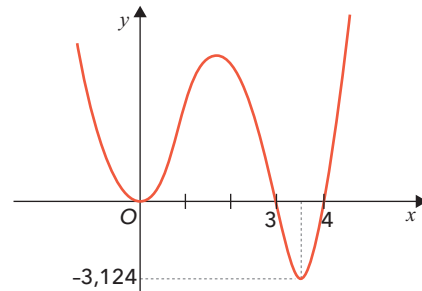
3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se as coordenadas dos pontos A e B, que são, respetivamente, (3, 0) e (1, 10).



Uma vez que C tem abcissa nula e a mesma ordenada do ponto B, as suas coordenadas são (0, 10). Desta forma, a área do trapézio [OABC] é igual a $\frac{3+1}{2} \times 10 = 20$ u.a.

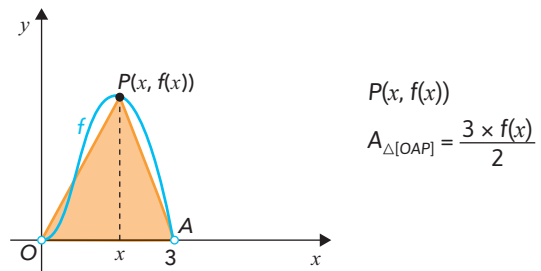
4.

a) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtemos os zeros de f (0, 3 e 4) e o mínimo, aproximadamente -3,124.

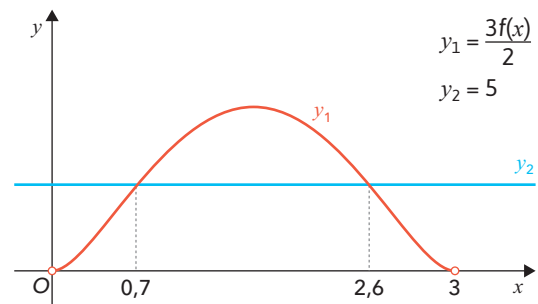


Assim, $a = 0$, $b = 3$, $c = 4$ e $d \approx -3,124$.

b)



Pretende-se, então, determinar os valores de $x \in]0, 3[$ tais que $\frac{3f(x)}{2} = 5$.



Os valores pretendidos são $x \approx 0,7$ e $x \approx 2,6$.

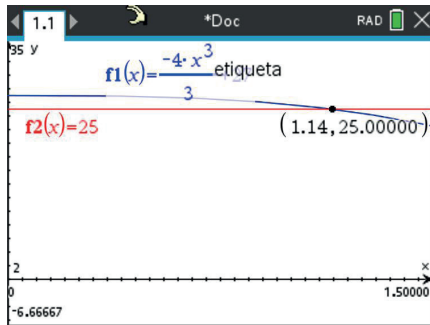
5.

a)

$$\begin{aligned} V_{\text{cubo}} &= 3^3 = 27 \\ V_{\text{pirâmide}} &= \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h = \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{x \times x}{2} \times x = \\ &= \frac{x^3}{6} \\ V_{\text{cubo truncado}} &= V_{\text{cubo}} - 8 \times V_{\text{pirâmide}} = \\ &= 27 - 8 \times \frac{x^3}{6} = \\ &= 27 - \frac{4}{3}x^3 = \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 27 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V(x) &= 25 \\ \text{Utilizando as capacidades gráficas da calculadora:} \\ f_1(x) &= -\frac{4}{3}x^3 + 27 \\ f_2(x) &= 25 \end{aligned}$$



$x \approx 1,14$

6. Sabemos que f é uma função polinomial de grau 4 e que admite $-1, 2$ e 3 como zeros.

Assim, e considerando a representação gráfica dada, concluímos que $f(x) = a(x+1)^2(x-2)(x-3)$.

Como $f(1) = -8$ vem que:

$$\begin{aligned} a(1+1)^2(1-2)(1-3) &= -8 \Leftrightarrow 4a \times (-1) \times (-2) = -8 \\ &\Leftrightarrow 8a = -8 \\ &\Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1)^2(x-2)(x-3) = \\ &= -(x^2+2x+1)(x^2-5x+6) = \\ &= -(x^4-5x^3+6x^2+2x^3-10x^2+12x+x^2-5x+6) = \\ &= -(x^4-3x^3-3x^2+7x+6) = \\ &= -x^4+3x^3+3x^2-7x-6 \end{aligned}$$

7. Opção (D)

Observe-se que $(x-1)^2 \geq 0 \wedge (x-3)^4 \geq 0 \wedge (x-5)^6 \geq 0$.

Logo, $(x-1)^2 \times (x-3)^4 \times (x-5)^6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, o conjunto-solução da inequação

$$(x-1)^2 \times (x-3)^4 \times (x-5)^6 < 0 \text{ é } \emptyset.$$

8. $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

a) $f(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 7(-1)^2 + (-1) + 6 =$
 $= 1 - (-1) - 7 \times 1 - 1 + 6 =$
 $= 1 + 1 - 7 - 1 + 6 =$
 $= 8 - 8 =$
 $= 0$

-1 é zero de f .

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^4 - 1^3 - 7 \times 1^2 + 1 + 6 = \\ &= 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = \\ &= -7 + 7 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

1 é zero de f .

- b) $f(x) < 0$

Cálculos auxiliares

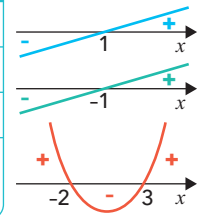
	1	-1	-7	1	6
-1		-1	2	5	-6
	1	-2	-5	6	$0 = R(x)$
1		1	-1	-6	
	1	-1	-6	$0 = R(x)$	

$\bullet x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x+1)(x-1)(x^2 - x - 6)$

$\bullet x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

$$\begin{aligned} f(x) \leq 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2-x-6) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < -1 \vee 1 < x < 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$x+1$	-	-	0	+	+	+
x^2-x-6	+	0	-	-	-	0
$x^4-x^3-7x^2+x+6$	+	0	-	0	-	0



C.S. = $] -2, -1[\cup] 1, 3[$

9. Opção (D)

I. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

II. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$

Contra-exemplo: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = x+1$ e $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g(x) = x-2$ e $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$

A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa.

10. $h(x) = (f-g)(x) = f(x) - g(x) =$

$$= x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

-1 e 1 são zeros de h .

Cálculos auxiliares

	1	1	-7	-1	6
-1		-1	0	7	-6
	1	0	-7	6	$0 = R(x)$
1		1	1	-6	
	1	1	-6	$0 = R(x)$	

$\bullet x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+1)(x-1)(x^2+x-6)$

$\bullet x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \times (-6)}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
x^2+x-6	+	0	-	-	-	0
Sinal de h	+	0	-	0	-	0

h é positiva em $] -\infty, -3[\cup] -1, 1[\cup] 2, +\infty[$ e é negativa em $] -3, -1[\cup] 1, 2[$.

11. Opção (D)

$f(x) = b + \frac{c}{x-a}$, com $c < 0$ define uma função racional crescente em $]-\infty, a[$ e em $]a, +\infty[$ e cujo gráfico admite as retas de equações $x = a$ e $y = b$ como assintotas vertical e horizontal, respetivamente. Apenas a expressão da opção (D) pode definir a função f .

12.

a) $h(1) = \frac{12 + 5}{4 + 10} = \frac{17}{14}$

$h(0) = \frac{5}{10} = 0,5$

$h(1) - h(0) = \frac{17}{14} - \frac{1}{2} = \frac{10}{14} = 0,71 \text{ m}$

0,71 m = 71 cm

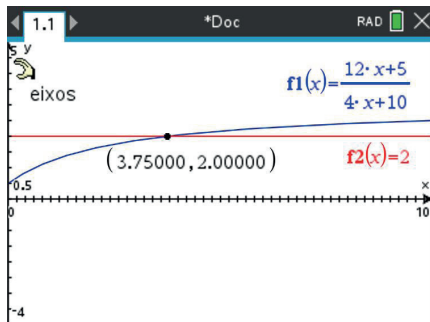
O arbusto cresceu 71 centímetros.

b) $h(t) = 2$

Recorrendo à calculadora gráfica, e usando x como variável independente:

$f_1(x) = \frac{12x + 5}{4x + 10}, x > 0$

$f_2(x) = 2$



$x = 3,75$

$0,75 \times 12 = 9$

Decorreram 3 anos e 9 meses.

c)
$$\frac{12t + 5}{-12t - 30} - \frac{4t + 10}{3} = -25$$

$h(t) = 3 - \frac{25}{4t + 10}$

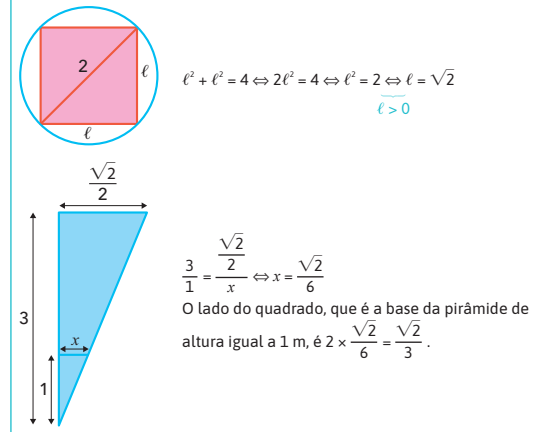
Como $-25 < 0$, verifica-se que h é crescente em \mathbb{R}_+^+ e a reta de equação $y = 3$ é assintota horizontal ao gráfico de h quanto $t \rightarrow +\infty$.

Logo, não é possível o arbusto atingir 3,1 m de altura.

13.

a)
$$\begin{aligned} \pi \times 1^2 \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \times 1 &= \pi - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} \\ &= \pi - \frac{2}{27} \\ &\approx 3,06752 \text{ m}^3 \\ &\approx 3067,52 \ell \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares



b) i. Opção (A)

A altura do líquido no reservatório varia entre 0 m e 3 m (inclusive), logo $D_f = [0, 3]$.

O volume máximo do líquido ocorre quando $x = 3$:

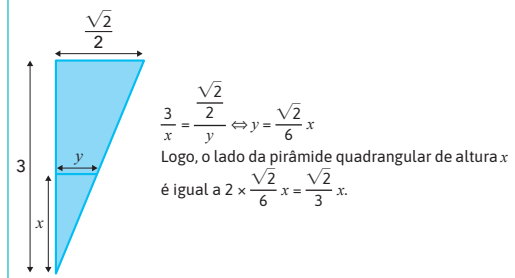
$\pi \times 1^2 \times 3 - \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 3\pi - 2$

Logo, $D'_f = [0, 3\pi - 2]$.

ii. Seja x a altura de água no reservatório. O volume (em m^3) da água nesse reservatório é igual a:

$$\begin{aligned} \pi \times 1^2 \times x - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2 \times x &= \pi x - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9}x^3 \\ &= \pi x - \frac{2}{27}x^3 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar



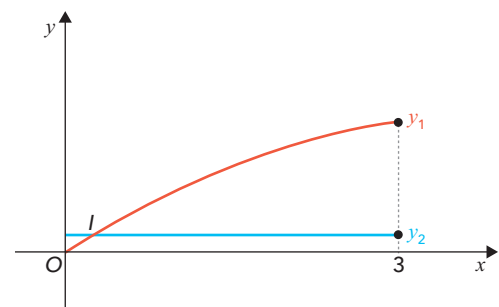
iii. $750 \ell = 750 \text{ dm}^3 = 0,75 \text{ m}^3$

Pretendemos resolver a equação $f(x) = 0,75$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = \pi x - \frac{2}{27}x^3$

$y_2 = 0,75$



$l(a, b)$

A água atingirá, aproximadamente, 0,24 metros.

14. De acordo com os dados no enunciado, podemos concluir que:

$$P(x) = a(x - 3)(x + 1)(x + 2)$$

O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$ é 24, pelo que $P(1) = 24$, de onde resulta que:

$$a(1 - 3)(1 + 1)(1 + 2) = 24 \Leftrightarrow -12a = 24 \Leftrightarrow a = -2$$

Assim, $P(x) = -2(x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2		-1	3	$+\infty$
$-2(x - 3)$	+	+	+	+	0	-
$x + 1$	-	-	-	0	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	-

$$C.S. = [-2, -1] \cup [3, +\infty[$$

- 15.

- a) Opção (B)

Uma vez que o resto da divisão do polinómio que define a função f por $x + 2$ é 8, temos que $f(-2) = 8$.

Assim:

$$-(-2)^4 - (-2)^3 + 7(-2)^2 + (-2) - k = 8$$

$$\Leftrightarrow -16 + 8 + 28 - 2 - k = 8$$

$$\Leftrightarrow 18 - k = 8$$

$$\Leftrightarrow k = 10$$

- b) Para $k = 6$, f é definida por $f(x) = -x^4 - x^3 + 7x^2 + x - 6$. -1 e 1 são zeros da função f , então o polinómio que define a função f é divisível por $x + 1$ e por $x - 1$. Desta forma, utilizamos a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio que define a função f .

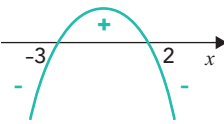
	-1	-1	7	1	-6
-1		1	0	-7	6
	-1	0	7	-6	0
1		-1	-1	6	
	-1	-1	6	0	

Assim, $f(x) = (x + 1)(x - 1)(-x^2 - x + 6)$.

Cálculo auxiliar

$$-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$


x	$-\infty$	-3		-1		1		2	$+\infty$
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$-x^2 - x + 6$	-	0	+	+	+	+	+	0	-
$(x + 1)(x - 1)(-x^2 - x + 6)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

O conjunto dos números reais para os quais a função f é negativa é $]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[$.

- 16.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x - 1)(x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)^2(x - 2)(x + 3)$

Cálculo auxiliar

	1	-1	-7	13	-6
1		1	0	-7	6
	1	0	-7	6	0
1		1	1	-6	
	1	1	-6	0	

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

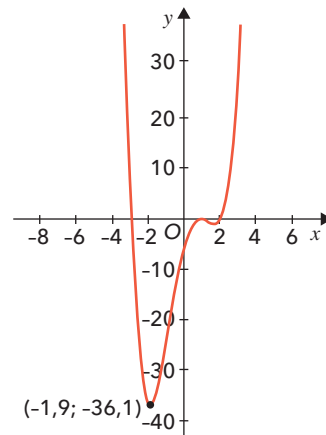
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
Sinal de f	+	0	-	0	-	0	+

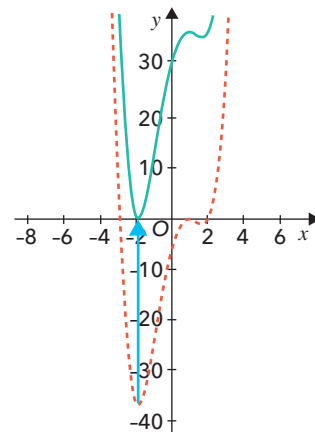
Assim:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 1[\cup]1, 2[$$

- b)



Para que a função $f(x) + k$ tenha apenas um zero, o gráfico de f terá de sofrer uma translação associada ao vetor $(0, k)$, onde k é o valor em módulo do mínimo absoluto de f .



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se, com arredondamento às décimas, $k \approx 36,1$.

17. Opção (B)

x	$-\infty$	-3	-1	1	4	$+\infty$
$1 - x^2$	-	-	0	+	0	-
Sinal de f	-	0	+	+	0	+
Sinal de g	+	0	-	0	+	-

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup]-1, 4]$

18.

a)

Cálculos auxiliares

$\cdot 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$\cdot 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
2	+	+	+	+	+
$3x - 2$	-	-	-	0	+
$2x - 1$	-	-	0	+	+
$(x + 1)^2$	+	0	+	+	+
Sinal de f	+	0	+	0	+

f é positiva em $]-\infty, -1[\cup]-1, \frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$ e é negativa em $]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$.

b)

Cálculos auxiliares

$\cdot 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\cdot x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x - 1$	-	-	0	+	+
$x^2 - x - 6$	+	0	-	-	0
Sinal de g	-	0	+	0	+

g é positiva em $]-2, \frac{1}{2}[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 3[$.

c) $h(x) = (x - 2)(-2x^2 - x + 3)$

Cálculo auxiliar

	-2	3	5	-6
2		-4	-2	6
	-2	-1	3	0 = R(x)

$-2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times (-3)}}{-4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-4}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	-	0	+
$-2x^2 - x + 3$	-	0	+	0	-
Sinal de h	+	0	-	0	-

h é positiva em $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]1, 2[$ e é negativa em $]-\frac{3}{2}, 1[\cup]2, +\infty[$.

19.

a) $f(-1) = (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - 16 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 15 = 1 - 2 - 16 + 2 + 15 = 0$

Logo, -1 é zero de f .

$f(1) = 1^4 + 2 \times 1^3 - 16 \times 1^2 - 2 \times 1 + 15 = 1 + 2 - 16 - 2 + 15 = 0$

Logo, 1 é zero de f .

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 > 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2x - 15) > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 15) > 0$

Cálculo auxiliar

	1	2	-16	-2	15
-1		-1	-1	17	-15
	1	1	-17	15	0
1		1	2	-15	
	1	2	-15	0	

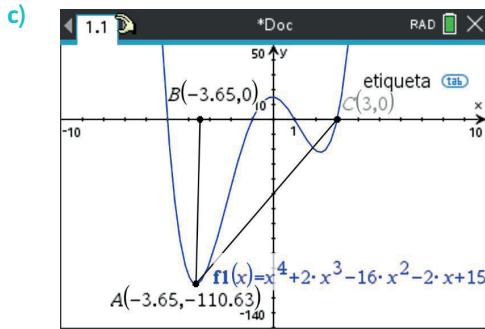
$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2}$

$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$

x	$-\infty$	-5	-1	1	3	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	+	0	-	0	+
$x^2 + 2x - 15$	+	0	-	-	-	0
$(x^2 - 1)(x^2 + 2x - 15)$	+	0	-	0	-	+

C.S. = $]-\infty, -5[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[$



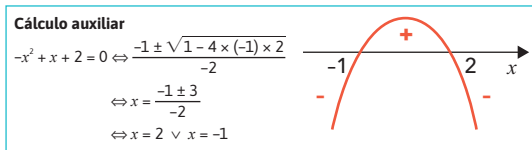
$$A_{[ABC]} = \frac{6,65 \times 110,62}{2} \approx 367,8 \text{ u.a.}$$

20.

x	$-\infty$	-2		2	4	$+\infty$
Sinal de f	+	+	+	+	0	-
Sinal de g	+	0	-	0	+	-
Sinal de $f \times g$	+	0	-	0	+	+

$f \times g$ é positiva em $]-\infty, -2[\cup]2, 4[\cup]4, +\infty[$ e é negativa em $] -2, 2[$.

21. Opção (A)



x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	-	-	0	+	+	-
Sinal de f	+	0	+	+	0	-
Sinal de g	-	n.d.	-	0	n.d.	+

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee -2 < x \leq -1 \vee 1 < x \leq 2$
 C.S. = $]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]1, 2]$

22.

a) Opção (D)

$$f(x) = 3 + \frac{c}{x+2}$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{c}{-\frac{4}{3} + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{c}{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3c}{2} = -3$$

$$\Leftrightarrow c = -2$$

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x+2} = \frac{3x+6-2}{x+2} = \frac{3x+4}{x+2}$$

b) i.

x	$-\infty$	-2		$-\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
Sinal de f	+	n.d.	-	0	+	+
$4 - x^2$	-	0	+	+	0	-
$f(x)(4 - x^2)$	-	n.d.	-	0	0	-

$$f(x)(4 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee -2 < x < -\frac{4}{3} \vee x > 2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup]-\frac{4}{3}, 2[\cup]2, +\infty[$$

ii.

x	$-\infty$	-2		$-\frac{4}{3}$	1	$+\infty$
Sinal de f	+	n.d.	-	0	+	+
$1 - x$	+	+	+	+	0	-
$\frac{f(x)}{1 - x}$	+	n.d.	-	0	n.d.	-

$$\frac{f(x)}{1 - x} \geq 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee -\frac{4}{3} \leq x < 1$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup \left[-\frac{4}{3}, 1\right[$$

c) $f(x - a) + b = \frac{b+3}{0} - \frac{2}{x-a+2}$

Para que o gráfico da função definida por $f(x - a) + b$ fosse simétrico em relação à origem O , as assíntotas seriam as retas de equações $y = 0$ e $x = 0$. Logo, $b + 3 = 0$ e $-a + 2 = 0$, ou seja, $b = -3$ e $a = 2$.

23.

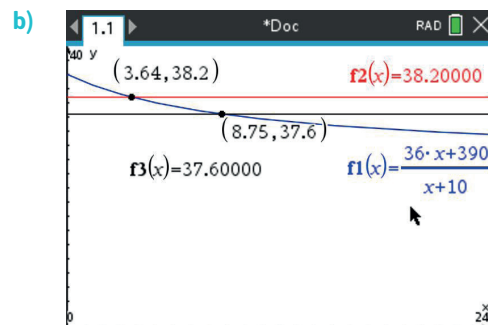
a) 12 h 30 minutos corresponde a $t = 3,5$.

$$C(0) = \frac{390}{10} = 39 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$C(3,5) = \frac{36 \times 3,5 + 390}{3,5 + 10} = \frac{344}{9} = 38,2(2) \text{ }^\circ\text{C}$$

$$39 - \frac{344}{9} = \frac{7}{9} > 0,5$$

Às 12 h 30 min a temperatura da Cláudia era de, aproximadamente, $38,222 \text{ }^\circ\text{C}$, logo desceu, aproximadamente, $0,778 \text{ }^\circ\text{C}$. Como a temperatura diminuiu mais do que $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$, não foi necessário recorrer a outro medicamento.



$$8,75 - 3,64 = 5,11$$

$$0,11 \times 60 \approx 7$$

Decorreram 5 horas e 7 minutos.

24.

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + ax - 24$
 $f(3) = 0 \Leftrightarrow -27 + 9 + 3a - 24 = 0$
 $\Leftrightarrow 3a = 42$
 $\Leftrightarrow a = 14$

b) $f(x) = -x^3 + x^2 + 14x - 24$

3	-1	1	14	-24	
		-3	-6	24	
	-1	-2	8		$0 = R(x)$

$f(x) = (x - 3)(-x^2 - 2x + 8)$

$-x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 8}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$

$p = -4$ e $q = 2$

25. Seja $P(x)$ um polinómio e $sx - t$ um polinómio de grau 1.

Seja $Q(x)$ e R os polinómios quociente e resto da divisão inteira de $P(x)$ por $sx - t$.

Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x) + R$.

Substituindo x por $\frac{t}{s}$, nesta igualdade, vem que:

$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \times \frac{t}{s} - t\right) \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = R$

Fica provado que o resto da divisão de $P(x)$ por $sx - t$ é $P\left(\frac{t}{s}\right)$.

26.

a) Seja $P(x)$ um polinómio e $sx - t$ um polinómio de grau 1.

Suponhamos que $P(x)$ é divisível por $sx - t$.

Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinómio.

Substituindo x por $\frac{t}{s}$ na igualdade anterior, vem que:

$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \times \frac{t}{s} - t\right) \times Q\left(\frac{t}{s}\right) \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \times Q\left(\frac{t}{s}\right)$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$

Fica provado que se $P(x)$ é divisível por $sx - t$, então

$P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$.

b) Seja $P(x)$ um polinómio e $sx - t$ um polinómio de grau 1. Suponhamos que $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$.

Seja $Q(x)$ e R os polinómios quociente e resto, respetivamente, da divisão inteira de $P(x)$ por $sx - t$.

Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x) + R$.

Substituindo x por $\frac{t}{s}$, nesta última igualdade, vem que:

$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \times \frac{t}{s} - t\right) \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = R$

Ou seja, o resto da divisão de $P(x)$ por $sx - t$ é $P\left(\frac{t}{s}\right)$.

Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x) + P\left(\frac{t}{s}\right)$.

Uma vez que $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$, vem que $P(x) = (sx - t) \times Q(x)$,

ou seja, $P(x)$ é divisível por t .

27.

a) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 19x^2 + 48 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$y^2 - 19y + 48 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 4 \times 48}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{19 \pm 13}{2}$

$\Leftrightarrow y = 16 \vee y = 3$

b) Substituindo y por x^2 , temos:

$x^2 = 16 \vee x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

C.S. = $\{4, -4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

28.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$y^2 - 13y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \times 36}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow y = 9 \vee y = 4$

Substituindo y por x^2 , temos:

$x^2 = 9 \vee x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = -2$

C.S. = $\{3, -3, 2, -2\}$

b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 26x^2 + 25 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$y^2 - 26y + 25 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \times 25}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{26 \pm 24}{2}$

$\Leftrightarrow y = 25 \vee y = 1$

Substituindo y por x^2 , temos: $x^2 = 25 \vee x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5 \vee x = 1 \vee x = -1$

C.S. = $\{5, -5, 1, -1\}$

c) $2x^4 - 26x^2 + 80 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2)^2 - 26x^2 + 80 = 0$
 Substituindo x^2 por y , vem que:
 $2y^2 - 26y + 80 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \times 2 \times 80}}{4}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{36}}{4}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{26 \pm 6}{4}$
 $\Leftrightarrow y = 8 \vee y = 5$

Substituindo y por x^2 , temos:
 $x^2 = 8 \vee x^2 = 5$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8} \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$
 $\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$
 C.S. = $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

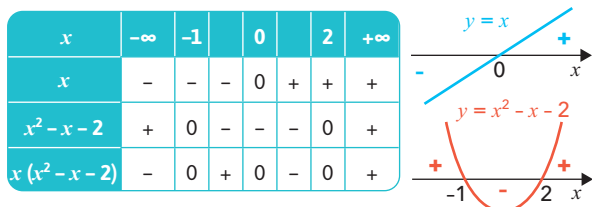
d) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$
 Substituindo x^2 por y , vem que:
 $y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 5}{2}$
 $\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$

Substituindo y por x^2 , temos:
 $x^2 = 4 \vee x^2 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$
 impossível em \mathbb{R}
 C.S. = $\{2, -2\}$

29.

a) $m = \frac{2-0}{1-0} = 2 \quad y = 2x$
 $g(x) = 2x$
 $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 < 2x$
 $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x < 0$
 $\Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) < 0$
 $\Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 2$

Cálculo auxiliar
 $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$



C.S. = $]-\infty, -1[\cup]0, 2[$

b) $f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - x^2 = x$
 $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1)}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $A\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad B\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{10} =$$

$$= 3,16 \text{ u.c.}$$

30. De acordo com o enunciado, sabe-se que, uma hora após o instante t_0 , $t_0 \in [0, 4]$, o número de bactérias presentes no depósito aumentou 10%, ou seja, para $t_0 \in [0, 4]$:

$$N(t_0 + 1) = N(t_0) + N(t_0) \times 0,10$$

$$\Leftrightarrow N(t_0 + 1) = N(t_0) \times 1,10$$

$$\Leftrightarrow (t_0 + 1 + 4)^2(t_0 + 1 - 14) + 96(t_0 + 1) + 260 =$$

$$= ((t_0 + 4)^2(t_0 - 14) + 96t_0 + 260) \times 1,10$$

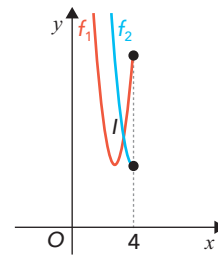
$$\Leftrightarrow (t_0 + 5)^2(t_0 - 13) + 96(t_0 + 1) + 260 =$$

$$= ((t_0 + 4)^2(t_0 - 14) + 96t_0 + 260) \times 1,10$$

Usando a letra x como variável independente, e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = (x + 5)^2(x - 13) + 96(x + 1) + 260$$

$$f_2(x) = ((x + 4)^2(x - 14) + 96x + 260) \times 1,10$$



$I(3,52; 5,78)$

Assim, $t_0 \approx 3,52$, logo o número de bactérias, nesse instante, é de, aproximadamente:

$$N(3,52) = (3,52 + 4)^2(3,52 - 14) + 96 \times 3,52 + 260 \approx 5,3$$

O número de bactérias no instante t_0 é de, aproximadamente, 5,3 milhões de bactérias.

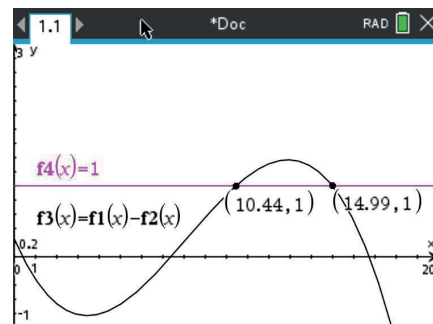
31. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, e usando x como variável independente:

$$f_1(x) = -0,000334x^3 - 0,0456x^2 + 1,3258x + 0,5, x \in [0, 20]$$

$$f_2(x) = 0,00485x^3 - 0,17267x^2 + 2,01566x + 0,25, x \in [0, 20]$$

$$f_3(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

$$f_3(x) > 1$$



$$14,99 - 10,44 = 4,55$$

$$0,55 \times 60 = 33$$

O avião da companhia AeroDominus manteve uma altitude de mais de 1000 metros superior à do avião da companhia MasterSkyAir durante 4 minutos e 33 segundos, aproximadamente.

32.

a)
$$f(x) = 6 - \frac{2}{x+3}$$

$$f(x) > 6 \Leftrightarrow 6 - \frac{2}{x+3} > 6 \Leftrightarrow \frac{2}{x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow x+3 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -3$$

C.S. = $]-\infty, -3[$

b)
$$f(x) = 6 - \frac{2}{x+3}$$

$C(-3, 6)$ $D(0, 6)$

$f(0) = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ $A\left(0, \frac{16}{3}\right)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{2}{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{2}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 18 = 2 \wedge x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow 6x = -16 \wedge x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \wedge x \neq -3 \quad B\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$$

$A_{[ABCD]} = 3 \times 6 - A_{[AOB]} - A_{[BCC]}$, onde C' é a projeção ortogonal do ponto C sobre o eixo Ox .

$$= 18 - \frac{8}{3} \times \frac{16}{3} - \left(3 - \frac{8}{3}\right) \times 6$$

$$= 18 - \frac{64}{9} - 1 = \frac{89}{9} \text{ u.a.}$$

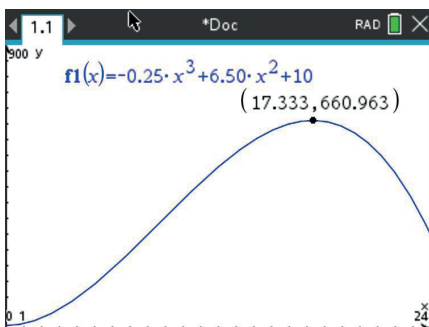
Teste final – páginas 101 a 103

1.

a) Opção (B)

$$\frac{N(1) - N(0)}{N(0)} = \frac{16,25 - 10}{10} = \frac{6,25}{10} = 0,625; 62,5\%$$

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$$0,333 \times 60 \approx 20$$

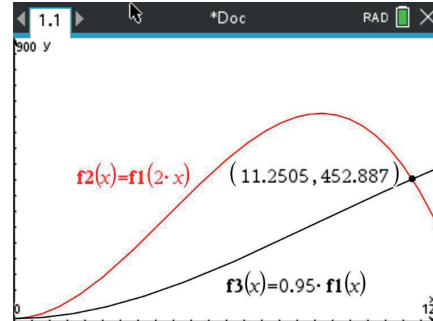
O número máximo de ouvintes registou-se às 17 h 20 min.

c) $N(2a) = N(a) - 0,05N(a)$, com $0 \leq a \leq 12$, isto é, $N(2a) = 0,95N(a)$, com $0 \leq a \leq 12$.

Utilizando x como variável independente:

$$f_2(x) = -0,25(2x)^3 + 6,5(2x)^2 + 10$$

$$f_3(x) = 0,95(-0,25x^3 + 6,5x^2 + 10)$$



Tem-se que $a \approx 11,251$.

A amplitude do intervalo $[a, 2a]$ é $2a - a = a$, logo a amplitude pedida é de, aproximadamente, 11,251. Como $0,251 \times 60 \approx 15$, a amplitude desse intervalo é de 11 h 15 min, aproximadamente.

2. Opção (B)

$$P(a) = P(-2a)$$

$$5a^2 + a + 2026 = 5 \times (-2a)^2 + (-2a) + 2026$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 + a = 20a^2 - 2a$$

$$\Leftrightarrow -15a^2 + 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(-15a + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee -15a + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{3}{15}$$

Como $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $a = \frac{1}{5}$.

3. Opção (A)

I. Para $k = -6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e tem-se que: $P(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$, isto é, $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

A afirmação I é verdadeira.

II. Para $k = 6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 6$ e tem-se que: $P(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 6 = -12$, isto é, o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é -12 .

A afirmação II é falsa.

4. $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

Consideremos a mudança de variável $x^2 = y$:

$$y^2 - 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times 7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 7 \vee y = 1$$

Substituindo y por x^2 , vem que:

$$x^2 = 7 \vee x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{7} \vee x = \sqrt{7} \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{-\sqrt{7}, -1, 1, \sqrt{7}\}$$

5.

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x \\ -x^4 + 2x^3 \\ \hline 5x^3 - 10x^2 - 24x \\ -5x^3 + 10x^2 \\ \hline -24x \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + 5x$

Resto: $R(x) = -24x$

b)

Cálculo auxiliar					
	1	3	-10	-24	0
-2		-2	-2	24	0
	1	1	-12	0	0

Assim:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+2)(x^3 + x^2 - 12x) = \\ &= (x+2)x(x^2 + x - 12) = \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares	
$\cdot x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x =$	$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x =$	$\frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$
$\Leftrightarrow x =$	$\frac{-1+7}{2} \vee x = \frac{-1-7}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4$	
$\cdot x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4) = 0$	

$$= (x+2)x(x-3)(x+4)$$

c)

x	$-\infty$	-4	-2	0	3	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+
$x+2$	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+	+
$A(x)$	+	0	0	+	0	+

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4 \vee -2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 3$$

$$C.S. =]-\infty, -4] \cup [-2, 0] \cup [3, +\infty[$$

d)

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

Como 3 é uma raiz de multiplicidade 2 de $C(x)$, vem que $C(x) = a \times (x-3)(x-3)$.

Como o resto da divisão de $C(x)$ por $x-1$ é 6, tem-se que $C(1) = 6$, isto é:

$$a \times (1-3)^2 = 6 \Leftrightarrow a \times 4 = 6$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{3}{2}(x-3)^2 = \frac{3}{2}(x^2 - 6x + 9) = \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{27}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Tem-se, então, que } a = \frac{3}{2}, b = -9 \text{ e } c = \frac{27}{2}.$$

6.

Como $P(x)$ é divisível pelo polinómio $3x^2 + 5x - 2$, vamos escrever $P(x)$ como $P(x) = (3x^2 + 5x - 2) \times Q(x)$. Começamos por decompor $3x^2 + 5x - 2$ em fatores:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-2)}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Assim:

$$P(x) = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \times Q(x)$$

Tem-se que -2 e $\frac{1}{3}$ são raízes de $P(x)$.

$$\text{Logo, } P(-2) = 0 \text{ e } P\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times (-2)^3 + 11 \times (-2)^2 + a \times (-2) + b = 0 \\ 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 11 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + a \times \frac{1}{3} + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \times 8 + 11 \times 4 - 2a + b = 0 \\ 3 \times \frac{1}{27} + 11 \times \frac{1}{9} + \frac{a}{3} + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -24 + 44 - 2a + b = 0 \\ -24 + 44 - 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -20 \\ 3 \times \frac{1}{27} + 11 \times \frac{1}{9} + \frac{a}{3} + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -20 \\ \frac{1}{9} + \frac{11}{9} + \frac{a}{3} + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -20 \\ 1 + 11 + 3a + 9b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -20 \\ 3a + 9b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20 + 2a \\ a + 3b = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -20 + 2a \\ a + 3(-20 + 2a) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -20 + 2a \\ a - 60 + 6a = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 56 \\ a = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -20 + 2 \times 8 \\ a = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 8 \end{cases}$$

$$a = 8 \text{ e } b = -4$$

7.
a) Opção (D)

1.º processo

Cálculos auxiliares

• $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$

-1	1	-4	1	6	
	1	-5	6	0 = R(x)	

• $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

Para $x \geq 1$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -1}_{\notin [1, +\infty[} \vee x = 3 \vee x = 2$$

Logo, para $x \geq 1$, os zeros de f são 2 e 3.

Para $x < 1$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4| - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 4| = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \vee x^2 - 4 = -5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{equação impossível}}$$

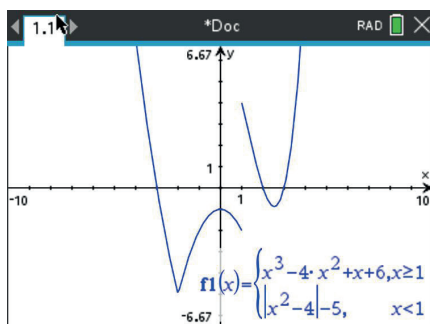
$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 3}_{\notin]-\infty, 1[} \vee x = -3$$

Logo, para $x < 1$, o zero de f é o -3.

Assim, f tem exatamente 3 zeros.

2.º processo

Recorrendo à calculadora gráfica, e por observação do gráfico, concluímos que a opção correta é a opção (D).



- b) $P(a, f(a))$, com $a > 1$.
 $P(a, a^3 - 4a^2 + a + 6)$

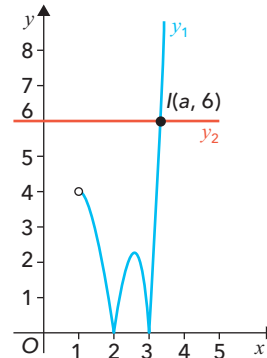
$$A_{[OQP]} = 3 \Leftrightarrow \frac{a \times |a^3 - 4a^2 + a + 6|}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow a \times |a^3 - 4a^2 + a + 6| = 6$$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1 = a \times |a^3 - 4a^2 + a + 6|$$

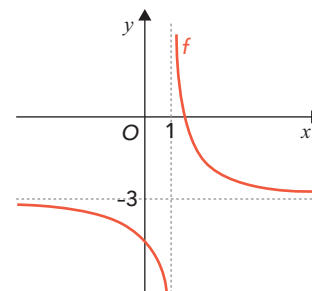
$$y_2 = 6$$



$$a \approx 3,32$$

8. $\frac{3x + 5}{-3x - 3} \left| \frac{x - 1}{-3} \right.$

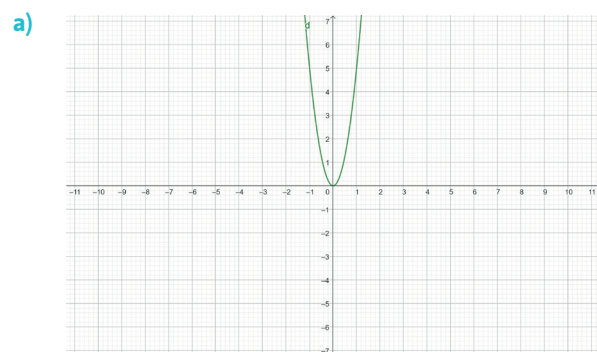
$$f(x) = -3 + \frac{2}{x - 1}$$



I - c); II - a); III - b); IV - a)

Capítulo 4 – Cálculo diferencial

Tarefa – O berlinde – página 104



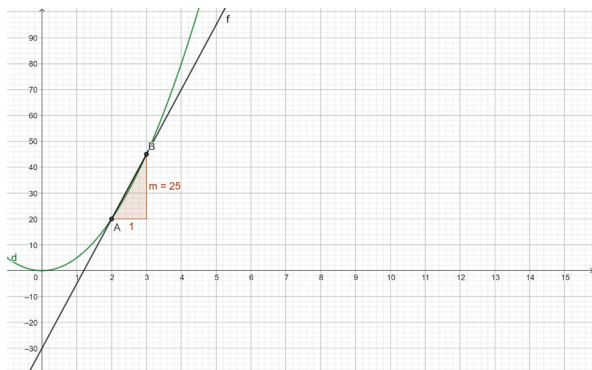
b) i. $vm_{[2,3]} = \frac{d(3) - d(2)}{3 - 2} = \frac{45 - 20}{1} = 25 \text{ cm/s}$

ii. $vm_{[2,2,5]} = \frac{d(2,5) - d(2)}{2,5 - 2} = \frac{31,25 - 20}{0,5} = \frac{11,25}{0,5} = 22,5 \text{ cm/s}$

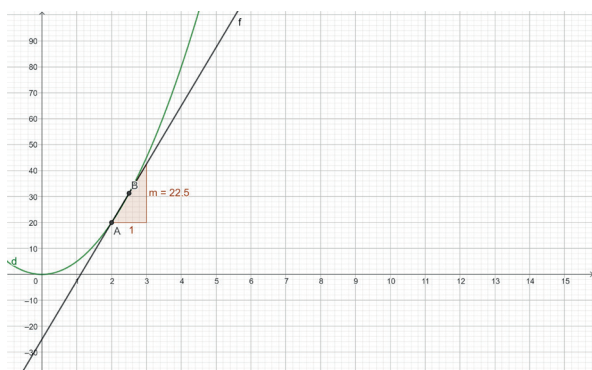
$$\text{iii. } vm_{[2, 2,2]} = \frac{d(2,2) - d(2)}{2,2 - 2} = \frac{24,2 - 20}{0,2} = \frac{4,2}{0,2} = 21 \text{ cm/s}$$

$$\text{iv. } vm_{[2, 2,1]} = \frac{d(2,1) - d(2)}{2,1 - 2} = \frac{22,05 - 20}{0,1} = \frac{2,05}{0,1} = 20,5 \text{ cm/s}$$

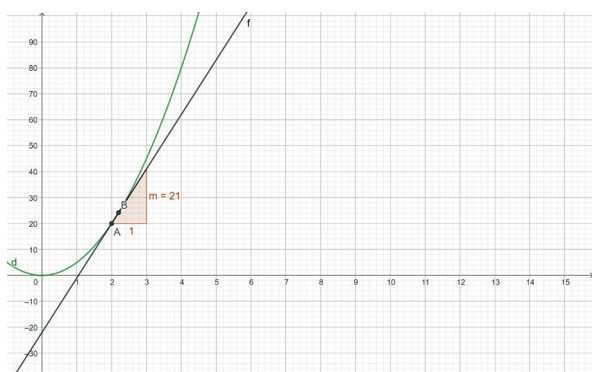
c) i.



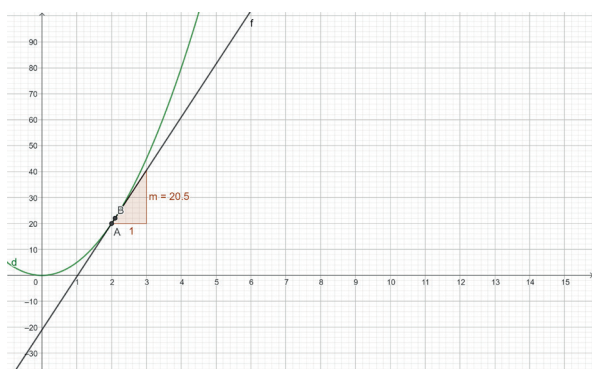
ii.



iii.



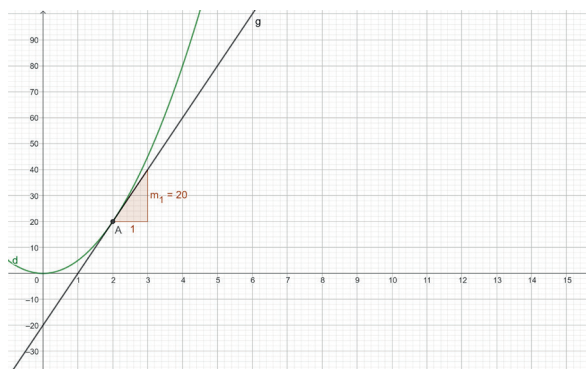
iv.



Constatámos que os resultados obtidos são iguais aos obtidos na alínea anterior.

d) Analisando os resultados obtidos na alínea b), somos levados a conjecturar que a velocidade do berlinde no instante 2 será próxima de 20.

e)



O declive da reta tangente ao gráfico de d no ponto A é igual a 20, valor conjecturado na alínea anterior.

Exercícios de margem – páginas 105 a 110

60.

a) $\frac{40}{500} = 0,08 \text{ l/km}$

A taxa média de consumo de combustível é de 0,08 l por km.

61.

a) $\frac{140 - 60}{10} = \frac{80}{10} = 8 \text{ bpm}$

A taxa média de variação de frequência cardíaca foi de 8 batimentos por minuto.

62.

$$tmv_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9b - 9a}{b - a} = \frac{9(b - a)}{b - a} = 9, \text{ quaisquer que sejam os valores de } a \text{ e de } b.$$

63.

I. Afirmação verdadeira.

Seja f uma função crescente em $[a, b]$. Se $a < b$, então $f(a) < f(b)$, ou seja, $f(b) - f(a) > 0$.

$$\text{Logo, } tmv_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

II. Afirmação falsa.

Contraexemplo:

Seja $f(x) = x^2$. Tem-se que $tmv_{[-1, 2]} > 0$, mas a função não é crescente em $[-1, 2]$.

64.

a) $tmv_{[2, 3]} = \frac{d(3) - d(2)}{3 - 2} = \frac{30 - 14}{1} = 16 \text{ m/s}$

b) $tmv_{[2, 2,5]} = \frac{d(2,5) - d(2)}{2,5 - 2} = \frac{21,25 - 14}{0,5} = 14,5 \text{ m/s}$

c) $tmv_{[2, x]} = \frac{d(x) - d(2)}{x - 2} = \frac{3x^2 + x - 14}{x - 2} = \frac{3(x - 2)\left(x + \frac{7}{3}\right)}{x - 2} = (3x + 7) \text{ m/s}$

Cálculo auxiliar

$$3x^2 + x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 13}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \vee x = 2$$

65.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \\ &= -\frac{1}{4} \times f'(-2) = \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{f(-2+h) - f(-2)} &= 3 \times \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}} = \\ &= 3 \times \frac{1}{f'(-2)} = \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

66.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+6) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 0}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x(x+1)) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x+1)}{x-3} + 3}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1+3x-9}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-8}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x-3} = -4 \end{aligned}$$

67.

$$\text{a) } \text{tmv}_{[2, 20]} = \frac{C(20) - C(2)}{20 - 2} = \frac{5 - 9,86}{18} = -0,27$$

Cálculos auxiliares

- $C(20) = -0,005 \times 20^3 + 0,225 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15 = 5$
- $C(2) = -0,005 \times 2^3 + 0,225 \times 2^2 - 3 \times 2 + 15 = 9,86$

A cotação das ações diminui em média 0,27 euros por dia, no período indicado.

$$\begin{aligned} \text{b) } C'(15) &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{C(t) - C(15)}{t - 15} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{-0,005 \times t^3 + 0,225 \times t^2 - 3 \times t + 15 - 3,75}{t - 15} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{-0,005 \times t^3 + 0,225 \times t^2 - 3 \times t + 11,25}{t - 15} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{(t-15)(-0,005t^2 + 0,15t - 0,75)}{t - 15} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 15} (-0,005t^2 + 0,15t - 0,75) = 0,375 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	-0,005	0,225	-3	11,25
15		-0,075	2,25	-11,25
	-0,005	0,15	-0,75	0

Passados 15 dias, a cotação das ações estava a aumentar à taxa de 0,375 euros por dia.

68.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - x - 1}{(x-3)4(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x+3}{(x-3)4(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{4(x+1)} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

b) Como $f'(3) = -\frac{1}{16}$, a equação pedida é da forma $y = -\frac{1}{16}x + b$.

O ponto de coordenadas $(3, \frac{1}{4})$ pertence a esta reta tangente ao gráfico de f , logo:

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{16} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{16}$$

Assim, a equação pedida é $y = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{16}$.

c) A equação pedida é da forma $y = 16x + b$.

O ponto de coordenadas $(3, \frac{1}{4})$ pertence a esta reta, logo $\frac{1}{4} = 16 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{191}{4}$.

Assim, a equação pedida é $y = 16x - \frac{191}{4}$.

69. Opção (B)

A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação $y = x$, cujo declive é 1. Como é tangente ao gráfico de f em 4, $f'(4) = 1$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{70. } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Como o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é 0, então trata-se de uma reta horizontal.

Aprende fazendo (5) – páginas 111 a 113

1.

a) Opção (B)

$$tmv_{[0,3]} = \frac{S(3) - S(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 0}{3} = 6$$

A velocidade média, nos primeiros três segundos após o lançamento da bola, é 6 m/s.

b) Opção (C)

$$\begin{aligned} S'(1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{S(t) - S(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-6t^2 + 24t - (-6 + 24)}{t - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-6t^2 + 24t - 18}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-6(t-1)(t-3)}{t-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (-6(t-3)) = 12 \end{aligned}$$

Assim, a velocidade da bola ao fim de 1 segundo é de 12 m/s.

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} -6t^2 + 24t - 18 = 0 &\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{4+2}{2} \vee t = \frac{4-2}{2} \\ &\Leftrightarrow t = 3 \vee t = 1 \\ \text{Assim, } -6t^2 + 24t - 18 &= -6(t-1)(t-3). \end{aligned}$$

2. Opção (C)

Os pontos de coordenadas (1, 0) e (0, -2) pertencem à reta t .

Então:

$$m_t = \frac{0 + 2}{1 - 0} = 2 = f'(0)$$

3. Opção (D)

Como o declive da reta de equação $y = -3x + 2$, tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -2, é -3, então $g'(-2) = -3$.

Se $x = -2$, então $y = 6 + 2 = 8$. Logo, as coordenadas do ponto de tangência são (-2, 8), e, portanto, $g(-2) = 8$.

Assim:

$$\begin{aligned} g'(-2) = -3 &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = -3 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - 8}{h} = -3 \end{aligned}$$

4. Opção (C)

Se a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 3 tem declive igual a 2, então $h'(3) = 2$.

Como o gráfico de h é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, então tem-se que $h'(-3) = -2$.

5. Opção (B)

$g'(-2) > 0$ e $g'(1) < 0$, logo $g'(-2) \times g'(1) < 0$.

$$g'(-2) > 0 \text{ e } g'(3) > 0, \text{ logo } \frac{g'(-2)}{g'(3)} > 0.$$

$$g'(1) < 0 \text{ e } g'(-2) > 0, \text{ logo } \frac{g'(1)}{g'(-2)} < 0.$$

$$g'(-3) > 0 \text{ e } g'(2) = 0, \text{ logo } g'(-3) \times g'(2) = 0.$$

6.

$$a) \quad tmv_{[0,7]} = \frac{I(7) - I(1)}{7 - 0} = \frac{\frac{2525}{6} - 170}{7} = \frac{215}{6} \approx 35,83,$$

o que significa que, nos primeiros sete dias, o número de pessoas infetadas aumentou, em média, aproximadamente, 36 pessoas por dia.

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet I(7) &= 600 - \frac{430}{0,2 \times 7 + 1} = 600 - \frac{1075}{6} = \frac{2525}{6} \\ \bullet I(0) &= 600 - \frac{430}{0,2 \times 0 + 1} = 170 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I'(7) &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{I(x) - I(7)}{x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{600 - \frac{430}{0,2x + 1} - \left(600 - \frac{430}{0,2 \times 7 + 1}\right)}{x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-\frac{430}{0,2x + 1} + \frac{430}{2,4}}{x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1032 + 86x + 430}{2,4 \times (0,2x + 1) \times (x - 7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{86x - 602}{2,4 \times (0,2x + 1) \times (x - 7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{86(x - 7)}{2,4 \times (0,2x + 1) \times (x - 7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{86}{2,4 \times (0,2x + 1)} \approx 14,93 \text{ o que significa} \end{aligned}$$

que, 7 dias após o aparecimento do primeiro caso, o número de pessoas infetadas estava a aumentar a uma taxa de, aproximadamente, 15 pessoas por dia.

7. Opção (A)

$$m = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} = g'(1)$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x(x-1)} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \\ &= g'(1) \times 1 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

8. Opção (C)

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x^2 - 2x} = 5 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x(x-2)} = 5 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{g(x) - g(2)}{x-2} \right) = 5 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 10 \end{aligned}$$

Logo, $g'(2) = 10$.

Assim, sendo m_t o declive da reta t , tem-se que $m_t = 10$.

Uma reta perpendicular à reta t tem declive $-\frac{1}{m_t}$, ou seja, $-\frac{1}{10}$.

Das opções apresentadas, apenas é possível a opção onde se apresenta a equação reduzida

$$y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}.$$

Exercícios de margem – páginas 114 a 131

71.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad h'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{20t - t^2 - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(20 - t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (20 - t) = 20 \end{aligned}$$

A velocidade inicial do projétil é 20 m/s.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad h(t) = 0 &\Leftrightarrow 20t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t(20 - t) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 20 - t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 20 \end{aligned}$$

O projétil atinge o solo 20 segundos após o lançamento.

Determinemos $h'(20)$:

$$\begin{aligned} h'(20) &= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{h(t) - h(20)}{t - 20} = \lim_{t \rightarrow 20} \frac{20t - t^2 - 0}{t - 20} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 20} \frac{t(20 - t)}{t - 20} = \lim_{t \rightarrow 20} (-t) = -20 \end{aligned}$$

No momento em que o projétil atinge o solo a velocidade é -20 m/s.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad h'(t) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(t+x) - h(t)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20(t+x) - (t+x)^2 - (20t - t^2)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20t + 20x - t^2 - 2tx - x^2 - 20t + t^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20x - 2tx - x^2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (20 - 2t - x) = 20 - 2t \end{aligned}$$

72.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= 4' = 0 \\ \text{b)} \quad f'(x) &= (-x)' = -1 \\ \text{c)} \quad f'(x) &= (5x^2)' = 10x \\ \text{d)} \quad f'(x) &= (-4x^3)' = -12x^2 \end{aligned}$$

73.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= x' = 1 \\ \text{b)} \quad g'(x) &= (x + \pi)' = x' + \pi' = 1 + 0 = 1 \\ \text{c)} \quad (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$74. \quad g'(x) = (f(x) + 1)' = f'(x) + 1' = f'(x)$$

Logo, a representação gráfica da função derivada da função g está na figura II.

75.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (f \times g)'(5) &= f'(5) \times g(5) + f(5) \times g'(5) = \\ &= 1 \times (5 + 3\pi) + 5 \times 1 = \\ &= 5 + 3\pi + 5 = \\ &= 10 + 3\pi \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= x' = 1 \\ \bullet g'(x) &= (x + 3\pi)' = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{i. } (f \times g)'(x) &= f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x) = \\ &= 1 \times (x + 3\pi) + x \times 1 = \\ &= x + 3\pi + x = \\ &= 2x + 3\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \left(\frac{g}{f}\right)'(x) &= \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \\ &= \frac{1 \times x - (x + 3\pi) \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{x - x - 3\pi}{x^2} = \\ &= -\frac{3\pi}{x^2} \end{aligned}$$

76.

$$\text{a)} \quad f'(x) = (x^2 + 5x + 3)' = 2x + 5$$

$$\text{b)} \quad g'(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - x + 2020\right)' = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\text{c)} \quad p'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \frac{0 - 5 \times x'}{x^2} = -\frac{5}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad r'(x) &= \left(\frac{2x - 3}{x + 1}\right)' = \frac{2 \times (x + 1) - (2x - 3) \times 1}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{5}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

77.

$$\text{a)} \quad d'(x) = \left(4x^3 - \frac{3}{5}x^2 - 2x + 7\right)' = 12x^2 - \frac{6}{5}x - 2$$

$$\text{b)} \quad b'(x) = \left(\pi x^{10} - \frac{1}{e}x^7 - 2x^3 + 9\right)' = 10\pi x^9 - \frac{7}{e}x^6 - 6x^2$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad c'(x) &= ((2x^2 - 3)^4)' = 4(2x^2 - 3)^3(2x^2 - 3)' = \\ &= 4(2x^2 - 3)^3 \times 4x = \\ &= 16x(2x^2 - 3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad d'(x) &= ((x^4 - 5x^2)^3(x^6 - 5x^5))' = \\ &= ((x^4 - 5x^2)^3)'(x^6 - 5x^5) + (x^4 - 5x^2)^3((x^6 - 5x^5))' = \\ &= 3(x^4 - 5x^2)^2(x^4 - 5x^2)'(x^6 - 5x^5) + \\ &\quad + (x^4 - 5x^2)^3(6x^5 - 25x^4) = \\ &= 3(x^4 - 5x^2)^2(4x^3 - 10x)(x^6 - 5x^5) + \\ &\quad + (x^4 - 5x^2)^3(6x^5 - 25x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad e'(x) &= \left(\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(3 - x^3)\right)' = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)'(3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(3 - x^3)' = \\ &= -x(3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)(-3x^2) = \\ &= -3x + x^4 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 = \\ &= \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 - 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad f'(x) &= \left(\frac{2x - 5}{3x + 1}\right)' = \frac{2(3x + 1) - (2x - 5) \times 3}{(3x + 1)^2} = \\ &= \frac{6x + 2 - 6x + 15}{(3x + 1)^2} = \\ &= \frac{17}{(3x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad g'(x) &= \left(\left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^3 \right)' = \\
 &= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)' = \\
 &= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2(x^2-4) - (2x-3)2x}{(x^2-4)^2} = \\
 &= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 6x}{(x^2-4)^2} = \\
 &= \frac{3(2x-3)^2(-2x^2+6x-8)}{(x^2-4)^4} =
 \end{aligned}$$

78.

a) $(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -2 + 1 = -1$

b) $(5f)'(2) = 5f'(2) = 5 \times (-2) = -10$

c) $(f \times g)'(2) = f'(2) \times g(2) + f(2) \times g'(2) =$
 $= -2 \times (-3) + 4 \times 1 =$
 $= 6 + 4 = 10$

d) $\left(\frac{1}{f} \right)'(2) = \frac{0 - f'(2)}{f^2(2)} = -\frac{-2}{4^2} = \frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{f}{g} \right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{g^2(2)} =$
 $= \frac{-2 \times (-3) - 4 \times 1}{(-3)^2} = \frac{2}{9}$

f) $\left(\frac{1}{f+g} \right)'(2) = \frac{0 - (f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} = -\frac{-1}{(4-3)^2} = 1$

g) $(g \times g)'(2) = g'(2) \times g(2) + g(2) \times g'(2) =$
 $= 1 \times (-3) + (-3) \times 1 = -6$

h) $\left(\frac{1}{f+g} \right)'(2) = \frac{f'(2)(f+g)(2) - f(2)(f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} =$
 $= -\frac{-2 \times 1 - 4 \times (-1)}{(4-3)^2} =$
 $= \frac{-2+4}{1} =$
 $= 2$

79. $m = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f que tem inclinação 60° . Logo:

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)' = \sqrt{3} \\
 &\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{3} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}
 \end{aligned}$$

80. $f'(x) = (x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$
 $f'(1) = 3 - 2 = 1$

Assim, $1 = \text{tg } \theta$, com $0^\circ < \theta < 180^\circ$, ou seja, $\theta = 45^\circ$.

Logo, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é 45° .

81.

a) $f(x) = 2x^3$

$f'(x) = 6x^2$

$f'(-2) = 6 \times (-2)^2 = 24$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2 é da forma $y = 24x + b$.

O ponto de coordenadas $(-2, f(-2)) = (-2, -16)$ pertence a esta reta, logo:

$-16 = 24 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = 32$

Assim, $s: y = 24x + 32$.

b) A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação $y = x$, cujo declive é 1.

Como a reta r é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, então o seu declive é também 1.

Logo, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = x + b$.

$f'(x) = 1$

$6x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$

• Se $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$:

$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 = 2 \times \frac{6\sqrt{6}}{6^3} = \frac{\sqrt{6}}{18}$

$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{18}\right) \in r$, logo:

$\frac{\sqrt{6}}{18} = \frac{\sqrt{6}}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{18} - \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\Leftrightarrow b = -\frac{2\sqrt{6}}{18}$

$\Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{6}}{9}$

Assim, $r: y = x - \frac{\sqrt{6}}{9}$.

• Se $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$:

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 = -\frac{\sqrt{6}}{18}$

$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{18}\right) \in r$, logo:

$-\frac{\sqrt{6}}{18} = -\frac{\sqrt{6}}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{18}$

$\Leftrightarrow b = \frac{2\sqrt{6}}{18}$

$\Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{9}$

Assim, $r: y = x + \frac{\sqrt{6}}{9}$.

c) Para que as retas tangentes aos gráficos sejam perpendiculares, o produto dos seus declives terá de ser igual a -1 . Assim:

$f'(x) = 6x^2$

$g'(x) = \left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

$6x^2 \times \left(-\frac{a}{x^2}\right) = -1 \Leftrightarrow -6a = -1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

82. A. A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$f(x) = (x-3)^2$

$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{1 - 4}{3} = -\frac{3}{4} < 0$, mas f não é decrescente

em $]1, 4[$.

B. A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = x^3$$

$f'(0) = 0$, mas a função não tem extremo em $x = 0$.

C. A afirmação é falsa.

Contraexemplo:

$$f(x) = |x|$$

A função f tem um mínimo relativo em $x = 0$, mas não existe $f'(0)$.

D. A afirmação é verdadeira, pelo teorema da página 125.

83.

a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 7)' = 3x^2 - 6x - 9$$

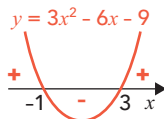
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Varição de f	\nearrow	Máx 12	\searrow	mín -20	\nearrow



$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[3, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $]-1, 3]$; 12 é máximo relativo em -1 ; -20 é mínimo relativo em 3 .

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g'(x) = \left(\frac{x+4}{x-1}\right)' = \frac{x-1 - (x+4)}{(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{5}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$; não tem extremos.

c) $D_h = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1 - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

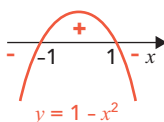
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+1)^2 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$(x^2 + 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo, o sinal de h' depende apenas do sinal de $x \mapsto 1 - x^2$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Sinal de h'	-	0	+	0	-
Varição de h	\searrow	mín $-\frac{1}{2}$	\nearrow	Máx $\frac{1}{2}$	\searrow



$$h(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$h(1) = \frac{1}{2}$$

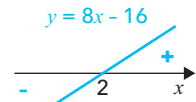
h é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $]-1, 1]$; $-\frac{1}{2}$ é mínimo relativo em -1 ; $\frac{1}{2}$ é máximo relativo em 1 .

84.

a) $f'(x) = (4x^2 - 16x + 3)' = 8x - 16$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Sinal de f'	-	0	+
Varição de f	\searrow	mín -13	\nearrow



$$f(2) = 16 - 32 + 3 = -13$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e é estritamente crescente em $[2, +\infty[$; -13 é um mínimo absoluto em 2 .

b) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$h'(x) = \left(2x + \frac{4}{x}\right)' = 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$$

$$D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x^2} = 0$$

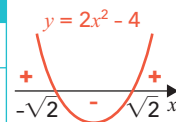
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \wedge x \neq 0$$

$x^2 > 0, \forall x \in D_{h'}$, logo, o sinal de h' depende apenas do sinal de $x \mapsto 2x^2 - 4$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
Sinal de h'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Varição de h	\nearrow	Máx $-4\sqrt{2}$	\searrow	n.d.	\searrow	mín $4\sqrt{2}$	\nearrow



$$h(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

$$h(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

h é estritamente crescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e em $[\sqrt{2}, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $]-\sqrt{2}, 0]$ e em $]0, \sqrt{2}]$; $-4\sqrt{2}$ é máximo relativo em $-\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ é mínimo relativo em $\sqrt{2}$.

c) $D_r = \mathbb{R}$

$$r'(x) = \left(\frac{4}{x^2+1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$D_{r'} = \mathbb{R}$$

$$r'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2+1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$(x^2 + 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo, o sinal de r' depende apenas do sinal de $x \mapsto -2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de r'	+	0	-
Variação de r	↗	Máx 4	↘

$$r(0) = \frac{4}{1} = 4$$

r é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; 4 é máximo absoluto em 0.

85.

a) $tmv_{[0, 20]} = \frac{d(20) - d(0)}{20 - 0} = \frac{247 - 7}{20} = 12$

Nos primeiros 20 minutos, a velocidade média do balão foi de 12 m/min.

b) $d'(t) = (-0,02t^3 + t^2 + 7)' = -0,06t^2 + 2t$
 $d'(5) = -0,06 \times 25 + 2 \times 5 = 8,5$

A velocidade instantânea, relativamente ao solo, do balão aos 5 minutos era de 8,5 m/min.

c) $d'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,06t^2 + 2t = 0$
 $\Leftrightarrow t(-0,06t + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee -0,06t + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{100}{3}$

x	0	$\frac{100}{3}$	50		
Sinal de d'	0	+	0	-	-
Variação de d	mín 7	↗	Máx 377	↘	mín 7

$$d\left(\frac{100}{3}\right) \approx 377$$

$$\frac{100}{3} \approx 33$$

O balão atinge a altura máxima de 377 metros aos 33 minutos.

86. $f(q) = \frac{C(q)}{q} \quad D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(q) = \left(\frac{2q^2 - 15q + 3200}{q}\right)' = \frac{(4q - 15)q - (2q^2 - 15q + 3200)}{q^2} = \frac{4q^2 - 15q - 2q^2 + 15q - 3200}{q^2} = \frac{2q^2 - 3200}{q^2}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$f'(q) = 0 \Leftrightarrow \frac{2q^2 - 3200}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 3200 = 0 \wedge q^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 = 1600 \wedge q \neq 0$$

$$\Leftrightarrow q = 40 \vee q = -40$$

$q^2 > 0, \forall q \in \mathbb{R}_0^+, \text{ logo, o sinal de } f' \text{ depende apenas do sinal de } q \mapsto 2q^2 - 3200.$

q	0	40	$+\infty$	
Sinal de f'	n.d.	-	0	+
Variação de f	n.d.	↘	mín 145	↗

$$f(40) = \frac{C(40)}{40} = 145$$

O custo médio é mínimo para $q = 40$ unidades.

87.

a) Seja P a quantidade de vedação usada, em metros, em função do comprimento e da largura do parque:

$$P = x + x + y = 2x + y$$

Como Área = 5000, vem que:

$$x \times y = 5000 \Leftrightarrow y = \frac{5000}{x}$$

Logo, $P(x) = 2x + \frac{5000}{x}$, com $x \in]0, +\infty[$.

$$P'(x) = \left(2x + \frac{5000}{x}\right)' = 2 + 5000 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{5000}{x^2} = \frac{2x^2 - 5000}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5000 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2500$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2500}$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \wedge x = -50 \notin D_p$$

$x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, \text{ logo, o sinal de } P' \text{ depende apenas do sinal de } x \mapsto 2x^2 - 5000.$

x	0	50	$+\infty$	
Sinal de P'	n.d.	-	0	+
Variação de P	n.d.	↘	mín	↗

A quantidade mínima de vedação a ser utilizada verifica-se para $x = 50$, logo a menor quantidade de cerca que se pode gastar é $P(50) = 200$ metros.

b) A quantidade mínima de vedação a ser utilizada verifica-se para $x = 50$, logo o parque terá

$100\left(y = \frac{5000}{50}\right)$ metros de comprimento por 50 metros de largura.

88. $A(x) = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3$, com $x \in]0, 1[$.

$$A'(x) = (2x - 2x^3)' = 2 - 6x^2$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1		
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	↗	Máx $\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↘	n.d.

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

O valor máximo da área é $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ u.a.

Aprende fazendo 6 – páginas 132 a 134

1.

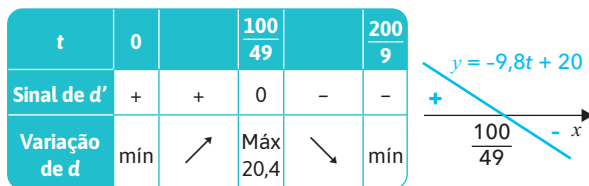
a) $d'(t) = -4,9 \times 2t + 20 = -9,8t + 20$
 $d'(0) = -9,8 \times 0 + 20 = 20$
 A velocidade inicial é 20 m/s.

b) $d(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 20t = 0$
 $\Leftrightarrow t(-4,9t + 20) = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee -4,9t + 20 = 0$
 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{200}{49}$

$$d'\left(\frac{200}{49}\right) = -9,8 \times \frac{200}{49} + 20 = -20$$

A velocidade com que o objeto atingiu o solo é -20 m/s.

c) $d'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{49}$



$$d\left(\frac{100}{49}\right) = -4,9 \times \left(\frac{100}{49}\right)^2 + 20 \times \frac{100}{49} \approx 20,4$$

O objeto atinge a altura máxima de 20,4 metros, aproximadamente.

2. Opção (C)

$$x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$$

O declive da reta de equação $y = x - 1$ é 1. Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto A é -1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(3x + 3 + \frac{2}{x}\right)' = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, então $x = 1$.

3. Opção (A)

$$f'(x) = (\alpha x^2 + (a - 1)x - 2)' = 2\alpha x + a - 1$$

A abscissa do extremo relativo de f é um zero de f' , já que f é uma função quadrática. Assim:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

4. Opção (D)

Como a reta de equação $y = 3x + 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1, tem-se que $f'(-1) = 3$.

Se $f(x) = x^3 - x$, então $f'(x) = 3x^2 - 1$, e, portanto, $f'(-1) = 2$.

Se $f(x) = x + x^2$, então $f'(x) = 1 + 2x$, e, portanto, $f'(-1) = -1$.

Se $f(x) = x^3 + x$, então $f'(x) = 3x^2 + 1$, e, portanto, $f'(-1) = 4$.

Se $f(x) = x - x^2$, então $f'(x) = 1 - 2x$, e, portanto, $f'(-1) = 3$.

5. Opção (A)

Como a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0 é horizontal, tem-se que $g'(0) = 0$.

Como a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 0 é paralela à reta de equação $y = -4x - 4$, tem-se que $h'(0) = -4$.

Assim:

$$f'(0) = (g \times h)'(0) = g'(0) \times h(0) + g(0) \times h'(0) =$$

$$= 0 \times 1 + (-4) \times 4 =$$

$$= -16$$

6.

a) $h'(x) = \left(\left(-\frac{1}{x-1}\right)^2\right)' =$
 $= 2\left(-\frac{1}{x-1}\right)\left(-\frac{0-1(x-1)'}{(x-1)^2}\right) =$
 $= -\frac{2}{x-1} \times \frac{1}{(x-1)^2} =$
 $= -\frac{2}{(x-1)^3}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

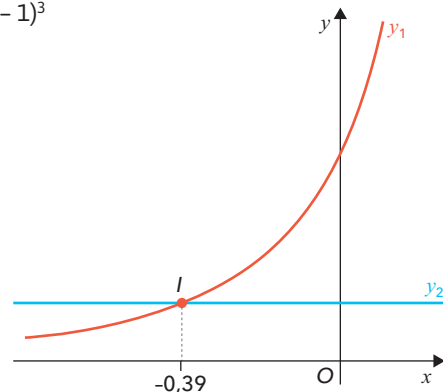
b) $m = \frac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) Pretende-se determinar x tal que $h'(x) = \frac{3}{4}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, intersetemos as curvas definidas por:

$$y_1 = -\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y_2 = \frac{3}{4}$$



$$f(-0,39) = \left(-\frac{1}{-0,39-1}\right)^2 \approx 0,52$$

As coordenadas do ponto de interseção C, com aproximação às centésimas, são (-0,39; 0,52).

7.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 0$

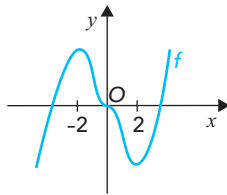
b) A afirmação é falsa.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	↗	Máx	↘	mín	↗

A função f tem dois extremos relativos.

c) A função f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-2, 2]$; tem um máximo em $x = -2$ e um mínimo em $x = 2$.

d) Por exemplo:



8.

a) $g'(x) = \left(\frac{mx^2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2mx(x^2 + 1) - mx^2 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2mx}{(x^2 + 1)^2}$

Se $m > 0$, $g'(x) < 0$ para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$ e, portanto, g tem um mínimo relativo.

Se $m < 0$, $g'(x) > 0$ para $x < 0$ e $g'(x) < 0$ para $x > 0$ e, portanto, g tem um máximo relativo.

Assim, seja qual for o valor de $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função tem sempre um extremo relativo.

b) $g(x) = \frac{-x^2}{x^2 + 1}$

$g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

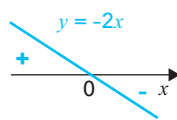
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -2x = 0 \wedge (x^2 + 1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$(x^2 + 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo, o sinal de g' depende apenas do sinal de $x \mapsto -2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g'	+	0	-
Variação de g	↗	Máx	↘



A função g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; tem um máximo relativo em $x = 0$.

9.

a) Seja x a medida da aresta da base do depósito e h a medida da sua altura.

$V = x \times x \times h \Leftrightarrow 2 = x^2 h$

$\Leftrightarrow h = \frac{2}{x^2}$

Assim:

$A(x) = x \times x + 4 \times x \times \frac{2}{x^2} = x^2 + \frac{8}{x} = \frac{8}{x} + x^2$

b) $A'(x) = \left(\frac{8}{x} + x^2 \right)' = -\frac{8}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 8}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8 + 2x^3}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow -8 + 2x^3 = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 4 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$

$x^2 > 0, \forall x \in D_{A'}$, logo, o sinal de A' depende apenas do sinal de $x \mapsto 2x^3 - 8$.

x	0	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$	
Sinal de A'	n.d.	-	0	+
Variação de A	n.d.	↘	mín	↗

Para que a área total seja mínima, a aresta da base deve medir $\sqrt[3]{4}$ m.

10.

a) $D_C =]0, 6000]$

$C(100) = 0,48 \times 100 + 1500 + \frac{120\,000}{100} = 2748$

100 unidades de produto têm um custo de produção de 2748 unidades monetárias.

b) $tmv_{[1000, 2000]} = \frac{C(2000) - C(1000)}{2000 - 1000} = \frac{2520 - 2100}{1000} = 0,42$

c) $C'(x) = \left(0,48x + 1500 + \frac{120\,000}{x} \right)' = 0,48 - \frac{120\,000}{x^2} = \frac{0,48x^2 - 120\,000}{x^2}$

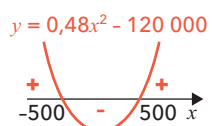
$C'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{0,48x^2 - 120\,000}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 0,48x^2 - 120\,000 = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -500 \vee x = 500$

$x^2 > 0, \forall x \in]0, 6000]$, logo, o sinal de C' depende apenas do sinal de $x \mapsto 0,48x^2 - 120\,000$.

x	0	500	6000		
Sinal de C'	n.d.	-	0	+	+
Variação de C	n.d.	↘	mín	↗	Máx



Para que o custo total seja mínimo, a fábrica deve produzir 500 unidades por mês.

11. Opção (A)

$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Se n for ímpar, então $n - 1$ é par e tem-se $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo f é crescente em \mathbb{R} .

12. Sabe-se que:

- f é uma função quadrática, logo uma expressão analítica que define a função f é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$;
- 1 é um zero de f , logo $f(1) = 0$;
- a reta tangente ao gráfico de f , no ponto de coordenadas $(-1, 2)$, tem declive igual a -3 , logo $f'(-1) = -3$ e também se sabe que $f(-1) = 2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 2 \\ f'(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$$

Como $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$, podemos substituir c por $-a - b$ na expressão $a - b + c = 2$ e obtemos $a - b - a - b = 0$. Assim, $b = -1$.

Substituindo b por -1 nas expressões conhecidas, obtemos:

$$\begin{cases} a - 1 + c = 0 \\ a - (-1) + c = 2 \\ -2a - 1 = -3 \end{cases}$$

Assim, $b = -1$, $a = 1$ e $c = 0$.

Como tal, $f(x) = x^2 - x$.

13. Seja r a medida do raio do setor circular ($r > 0$).

$$r + r + \alpha r = 60 \Leftrightarrow \alpha r = 60 - 2r \Leftrightarrow \alpha = \frac{60 - 2r}{r}$$

$$A(r) = \frac{1}{2} r^2 \times \frac{60 - 2r}{r} = 30r - r^2$$

$$A'(r) = 30 - 2r$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 30 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 15$$



Para que a área do setor circular seja máxima, a medida do raio deve ser 15 cm.

Aprende Fazendo **Global** – páginas 140 a 145

1.

a) $f'(x) = -\frac{4}{2}x^3 - 6x^2 - 8x - 1 = -2x^3 - 6x^2 - 8x - 1$

b) $f'(x) = (1 - 2x)'(x^2 + 1) + (1 - 2x)(x^2 + 1)' =$
 $= -2(x^2 + 1) + (1 - 2x) \times 2x =$
 $= -2x^2 - 2 + 2x - 4x^2 =$
 $= -6x^2 + 2x - 2$

c) $f'(x) = \frac{1}{3} \times (x^5 - x^3 + 4x)' = \frac{1}{3} (5x^4 - 3x^2 + 4) =$
 $= \frac{5}{3}x^4 - x^2 + \frac{4}{3}$

d) $f'(x) = \frac{(5x^2 + 1)'(x^2 - x) - (5x^2 + 1)(x^2 - x)'}{(x^2 - x)^2} =$
 $= \frac{10x(x^2 - x) - (5x^2 + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$

$$= \frac{10x^3 - 10x^2 - (10x^3 - 5x^2 + 2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{10x^3} - 10x^2 - \cancel{10x^3} + 5x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-5x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2}$$

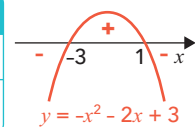
e) $f'(x) = 3(x^2 + 4x + 1)^2 \times (2x + 4) =$
 $= (6x + 12)(x^2 + 4x + 1)^2$

f) $f'(x) = \frac{((3x^2 + 1)')'(x^4 + 2x) - (3x^2 + 1)'(x^4 + 2x)'}{(x^4 + 2x)^2} =$
 $= \frac{2(3x^2 + 1)(3x^2 + 1)'(x^4 + 2x) - (3x^2 + 1)^2(4x^3 + 2)}{(x^4 + 2x)^2} =$
 $= \frac{2(3x^2 + 1) \times 6x \times (x^4 + 2x) - (3x^2 + 1)^2(4x^3 + 2)}{(x^4 + 2x)^2} =$
 $= \frac{12x(3x^2 + 1)(x^4 + 2x) - (3x^2 + 1)^2(4x^3 + 2)}{(x^4 + 2x)^2}$

2.

a) $D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = -\frac{3}{3}x^2 - 2x + 3 = -x^2 - 2x + 3 \quad D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 3}}{-2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{-2}$
 $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
Sinal de f'	-	0	+	0	-
Varição de f	↘	mín $f(-3)$	↗	Máx $f(1)$	↘



$$f(-3) = -\frac{-27}{3} - 9 - 9 + 7 = 9 - 9 - 9 + 7 = -2$$

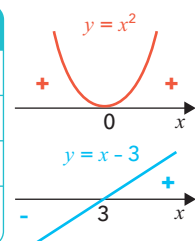
$$f(1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 7 = \frac{26}{3}$$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -3]$ e em $[1, +\infty[$.
 f é estritamente crescente em $[-3, 1]$.

-2 é mínimo relativo em $x = -3$.
 $\frac{26}{3}$ é máximo relativo em $x = 1$.

b) $D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = \frac{4}{4}x^3 - 3x^2 = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3) \quad D_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
x^2	+	0	+	+	
$x - 3$	-	-	-	0	+
Sinal de f'	-	0	-	0	+
Varição de f	↘	$f(0)$	↘	mín $f(3)$	↗



$$f(3) = \frac{81}{4} - 27 - 5 = \frac{47}{4}$$

$-\frac{47}{4}$ é mínimo relativo em $x = 3$.

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3]$.
 f é estritamente crescente em $[3, +\infty[$.

c) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 8 \neq 0\} = \mathbb{R}$
condição universal em \mathbb{R}

$$f'(x) = 1' + \frac{(2x)' \times (x^2 + 8) - 2x(x^2 + 8)'}{(x^2 + 8)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2 + 8) - 2x \times 2x}{(x^2 + 8)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 16 - 4x^2}{(x^2 + 8)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 16}{(x^2 + 8)^2} \quad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 16}{(x^2 + 8)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 16 = 0 \wedge (x^2 + 8)^2 \neq 0$$
condição universal em \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow -2x^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 16$	-	0	+	-
$(x^2 + 8)^2$	+	+	+	+
Sinal de f'	-	0	+	-
Varição de f	\searrow	mín $f(-2\sqrt{2})$	\nearrow	Máx $f(2\sqrt{2})$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2\sqrt{2}]$ e em $[2\sqrt{2}, +\infty[$.

f é estritamente crescente em $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

$$f(-2\sqrt{2}) = 1 + \frac{-4\sqrt{2}}{8 + 8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{4 - \sqrt{2}}{4} \text{ é mínimo relativo em } x = -2\sqrt{2}.$$

$$f(2\sqrt{2}) = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{8 + 8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{4 + \sqrt{2}}{4} \text{ é máximo relativo em } x = 2\sqrt{2}.$$

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: (x - 2)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(-x)'(x - 2)^2 - (-x)((x - 2)^2)'}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{-(x - 2)^2 - (-x) \times 2(x - 2)(x - 2)'}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{-(x - 2)^2 + 2x(x - 2)}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{(x - 2) - [-(x - 2) + 2x]}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{-x + 2 + 2x}{(x - 2)^3} =$$

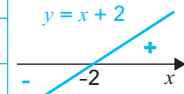
$$= \frac{x + 2}{(x - 2)^3} \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{(x - 2)^3} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \wedge (x - 2)^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \wedge x \neq 2$$
condição universal em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+	+
$(x - 2)^3$	-	-	0	+
Sinal de f'	+	0	-	+
Varição de f	\nearrow	Máx $f(-2)$	\searrow	\nearrow



f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$.
 f é estritamente decrescente em $[-2, 2]$.

$$f(-2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$\frac{1}{8}$ é máximo relativo em $x = -2$.

e) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 2 \neq 0 \wedge x \neq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}: x \neq 1 \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f'(x) = \frac{(x + 1)'(2x - 2) - (x + 1)(2x - 2)'}{(2x - 2)^2} - \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{2x - 2 - (x + 1) \times 2}{(2x - 2)^2} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{2x - 2 - 2x - 2}{(2x - 2)^2} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{-4}{(2x - 2)^2} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{-4x^2 + (2x - 2)^2}{(2x - 2)^2 \times x^2} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 4x^2 - 8x + 4}{(2x - 2)^2 \times x^2} =$$

$$= \frac{-8x + 4}{(2x - 2)^2 \times x^2} \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8x + 4}{(2x - 2)^2 \times x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 4 = 0 \wedge (2x - 2)^2 \times x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge (x \neq 1 \wedge x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-8x + 4$	+	+	0	-	-
$(2x - 2)^2$	+	+	+	+	0
x^2	+	0	+	+	+
Sinal de f'	+	n.d.	+	-	n.d.
Varição de f	\nearrow	n.d.	Máx $f\left(\frac{1}{2}\right)$	\searrow	n.d.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{-1} - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \text{ é máximo relativo.}$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

f é estritamente decrescente em $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ e em $]1, +\infty[$.

f) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3)'(2 - x) - (x^2 - 3)(2 - x)'}{(2 - x)^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x(2-x) - (x^2-3) \times (-1)}{(2-x)^2} = \\ &= \frac{4x - 2x^2 + x^2 - 3}{(2-x)^2} = \\ &= \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2-x)^2} \end{aligned}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2-x)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \wedge (2-x)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{-2} \wedge x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

condição universal em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$-x^2 + 4x - 3$	-	0	+	+	0	-
$(2-x)^2$	+	+	+	0	+	+
Sinal de f'	-	0	+	n.d.	+	-
Variação de f	\searrow	mín f(1)	\nearrow	\nearrow	Máx f(3)	\searrow

$f(1) = \frac{-2}{1} - \sqrt{2} = -2 - \sqrt{2}$ é mínimo relativo.

$f(3) = \frac{6}{-1} - \sqrt{2} = -6 - \sqrt{2}$ é máximo relativo.

f é estritamente decrescente em $]0, 1]$ e em $[3, +\infty[$.

f é estritamente crescente em $[1, 2[$ e em $]2, 3]$.

3.

a) $f(-1) = -3$ $T(-1, -3)$
 $f'(x) = -6x$ $f'(-1) = 6$ $m_t = 6$
 $y = 6x + b$

Como o ponto $T(-1, -3)$ pertence à reta, vem que:
 $-3 = -6 + b \Leftrightarrow b = 3$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa -1, é $y = 6x + 3$.

b) $f(0) = 0$ $T(0, 0)$
 $f'(x) = 8x + 1$ $f'(0) = 1$ $m_t = 1$
 $y = x + b$

Como o ponto $T(0, 0)$ pertence à reta, vem que:
 $0 = 0 + b \Leftrightarrow b = 0$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 0, é $y = x$.

c) $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ $T(1, 1)$

$$f'(x) = \frac{0 \times (2x-1) - 1 \times (2x-1)'}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-2}{1} = -2 \quad m_t = -2$$

$$y = -2x + b$$

Como o ponto $T(1, 1)$ pertence à reta, vem que:

$$1 = -2 + b \Leftrightarrow b = 3$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 1, é $y = -2x + 3$.

d) $f(2) = (-1)^2 = 1$ $T(2, 1)$
 $f'(x) = 2(x-3)(x-3)' = 2(x-3)$
 $f'(2) = -2$ $m_t = -2$
 $y = -2x + b$

Como o ponto $T(2, 1)$ pertence à reta, vem que:

$$1 = -4 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 2, é $y = -2x + 5$.

e) $f(3) = 36 - 6 + 1 = 31$ $T(3, 31)$
 $f'(x) = 8x - 2$ $f'(3) = 22$ $m_t = 22$
 $y = 22x + b$

Como o ponto $T(3, 31)$ pertence à reta, vem que:

$$31 = 22 \times 3 + b \Leftrightarrow -35 = b$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa 3, é $y = 22x - 35$.

f) $f(-2) = -\frac{16}{2} = -8$ $T(-2, -8)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x^3(x^2+x) + x^4(2x+1)'}{(x^2+x)^2} = \\ &= \frac{-4x^5 - 4x^4 + 2x^5 + x^4}{(x^2+x)^2} = \\ &= \frac{-2x^5 - 3x^4}{(x^2+x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(-2) = \frac{64 - 48}{4} \quad m_t = 4$$

$$y = 4x + b$$

Como o ponto $T(-2, -8)$ pertence à reta, vem que:

$$-8 = 4 \times (-2) + b \Leftrightarrow -8 + 8 = b \Leftrightarrow b = 0$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa -2, é $y = 4x$.

4. Opção (A)

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$		
Sinal de f'	+	0	-	-	0	+	
Variação de f	\nearrow	Máx f(-3)	\searrow	f(0)	\searrow	mín f(3)	\nearrow

$f(-3)$ é máximo relativo em $x = -3$.

$f(3)$ é mínimo relativo em $x = 3$.

5. Opção (C)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	\nearrow	Máx f(-2)	\searrow	mín f(2)	\nearrow

$$\begin{array}{|l} f'(-3) > 0 \\ f'(-2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} f'(1) < 0 \\ f'(0) < 0 \\ f'(4) > 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} f'(2) = 0 \\ f'(3) > 0 \end{array}$$

• $f'(-3) > 0$, logo, $f'(-3) > f'(-2)$.

• $f'(3) > 0$, logo, $f'(3) > f'(2)$.

• $f'(0) < 0$ e $f'(4) > 0$.

$f'(0) < 0$ e $-f'(4) < 0$, logo, $f'(0) - f'(4) < 0$.

• $f'(1) < 0$ e $f'(4) > 0$, logo $f'(1) \times f'(4) < 0$.

6.

a) $x \times c = 5x - x^2 \Leftrightarrow c = 5 - x$

$P(x) = x + x + (5 - x) + (5 - x) = 10$

O perímetro da piscina que o avô da Ana vai construir é constante e é igual a 10 m.

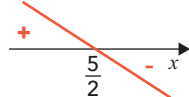
$P(x) = 10$

b) $A(x) = 5x - x^2, 0 < x < 5$

$A'(x) = 5 - 2x, 0 < x < 5$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	↗	Máx $A(\frac{5}{2})$	↘	n.d.



$A\left(\frac{5}{2}\right) = 5 \times \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$

A área máxima é de $\frac{25}{4} \text{ m}^2$.

7. Seja x o comprimento do parque, em metros, e seja y a sua largura, em metros.

Tem-se que $x \times y = 3600 \Leftrightarrow y = \frac{3600}{x}$

Seja P a função que a cada x associa o perímetro do parque.

$x \in]0, 3600[$

$P(x) = 2x + 2 \times \frac{3600}{x} = 2x + \frac{7200}{x}$

$P'(x) = \left(2x + \frac{7200}{x}\right)' = 2 - \frac{7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7200}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \wedge x^2 \neq 0$

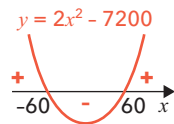
$\Leftrightarrow x^2 = 3600$

$\Leftrightarrow x = 60 \vee x = -60$

Como $x > 0$, então $x = 60$.

$x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+,$ logo, o sinal de P' depende apenas do sinal de $x \mapsto 2x^2 - 7200$.

x	0		60		3600
Sinal de P'		-	0	+	
Variação de P		↘	mín $P(60)$	↗	



$y = \frac{3600}{60} = 60$

Assim, o parque deverá ter comprimento e largura iguais a 60 metros.

8. Seja x o comprimento do campo, em metros, e seja y a sua largura, em metros.

Tem-se que:

$2x + 2y = 360 \Leftrightarrow x + y = 180 \Leftrightarrow y = 180 - x$

Seja A a função que a cada x associa a área do campo.

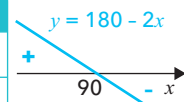
$x \in]0, 180[$

$A(x) = x \times (180 - x) = 180x - x^2$

$A'(x) = 180 - 2x$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 180 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 90$

x	0		90		180
Sinal de A'		+	0	-	
Variação de A		↗	Máx $A(90)$	↘	



$y = 180 - 90 = 90$

Assim, o campo deverá ter comprimento e largura iguais a 90 metros.

9. Opção (C)

$f'(x) = (kx^3 - 2kx^2)' = 3kx^2 - 4kx$

O declive da reta de equação $y = 2x - 1$ é 2, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é $-\frac{1}{2}$. Logo:

$f'(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3k - 4k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

10. Opção (B)

Na opção (A), tem-se $h(x) > 0, \forall x \in D_h$ e $h'(x) > 0, \forall x \in D_h,$ logo $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in D_h.$

Na opção (B), tem-se $h(x) < 0, \forall x \in D_h$ e $h'(x) > 0, \forall x \in D_h,$ logo $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in D_h.$

Na opção (C), tem-se $h(x) < 0, \forall x \in D_h$ e $h'(x) < 0, \forall x \in D_h,$ logo $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in D_h.$

Na opção (D), tem-se $h(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$ e $h'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[,$ logo $h(x) \times h'(x) > 0, \forall x \in]-\infty, 0[,$ mas $h(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$ e $h'(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[,$ logo $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[.$

11. Opção (D)

$g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e f é uma função crescente em \mathbb{R} . No entanto, por observação do gráfico de f , conclui-se que o declive das retas tangentes a este gráfico aumenta até ao ponto de abscissa 0 e diminui daí em diante, sendo sempre positivo, o que não se encontra representado no gráfico de g . Logo, g não pode ser a função derivada da função f .

A função f não tem extremos relativos, uma vez que é estritamente crescente.

A função g tem um mínimo relativo igual a 1.

A função f pode ser a função derivada da função g , já que $f(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$ e g é decrescente neste intervalo; $f(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$ e g é crescente neste intervalo; $f(0) = 0$ e g tem um mínimo relativo no ponto de abscissa 0.

12.

a) $f'(x) = \left(\frac{3x^2 + 3}{x^2}\right)' = \frac{6x \times x^2 - (3x^2 + 3) \times 2x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$

b) $f(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3}{x^2} = 6$
 $\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3}{x^2} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{x^2} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 3}{x^2} = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -3x^2 + 3 &= 0 \wedge x \neq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \wedge x \neq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$f'(1) = -\frac{6}{1^3} = -6$$

$$f'(-1) = -\frac{6}{(-1)^3} = 6$$

Logo, as retas tangentes ao gráfico da função nos pontos cuja ordenada é 6 não são paralelas porque não têm declives iguais.

c) $f'(x) = -\frac{6}{x^3}$

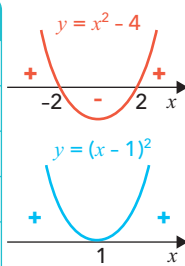
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	-
Variação de f	\nearrow	n.d.	\searrow

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$; não tem extremos relativos.

13. Opção (D)

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + \sqrt{2})(x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \vee x^2 + \sqrt{2} = 0 \vee (x - 1)^2 = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \text{equação impossível} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
$x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+	
$x^2 + \sqrt{2}$	+	+	+	+	+	+	
$(x - 1)^2$	+	+	0	+	+	+	
Sinal de f'	+	0	-	0	-	0	+
Variação de f	\nearrow	Máx $f(-2)$	\searrow	mín $f(2)$	\searrow	\nearrow	



A função f tem 2 extremos.

14. Sejam x o comprimento do retângulo e y a sua altura.

$$\begin{aligned} \text{Tem-se que } \frac{12}{12-x} &= \frac{15}{y} \Leftrightarrow y = \frac{15(12-x)}{12} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{5(12-x)}{4} \end{aligned}$$

Seja A a função que a cada x associa a área do retângulo.

$$A(x) = x \times \frac{5(12-x)}{4} \Leftrightarrow A(x) = \frac{5x(12-x)}{4}$$

$$x \in]0, 12[$$

$$A'(x) = \frac{5}{4}(12 - x - x) = \frac{5}{2}(6 - x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

x	0	6	12		
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

$$\text{Se } x = 6, \text{ então } y = \frac{5 \times 6}{4} = 2,5$$

A área máxima é atingida quando o comprimento é 6 cm e a largura é 2,5 cm.

15. Sejam r o raio e h a altura do cilindro.

$$V = 4\pi \Leftrightarrow \pi \times r^2 \times h = 4\pi \Leftrightarrow h = \frac{4}{r^2}$$

Seja k o preço do material utilizado na parte lateral do cilindro.

Seja C a função que a cada r associa o custo de produção do cilindro.

$$C(r) = 2 \times 2k \times \pi r^2 + k \times 2\pi r \times \frac{4}{r^2} = 4k\pi r^2 + \frac{8k\pi}{r}$$

$$C'(r) = 8k\pi r - \frac{8k\pi}{r^2} = \frac{8k\pi r^3 - 8k\pi}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{8k\pi r^3 - 8k\pi}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8k\pi r^3 - 8k\pi = 0 \wedge r^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 1 \wedge r \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = 1$$

$r^2 > 0, \forall r \in D_C$, logo, o sinal de C' depende apenas do sinal de $r \mapsto 8k\pi r^3 - 8k\pi$.

r	0	1	$+\infty$	
Sinal de C'	n.d.	-	0	+
Variação de C	n.d.	\searrow	mín	\nearrow

O custo de produção é mínimo quando o raio é 1 cm e a altura é 4 cm.

16. Sejam x e y , respetivamente, o comprimento e a largura da folha de papel.

$$(x - 4)(y - 8) = 25 \Leftrightarrow y = \frac{25}{x - 4} + 8 \Leftrightarrow y = \frac{8x - 7}{x - 4}$$

Seja A a função que a cada valor do comprimento da folha de papel associa a sua área.

$$A(x) = x \times \frac{8x - 7}{x - 4} \Leftrightarrow A(x) = \frac{8x^2 - 7x}{x - 4}$$

$$x \in]0, 4[$$

$$A'(x) = \frac{(16x - 7)(x - 4) - (8x^2 - 7x)}{(x - 4)^2} = \frac{8x^2 - 128x + 28}{(x - 4)^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2 - 128x + 28}{(x - 4)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 128x + 28 = 0 \wedge (x - 4)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 7 = 0 \wedge x - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 42}}{4} \wedge x \neq 4$$

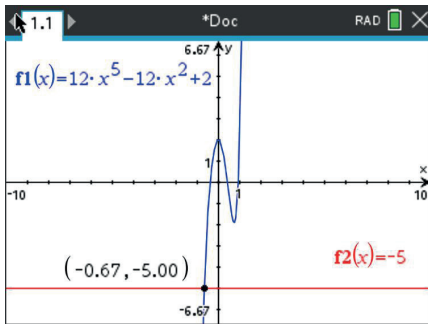
$$\Leftrightarrow x = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \vee x = 4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

x	0	$4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$	4		
Sinal de A'	n.d.	-	0	+	n.d.
Variação de A	n.d.	\searrow	mín	\nearrow	n.d.

$$y = \frac{8\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - 7}{\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - 4} = \frac{10 + 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 8$$

A folha de papel tem a menor área quando a largura é $\left(4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ cm e o comprimento é $(5\sqrt{2} + 8)$ cm.

17. $f'(x) = 12x^5 - 12x^2 + 2$
 $f'(x) = -5$
 $f_1(x) = 12x^5 - 12x^2 + 2$
 $f_2(x) = -5$



A abscissa de A é $-0,67$.
 $f(-0,67) = 2 \times (-0,67)^6 - 4(-0,67)^3 + 2(-0,67) + 1 \approx 1,04$
 $\overline{AO} = \sqrt{(1,04)^2 + (-0,67)^2} \approx 1,2$ u.c.

18.

a) Se $x < \frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{4x^3 + 1}{-2x^2 - 1}$
 $g'(x) = \frac{12x^2(-2x^2 - 1) - (4x^3 + 1)(-4x)}{(-2x^2 - 1)^2}$
 $= \frac{-24x^4 - 12x^2 + 16x^4 + 4x}{(-2x^2 - 1)^2}$

$g'(-1) = \frac{-24 - 12 + 16 - 4}{(-3)^2} = \frac{-24}{9} = -\frac{8}{3}$

$y = -\frac{8}{3}x + b$

$g(-1) = \frac{-4 + 1}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad T(-1, 1)$

Como o ponto T pertence à reta, vem que:

$1 = \frac{8}{3} + b \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{3} = b \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = b$

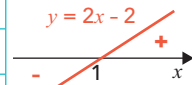
$y = -\frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$

b) Em $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$: $g(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^2$

$g'(x) = 2 \left(\frac{1-x}{x} \right) \left(\frac{1-x}{x} \right)' =$
 $= 2 \times \frac{1-x}{x} \times \frac{-1(x) - (1-x)}{x^2} =$
 $= 2 \times \frac{1-x}{x} \times \frac{-x-1+x}{x^2} =$
 $= 2 \times \frac{1-x}{x} \times \frac{-1}{x^2} =$
 $= \frac{-2+2x}{x^3}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2+2x}{x^3} = 0$
 $\Leftrightarrow -2+2x = 0 \wedge x^3 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$ condição universal em $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$-2+2x$		-	0	+
x^3		+	+	+
Sinal de g'		-	0	+
Variação de g		↘	mín	↗



g é estritamente decrescente em $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

g é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

$g(1) = 0$

0 é mínimo relativo em $x = 1$.

19. T(2, 9 × 2 - 6)

T(2, 12)

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(2) = 4a + b$

$\begin{cases} f(2) = 12 \\ f'(2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 2 = 12 \\ 4a + b = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2(9 - 4a) + 2 = 12 \\ b = 9 - 4a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 18 - 8a + 2 = 12 \\ \text{_____} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a = -8 \\ \text{_____} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 - 4 \times 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$a = 2$ e $b = 1$

20. A(a, $ka^2 - 1$) B(b, $kb^2 - 1$) $a < b$

$m_{AB} = \frac{kb^2 - 1 - (ka^2 - 1)}{b - a} = \frac{kb^2 - ka^2}{b - a} = \frac{k(b^2 - a^2)}{b - a} =$
 $= \frac{k(b-a)(b+a)}{b-a} = k(b+a)$

$f'(x) = 2kx$

$f'(c) = 2kc$

$2kc = k(b+a) \Leftrightarrow c = \frac{b+a}{2}$

Provemos que $c < b$:

$a < b \Leftrightarrow a + b < 2b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{2b}{2} \Leftrightarrow c < b$

Provemos que $a < c$:

$a < b \Leftrightarrow a + a < b + a \Leftrightarrow \frac{2a}{2} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a < c$

Assim, $a < c < b$.

$b - c = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$

$c - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$

Como $a < c < b$ e $b - c = c - a$, então, provámos o pretendido.

21. $f'(x) = 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$
 $m_r = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$
 $f'(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = -2\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow x = -1$
 $A(-1, f(-1))$, ou seja, $A(-1, 4)$.
 $r: y = -\sqrt{3}x + b$
 Como A pertence à reta, vem:
 $4 = \sqrt{3} + b \Leftrightarrow 4 - \sqrt{3} = b$
 $r: y = -\sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$
 $f'(0) = \sqrt{3}$
 $s: y = \sqrt{3}x + 4$
 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ y = -\sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 4 \\ \text{—————} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}x = \sqrt{3} \\ \text{—————} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 - \sqrt{3} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
 $E\left(-\frac{1}{2}, 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $D(\dots, 0)$
 $0 = \sqrt{3}x + 4 \Leftrightarrow -4 = \sqrt{3}x$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$
 $D\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$
 $C(\dots, 0)$
 $0 = -\sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 4 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3} - 1}{3}$
 $C\left(\frac{4\sqrt{3} - 1}{3}, 1, 0\right)$
 $A_{[CDE]} = \frac{(\overline{OC} + \overline{OD}) \times \text{ordenada de } E}{2} =$
 $= \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} =$
 $= \frac{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} =$
 $= \frac{\frac{32\sqrt{3}}{3} - 4 - 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$
 $= \left(\frac{32\sqrt{3}}{6} - 4 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ u.a.}$

22. $f(x) = ax^2 + bx$
 $f'(x) = 2ax + b$
 $f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a - b}{2a}$

- T pertence à reta definida por $y = ax + b$, logo:
 $y = a \times \frac{a - b}{2a} + b = \frac{a - b}{2} + b = \frac{a - b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a + b}{2}$
 $T\left(\frac{a - b}{2a}, \frac{a + b}{2}\right)$
- T pertence ao gráfico de f:
 $f\left(\frac{a - b}{2a}\right) = a\left(\frac{a - b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{a - b}{2a}\right) =$
 $= a \times \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a^2} + \frac{ab - b^2}{2a} =$
 $= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a} + \frac{ab - b^2}{2a} =$
 $= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - 2b^2}{4a} =$
 $= \frac{a^2 - b^2}{4a}$
 $T\left(\frac{a - b}{2a}, \frac{a^2 - b^2}{4a}\right)$
 Logo:
 $\frac{a^2 - b^2}{4a} = \frac{a + b}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{4a} = \frac{2a^2 + 2ab}{4a}$
 $\Leftrightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4a} = 0$
 $\Leftrightarrow (a + b)^2 = 0 \wedge \frac{4a \neq 0}{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$
 $\Leftrightarrow a + b = 0$
 $\Leftrightarrow a = -b$

Então:
 $T\left(\frac{-b - b}{2(-b)}, \frac{-b + b}{2}\right)$, ou seja, $T\left(\frac{-2b}{-2b}, 0\right)$, isto é, $T(1, 0)$.

23. Sejam x e y , respetivamente, o comprimento e a largura de um retângulo de perímetro P .

$$2x + 2y = P \Leftrightarrow y = \frac{P - 2x}{2}$$

Seja A a função que a cada valor do comprimento do retângulo associa a sua área.

$$A(x) = x \times \frac{P - 2x}{2} \Leftrightarrow A(x) = \frac{Px - 2x^2}{2}$$

$$x \in \left]0, \frac{P}{2}\right[$$

$$A'(x) = \left(\frac{Px - 2x^2}{2}\right)' = \frac{P - 4x}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{P - 4x}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x = P \Leftrightarrow x = \frac{P}{4}$$

x	0		$\frac{P}{4}$		$\frac{P}{2}$
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Varição de A	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow	n.d.

$$y = \frac{P - 2 \times \frac{P}{4}}{2} = \frac{P}{4}$$

Pode, então, concluir-se que, de todos os retângulos com perímetro P , o quadrado é o que tem a maior área.

Teste final – páginas 146 a 149

1. Opção (D)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{-\frac{1}{4} \times (-3) - \frac{1}{2} \times (-1)}{(-3)^2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{5}{4}}{9} = \frac{5}{36}$$

Cálculos auxiliares

• $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

• $f'(2) = -\frac{1}{4}$

• $g'(2) = -1$, pois $g'(2)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$ e esta reta é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares, cujo declive é 1.

2. $h(0) = 0 + 0 + 5 = 5$ **I – c)**

$h'(t) = -4,9 \times 2t + 10 = -9,8t + 10$

$h'(0) = 10$ **II – b)**

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 10 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{10}{9,8}$

$\Leftrightarrow t = \frac{50}{49}$

t	0		$\frac{50}{49}$		$\frac{10 + 3\sqrt{22}}{9,8}$
Sinal de h'	+	+	0	-	-
Variação de h	mín $h(0)$	↗	Máx $h\left(\frac{50}{49}\right)$	↘	mín $h\left(\frac{10 + 3\sqrt{22}}{9,8}\right)$

Cálculo auxiliar

$-4,9t^2 + 10t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times (-4,9) \times 5}}{2 \times (-4,9)}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{198}}{-9,8}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-10 \pm 3\sqrt{22}}{-9,8}$

$t = \frac{50}{49} \approx 1,02$ **III – b)**

3. $f'(x) = \frac{6(2x+3) - 6x \times 2}{(2x+3)^2} = \frac{12x+18-12x}{(2x+3)^2} = \frac{18}{(2x+3)^2}$

$f'(0) = \frac{18}{9} = 2$ km/min

1 min — 2 km

60 min — x km

$x = \frac{60 \times 2}{1} = 120$

A velocidade no instante em que o automóvel passa pelo radar é de 120 km/h, logo o limite de velocidade foi respeitado.

4. Opção (B)

$g'(x) = ((f(x))^2)' = 2f(x) \times f'(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \vee x = 0$

Os zeros de g' são -2, 2 e 0, logo, excluimos as representações gráficas de (C) e de (D).

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$2f(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
Sinal de g'	-	0	+	0	-	0	+

5. Opção (D)

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$				
Sinal de f'	+	+	+	0	-	-	0	+	+	+	
Sinal de f	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
Sinal de $\frac{f'}{f}$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+

$\frac{f'(x)}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x \leq -1 \vee 0 < x \leq 1 \vee x > \sqrt{3}$

C.S. = $]-\sqrt{3}, -1] \cup]0, 1] \cup]\sqrt{3}, +\infty[$

6.

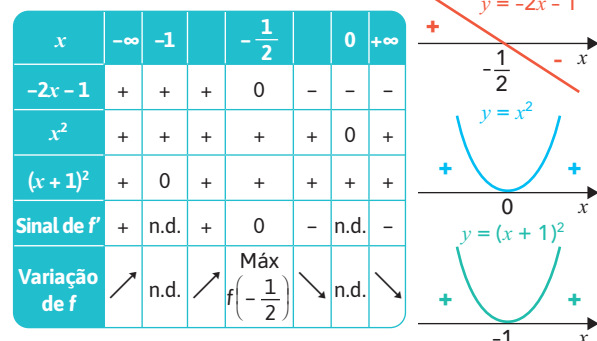
a) $f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2x - 1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -2x-1 = 0 \wedge x^2(x+1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1)$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - 2 = -2$$

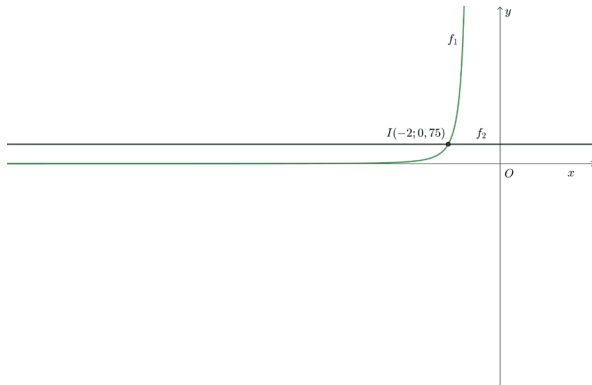
-2 é máximo relativo em $x = -\frac{1}{2}$.

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, -\frac{1}{2}[$.

f é estritamente crescente em $]-\frac{1}{2}, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

c) $f'(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{3}{4}, x < -1$

$$f_1(x) = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} \quad f_2(x) = \frac{3}{4}$$



A reta de equação $y = \frac{3}{4}x + b$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2.

$$f(-2) = \frac{-4+1}{-2+1} - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$T\left(-2, \frac{5}{2}\right)$$

O ponto $T\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ pertence à reta, logo:

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = b \Leftrightarrow b = 4$$

7. Seja A o ponto de tangência da reta t com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência da reta t com o gráfico de g .

$$A(a, a^2)$$

$$B\left(b, \frac{1}{b}\right), b \neq 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Como a reta tangente ao gráfico de f em A e a reta tangente ao gráfico de g em B são a mesma reta, concluímos que $f'(a) = g'(b)$. Assim:

$$f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 2a = -\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2b^2}$$

$$\text{Então, } A\left(-\frac{1}{2b^2}, \frac{1}{4b^4}\right).$$

Vamos, então, determinar o declive da reta AB, em função de b , através das coordenadas dos pontos A e B:

$$m_{AB} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{4b^4}}{b + \frac{1}{2b^2}} = \frac{\frac{4b^3 - 1}{4b^4}}{b + \frac{1}{2b^2}} = \frac{4b^3 - 1}{2b^3 + 1}$$

$$= \frac{2b^2(4b^3 - 1)}{4b^4(2b^3 + 1)}$$

$$= \frac{4b^3 - 1}{2b^2(2b^3 + 1)}$$

Por outro lado, a reta AB é a reta tangente ao gráfico de g , no ponto B, logo, o seu declive é igual a $g'(b)$, ou seja, $m_{AB} = -\frac{1}{b^2}$.

Então:

$$\frac{4b^3 - 1}{2b^2(2b^3 + 1)} = -\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{4b^3 - 1}{2(2b^3 + 1)} = -1$$

$$\Leftrightarrow 4b^3 - 1 = -2(2b^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4b^3 - 1 = -4b^3 - 2$$

$$\Leftrightarrow 8b^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow b^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{b^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$t: y = -4x + d$$

Como o ponto $B\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ pertence à reta, então:

$$-2 = -4\left(-\frac{1}{2}\right) + d \Leftrightarrow -2 = 2 + d \Leftrightarrow -4 = d$$

A equação reduzida da reta t é $y = -4x - 4$.

8. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f , sendo A o de menor abscissa, então $A(a, ka^2)$ e $B(b, kb^2)$, com $a < b$.

Seja C(c, kc^2) o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto C e m_t o seu declive.

Tem-se que $m_t = f'(c)$ e $m_t = m_{AB}$.

$$f'(x) = 2kx, \text{ logo, } f'(c) = 2kc.$$

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{kb^2 - ka^2}{b - a} = \frac{k(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{k(b - a)(b + a)}{b - a} = k(b + a)$$

$$m_t = f'(c) = 2kc$$

Assim:

$$k(b + a) = 2kc \Leftrightarrow b + a = 2c \Leftrightarrow c = \frac{b + a}{2}$$

\uparrow
 $k \neq 0$

Provemos agora que:

- i. $a < c < b$

$$a < b \Leftrightarrow a + a < b + a \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} < \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a < c$$

$$a < b \Leftrightarrow a + b < b + b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} \Leftrightarrow c < b$$

- ii. $c - a = b - c$

$$c - a = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$b - c = b - \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Logo, para qualquer valor de k , as abscissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

9. $f'(x) = 4x + b$

$$\begin{cases} m = 4x + b \\ 2x^2 + bx - 4 = mx - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2x^2 + bx - 4 = (4x + b)x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2x^2 + \cancel{bx} - 4 = 4x^2 + \cancel{bx} - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -2x^2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \text{---} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

impossível pois $x < 0$

A abcissa é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Opção (A)

$$g'(x) = \frac{f'(x) \times (x-2)^2 - f(x) \times 2 \times (x-2) \times 1}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{f'(x) \times (x-2)^2 - 2f(x) \times (x-2)}{(x-2)^4}$$

$$g'(1) = \frac{f'(1) \times (-1)^2 - 2f(1) \times (-1)}{(-1)^4} =$$

$$= \frac{4 + 2 \times (-2)}{1} = 0$$

$$g(1) = \frac{f(1)}{(1-2)^2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = 0x + b$$

Como o ponto $T(1, -2)$ pertence à reta, vem que:

$$-2 = 0 + b \Leftrightarrow b = -2$$

Logo, a equação reduzida da reta pedida é $y = -2$.