5. Funções

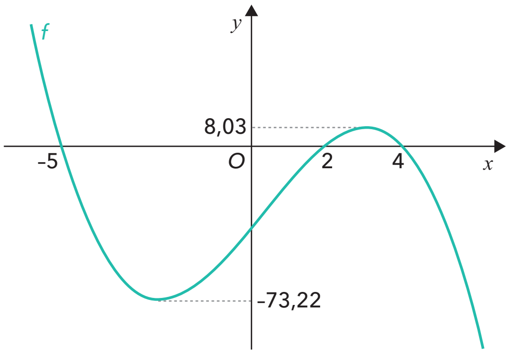
1. Funções cúbicas e quárticas

Funções cúbicas e quárticas

Exercícios – página 58

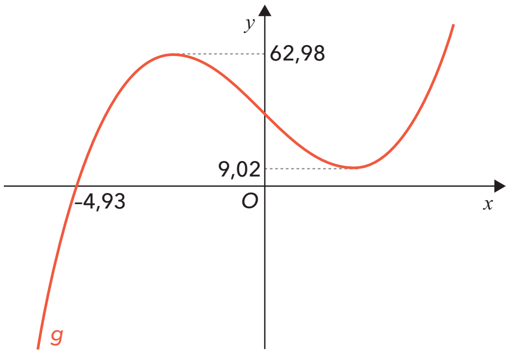
1.

1.1. $f(x) = -x^3 + x^2 + 22x - 40$



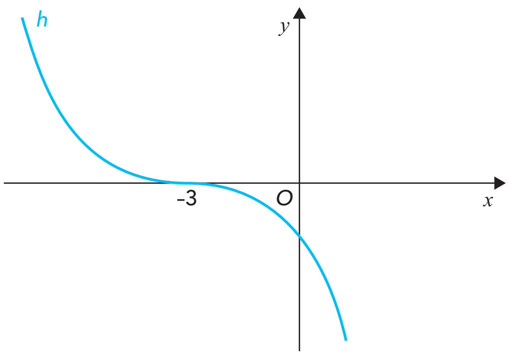
A função f tem três zeros: –5, 2 e 4.
Tem um máximo relativo (8,03) e um mínimo relativo (–73,22), não tem máximos nem mínimos absolutos.
Quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ tende para $+\infty$; quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para $-\infty$.

1.2. $g(x) = x^3 - 2x - 15x + 36$



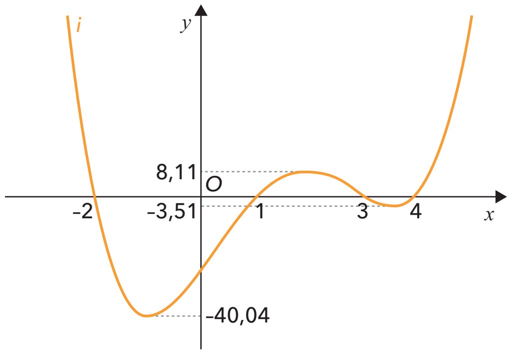
A função g tem um zero: –4,93.
Tem um máximo relativo (62,98) e um mínimo relativo (9,02), não tem máximos nem mínimos absolutos.
Quando x tende para $-\infty$, $g(x)$ tende para $-\infty$; quando x tende para $+\infty$, $g(x)$ tende para $+\infty$.

1.3. $h(x) = -x^3 - 9x^2 - 27x - 27$



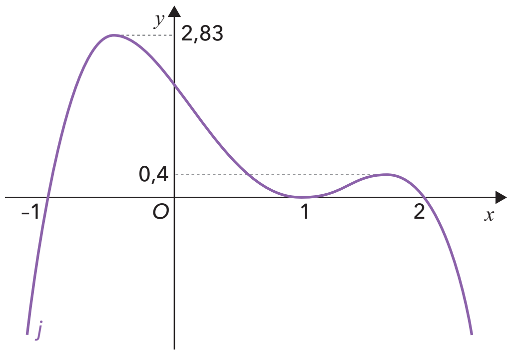
A função h tem um zero: –3.
Não tem máximos relativos nem mínimos relativos.
Quando x tende para $-\infty$, $h(x)$ tende para $+\infty$; quando x tende para $+\infty$, $h(x)$ tende para $-\infty$.

1.4. $i(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$



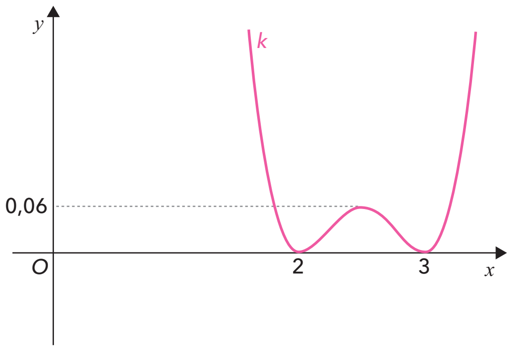
A função i tem quatro zeros: –2, 1, 3 e 4.
Tem um máximo relativo (8,11) e dois mínimos relativos (–40,04 e –3,51). O mínimo absoluto é –40,04; não tem máximo absoluto.
Quando x tende para $-\infty$, $i(x)$ tende para $+\infty$; quando x tende para $+\infty$, $i(x)$ tende para $+\infty$.

1.5. $j(x) = -x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x + 2$



A função j tem três zeros: –1, 1 e 2.
Tem dois máximos relativos (2,83 e 0,4) e um mínimo relativo (0). O máximo absoluto é 2,83; não tem mínimo absoluto.
Quando x tende para $-\infty$, $j(x)$ tende para $-\infty$; quando x tende para $+\infty$, $j(x)$ tende para $-\infty$.

1.6. $k(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$



A função k tem dois zeros: 2 e 3.
Tem um máximo relativo (0,06) e um mínimo relativo (0). O mínimo absoluto é 0; não tem máximo absoluto.
Quando x tende para $-\infty$, $k(x)$ tende para $+\infty$; quando x tende para $+\infty$, $j(x)$ tende para $+\infty$.

2.

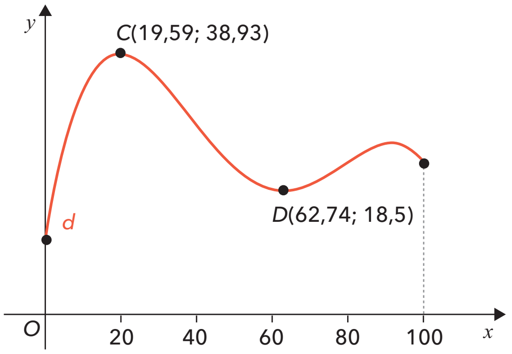
2.1. $d(0) = -7{,}6 \times 10^{-6} \times 0^4 + 0{,}00176 \times 0^3 - 0{,}133 \times 0^2 + 3{,}413 \times 0 + 11 = 11$

Uma pessoa que se encontre no ponto A está a 11 metros de distância do solo.

2.2. $d(20) = -7{,}6 \times 10^{-6} \times 20^4 + 0{,}00176 \times 20^3 - 0{,}133 \times 20^2 + 3{,}413 \times 20 + 11 \approx 39$

Uma pessoa que se encontre a 20 metros de distância do ponto A, na horizontal, está a 39 metros do solo, aproximadamente.

2.3.



$38{,}93 - 18{,}5 \approx 20{,}4$

O valor absoluto da diferença entre as distâncias ao solo no ponto C e no ponto D é de 20,4 metros.

Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini

Exercícios – páginas 59 e 60

3.

3.1. $A(x) = 2x^2 - 2x - 1$; $B(x) = x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 - 2x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^2 - 2x \phantom{{}-1} & 2x - 4 \\ \cline{1-1}
-4x - 1 & \\
4x + 4 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x - 4$

$R(x) = 3$

3.2. $A(x) = 4x^2 + 2x + 7$; $B(x) = 2x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
4x^2 + 2x + 7 & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-4x^2 - 2x \phantom{{}+7} & 2x \\ \cline{1-1}
7 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x$

$R(x) = 7$

3.3. $A(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x - 14$; $B(x) = x^2 + 2x + 3$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 + 3x^2 + 3x - 14 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-3x^3 - 6x^2 - 9x \phantom{{}-14} & 3x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x^2 - 6x - 14 & \\
3x^2 + 6x + 9 & \\ \cline{1-1}
-5 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 3x - 3$

$R(x) = -5$

3.4. $A(x) = 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 11x - 6$; $B(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 11x - 6 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 4x^3 - 2x^2 \phantom{{}+11x-6} & 2x^2 - 4x - 6 \\ \cline{1-1}
-4x^3 + 2x^2 + 11x - 6 & \\
4x^3 - 8x^2 + 4x \phantom{{}-6} & \\ \cline{1-1}
-6x^2 + 15x - 6 & \\
-6x^2 - 12x + 6 & \\ \cline{1-1}
3x \phantom{{}-6} &
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x^2 - 4x - 6$

$R(x) = 3x$

3.5. $A(x) = 2x^4 - 10x^3 + 2x + 9$; $B(x) = x^2 - 4$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 10x^3 + 0x^2 + 2x + 9 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2}
-2x^4 \phantom{{}-10x^3} + 8x^2 \phantom{{}+2x+9} & 2x^2 - 10x + 8 \\ \cline{1-1}
-10x^3 + 8x^2 + 2x + 9 & \\
10x^3 \phantom{{}+8x^2} - 40x \phantom{{}+9} & \\ \cline{1-1}
8x^2 - 38x + 9 & \\
-8x^2 \phantom{{}-38x} + 32 & \\ \cline{1-1}
-38x + 41 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x^2 - 10x + 8$

$R(x) = -38x + 41$

4.

4.1. $A(x) = x^3 - 7x + 9$; $B(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -7 & 9 \\
2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline
 & 1 & 2 & -3 & \multicolumn{1}{|c}{3} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$

$Q(x) = x^2 + 2x - 3$

$R(x) = 31$

4.2. $A(x)= 2x^3 + x^2 - 2x$; $B(x) = x + \frac{1}{2}$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -2 & 0 \\
-\frac{1}{2} & & -1 & 0 & 1 \\ \hline
 & 2 & 0 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{1} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$

$Q(x) = x^2 - 2$

$R(x) = 1$

4.3. $A(x) = 4x^3 + 22x^2 + 8x + 10$; $B(x) = x + 5$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & 22 & 8 & 10 \\
-5 & & -20 & 10 & 10 \\ \hline
 & 4 & 2 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{20} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$

$Q(x) = 4x^2 + 2x - 2$

$R(x) = 20$

4.4. $A(x) = 2x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x + \frac{2}{3}$; $B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & \frac{7}{3} & -4 & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & & -2 & -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ \hline & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} & \boxed{-\frac{8}{3}} \end{array}$$

$Q(x) = 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{10}{3}$

$R(x) = -\frac{8}{3}$

5.

5.1. $(ax + b)(x - 3) = 4x^2 - 11x - 3$

$\Leftrightarrow ax + b = (4x^2 - 11x - 3) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & -11 & -3 \\ 3 & & 12 & 3 \\ \hline & 4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Logo, $ax + b = 4x + 1$.
Assim, $a = 4$ e $b = 1$.

5.2. $(ax + b)(x + 2) = 3x^2 + 8x + 4$

$\Leftrightarrow ax + b = (3x^2 + 8x + 4) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 8 & 4 \\ -2 & & -6 & -4 \\ \hline & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Logo, $ax + b = 3x + 2$.
Assim, $a = 3$ e $b = 2$.

5.3. $(ax + b)(x^2 - 1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\Leftrightarrow ax + b = (x^3 + 2x^2 - x - 2) \div (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad + x & x + 3 \\ \cline{1-1} 2x^2 + 0x - 2 & \\ -2x^2 \qquad + 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Logo, $ax + b = x + 2$.
Assim, $a = 1$ e $b = 2$.

5.4. $(ax + b)(x^2 + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$

$\Leftrightarrow ax + b = (2x^3 - 3x^2 + 8x - 12) \div (x^2 + 4)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + 8x - 12 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} -2x^3 \qquad - 8x & 2x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^2 + 0x - 12 & \\ 3x^2 \qquad + 12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Logo, $ax + b = 2x - 3$.
Assim, $a = 2$ e $b = -3$.

5.5. $(ax + b)(2x^2 - 3x + 4) = 4x^3 - x + 12$

$\Leftrightarrow ax + b = (4x^3 - x + 12) \div (2x^2 - 3x + 4)$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - x - 12 & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 6x^2 - 8x & 2x + 3 \\ \cline{1-1} 6x^2 - 9x + 12 & \\ -6x^2 + 9x - 12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Logo, $ax + b = 2x + 3$.
Assim, $a = 2$ e $b = 3$.

6.

$$\begin{array}{r|l} x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + k^2 - 1 & x^2 + 2 \\ \cline{2-2} -x^6 \qquad - 2x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad & x^4 - 2x^2 + 4 \\ \cline{1-1} -2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + k^2 - 1 & \\ 2x^4 \qquad + 4x^2 \qquad\qquad\quad & \\ \cline{1-1} 4x^2 + 0x + k^2 - 1 & \\ -4x^2 \qquad\qquad - 8 & \\ \cline{1-1} k^2 - 9 & \end{array}$$

Assim, $k^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3$
Os valores de k são 3 ou -3.

7.

7.1.

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad + ax^2 \quad - 2x \quad + b & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 \quad - x^2 \quad - x \qquad\quad & x + (a - 1) \\ \cline{1-1} (a - 1)x^2 \quad - 3x \quad + b & \\ -(a - 1)x^2 \quad -(a - 1)x \quad -(a - 1) & \\ \cline{1-1} (-a - 2)x \quad -a + b + 1 & \end{array}$$

Assim,

$$\begin{cases} -a - 2 = 1 \\ -a + b + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ 3 + b + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

O valor de a é -3 e o valor de b é 2.

7.2.

$$\begin{array}{r|l} x^4 \quad + ax^3 \quad + bx^2 \quad + x \quad + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^4 \qquad\quad + x^2 \qquad\qquad\qquad & x^2 + ax + (b + 1) \\ \cline{1-1} ax^3 \quad + (b + 1)x^2 \quad + x \quad + 1 & \\ -ax^3 \qquad\qquad\quad + x \qquad\quad & \\ \cline{1-1} (b + 1)x^2 \quad + (a + 1)x \quad + 1 & \\ -(b + 1)x^2 \qquad\qquad + b + 1 & \\ \cline{1-1} (a + 1)x \quad + b + 2 & \end{array}$$

Assim,

$$\begin{cases} a + 1 = 2 \\ b + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

O valor de a é 1 e o valor de b é -1.

8. $A(x) = 3x^4 + 2x^3 + kx^2 + x + k$

8.1.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 2 & k & 1 & k \\ 1 & & 3 & 5 & k + 5 & k + 6 \\ \hline & 3 & 5 & k + 5 & k + 6 & \boxed{2k + 6} \end{array}$$

$2k + 6 = -1 \Leftrightarrow 2k = -7 \Leftrightarrow k = -\frac{7}{2}$

O valor de k é $-\frac{7}{2}$.

8.2.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 2 & k & 1 & k \\ -2 & & -6 & 8 & -2k-16 & 4k+30 \\ \hline & 3 & -4 & k+8 & -2k-15 & \boxed{5k+30} \end{array}$$

$5k + 30 = 5 \Leftrightarrow 5k = -25 \Leftrightarrow k = -5$

O valor de k é -5.

8.3.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 2 & k & 1 & k \\ \frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2}k+\frac{7}{8} & \frac{1}{4}k+\frac{15}{16} \\ \hline & 3 & \frac{7}{2} & k+\frac{7}{4} & \frac{1}{2}k+\frac{15}{18} & \boxed{\frac{5}{4}k+\frac{15}{16}} \end{array}$$

$\frac{5}{4}k + \frac{15}{16} = 0 \Leftrightarrow \frac{5k}{4} = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow k = -\frac{4 \times 15}{5 \times 16}$

$\Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$

O valor de k é $-\frac{3}{4}$.

9. $A(x) = x^5 + 3x^3 + px + q$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 3 & 0 & p & q \\ 2 & & 2 & 4 & 14 & 28 & 2p+56 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 8 & p+28 & \boxed{2p+q+56} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 3 & 0 & p & q \\ -1 & & -1 & 1 & -4 & 4 & -p-4 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & -4 & p+4 & \boxed{-p+q-4} \end{array}$$

Assim,

$$\begin{cases} 2p + q + 56 = 0 \\ -p + q - 4 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p + p + 16 + 56 = 0 \\ q = p + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3p = -72 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -24 \\ q = -8 \end{cases}$$

O valor de p é -24 e o valor de q é -8.

10. $A(x) = 2x^3 + ax^2 - 6x + 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & a & -6 & 1 \\ -2 & & -4 & -2a+8 & 4a-4 \\ \hline & 2 & a-4 & -2a+2 & \boxed{4a-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & a & -6 & 1 \\ 1 & & 2 & a+2 & a-4 \\ \hline & 2 & a+2 & a-4 & \boxed{a-3} \end{array}$$

Logo,

$4a - 5 = 2(a - 3) \Leftrightarrow 4a - 3 = 2a - 6 \Leftrightarrow 2a = -3$

$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$

O valor de a é $-\frac{3}{2}$.

11. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 2 & 1 \\ a & & a & a^2+3a & a^3+3a^2+2a \\ \hline & 2 & a+3 & a^2+3a+2 & \boxed{a^3+3a^2+2a+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2a & & 2a & 4a^2+6a & 8a^3+12a^2+4a \\ \hline & 2 & 2a+3 & 4a^2+6a+2 & \boxed{8a^3+12a^2+4a+1} \end{array}$$

Logo,

$a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = 8a^3 + 12a^2 + 4a + 1$

$\Leftrightarrow 7a^3 + 9a^2 + 2a = 0$

$\Leftrightarrow a(7a^2 + 9a + 2) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee 7a^2 + 9a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 7 \times 2}}{14}$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{-9 \pm 5}{14}$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -1 \vee a = -\frac{2}{7}$

Os valores de a são -1 e $-\frac{2}{7}$.

Teorema do resto

Exercícios – página 61

12.

12.1. $A(x) = 2x^2 - 2x - 1$ e $B(x) = x - 1$

$A(1) = 2 \times 1^2 - 2 \times 1 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$

12.2. $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 4$ e $B(x) = x + 2$

$A(-2) = 2 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - (-2) - 4 =$

$= -16 + 16 + 2 - 4 = -2$

12.3. $A(x) = x^2 + 3x + 3$ e $B(x) = x$

$A(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 3 = 3$

12.4. $A(x) = 2x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x + \frac{2}{3}$ e $B(x) = 2x + 1$

$A\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{7}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 -$

$-\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{8} - \frac{7}{24} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 0$

13.

13.1. $P(x) = x^3 + ax + 1$

$P(-1) = 4$

$\Leftrightarrow (-1)^3 + a \times (-1) + 1 = 4$

$\Leftrightarrow -1 - a + 1 = 4$

$\Leftrightarrow -a = 4$

$\Leftrightarrow a = -4$

O valor de a é -4.

13.2. $P(x) = x^4 + (a - 1)\,x^2 + 2x + a$

$P(2) = 16$

$\Leftrightarrow 2^4 + (a - 1) \times 2^2 + 2 \times 2 + a = 16$

$\Leftrightarrow 16 + 4a - 4 + 4 + a = 16$

$\Leftrightarrow 5a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

O valor de a é 0.

13.3. $P(x) = x^3 + ax + 1$

$P(2) = 0$

$\Leftrightarrow 2^3 + 2a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2a + 9 = 0$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{9}{2}$

O valor de a é $-\dfrac{9}{2}$.

13.4. $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + ax - 1$

$P(-1) = P(3)$

$\Leftrightarrow 3 \times (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + a \times (-1) - 1 =$

$= 3 \times 3^3 - 6 \times 3^2 + a \times 3 - 1$

$\Leftrightarrow -3 - 6 - a = 81 - 54 + 3a$

$\Leftrightarrow -9 - a = 27 + 3a$

$\Leftrightarrow 4a = -36$

$\Leftrightarrow a = -9$

O valor de a é -9.

14.
14.1. $\begin{cases} P(2) = 23 \\ P(-1) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b + 5 = 23 \\ -1 + a - b + 5 = 11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2a \\ a - 5 + 2a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$

O valor de a é 4 e o valor de b é -3.

14.2.

Cálculo auxiliar
$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + a - b - 3 = 0 \\ 2 + a + b - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 5 = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 5 \\ b + 5 + b - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 2b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

O valor de a é 3 e o valor de b é -2.

14.3.

Cálculo auxiliar
$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + a + b = 0 \\ -8 + 4a + b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ -8 + 4a + 1 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3a - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{4}{3} \\ a = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

O valor de a é $\dfrac{7}{3}$ e o valor de b é $-\dfrac{4}{3}$.

15. $\begin{cases} P(p) = 0 \\ Q(p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + pb + c = 0 \\ p^2 + dp + e = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = -pb - c \\ -pb - c + dp + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ p(-b + d) = c - e \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ p = \dfrac{c - e}{-b + d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ p = \dfrac{c - e}{b - d} \end{cases}$, como se queria demonstrar.

Multiplicidade de uma raiz de um polinómio

Exercícios – página 62

16. $P(x) = x^8 + x^7 - 3x^6 - x^5 - 14x^4 - 16x^3 + 48x^2 + 16x - 32$

16.1.

	1	1	−3	−1	−14	−16	48	16	−32
1		1	2	−1	−2	−16	−32	16	32
	1	2	−1	−2	−16	−32	16	32	0
1		1	3	2	0	−16	−48	−32	
	1	3	2	0	−16	−48	−32	0	
1		1	4	6	6	−10	−58		
	1	4	6	6	−10	−58	−90		

1 é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$.

16.2.

	1	1	−3	−1	−14	−16	48	16	−32
−1		−1	0	3	−2	16	0	−48	32
	1	0	−3	2	−16	0	48	−32	0
−1		−1	1	2	−4	20	−20	−28	
	1	−1	−2	4	−20	20	28	−60	

−1 é raiz de multiplicidade 1 de $P(x)$.

16.3.

	1	1	−3	−1	−14	−16	48	16	−32
2		2	6	6	10	−8	−48	0	32
	1	3	3	5	−4	−24	0	16	0
2		2	10	26	62	116	184	368	
	1	5	13	31	58	92	185	384	

2 é raiz de multiplicidade 1 de $P(x)$.

16.4.

	1	1	−3	−1	−14	−16	48	16	−32
−2		−2	2	2	−2	32	−32	−32	32
	1	−1	−1	1	−16	16	16	−16	0
−2		−2	6	−10	18	−4	−24	16	
	1	−3	5	−9	2	12	−8	0	
−2		−2	10	−30	78	−160	296		
	1	−5	15	−39	80	−148	288		

−2 é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$.

17.

17.1. $P(2) = 2^5 - 8 \times 2^4 - 21 \times 2^3 - 14 \times 2^2 - 20 \times 2 + 24 =$
$= 32 - 128 + 168 - 56 - 40 + 24 = 0$
Logo, 2 é raiz de $P(x)$.

17.2.

	1	−8	21	−14	−20	24
2		2	−12	18	8	−24
	1	−6	9	4	−12	0
2		2	−8	2	12	
	1	−4	1	6	0	
2		2	−4	−6		
	1	−2	−3	0		
2		2	0			
	1	0	−3			

Logo, 2 é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$.

17.3. $P(x) = (x - 2)^3 (x^2 - 2x - 3)$

17.4. $P(x) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^3 (x^2 - 2x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0 \lor x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = \dfrac{2 \pm 4}{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = 3 \lor x = -1$
As outras raízes do polinómio $P(x)$ são −1 e 3.

18.

	1	−1	−7	7	15	−15	−13	13	4	−4
1		1	0	−7	0	15	0	−13	0	4
	1	0	−7	0	15	0	−13	0	4	0
1		1	1	−6	−6	9	9	−4	−4	
	1	1	−6	−6	9	9	−4	−4	0	
1		1	2	−4	−10	−1	8	4		
	1	2	−4	−10	−1	8	4	0		
1		1	3	−1	−11	−12	−4			
	1	3	−1	−11	−12	−4	0			
1		1	4	3	−8	−20				
	1	4	3	−8	−20	−24				

1 é raiz de multiplicidade 4 de $P(x)$.
Tem-se assim que:
$P(x) = (x - 1)^4 (x^5 + 3x^4 - x^3 - 11x^2 - 12x - 4)$.

	1	3	−1	−11	−12	−4
−1		−1	−2	3	8	4
	1	2	−3	−8	−4	0
−1		−1	−1	4	4	
	1	1	−4	−4	0	
−1		−1	0	4		
	1	0	−4	0		
−1		−1	1			
	1	−1	−3			

−1 é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$.
Assim, $P(x) = (x - 1)^4 (x + 1)^3 (x^2 - 4)$.
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \lor x = -2$
Logo, as outras raízes do polinómio são −2 e 2.

Decomposição de um polinómio em fatores lineares e quadráticos

Exercícios – páginas 63 e 64

19.

19.1 $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$

19.2. $x^2 + x - 30 = (x + 6)(x - 5)$

Cálculo auxiliar
$x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (30)}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 11}{2} \Leftrightarrow x = -6 \lor x = 5$

19.3. $-x^2 + 10x - 21 = -(x - 7)(x - 3)$

Cálculo auxiliar
$-x^2 + 10x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 21}}{-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 7 \lor x = 3$

19.4. $6x^2 - 7x - 3 = 6\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$

Cálculo auxiliar
$6x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 6 \times (-3)}}{2 \times 6} \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm 11}{12} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \lor x = -\dfrac{1}{3}$

20.

20.1. $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2)$

Cálculo auxiliar
$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \lor x = 1$

20.2. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

	1	−1	1	−1
1		1	0	1
	1	0	1	0

Assim, $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$.

20.3. $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

	−1	2	5	−6
1		−1	1	6
	−1	1	6	0

$-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$
Assim, $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(-x^2 + x + 6) =$
$= -(x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

20.4. $2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 2(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

	1	6	11	6
–1		–1	–5	–6
	1	5	6	0

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2}$
$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$
Assim, $2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 2(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)=$
$= 2(x + 1)(x^2 + 5x + 6) = 2(x + 1)(x + 3)(x + 2)$.

20.5. $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

	1	1	–3	–1	2
–1		–1	0	3	–2
	1	0	–3	2	0
1		1	1	–2	
	1	1	–2	0	

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$
$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$
Assim, $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x - 2)=$
$= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 1) =$
$= (x - 1)^2 (x + 1)(x + 2)$

20.6. $-2x^4 - 2x^3 + 16x^2 + 24x = -2x(x^3 + x^2 - 8x - 12)$

	1	1	–8	–12
–2		–2	2	12
	1	1	–6	0

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$
Assim, $-2x^4 - 2x^3 + 16x^2 + 24x = -2x(x^3 + x^2 - 8x - 12) =$
$= -2x(x + 2)(x^2 - x - 6) =$
$= -2x(x + 2)(x - 3)(x + 2) =$
$= -2x(x + 2)^2 (x - 3)$.

20.7. $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6$

	2	–3	–12	7	6
1		2	–1	–13	–6
	2	–1	–13	–6	0
3		6	15	6	
	2	5	2	0	

$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$
Assim, $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 =$
$= (x - 1)(x - 3)(2x^2 + 5x + 2) =$
$= (x - 1)(x - 3)2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) =$
$= 2(x - 1)(x - 3)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

20.8. $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4$

	3	4	–7	–4	4
1		3	7	0	–4
	3	7	0	–4	0
–1		–3	–4	4	
	3	4	–4	0	

$3x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 3 \times 4}}{4}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{2}{3}$
Assim, $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 =$
$= (x - 1)(x + 1)(3x^2 + 4x + 4) =$
$= (x - 1)(x + 1)3(x + 2)\left(x - \frac{2}{3}\right) =$
$= 3(x - 1)(x + 1)(x + 2)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

20.9. $-3x^5 - x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2x = x(-3x^4 - x^3 + 9x^2 + 9x + 2)$

	–3	–1	9	9	2
–1		3	–2	–7	–2
	–3	2	7	2	0
–1		3	–5	–2	
	–3	5	2	0	

$-3x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 3 \times 2}}{-6}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{3}$
Assim, $-3x^5 - x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2x =$
$x(-3x^4 - x^3 + 9x^2 + 9x + 2) =$
$= x(x + 1)^2 (-3x^2 + 5x + 2) =$
$= x(x + 1)^2 (-3)(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) =$
$= -3x(x + 1)^2 (x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

20.10. $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

	1	0	–4	2	3	–2
1		1	1	–3	–1	2
	1	1	–3	–1	2	0
1		1	2	–1	–2	
	1	2	–1	–2	0	
1		1	3	2		
	1	3	2	0		

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2}$
$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$
Assim, $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^3 (x^2 + 3x + 2) =$
$= (x - 1)^3 (x + 2)(x + 1)$

20.11. $8x^5 - 32x^4 + 26x^3 + 26x^2 - 32x + 8$

	8	–32	26	26	–32	8
2		16	–32	–12	28	–8
	8	–16	–6	14	–4	0
2		16	0	–12	4	
	8	0	–6	2	0	
–1		–8	8	–2		
	8	–8	2	0		

$8x^2 - 8x + 2 = 2(4x^2 - 4x + 1) = 2(2x - 1)^2$

Assim, $8x^5 - 32x^4 + 26x^3 + 26x^2 - 32x + 8 =$

$= (x - 2)^2\,(x + 1)(8x^2 - 8x + 2) =$

$= 2(x - 2)^2\,(x + 1)\,(2x - 1)^2$

20.12. $-x^5 - x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 6$

Cálculo auxiliar

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

	–1	–1	6	1	1	–6
2		–2	–6	0	2	6
	–1	–3	0	1	3	0
–3		3	0	0	–3	
	–1	0	0	1	0	

$-x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

	–1	0	0	1
1		–1	–1	–1
	–1	–1	–1	0

$-x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{-2}$ Condição impossível em $\mathbb{R}$

Assim, $-x^5 - x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 6 =$

$= (x - 2)(x + 3)(-x^3 + 1) =$

$= (x - 2)(x + 3)(x - 1)(-x^2 - x - 1) =$

$= -(x - 2)(x + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

21.

21.1. $P(x) = a(x - 2)(x - 1)$

$P(-1) = 6 \Leftrightarrow a \times (-3) \times (-2) = 6 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$

Logo, $P(x) = (x - 2)\,(x - 1) = x^2 - 3x + 2$.

21.2. $P(x) = a(x + 1)\,(x - 1)\,(x - 2)$

$P(0) = -4 \Leftrightarrow a \times 1 \times (-1) \times (-2) = -4 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$

Logo, $P(x) = -2\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x - 2) = -2\,(x^2 - 1)(x - 2) =$

$= -2(x^3 - 2x^2 - x + 2) = -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4$.

21.3. $P(x) = a(x - 1)^2\,(x + 2)$

$P(0) = -2 \Leftrightarrow a \times (-1)^2 \times 2 = -2 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$

Logo, $P(x) = -(x - 1)^2\,(x + 2) = -(x^2 - 2x + 1)(x + 2) =$

$= -(x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2) = -x^3 + 3x - 2$.

21.4. $P(x) = a(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

$P(-3) = 40 \Leftrightarrow a(9 - 1)(9 - 4) = 40 \Leftrightarrow 40a = 40 \Leftrightarrow a = 1$

Logo, $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 =$

$= x^4 - 5x^2 + 4$.

22. $P(x) = x^4 + kx^3 - kx^2 - 11x - 6$

22.1. $P(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - k - k + 11 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 3$

22.2. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

	1	3	–3	–11	–6
–1		–1	–2	5	–6
	1	2	–5	–6	0
–1		–1	–1	6	
	1	1	–6	0	

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

Assim, $P(x) = (x + 1)^2\,(x^2 + x - 6) =$

$= (x + 1)^2\,(x - 2)(x + 3)$

23. $P(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$

$P(-2) = 1 \Leftrightarrow a(-2 + 1)\,(-2 - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow -16a = 1$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{16}$

Logo, $P(x) = -\frac{1}{16}(x + 1)\,(x - 2)^2 =$

$= -\frac{1}{16}(x + 1)(x^2 - 4x + 4) = -\frac{1}{16}(x^3 - 3x^2 + 4) =$

$= -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{4}$.

24. $P(x) = a(x + 1)(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

$P(2) = 12 \Leftrightarrow a(2 + 1)(2 + 2)\left(2 - \frac{1}{2}\right)(2 - 1) = 12$

$\Leftrightarrow 18a = 12 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

Logo, $P(x) = \frac{2}{3}(x + 1)(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) =$

$= \frac{2}{3}(x^2 + 3x + 2)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{2}{3}\left(x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) =$

$= \frac{2}{3}x^4 + x^3 - \frac{4}{3}x^2 - x + \frac{2}{3}$

25. Como 1 é um zero simples e –2 é um zero duplo da função f, então a expressão analítica que define esta função é do tipo $f(x) = a(x - 1)(x + 2)^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Além disso, $f(2) = 16 \Leftrightarrow a(2 - 1)(2 + 2)^2 = 16$

$\Leftrightarrow a \times 16 = 16 \Leftrightarrow a = 1$.

Então, $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2$

$\Leftrightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

$\Leftrightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

26. $f(x) = a(x + 2)^2\,(x - 2)^2$

$f(0) = -4 \Leftrightarrow a(0 + 2)^2\,(0 - 2)^2 = -4 \Leftrightarrow 16a = -4$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2\,(x - 2)^2$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 4x + 4)$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 8x^2 + 16)$

$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 4$

Logo, $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$ e $e = -4$.

Equações e inequações polinomiais de grau superior a dois

Exercícios – páginas 65 e 66

27.

27.1.

Cálculo auxiliar

	1	–6	11	–6
1		1	–5	6
	1	–5	6	0

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$

C.S. = $\{1, 2, 3\}$

27.2.

Cálculo auxiliar

	4	8	–1	–2
–2		–8	0	2
	4	0	–1	0

$4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee 4x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

C.S. = $\left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

27.3.

Cálculo auxiliar

	1	2	–13	–14	24
–4		–4	8	20	–24
	1	–2	–5	6	0
1		1	–1	–6	
	1	–1	–6	0	

$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = -2 \vee x = 3$

C.S. = $\{-4, -2, 1, 3\}$

27.4.

Cálculo auxiliar

	6	–1	–7	1	1
1		6	5	–2	–1
	6	5	–2	–1	0
–1		–6	1	1	
	6	–1	–1	0	

$6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee 6x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm 5}{12}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

C.S. = $\left\{-1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

27.5.

Cálculo auxiliar

	1	$\frac{13}{2}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$
–3		–3	$-\frac{21}{2}$	–3	$\frac{9}{2}$
	1	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0
–3		–3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	
	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	

$x^4 + \frac{13}{2}x^3 + \frac{23}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$

C.S. = $\left\{-3, -1, \frac{1}{2}\right\}$

27.6.

Cálculo auxiliar

	–2	13	–15	–1	–5
1		–2	11	–4	–5
	–2	11	–4	–5	0
1		–2	9	5	
	–2	9	5	0	

$-2x^4 + 13x^3 - 15x^2 - x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee -2x^2 + 9x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \times 2 \times 5}}{-4}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-9 \pm 11}{-4}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5 \vee x = -\frac{1}{2}$

C.S. = $\left\{1, -\frac{1}{2}, 5\right\}$

27.7.

Cálculo auxiliar

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$

	6	–13	–2	7	2
1		6	–7	–9	–2
	6	–7	–9	–2	0
2		12	10	2	
	6	5	1	0	

$6x^4 - 13x^3 - 2x^2 + 7x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee 6x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{12}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{-5 \pm 1}{12}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$

C.S. = $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1, 2\right\}$

28.

28.1. $f(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$

28.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$

Cálculo auxiliar

	1	–4	1	6
–1		–1	5	–6
	1	–5	6	0

C.S. = {–1, 2, 3}

28.3. a) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x + 1$	–	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	0	–	0	+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+

C. S. = $]-\infty, -1] \cup [2, 3]$

b) $-xf(x) > 0 \Leftrightarrow -x(x + 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$

x	$-\infty$	-1		0		2		3	$+\infty$
$-x$	+	+	+	0	–	–	–	–	–
$x + 1$	–	0	+	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	+	+	0	–	0	+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+	0	–

C.S. = $]-1, 0[\cup]2, 3[$

c) $f(x)(x - 3) \leq 0$

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+
$f(x)(x - 3)$	+	0	–	0	+	0	+

C.S. = $[-1, 2] \cup \{3\}$

d) $f(x) > 6 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 > 6 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x > 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 1) > 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3}$

x	$-\infty$	0		$2 - \sqrt{3}$		$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
x	–	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 4x + 1$	+	+	+	0	–	0	+
$x(x^2 - 4x + 1)$	–	0	+	0	–	0	+

C.S. = $]0, 2 - \sqrt{3}[\cup]2 + \sqrt{3}, +\infty[$

29.

29.1. $2x^2 \geq x^4 + x^3 \Leftrightarrow -x^4 - x^3 + 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(-x^2 - x + 2) \geq 0$

Cálculo auxiliar

$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$-x^2 - x + 2$	–	0	+	+	+	0	–
$x^2(x^2 - x + 2)$	–	0	+	0	+	0	–

C.S. = $[-2, 1]$

29.2. $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 1) > 0$

Cálculo auxiliar

	1	1	–1	–2
–2		–2	0	2
	1	0	–1	0

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$x + 2$	–	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 1$	+	+	+	0	–	0	+
$(x + 2)(x^2 - 1)$	–	0	+	0	–	0	+

C.S. = $]-2, -1[\cup]1, +\infty[$

29.3. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 (x^2 - x - 6) \geq 0$

Cálculo auxiliar

	1	–3	–3	11	–6
1		1	–2	–5	6
	1	–2	–5	6	0
1		1	–1	–6	
	1	–1	–6	0	

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x^2 - x - 6$	+	0	–	–	–	0	+
$(x - 1)^2(x^2 - x - 6)$	+	0	–	0	–	0	+

C.S.= $]-\infty, -2] \cup \{1\} \cup [3, +\infty[$

29.4. $2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 15x - 6 \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 2)(2x^2 - 6) \leq 0$

Cálculo auxiliar

	2	–5	–4	15	–6
$\frac{1}{2}$		1	–2	–3	6
	2	–4	–6	12	0
–1		4	0	–12	
	2	0	–6	0	

$2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2	$+\infty$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$6x^2-6$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{(2x^2-6)}$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

C.S.= $\left[-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right] \cup [\sqrt{3}, 2]$

29.5. $-x^4+x^3+18x^2-16x-32>0$
$\Leftrightarrow (x^2-16)(-x^2+x+2)>0$

Cálculo auxiliar

	−1	1	18	−16	−32
4		−4	−12	24	32
	−1	−3	6	8	0
−4		4	−4	−8	
	−1	1	2	0	

$-x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\times2}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm3}{2}$
$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$

x	$-\infty$	−4		−1		2		4	$+\infty$
x^2-16	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$-x^2+x+2$	−	−	−	0	+	0	−	−	−
$(x^2-16)(-x^2+x+2)$	−	0	+	0	−	0	+	0	−

C.S.= $]-4, -1[\cup]2, 4[$

30.

30.1. C.S. = $]-\infty, -2] \cup [1, 2]$

30.2. C.S. = $]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

30.3.

x	$-\infty$	−2		−1		0		1		2	$+\infty$
$A(x)$	−	0	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$B(x)$	+	+	+	0	−	0	+	0	+	+	+
$A(x)\times B(x)$	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+

C.S.= $]-\infty, -2[\cup]-1, 0[\cup]1, 2[$

30.4

x	$-\infty$	−2		1		2	$+\infty$
$A(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$x-1$	−	−	−	0	+	+	+
$A(x)\times(x-1)$	+	0	−	0	−	0	+

C.S. = $]-\infty, -2] \cup \{1\} \cup [2, +\infty[$

30.5.

x	$-\infty$	−1		0		1		2	$+\infty$
$B(x)$	+	0	−	0	+	0	+	+	+
x^2-2x	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$B(x)\times(x^2-2x)$	+	0	−	0	−	0	−	0	+

C.S. = $]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$

30.6.

Cálculo auxiliar

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm1}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=3$

x	$-\infty$	−2		1		2		3	$+\infty$
$A(x)$	−	0	+	0	−	0	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$A(x)\times(x^2-5x+6)$	−	0	+	0	−	0	−	0	+

C.S. = $]-2, 1[\cup]3, +\infty[$

31.

31.1. $k \in \left]-\frac{9}{8}, \frac{105}{8}\right[$

31.2. Uma vez que −3, 1 e 2 são zeros de f, então
$f(x)=a(x+3)(x-1)(x-2)$.
B pertence ao gráfico de f, logo $f(0)=6$.
$\Leftrightarrow a\times3\times(-1)\times(-2)=6 \Leftrightarrow 6a=6 \Leftrightarrow a=1$
Logo, $f(x)=(x+3)(x-1)(x-2)=(x^2+2x-3)(x-2)=$
$=x^3-7x+6$.
Se o gráfico de g é uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes pares, então o seu declive é −1 e se o ponto B pertence ao gráfico de g então $g(0)=6$, pelo que $g(x)=-x+6$.

31.3. a) $g(x)<0 \Leftrightarrow -x+6<0 \Leftrightarrow -x<-6 \Leftrightarrow x>6$
C.S. = $]6, +\infty[$

b) $f(x)>0 \Leftrightarrow x^3-7x+6>0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)(x-2)>0$

x	$-\infty$	−3		1		2	$+\infty$
$x+3$	−	0	+	+	+	+	+
$(x-1)(x-2)$	+	+	+	0	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

C.S. = $]-3, 1[\cup]2, +\infty[$

c) $f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x^3-7x+6\geq -x+6 \Leftrightarrow x^3-6x\geq0$
$\Leftrightarrow x(x^2-6)\geq0$

Cálculo auxiliar

$x^2-6=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{6} \vee x=-\sqrt{6}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	$+\infty$
x	−	−	−	0	+	+	+
x^2-6	+	0	−	−	−	0	+
$x(x^2-6)$	−	0	+	0	−	0	+

C.S. = $[-\sqrt{6}, 0] \cup [\sqrt{6}, +\infty[$

d)

Cálculo auxiliar

$x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1$

x	$-\infty$	1		6	$+\infty$
x^3-1	−	0	+	+	+
$g(x)$	+	+	+	0	−
$(x^3-1)\times g(x)$	−	0	+	0	−

C.S. = $[1, 6]$

2. Operações com funções

Exercícios – página 67

32.

32.1. a) $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = (2^2 + 3 \times 2 - 4) + (1 - 2^2) =$
$= 6 + (-3) = 3$

b) $(f-h)(-1) = f(-1) - h(-1) =$
$= ((-1)^2 + 3 \times (-1) - 4) - ((-1)^3 + 8 \times (-1)^2 + 16 \times (-1)) =$
$= (1 - 3 - 4) - (-1 + 8 - 16) =$
$= -6 - (-9) = 3$

c) $(f+h)(-4) = f(-4) + h(-4) =$
$= (-4)^2 + 3 \times (-4) - 4 + (-4)^3 + 8 \times (-4)^2 + 16 \times (-4) =$
$= 16 - 12 - 4 - 64 + 128 - 64 = 0$

d) $(h \times f)(1) = h(1) \times f(1) =$
$= (1^3 + 8 \times 1^2 + 16 \times 1) \times (1^2 + 3 \times 1 - 4) =$
$= (1 + 8 + 16) \times (1 + 3 - 4) =$
$= 25 \times 0 = 0$

e) $f(1) = 1^2 + 3 \times 1 - 4 = 0$

Logo, não existe $\left(\frac{g}{f}\right)(1)$.

f) $\left(\frac{f}{g}\right)(-4) = \frac{f(-4)}{g(-4)} = \frac{(-4)^2 + 3 \times (-4) - 4}{1 - (-4)^2} =$
$= \frac{16 - 12 - 4}{1 - 16} = \frac{0}{-15} = 0$

32.2. $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$; $D_h = \mathbb{R}$

a) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$
$(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 + 1 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) $D_{f+h} = D_g \cap D_h = \mathbb{R}$
$(f+h)(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 + x^3 + 8x^2 + 16x = 0$
$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 19x - 4 = 0$
Como vimos na alínea 31.1 a), $(f+h)(-4) = 0$.

	1	9	19	−4
−4		−4	−20	4
	1	5	−1	0

Assim, $(f+h)(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x^2 + 5x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4}}{2}$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$

c) $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$
$(f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \times g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \vee 1 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2} \vee x^2 = 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2} \vee x = 1 \vee x = -1$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = -1$

32.3. a) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

Cálculo auxiliar
$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

b) $D_{\frac{g}{h}} = D_g \cap D_h \cap \{x \in \mathbb{R}: h(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-4, 0\}$

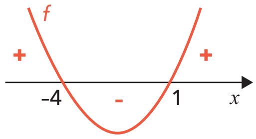
Cálculo auxiliar
$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 8x + 16) = 0 \Leftrightarrow x(x+4)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

c) $D_{\frac{h}{f}} = D_h \cap D_f \cap \{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-4, 1\}$

Cálculo auxiliar
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$

32.4. a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0$

Cálculo auxiliar
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2}$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$



C.S. $=]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$

b) $h(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + 16x < 0 \Leftrightarrow x(x+4)^2 < 0$

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
x	−	−	−	0	+
$(x+4)^2$	+	0	+	+	+
$h(x)$	−	0	−	0	+

C.S. $=]-\infty, -4[\cup]-4, 0[$

c) $(f \times g)(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)(1 - x^2) \geq 0$

Cálculo auxiliar
$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-4		-1		1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$g(x)$	−	−	−	0	+	0	−
$(f \times g)(x)$	−	0	+	0	−	0	−

C.S. $=]-4, -1[\cup \{1\}$

3. Funções racionais

Exercícios – páginas 68 a 70

33.

33.1. $f(x) = \frac{3x+2}{x} = 3 + \frac{2}{x}$

$g(x) = \frac{6x-1}{x-3} = 6 + \frac{17}{x-3}$

Cálculo auxiliar

$6x - 1$	$x - 3$
$-6x + 18$	6
17	

$h(x) = \frac{3 - 5x}{x+2} = -5 + \frac{13}{x+2}$

Cálculo auxiliar

$-5x + 3$	$x + 2$
$5x + 10$	-5
13	

$$i(x)=\frac{2-4x}{5-x}=4-\frac{18}{5-x}=4+\frac{18}{x-5}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{l|l} -4x+2 & -x+5 \\ \cline{2-2} \underline{4x-20} & 4 \\ -18 & \end{array}$$

$$j(x)=\frac{3x-1}{3x+3}=1-\frac{4}{3x+3}=1-\frac{4}{3(x+1)}=1+\frac{-\frac{4}{3}}{x+1}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{l|l} 3x-1 & 3x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-3x-3} & 1 \\ -4 & \end{array}$$

$$k(x)=\frac{2x-5}{3-4x}=-\frac{1}{2}-\frac{\frac{7}{2}}{3-4x}=-\frac{1}{2}-\frac{\frac{7}{2}}{-4\left(x-\frac{3}{4}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{8}}{x-\frac{3}{4}}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{l|l} 2x-5 & -4x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x-\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \end{array}$$

33.2. Função f:
Assíntota vertical: $x = 0$
Assíntota horizontal: $y = 3$
Função g:
Assíntota vertical: $x = 3$
Assíntota horizontal: $y = 6$
Função h:
Assíntota vertical: $x = -5$
Assíntota horizontal: $y = -2$
Função i:
Assíntota vertical: $x = 5$
Assíntota horizontal: $y = 4$
Função j:
Assíntota vertical: $x = -1$
Assíntota horizontal: $y = 1$
Função k:
Assíntota vertical: $x = \frac{3}{4}$
Assíntota horizontal: $y = -\frac{1}{2}$

33.3. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $D'_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$
$D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$; $D'_g = \mathbb{R}\backslash\{6\}$
$D_h = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$; $D'_h = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$
$D_i = \mathbb{R}\backslash\{5\}$; $D'_i = \mathbb{R}\backslash\{4\}$
$D_j = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $D'_j = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
$D_k = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{4}\right\}$; $D'_k = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

34.

34.1. $f(x)=\frac{4x+1}{x+3}=4-\frac{11}{x+3}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{l|l} 4x+1 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-4x-12} & 4 \\ -11 & \end{array}$$

34.2. Assíntota vertical: $x = -3$
Assíntota horizontal: $y = 4$

34.3. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$
$D'_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

34.4. Interseção com Ox:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x+1}{x+3}=0 \Leftrightarrow 4x+1=0 \wedge x+3\neq 0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$

O ponto de interseção com eixo das abcissas é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

Interseção com Oy:

$f(0)=\frac{4\times 0+1}{0+3}=\frac{1}{3}$

O ponto de interseção com o eixo das ordenadas é o ponto de coordenadas $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

34.5. a) Quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para 4.

b) Quando x tende para $-\infty$, $f(x)$ tende para 4.

c) Quando x tende para -3 por valores inferiores a -3, $f(x)$ tende para $+\infty$.

d) Quando x tende para -3 por valores superiores a -3, $f(x)$ tende para $-\infty$.

35.

35.1. Como a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico da função, então $c = 2$.
Como a reta de equação $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico da função, então $a = 4$.
Como $\left(0,\frac{11}{2}\right)$ pertence ao gráfico da função:

$f(0)=\frac{11}{2} \Leftrightarrow 4+\frac{b}{0-2}=\frac{11}{2} \Leftrightarrow 4-\frac{b}{2}=\frac{11}{2}$

$\Leftrightarrow 8-b=11 \Leftrightarrow b=-3$

35.2. $f(x)\leq\frac{11}{2} \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0]\cup]2,+\infty[$

35.3. Se $k = -4$, a função g não tem zeros uma vez que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g, pelo que não há interseção deste gráfico com o eixo das abcissas.

36. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-2}=0 \Leftrightarrow 4x-9=0 \wedge x-2\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$

Logo, $A\left(\frac{9}{4},0\right)$.

$f(0)=\frac{0-9}{0-2}=\frac{9}{2}$

Logo, $C\left(0,\frac{9}{2}\right)$.

Assim, $A_{[OABC]}=\overline{OA}\times\overline{OC}=\frac{9}{4}\times\frac{9}{2}=\frac{81}{8}$ u.a.

37.

37.1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{c}{b}\right\}$

Uma vez que o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f, tem-se que:

$f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 3.$

Como a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de f, então:

$-\frac{3}{b} = -3 \Leftrightarrow b = 1$

Como a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, então:

$\frac{a}{1} = 2 \Leftrightarrow a = 2.$

37.2. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

O ponto de interseção com o eixo das ordenadas é o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Interseção com Ox:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+3} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \wedge x + 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

O ponto de interseção com o eixo das abcissas é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

37.3. $f(x) > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$

37.4. O gráfico da função g pode ser obtido do gráfico de f através de uma translação segundo o vetor de coordenadas (–1, –2). Assim, as assíntotas ao gráfico de g são as retas de equações $x = -3 - 1 \Leftrightarrow x = -4$ e $y = 2 - 2 \Leftrightarrow y = 0$.

38.

38.1. $T(0) = \frac{75(1 + 0{,}036 \times 0) + 20}{1 + 0{,}12 \times 0} = 95$

Quando o chá foi servido, a sua temperatura era 95 ºC.

38.2. $\frac{75(1 + 0{,}036x) + 20}{1 + 0{,}12x} = \frac{75 + 2{,}7x + 20}{1 + 0{,}12x} =$

$= \frac{2{,}7x + 95}{0{,}12x + 1} = 22{,}5 + \frac{72{,}5}{0{,}12x + 1}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2{,}7x + 95 & 0{,}12x + 1 \\ \cline{2-2} -2{,}7x - 22{,}5 & 22{,}5 \\ \hline 72{,}5 & \end{array}$$

A reta de equação $y = 22{,}5$ é assíntota horizontal ao gráfico da função T quando $t \to +\infty$. Assim, com o passar do tempo, a temperatura do chá tende para 22 ºC.

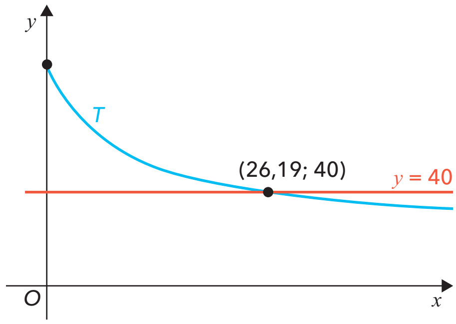
38.3. $T(0) = 95$

$T(10) = \frac{75(1 + 0{,}036 \times 10) + 20}{1 + 0{,}12 \times 10} = \frac{610}{11}$

$\frac{T(0) - T(10)}{T(0)} \times 100 = \frac{95 - \frac{610}{11}}{95} \times 100 \approx 42$

Nos primeiros 10 minutos, a temperatura do chá diminuiu, aproximadamente, 42%.

38.4. $T(x) = 40 \Leftrightarrow \frac{75(1 + 0{,}036x) + 20}{1 + 0{,}12x} = 40$



A temperatura do chá atinge os 40 ºC aos 26 minutos, aproximadamente.

39.

39.1. $a(0) = \frac{50(0 + 9{,}5)}{0 + 0{,}5} = 950$

950 centenas = 95 000

Quando os ratos se estabeleceram na ilha havia 95 000 aves da espécie em causa.

39.2. $a(t) = \frac{50(t + 9{,}5)}{t + 0{,}5} = \frac{50t + 475}{t + 0{,}5} = 50 + \frac{450}{t + 0{,}5}$

Cálculo auxiliar

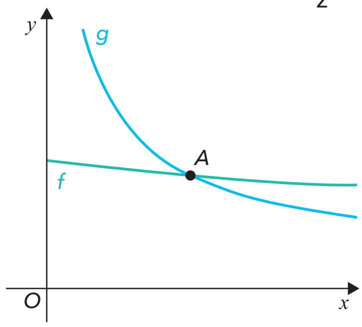
$$\begin{array}{r|l} 50t + 475 & t + 0{,}5 \\ \cline{2-2} -50t - 25 & 50 \\ \hline 450 & \end{array}$$

Quando t tende para $+\infty$, $a(t)$ tende para 50.

No contexto da situação apresentada, isso significa que, passado muito tempo, o número de aves tende a aproximar-se de 5000.

39.3. $a(t + 10) = \frac{1}{2}a(t)$

Sejam $f(x) = a(x + 10)$ e $g(x) = \frac{1}{2}a(x)$.



A(3,43; 82,31)

Assim, $t \approx 3{,}4$ anos.

Exercícios globais – páginas 71 a 75

40. Opção (A)

$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x) =$

$= (x^2 - 1) \times (x^2 + 2x + 4) + 6x + 9 =$

$= x^4 + 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 4 + 6x + 9 =$

$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

41. Opção (D)

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(x^2 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee (x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \vee x = -1$

Como a função f tem três zeros positivos, então o conjunto dos zeros da função g pode ser {–1, 1, 2, 3}.

42. Opção (A)

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$P(2) = 0$

$\Leftrightarrow 2^3 + 2^2 - (k^2 + 1) \times 2 - k = 0$

$\Leftrightarrow 8 + 4 - 2k^2 - 2 - k = 0$

$\Leftrightarrow -2k^2 - k + 10 = 0$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{-4}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{1 \pm 9}{-4}$

$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -\dfrac{5}{2}$

43. Opção (C)

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +ax^2 & +bx & +0 & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +4x^2 & -4x & & 2x + a - 4 \\ \hline & (a-4)x^2 & +(b-4)x & +0 & \\ & -(a-4)x^2 & +(-2a+8)x & -2a+8 & \\ \hline & & (-2a+b+4)x & -2a+8 & \end{array}$$

Para que o resto desta divisão seja $x + 2$, então:

$\begin{cases} -2a + b + 4 = 1 \\ -2a + 8 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ -2a = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 + b = -3 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 3 \end{cases}$

44. Opção (A)

A função h tem três zeros, um dos quais é $x = 2$. Os outros dois zeros de h são também zeros da função f. Então, um dos zeros da função g terá de ser $x = 2$.

Zeros da função apresentada na opção (A):

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$

Zeros da função apresentada na opção (B):

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

Zeros da função apresentada na opção (C):

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Zeros da função apresentada na opção (D):

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

A única destas funções que tem zero em $x = 2$ é a apresentada na opção (A).

45. Opção (A)

$g(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2} = 2 - \dfrac{5}{x + 2}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2x - 1 & x + 2 \\ \cline{2-2} -2x - 4 & 2 \\ \cline{1-1} -5 & \end{array}$$

A reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

46. Opção (C)

A reta de equação $x = 5$ é assíntota vertical ao gráfico de f, logo $c = 5$.

A reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, logo $a = 3$.

$f(2) = 0 \Leftrightarrow 3 + \dfrac{b}{2 - 5} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{-3} = -3 \Leftrightarrow b = 9$

47. Opção (B)

Por observação do gráfico, pode concluir-se que existe uma assíntota horizontal cujos pontos têm ordenada negativa, logo $a < 0$. Além disso, existe uma assíntota vertical cujos pontos têm ordenada positiva, logo $b > 0$.

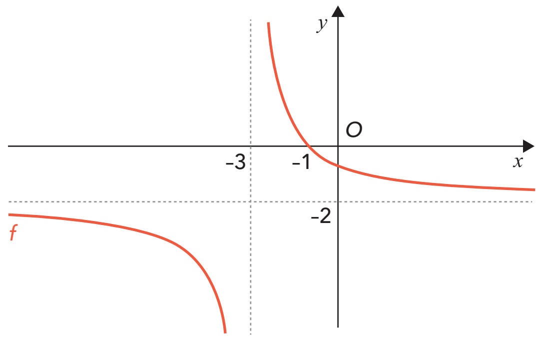
48. Opção (C)

Como as retas de equação $x = -3$ e $y = -2$ são assíntotas ao gráfico de f, então $c = -3$ e $a = -2$.

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + \dfrac{b}{-1 + 3} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = 4$

Logo, $f(x) = -2 + \dfrac{4}{x + 3}$.

Representação gráfica:



$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup [-1, +\infty[$, ou seja, a afirmação I é verdadeira.

Quando x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para -2, pelo que a afirmação II é falsa.

Se $k = -2$, $f(x) = k$ é uma equação impossível, logo a afirmação III é falsa.

49.

49.1. Pelo teorema do resto,

$P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^4 + (-2)^3 - k \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + k = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 8 - 4k + 4 + k = 0 \Leftrightarrow 12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Logo, $k = 4$.

49.2. Se $k = 1$, então $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Pela regra de Ruffini:

	1	1	−1	−2	1
−2		−2	2	−2	8
	1	−1	1	−4	9

Assim, $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 4$ e $R(x) = 9$.

49.3. Se $k = 0$, então $P(x) = x^4 + x^3 - 2x = x(x^3 + x^2 - 2)$.

Pela regra de Ruffini:

	1	1	0	−2
1		1	2	2
	1	2	2	0

Logo, $P(x) = x(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$.

Cálculo auxiliar

$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ Condição impossível em $\mathbb{R}$

Assim, $P(x) > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2+2x+2) > 0$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	–	0	+	+	+
$x-1$	–	–	–	0	+
x^2+2x+2	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	–	0	+

Então, C.S. $=]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

50. $f(x) = -x(x-a)(x+a)^2$, $a \in \mathbb{R}^+$

A função f tem três raízes: 0 é uma raiz simples, a é uma raiz simples e $-a$ é uma raiz dupla.

O gráfico III não é o gráfico da função f pois 0 não é raiz da função aí representada.

x	$-\infty$	$-a$		0		a	$+\infty$
$-x$	+	+	+	0	–	–	–
$x-a$	–	–	–	–	–	0	+
$(x-a)^2$	+	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	–	0	–	0	+	–	–

A função representada no gráfico I não é a função f, pois em $]-\infty, -a[$ a função f é negativa e a função aí representada é positiva neste intervalo.

A função representada no gráfico IV não é a função f, pois em $]-a, 0[$ a função f é negativa e a função aí representada é positiva neste intervalo.

A opção correta é a opção II.

51.

51.1. $f(x) = a(x-2)^3(x+1)$

$f(1) = 4 \Leftrightarrow a(1-2)^3(1+1) = 4 \Leftrightarrow -2a = 4 \Leftrightarrow a = -2$

Logo, $f(x) = -2(x-2)^3(x+1)$

$\Leftrightarrow f(x) = -2(x^2-4x+4)(x-2)(x+1)$

$\Leftrightarrow f(x) = -2(x^2-4x+4)(x^2-x-2)$

$\Leftrightarrow f(x) = -2(x^4-5x^3+6x^2+4x-8)$

$\Leftrightarrow f(x) = -2x^4+10x^3-12x^2-8x+16$

51.2. $f(x) \geq -8x+16$

$\Leftrightarrow -2x^4+10x^3-12x^2-8x+16 \geq -8x+16$

$\Leftrightarrow -2x^4+10x^3-12x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -2x^2(x^2-5x+6) \geq 0$

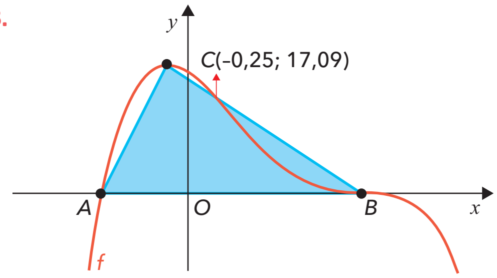
Cálculo auxiliar

$x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-4\times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
$-2x^2$	–	0	–	–	–	–	–
x^2-5x+6	+	+	+	0	–	0	+
$-2x^2(x^2-5x+6)$	–	0	–	0	+	0	–

Logo, C.S. $= \{0\} \cup [2, 3]$.

51.3.



$C(-0{,}25;\ 17{,}09)$

$A_{[ABC]} \approx \dfrac{(2-(-1)) \times 17{,}09}{2} \approx 25{,}6$ u.a.

52.

52.1. $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3}{2}x = \dfrac{x^2}{2} - 2$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 2x^2 - 8 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Divisores inteiros de 8: $-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8$

$P(1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$

$P(-2) = -8 - 12 + 12 + 8 = 0$

$P(4) = 64 - 48 - 24 + 8 = 0$

Assim, $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \vee x = 4$

Logo, $A(-2, 0)$.

$h(1) = \dfrac{1^2}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}$

Logo, $B\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Assim, $A_{[OAB]} = \dfrac{2 \times \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{2}$.

52.2. $g(x) > -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3}{2}x \geq -\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x > -6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 6 \geq 0$

$P(x) = x^3 - x^2 - 6x + 6$

Divisores inteiros de 6: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

$P(1) = 1 - 1 - 6 + 6 = 0$

	1	–1	–6	6
1		1	0	–6
	1	0	–6	0

Assim, $x^3 - x^2 - 6x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-6) \geq 0$.

Cálculo auxiliar

$x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$		1		$\sqrt{6}$	$+\infty$
x	–	–	–	0	+	+	+
x^2-6	+	0	–	–	–	0	+
$x(x^2-6)$	–	0	+	0	–	0	+

C.S. $= [-\sqrt{6}, 1] \cup [\sqrt{6}, +\infty[$

53. A função g tem um zero em $x = 2$, já que a abcissa de B é 2.

	1	−3	−4	12
2		2	2	−12
	1	−1	−6	0

Logo, $g(x) = 0$.
Assim, $x = 2 \vee x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3$

Então, a abcissa de A é −2 e a abcissa de C é 3.
$g(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 - 3 \times 0 + 12 = 12$
Ou seja, $D(0, 12)$.

Assim, $A_{[ACD]} = \dfrac{(3 - (-2)) \times 12}{2} = 30$ u.a.

54.

54.1. Como a reta de equação $x = -\dfrac{4}{3}$ é assíntota vertical ao gráfico de f, então $x = -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0$.

Logo, $f(x) = \dfrac{ax + b}{3x + 4}$.

Como $y = \dfrac{2}{3}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, então $\dfrac{a}{3} = \dfrac{2}{3}$. Logo, $a = 2$.

Então, $f(x) = \dfrac{2x + b}{3x + 4}$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 \times \frac{1}{2} + b}{3 \times \frac{1}{2} + 4} = 0 \Leftrightarrow 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$

Logo, $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$.

54.2. O ponto A pertence ao eixo Oy, logo a sua abcissa é 0.

$f(0) = \dfrac{2 \times 0 - 1}{3 \times 0 + 4} = -\dfrac{1}{4}$

Assim, $A\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$.

55. Opção (B)

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
$(x - a)(x - b)$	+	0	−	0	+	+	+
$(x - c)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	+

C.S. = $]a, b[$

56. $P(a) = 0$
$\Leftrightarrow a^4 + (-a - 1)a^3 - 7a^2 - 13a + 3a = 0$
$\Leftrightarrow a^4 - a^4 - a^3 - 7a^2 - 10a = 0$
$\Leftrightarrow -a^3 - 7a^2 - 10a = 0$
$\Leftrightarrow -a(a^2 + 7a + 10) = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{a = 0}_{\text{condição impossível, } a \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \vee a^2 + 7a + 10 = 0$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 10}}{2}$

$\Leftrightarrow a = -5 \vee a = -2$
Se $a = -5$:
$P(b) = 0 \Leftrightarrow b^4 + 4b^3 - 7b^2 - 13b - 15 = 0$
Divisores inteiros de −15: −1, 1, −3, 3, −5, 5, −15, 15
$P(-1) = -12$
$P(1) = -30$
$P(-3) = -66$
$P(3) = 72$
$P(-5) = 0$
$P(5) = 870$
$P(-15) = 35\,730$
$P(15) = 62\,340$
Assim, a única solução inteira da equação $b^4 + 4b^3 - 7b^2 - 13b - 15 = 0$ é $b = -5$.
Se $a = -2$:
$P(b) = 0 \Leftrightarrow b^4 + 2b^3 - b^3 - 7b^2 - 13b - 6 = 0$
Divisores inteiros de −6: −1, 1, −2, 2, −3, 3, −6, 6
$P(-1) = 0$
$P(1) = -24$
$P(-2) = 0$
$P(2) = -36$
$P(-3) = 24$
$P(3) = 0$
$P(-6) = 900$
$P(6) = 1176$
Assim, $b = -1$ ou $b = -2$ ou $b = 3$.

57.

57.1. $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 10$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4}{3}x + 7 = -\dfrac{2}{3}x + 10$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 21 = -2x + 30$
$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$

Assim, a equação $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 10$ tem uma única solução, ou seja, a reta de equação $y = -\dfrac{2}{3}x + 10$ interseta o gráfico de f num único ponto.

$f(3) = -\dfrac{3^2}{3} + 4 \times 3 + 7 = -3 + 12 + 7 = 16$

O ponto de interseção da reta de equação $y = -\dfrac{2}{3}x + 10$ com o gráfico de f tem coordenadas $(3, 16)$.

57.2 a) Seja D o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.
A abissa do vértice da parábola que representa a função f é $x = \dfrac{-\frac{4}{3}}{2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 2$.

Tem-se, assim, que $r: x = 2$.
Então, $D(2, 0)$.
$\overline{DQ} = x - 2$
$\overline{RQ} = 2(x - 2) = 2x - 4$

$\overline{PQ} = -\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4}{3}x + 7$

Assim, $g(x) = (2x - 4)\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x + 7\right)$

$\Leftrightarrow g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{26}{3}x - 28$

$\Leftrightarrow g(x) = -\frac{2}{3}(x^3 - 6x^2 - 13x + 42)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 21 = 0$

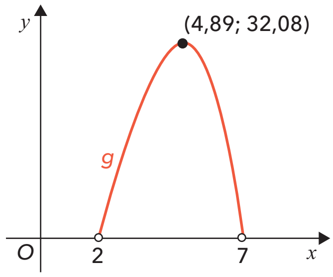
$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 21}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 10}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 7$

Assim, $D_g =]2, 7[$.

b)



$D'_g =]0, a]$, onde $a \approx 32{,}08$.

58.

58.1 a) $\overline{AB} = x$

$C(x, f(x))$, ou seja, $C\left(x, \frac{3x + 18}{x - 2}\right)$ e $D\left(0, \frac{3x + 18}{x - 2}\right)$

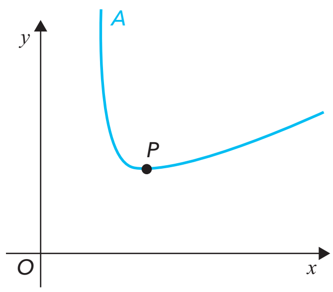
$f(0) = \frac{3 \times 0 + 18}{0 - 2} = -9$, logo, $A(0, -9)$.

Então, $\overline{AD} = \frac{3x + 18}{x - 2} - (-9) = \frac{3x + 18}{x - 2} + 9 =$

$= \frac{3x + 18 + 9x - 18}{x - 2} = \frac{12x}{x - 2}$

Logo, $A(x) = \overline{AB} \times \overline{AD} = x \times \frac{12x}{x - 2} = \frac{12x^2}{x - 2}$.

b)



$P(4, 96)$

O valor de x para o qual a área é mínima é 4 e a área mínima é 96.

58.2. A reta de equação $x = 2$ é a assíntota vertical ao gráfico de f.

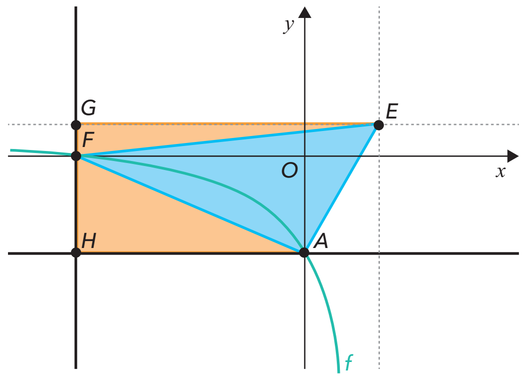
A reta de equação $y = 3$ é a assíntota horizontal ao gráfico de f.

Logo, $E(2, 3)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 18}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 18 = 0 \wedge x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -6$

Logo, $F(-6, 0)$.



O ponto G é o ponto de interseção da reta paralela a Ox que passa em E com a reta paralela a Oy que passa em F. Logo, $G(-6, 3)$.

O ponto H é o ponto de interseção da reta paralela a Ox que passa em A com a reta paralela a Oy que passa em F. Logo, $H(-6, -9)$.

$\overline{GH} = 3 + 9 = 12$

$\overline{GE} = 6 + 2 = 8$

$\overline{AH} = 6$

$A_{[AHGE]} = \frac{\overline{GE} + \overline{AH}}{2} \times \overline{GH} = \frac{8 + 6}{2} \times 12 = 84$

$A_{[EFG]} = \frac{\overline{GE} \times \overline{FG}}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$

$A_{[AHF]} = \frac{\overline{AH} \times \overline{HF}}{2} = \frac{6 \times 9}{2} = 27$

Logo, $A_{[AEF]} = A_{[AHGE]} - A_{[EFG]} - A_{[AHF]} = 84 - 12 - 27 =$
$= 45$ u.a.

4. Cálculo diferencial

Taxa média de variação e taxa de variação instantânea

Exercícios – páginas 76 e 77

59.

59.1. $\text{tmv}_{[2,\,5]} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{(3 \times 5 + 1) - (3 \times 2 + 1)}{3} =$

$= \frac{16 - 7}{3} = \frac{9}{3} = 3$

59.2. $\text{tmv}_{[-2,\,-1]} = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} =$

$= \frac{((-1)^2 + 2 \times (-1)) - ((-2)^2 - 2 \times (-2))}{-1 + 2} =$

$= \frac{-1 - 0}{1} = -1$

59.3. $\text{tmv}_{[-2,\,2]} = \frac{h(2) - h(-2)}{2 - (-2)} = \frac{-\frac{1}{2 - 3} - \left(-\frac{1}{-2 - 3}\right)}{4} =$

$= \frac{1 - \frac{1}{5}}{4} = \frac{\frac{4}{5}}{4} = \frac{1}{5}$

59.4. $\text{tmv}_{[-1,\,3]} = \frac{i(0) - i(-1)}{0 - (-1)} = \frac{\frac{2 \times 0 - 1}{2 - 0} - \frac{2 \times (-1) - 1}{2 - (-1)}}{1} =$

$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

60.

60.1. a) Por exemplo, [3, 4], uma vez que $\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=$

$=\frac{0-2}{1}=-2.$

b) Por exemplo, [–2, 2], uma vez que $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=$

$=\frac{2-2}{4}=0.$

c) Por exemplo, [0, 2], uma vez que $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=$

$=\frac{2-0}{2}=1.$

60.2. a) $\text{tmv}_{[2,\,4]}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{0-2}{2}=-1$

b) $\text{tmv}_{[0,\,6]}=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{3-0}{6}=\frac{1}{2}$

c) $\text{tmv}_{[0,\,5]}=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{-1-0}{5}=-\frac{1}{5}$

61.

61.1. $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x-0}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x=1$

61.2. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+3x+1-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^2-2x+3)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+3)=0^2-2\times 0+3=3$

61.3. $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{x+1}{x-3}-(-3)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{x+1+3(x-3)}{x-3}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{4x-8}{x-3}}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4}{(x-3)}=\frac{4}{2-3}=-4$

61.4. $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{3x+2}{x}-\frac{3\times(-1)+2}{-1}}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{3x+2}{x}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{3x+2-x}{x}}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+2}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2}{x}=-2$

62.

62.1. $f(x)=x^2$

$f(1)=1^2=1$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$

Assim, a equação pedida é da forma $y=2x+b$.

Como (1, 1) é o ponto de tangência:

$1=2\times 1+b\Leftrightarrow b=-1$

A equação pedida é $y=2x-1$.

62.2. $f(x)=-x^2+3x+1$

$f(1)=-1+3+1=3$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x^2+3x+1-3}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-2)(x-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(-(x-2))=-1+2=1$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $-x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}\Leftrightarrow x=\frac{3\pm 1}{2}\Leftrightarrow x=2\vee x=1$

Assim, a equação pedida é da forma $y=x+b$.

Como (1, 3) é o ponto de tangência:

$3=1+b\Leftrightarrow b=2$

A equação pedida é $y=x+2$.

62.3. $f(x)=\frac{x+3}{2x-1}$

$f(1)=\frac{4}{1}=4$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{x+3}{2x-1}-4}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{x+3-8x+4}{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-7x+7}{(2x-1)(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-7(x-1)}{(2x-1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{7}{2x-1}\right)=$

$=-\frac{7}{2\times 1-1}=-7$

Assim, a equação pedida é da forma $y=-7x+b$.

Como (1, 4) é o ponto de tangência:

$4=-7\times 1+b\Leftrightarrow b=11$

A equação pedida é $y=-7x+11$.

62.4. $f(x)=(2x-3)^2$

$f(1)=(2\times 1-3)^2=1$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-3)^2-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-3-1)(2x-3+1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-4)(2x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x-4)\times 2(x-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}(2(2x-4))=2\times(2-4)=-4$

Assim, a equação pedida é da forma $y=-4x+b$.

Como (1, 1) é o ponto de tangência:

$1=-4\times 1+b\Leftrightarrow b=5$

A equação pedida é $y=-4x+5$.

63.

63.1. $f(-1)=-(-1)^2+(-1)+12=10$

$f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{-x^2+x+12-10}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{-x^2+x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{-(x-2)(x+1)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}(-(x-2))=3$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $-x^2+x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm 3}{2}\Leftrightarrow x=2\vee x=-1$

Ou seja, o declive a reta r é 3 e a sua equação é do tipo $y = 3x + b$.
Como o ponto de coordenadas $(-1, f(-1))$, ou seja, $(-1, 10)$, pertence a esta reta, então $10 = 3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 13$.
Assim, $r: y = 3x + 13$.
$f(3) = -3^2 + 3 + 12 = 6$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-x^2 + x + 12 - 6}{x - 3} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{-x^2 + x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{x - 3} =$$
$$= \lim_{x \to 3} (-(x+2)) = -5$$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

Ou seja, o declive a reta s é -5 e a sua equação é do tipo $y = -5x + b$.
Como o ponto de coordenadas $(3, f(3))$, ou seja, $(3, 6)$, pertence a esta reta, então
$6 = -5 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 21$
Assim, $s: y = -5x + 21$.

63.2. Ponto A:
$3x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{3}$
Então, $A\left(-\frac{13}{3}, 0\right)$.
Ponto B:
$-5x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{21}{5}$
Então, $B\left(\frac{21}{5}, 0\right)$.
Ponto C:
$3x + 13 = -5x + 21 \Leftrightarrow 3x + 5x = 21 - 13 \Leftrightarrow 8x = 8$
$\Leftrightarrow x = 1$
$3 \times 1 + 13 = 16$
Então, $C(1, 16)$.

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{\left(\frac{21}{5} - \left(-\frac{13}{3}\right)\right) \times 16}{2} = \frac{1024}{15} \text{ u.a.}$$

64.
64.1. Como $f'(1) = 2$, então uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = 2x + b$.
O ponto de coordenadas $(1, 1)$ pertence a esta reta, logo, $1 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$.
A equação pedida é $y = 2x - 1$.

64.2. O declive da reta t é 3. Logo, o declive de uma reta perpendicular a t é $-\frac{1}{3}$.
Assim, a equação pedida é da forma $y = -\frac{1}{3}x + b$.
O ponto de interseção do gráfico de t com o gráfico de f é o ponto de tangência, cuja abcissa é 2. A ordenada deste ponto é $y = 3 \times 2 - 1 = 5$.
Assim, o ponto de coordenadas $(2, 5)$ pertence à reta pretendida. Logo,
$5 = -\frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{17}{3}$.
A equação pedida é $y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$.

64.3. a) $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2$.

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times (f(x) + f(1))\right) =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \to 1} (f(x) + f(1)) =$$
$$= f'(1) \times 2f(1) = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3$

d) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \times (x + 2)\right) =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \times \lim_{x \to 1} (x + 2) =$$
$$= \frac{1}{f'(2)} \times (2 + 2) = \frac{4}{3}$$

Função derivada. Regras de derivação

Exercícios – página 78

65.
65.1. $(f - g)'(3) = f'(3) - g'(3) = -1 - 4 = -5$

65.2. $(5f + 2g)'(3) = 5f'(3) + 2g'(3) = 5 \times (-1) + 2 \times 4 =$
$= -5 + 8 = 3$

65.3. $(2f)'(3) \times g'(3) = 2f'(3) \times g'(3) = 2 \times (-1) \times 4 = -8$

65.4. $(f \times g)'(3) = f'(3) \times g(3) + f(3) \times g'(3) =$
$= -1 \times (-3) + 2 \times 4 =$
$= 3 + 8 =$
$= 11$

65.5. $(f \times f)'(3) = f'(3) \times f(3) + f(3) \times f'(3) =$
$= -1 \times 2 + 2 \times (-1) =$
$= -2 - 2 =$
$= -4$

65.6. $$\left(\frac{f}{g}\right)'(3) = \frac{f'(3) \times g(3) - f(3) \times g'(3)}{(g(3))^2} =$$
$$= \frac{-1 \times (-3) - 2 \times 4}{(-3)^2} = \frac{3 - 8}{9} = -\frac{5}{9}$$

65.6. $$\left(\frac{2}{g}\right)'(3) = \frac{-2 \times g'(3)}{(g(3))^2} = \frac{-2 \times 4}{(-3)^2} = -\frac{8}{9}$$

65.6. $$\left(\frac{1}{g - f}\right)'(3) = \frac{-(g - f)'(3)}{((g - f)(3))^2} = -\frac{g'(3) - f'(3)}{(g(3) - f(3))^2} =$$
$$= \frac{-3 - (-1)}{(4 - 2)^2} = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$$

66.
66.1. $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' =$
$= 2x + 2$

66.2. $$f'(x) = \left[\frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + 6x)\right]' =$$
$$= \frac{1}{2}(4x^3 - 6x^2 + 6) =$$
$$= 2x^3 - 3x^2 + 3$$

66.3. $f'(x) = \left(\dfrac{x^3 - 3x + 9}{3}\right)' =$
$= \dfrac{1}{3}(3x^2 - 3) =$
$= x^2 - 1$

66.4. $f'(x) = [(x^2 + 3x)^2]' =$
$= 2(x^2 + 3x)(x^2 + 3x)' =$
$= 2(x^2 + 3x)(2x + 3)$

66.5. $f'(x) = [(-2x^3 + x + 1)^4]' =$
$= 4(-2x^3 + x + 1)^3(-2x^3 + x + 1)' =$
$= 4(-2x^3 + x + 1)^3(-6x^2 + 1)$

66.6. $f'(x) = [(x^2 + 2x)(x^4 - x^3 + 2)]' =$
$= (x^2 + 2x)'(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 + 2x)(x^4 - x^3 + 2)' =$
$= (2x + 2)(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 + 2x)(4x^3 - 3x^2) =$
$= 2x^5 - 2x^3 + 4x + 4 + 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 =$
$= 6x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 4x + 4$

66.7. $f'(x) = [(x + 3)^3(2x - 5)]' =$
$= [(x + 3)^3]'(2x - 5) + (x + 3)^3(2x - 5)' =$
$= 3(x + 3)^2(2x - 5) + (x + 3)^3 \times 2 =$
$= (x + 3)^2[3(2x - 5) + 2(x + 3)] =$
$= (x + 3)^2(6x - 15 + 2x + 6) =$
$= (x + 3)^2(8x - 9)$

66.8. $f'(x) = [(x^2 - 5x + 6)^2(x - 3)^3]' =$
$= [(x^2 - 5x + 6)^2]'(x - 3)^3 + (x^2 - 5x + 6)^2[(x - 3)^3]' =$
$= 2(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 6)'(x - 3)^3 +$
$+ (x^2 - 5x + 6)^2 \times 3(x - 3)^2 =$
$= 2(x^2 - 5x + 6)(2x - 5)(x - 3)^3 + (x^2 - 5x + 6)^2 \times 3(x - 3)^2 =$
$= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2[2(x - 3)(2x - 5) + 3(x^2 - 5x + 6)] =$
$= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2(4x^2 - 22x + 30 + 3x^2 - 15x + 18) =$
$= (x^2 - 5x + 6)(x - 3)^2(7x^2 - 37x + 48)$

66.9. $f'(x) = \left(\dfrac{x - 1}{x + 3}\right)' =$
$= \dfrac{(x - 1)'(x + 3) - (x - 1)(x + 3)'}{(x + 3)^2} =$
$= \dfrac{x + 3 - x + 1}{(x + 3)^2} =$
$= \dfrac{4}{(x + 3)^2}$

66.10. $f'(x) = \left[\dfrac{x^2 - 3x + 4}{(x - 1)^2}\right]'$
$= \dfrac{(x^2 - 3x + 4)'(x - 1)^2 - (x^2 - 3x + 4)[(x - 1)^2]'}{[(x - 1)^2]^2} =$
$= \dfrac{(2x - 3)(x - 1)^2 - (x^2 - 3x + 4) \times 2(x - 1)}{(x - 1)^4} =$
$= \dfrac{(x - 1)[(2x - 3)(x - 1) - 2(x^2 - 3x + 4)]}{(x - 1)^4} =$
$= \dfrac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 5x - 8}{(x - 1)^3} =$
$= \dfrac{x - 5}{(x - 1)^3}$

66.11. $f'(x) = \left[\dfrac{(x - 1)^3}{x^3 - 1}\right]' =$
$= \dfrac{[(x + 1)^3]'(x^3 - 1) - (x + 1)^3(x^3 - 1)'}{(x^3 - 1)^2} =$
$= \dfrac{3(x + 1)^2(x^3 - 1) - (x + 1)^3 \times 3x^2}{(x^3 - 1)^2} =$
$= \dfrac{3(x + 1)^2[x^3 - 1 - (x + 1)x^2]}{(x^3 - 1)^2} =$
$= \dfrac{3(x + 1)^2(x^3 - 1 - x^3 - x^2)}{(x^3 - 1)^2} =$
$= \dfrac{3(x + 1)^2(-1 - x^2)}{(x^3 - 1)^2} =$
$= \dfrac{-3(x + 1)^2(x^2 + 1)}{(x^3 - 1)^2}$

66.12. $f'(x) = \left[\left(\dfrac{x + 2}{2x - 1}\right)^2\right]' =$
$= 2\left(\dfrac{x + 2}{2x - 1}\right)\left(\dfrac{x + 2}{2x - 1}\right)' =$
$= 2\left(\dfrac{x + 2}{2x - 1}\right)\dfrac{(x + 2)'(2x - 1) - (x + 2)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} =$
$= 2 \times \dfrac{x + 2}{2x - 1} \times \dfrac{2x - 1 - 2(x + 2)'}{(2x - 1)^2} =$
$= \dfrac{2(x + 2)(2x - 1 - 2x - 4)}{(2x - 1)^3} =$
$= \dfrac{-10(x + 2)}{(2x - 1)^3}$

67. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

$f'(x) = \left(\dfrac{2x}{x - 1}\right) = \dfrac{2(x - 1) - 2x}{(x - 1)^2} = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$

67.1. a) $f(-1) = \dfrac{-2}{-2} = 1$

$f'(-1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Assim, a equação pedida é da forma $y = -\dfrac{1}{2}x + b$.
Como $(-1, 1)$ é o ponto de tangência:
$1 = -\dfrac{1}{2} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{2}$

A equação pedida é $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

b) $f(0) = 0$
$f'(0) = -2$
Assim, a equação pedida é da forma $y = -2x + b$.
Como $(0, 0)$ é o ponto de tangência:
$0 = -2 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$
A equação pedida é $y = -2x$.

c) $f'(x) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(x - 1)^2} = -2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 1$
$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \lor x - 1 = -1$
$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = 0$
O ponto de abcissa positiva tem abcissa 2.
$f(2) = \dfrac{4}{1} = 4$
Assim, a equação pedida é da forma $y = -2x + b$.
Como $(2, 4)$ é o ponto de tangência:
$4 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 8$
A equação pedida é $y = -2x + 8$.

67.2. a) $f(-2) = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$f'(-2) = \frac{-2}{9}$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2 é da forma

$y = -\frac{2}{9}x + b$.

Como $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$ é o ponto de tangência:

$\frac{4}{3} = -\frac{2}{9} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{8}{9}$

Logo, a equação referida é $y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$.

$4x + 9y = 1 \Leftrightarrow 9y = -4x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$

Assim, a abcissa do ponto de interseção das duas retas é dada por:

$$-\frac{2}{9}x + \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9} \Leftrightarrow -2x + 8 = -4x + 1$$
$$\Leftrightarrow 2x = -7$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

A ordenada do ponto de interseção das duas retas é:

$y = -\frac{2}{9} \times \left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{8}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

Então, as coordenadas do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2 com a reta de equação $4x + 9y = 1$ são $\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{3}\right)$.

b) O declive da reta tangente ao gráfico de f a que se refere o enunciado é $m = \text{tg } 135° = -1$.

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = -1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2} \lor x - 1 = -\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2} \lor x = 1 - \sqrt{2}$$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{2(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Assim, as coordenadas dos pontos de tangência das retas tangentes ao gráfico de f com inclinação de 135° são $(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ e $(1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$.

67.3. $f'(3) = \frac{-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{2}$

Tem-se que $\text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -26{,}6°$ e $180° - 26{,}6° = 153{,}4°$.

Então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3 é 153,4°.

Relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função

Exercícios – página 79

68.

68.1. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [0, 3[\cup]3, 5] \cup]6, +\infty[$

68.2. $f(x) \times f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2, 0[\cup]5, 6[$

x	$-\infty$	-3		-2		0		3		5		6	$+\infty$
$f(x)$	–	0	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	n.d.	–	0	+	n.d.	+	0	–	n.d.	0
$f(x) \times f'(x)$	–	0	+	n.d.	–	0	+	n.d.	+	0	–	n.d.	0

69.

69.1. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 6$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \lor x = -1$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+	0	–
Variação de f	↘	mín	↗	Máx	↘

$f(-1) = 2 + 3 - 12 + 6 = -1$

$f(2) = -16 + 12 + 24 + 6 = 26$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[2, +\infty[$, é estritamente crescente em $[-1, 2]$; tem máximo relativo 26 em $x = 2$ e tem mínimo relativo -1 em $x = -1$.

69.2. $f(x) = 2(x-1)(x-2)^2$

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2[(x-2)^2 + (x-1)2(x-2)] =$$
$$= 2(x-2)(x-2+2x-2) = 2(x-2)(3x-4)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(3x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \lor 3x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = \frac{4}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	–	0	+
Variação de f	↗	Máx	↘	mín	↗

$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$

$f(2) = 2 \times 1 \times 0 = 0$

f é estritamente crescente em $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right]$ e em $[2, +\infty[$, é estritamente decrescente em $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$; tem máximo relativo $\frac{8}{27}$ em $x = \frac{4}{3}$ e tem mínimo relativo 0 em $x = 2$.

69.3. $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$$f'(x) = \frac{3(x-3) - (3x+1)}{(x-3)^2} = \frac{3x - 9 - 3x - 1}{(x-3)^2} = \frac{-10}{(x-3)^2}$$

$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$

Logo, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$ e não tem extremos relativos.

69.4. $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 - 9}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 - 9)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
Sinal de f'		–	n.d.	–	0	+	n.d.	+
Variação de f		↘	n.d.	↘	mín	↗	n.d.	↗

$f(0) = \dfrac{-1}{-9} = \dfrac{1}{9}$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, 0]$, é estritamente crescente em $[0, 3[$ e em $]3, +\infty[$; tem mínimo relativo $\dfrac{1}{9}$ em $x = 0$.

69.5. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{1 - 2x}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)(1-2x) - (x-1)^2(-2)}{(1-2x)^2} =$

$= \dfrac{2(x-1)(1-2x+x-1)}{(1-2x)^2} =$

$= \dfrac{-2x(x-1)}{(1-2x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x(x-1)}{(1-2x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = 1$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+	n.d.	+	0	–
Variação de f	↘	mín	↗	n.d.	↗	Máx	↘

$f(0) = 1$
$f(1) = 0$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty[$, é estritamente crescente em $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ e em $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$; tem mínimo relativo 1 em $x = 0$ e tem máximo relativo 0 em $x = 1$.

69.6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^3 - 1) - (x^2 - 1) \times 3x^2}{(x^3 - 1)^2} =$

$= \dfrac{2x(x-1)(x^2+x+1) - 3x^2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{x(x-1)[2(x^2+x+1) - 3x(x+1)]}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{x(2x^2 + 2x + 2 - 3x^2 - 3x)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{x(-x^2 - x + 2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{-x(x+2)(x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

Cálculos auxiliares

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$: equação impossível em $\mathbb{R}$

Logo, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

Logo, $-x^2 - x + 2 = -(x + 2)(x - 1)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+	0	–	n.d.	–
Variação de f	↘	mín	↗	Máx	↘	n.d.	↘

$f(-2) = \dfrac{4-1}{-8-1} = \dfrac{3}{-9} = -\dfrac{1}{3}$

$f(0) = 1$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$, em $[0, 1[$ e em $]1, +\infty[$, é estritamente crescente em $[-2, 0]$; tem mínimo relativo $-\dfrac{1}{3}$ em $x = -2$ e tem máximo relativo 1 em $x = 0$.

69.7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2, -1\}$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

$f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2+3x+2) - (x^2-4x+4)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} =$

$= \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12}{(x^2+3x+2)^2} =$

$= \dfrac{7x^2 - 4x - 20}{(x^2+3x+2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{7x^2 - 4x - 20}{(x^2+3x+2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 7x^2 + 4x - 20 = 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{14} \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -1$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\dfrac{10}{7}$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{10}{7}$		-1		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	+	0	–	n.d.	–	0	+
Variação de f	↗	n.d.	↗	Máx	↘	n.d.	↘	mín	↗

$$f\left(-\frac{10}{7}\right) = \frac{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 4}{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{10}{7}\right) + 2} = -48$$

$f(2) = 0$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$, em $\left]-2, -\frac{10}{7}\right]$ e em $[2, +\infty[$, é estritamente decrescente em $\left[-\frac{10}{7}, -1\right[$ e em $]-1, 2]$; tem mínimo relativo 0 em $x = 2$ e tem máximo relativo -48 em $x = -\frac{10}{7}$.

69.8. $f(x) = \left(\frac{x-2}{3-x}\right)^3$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$f'(x) = 3\left(\frac{x-2}{3-x}\right)^2 \frac{3-x+x-2}{(3-x)^2} = \frac{3(x-2)^2}{(3-x)^4}$

$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$

Logo, f é estritamente crescente $]-\infty, 3[$ e em $]3, +\infty[$ e não tem extremos relativos.

Otimização em contexto de modelação

Exercícios – página 80

70.

70.1. $\text{tmv}_{[0,\,30]} = \dfrac{\frac{13}{60} \times 30 \times \left(\frac{30}{60} - 4\right)^2 - 0}{30 - 0} \approx 2{,}7$ m/s

70.2. $p'(t) = \left(\frac{13}{60} t \left(\frac{t}{60} - 4\right)^2\right)' =$

$= \left(\frac{13}{60} t\right)' \left(\frac{t}{60} - 4\right)^2 + \frac{13}{60} t \left(\left(\frac{t}{60} - 4\right)^2\right)' =$

$= \frac{13}{60} \left(\frac{t}{60} - 4\right)^2 + \frac{13}{60} t \times 2 \times \left(\frac{t}{60} - 4\right)' \left(\frac{t}{60} - 4\right) =$

$= \frac{13}{60} \left(\frac{t}{60} - 4\right)^2 + \frac{13}{30} t \times \frac{1}{60} \times \left(\frac{t}{60} - 4\right) =$

$= \frac{13}{60} \left(\frac{t}{60} - 4\right) \left(\frac{t}{60} - 4 + \frac{t}{30}\right) =$

$= \frac{13}{60} \left(\frac{t}{60} - 4\right) \left(\frac{t}{20} - 4\right)$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{13}{60} \left(\frac{t}{60} - 4\right) \left(\frac{t}{20} - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{t}{60} - 4 = 0 \ \vee\ \frac{t}{20} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{t}{60} = 4 \ \vee\ \frac{t}{20} = 4$

$\Leftrightarrow t = 240 \ \vee\ t = 80$

t	0		80		240
Sinal de p'		+	0	–	
Variação de p		↗	Máx	↘	

$p(80) = \frac{13}{60} \times 80 \left(\frac{80}{60} - 4\right)^2 \approx 123$

A profundidade máxima atingida pelo mergulhador foi, aproximadamente, 123 metros, e ocorreu aos 80 segundos de mergulho.

71.

71.1. $V = x \times x \times y \Leftrightarrow 216 = x^2 y \Leftrightarrow y = \frac{216}{x^2}$

$A = x \times x + 4 \times x \times y = x^2 + 4x \times \frac{216}{x^2} = x^2 + \frac{864}{x}$

Assim, a área da superfície da caixa, em função de x, é dada por $A(x) = x^2 + \frac{864}{x}$.

$A'(x) = 2x - \frac{864}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{864}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 864}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 864 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 = 432$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{432}$

$\Leftrightarrow x = 6\sqrt[3]{2}$

x	0		$6\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
Sinal de A'		–	0	+
Variação de A		↘	mín	↗

O valor de x para o qual a área da superfície da caixa é mínima é $6\sqrt[3]{2}$ cm.

71.2. $C = x \times x \times \frac{30}{10\,000} + 4 \times x \times y \times \frac{40}{10\,000} =$

$= 0{,}003x^2 + 0{,}016x \times \frac{216}{x^2} = 0{,}003x^2 + \frac{3{,}456}{x}$

Assim, o custo de construção da caixa é dado, em função de x, por $C(x) = 0{,}003x^2 + \frac{3{,}456}{x}$.

$C'(x) = 0{,}006x - \frac{3{,}456}{x^2} = \frac{0{,}006x^3 - 3{,}456}{x^2}$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{0{,}006x^3 - 3{,}456}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 0{,}006x^3 - 3{,}456 = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 576$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{576}$

Logo, $x \approx 8{,}3$.

x	0		8,3	$+\infty$
Sinal de C'		–	0	+
Variação de C		↘	mín	↗

O valor de x para o qual o custo de produção da caixa é mínimo é 8,3 cm.

72. Pelo teorema de Pitágoras,

$4^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 16 = 2\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 8$

e

$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 8 - 4 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 4$

Logo, $\overline{OC} = 2$.

Assim, a reta BC contém os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(2, 0)$. Logo, uma equação desta reta é $y = -x + 2$.

Seja $x \in]0, 2[$.

O comprimento de cada um dos retângulos que se podem construir nas condições do enunciado é $2x$ e a sua altura é $-x + 2$.

A área de cada um desses retângulos é dada por $A(x) = 2x(-x + 2) = -2x^2 + 4x$.

$A'(x) = -4x + 4$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		2
Sinal de A'	n.d.	+	0	–	n.d.
Variação de A	n.d.	↗	Máx	↘	n.d.

O retângulo de área máxima obtém-se quando $x = 1$.

$A(1) = -2 \times 1 + 4 \times 1 = 2$
$\overline{DE} = 2 \times 1 = 2$
$\overline{EF} = -1 + 2 = 1$
A área máxima é 2. O comprimento do retângulo de área máxima é 2 e a sua altura é 1.

73. Sejam r o raio e h a altura do cone.
Pelo teorema de Pitágoras,
$(\sqrt{3})^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow r^2 = 3 - h^2$
O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$.
Ou seja, o volume do cone é dado, em função de h, por $V(h) = \frac{\pi(3 - h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(3h - h^3)$.

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(3 - 3h^2)$

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(3 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - h^2 = 0$

$\Leftrightarrow h = 1 \vee h = -1$

Como $h > 0$, então $h = 1$.

h	0		1	$+\infty$
Sinal de V'	n.d.	+	0	–
Variação de V	n.d.	↗	Máx	↘

Logo, a altura do cone de volume máximo é igual a 1.
$r^2 = 3 - 1^2 \Leftrightarrow r^2 = 2$, logo $r = \sqrt{2}$.
O raio do cone de volume máximo é igual a $\sqrt{2}$.
$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 2 \times 1 = \frac{2\pi}{3}$

O volume máximo é $\frac{2\pi}{3}$.

Exercícios globais – páginas 81 a 84

74. Opção (B)
$d(t) = 5t^2$, logo $d'(t) = 10t$.
Assim, $d'(10) = 10 \times 10 = 100$, pelo que, a velocidade do corpo, ao fim de 10 segundos é 100 m/s.

75. Opção (D)
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	–1		1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	–	0	+
Variação de f	↗	Máx	↘	mín	↗

Assim, f é decrescente em $]-1, 1[$, f é crescente em $]1, +\infty[$ e f tem um máximo para $x = -1$. Ou seja, "f tem um mínimo para $x = -1$" é uma afirmação falsa.

76.
76.1. $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$
Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = 1$ é da forma $y = \frac{1}{8}x + b$.
$f(1) = 0$
Como o ponto de tangência tem coordenadas (1, 0), vem que:
$0 = \frac{1}{8} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{8}$
Logo, a equação pedida é $y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$.

76.2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^3} = 0$ (equação impossível)

x	$-\infty$	–1	$+\infty$
Sinal de f'	–	n.d.	+
Variação de f	↘	n.d.	↗

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$ e é estritamente crescente em $]-1, +\infty[$. A função f não tem extremos relativos.

77. Opção (D)
Como $\text{tmv}_{[a, b]} = 3$, então o declive da reta AB é 3.
$\overline{OC} = \overline{CD} = 2$. Logo, $\overline{OD} = 4$ e $D(0, 4)$.
Assim, a equação reduzida da reta r é $y = 3x + 4$.

78. Opção (C)
$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)' = \frac{2(2x-1) - 2(2x+1)}{(2x-1)^2} =$
$= \frac{4x - 2 - 4x - 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$
$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-4}{\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2} = \frac{-4}{(-2)^2} = -1$
Assim, sendo α a inclinação da reta t, tem-se $\text{tg}\,\alpha = -1 \wedge 0^\circ \le \alpha < 180^\circ$, ou seja, $\alpha = 135^\circ$.

79. Opção (B)

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+	0	–	0	+
Variação de f	↘	mín	↗	Máx	↘	mín	↗

80. Opção (C)
Uma vez que o gráfico de f' é uma reta, então o gráfico da função f pode ser uma parábola, ou seja, f é uma função polinomial de grau 2.
Por outro lado, $f'(x) > 0$ para $x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 1[$ e $f'(1) = 0$, então a função f é crescente em $]-\infty, 1[$ e decrescente em $]-\infty, 1[$, ou seja, a parábola que a representa tem a concavidade voltada para baixo.
Se $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, então $f'(x) = -2x + 3$ e $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
Se $f(x) = -x^2 + 2x + 2$, então $f'(x) = -2x + 2$ e $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$.

81. 10 h 15 min corresponde a 10,25 horas.
$\text{tmv}_{[10;\, 10{,}25]} = \frac{12}{0{,}25} = 48$
Assim, a velocidade média do José nesse trajeto foi 48 km/h, pelo que a multa poderá não ter sido aplicada corretamente. No entanto, este valor não permite saber se em algum momento durante o percurso o José ultrapassou a velocidade máxima permitida.

82.

82.1. $d(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}1t^3 + 1{,}2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(-0{,}1t + 1{,}2) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow -0{,}1t + 1{,}2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \dfrac{1{,}2}{0{,}1}$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 12$

O robô demora 12 segundos a percorrer a pista de testes.

82.2. $\text{tmv}_{[0,\,2]} = \dfrac{d(2) - d(0)}{2 - 0} = \dfrac{-0{,}1 \times 2^3 + 1{,}2 \times 2^2 - 0}{2 - 0} = \dfrac{4}{2} = 2$

A velocidade média do robô nos primeiros dois segundos foi 2 m/s.

82.3. $d'(2) = \lim\limits_{t \to 2} \dfrac{d(t) - d(2)}{t - 2} =$

$= \lim\limits_{t \to 2} \dfrac{-0{,}1t^3 + 1{,}2t^2 - (-0{,}1 \times 2^3 + 1{,}2 \times 2^2)}{t - 2} =$

$= \lim\limits_{t \to 2} \dfrac{-0{,}1t^3 + 1{,}2t^2 - 4}{t - 2} =$

$= \lim\limits_{t \to 2} \dfrac{(-0{,}1t^2 + t + 2)(t - 2)}{t - 2} =$

$= \lim\limits_{t \to 2} (-0{,}1t^2 + t + 2) =$

$= -0{,}1 \times 4 + 2 + 2 = 3{,}6$

Cálculo auxiliar

	$-0{,}1$	$1{,}2$	0	-4
2		$-0{,}2$	2	4
	$-0{,}1$	1	2	$\boxed{0}$

No instante em que tinham decorrido 2 segundos desde o início do movimento do robô, a sua velocidade era 3,6 m/s.

82.4. $\lim\limits_{t \to 10} \dfrac{d(t) - d(10)}{t - 10} =$

$= \lim\limits_{t \to 10} \dfrac{-0{,}1t^3 + 1{,}2t^2 - (-0{,}1 \times 10^3 + 1{,}2 \times 10^2)}{t - 10} =$

$= \lim\limits_{t \to 10} \dfrac{-0{,}1t^3 + 1{,}2t^2 - 20}{t - 10} =$

$= \lim\limits_{t \to 10} \dfrac{-0{,}1t^3 + 1{,}2t^2 - (-0{,}1 \times 10^3 + 1{,}2 \times 10^2)}{t - 10} =$

$= \lim\limits_{t \to 10} (-0{,}1t^2 + 0{,}2t + 2) =$

$= -0{,}1 \times 10^2 + 0{,}2 \times 10 + 2 = -6$

Cálculo auxiliar

	$-0{,}1$	$1{,}2$	0	-20
10		-1	2	20
	$-0{,}1$	$0{,}2$	2	$\boxed{0}$

A velocidade do robô no instante $t = 10$ era -6 m/s.

83.

83.1. $f'(x) = \left(\dfrac{2x - 3}{x^2 + 4}\right)' = \dfrac{2(x^2 + 4) - 2x(2x - 3)}{(x^2 + 4)^2} =$

$= \dfrac{2x^2 + 8 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{-2x^2 + 6x + 8}{(x^2 + 4)^2}$

Os valores de x para os quais a reta tangente ao gráfico da função f é horizontal são os valores de x tais que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 + 6x + 8}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$

83.2. $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 6x + 8}{(x^2 + 4)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação de f	$\searrow$	mín	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, a função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[4, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[-1, 4]$, tem um mínimo em $x = -1$ e tem um máximo em $x = 4$.

$g'(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}\right)' = \dfrac{2x(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^2} =$

$= \dfrac{2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{2x}{(x^2 + 2)^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g'	$-$	0	$+$
Variação de g	$\searrow$	mín	$\nearrow$

Assim, a função g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, tem um mínimo em $x = 0$.

83.3. $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{2x - 3}{x^2 + 4} - \left(-\dfrac{1}{5}\right)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{2x - 3}{x^2 + 4} + \dfrac{1}{5}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{10x - 15 + x^2 + 4}{5(x^2 + 4)(x - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 10x - 11}{5(x^2 + 4)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 11)}{5(x^2 + 4)(x - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 11}{5(x^2 + 4)} = \dfrac{12}{5 \times 5} = \dfrac{12}{25}$

83.4. $g'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 2)^2}$

$g'(1) = \dfrac{2}{(1 + 2)^2} = \dfrac{2}{9}$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$ é da forma $y = \dfrac{2}{9}x + b$.

$g(1) = \dfrac{1 + 1}{1 + 2} = \dfrac{2}{3}$

Como o ponto de tangência tem coordenadas $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$, vem que:

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} + b \Leftrightarrow b = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow b = \dfrac{4}{9}$

Assim, a equação pedida é $y = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{4}{9}$.

84.

84.1. $m = f'(1) = \frac{1-3}{2 \times 2^2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

A equação reduzida da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y = -\frac{1}{4}x + b$.

O ponto A pertence ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. Logo,

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$.

Assim, a equação reduzida da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

84.2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(f(x))^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{x^2 - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} \times \frac{f(x) + \frac{1}{2}}{x + 1} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} \times \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) + \frac{1}{2}}{x + 1} =$

$= f'(1) \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + 1} =$

$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

84.3. $f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{2(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 3x^2}{2(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+	0	–
Variação de f	↘	mín	↗	Máx	↘

Assim, a função f é estritamente decrescente em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e é estritamente crescente em $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; tem um mínimo em $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e tem um máximo em $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

85.

85.1. $P(t) = 0 \Leftrightarrow -t^3 + 3{,}4t^2 + 83{,}6t = 0$

$\Leftrightarrow t(-t^2 + 3{,}4t + 83{,}6) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee -t^2 + 3{,}4t + 83{,}6 = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-3{,}4 \pm \sqrt{11{,}56 + 334{,}4}}{2}$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-3{,}4 \pm 18{,}6}{2}$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 11 \vee t = -7{,}6$

Como $t > 0$, então $t = 11$.

As portas do recinto fecharam 11 horas após as 16 horas, ou seja, às 3 horas do dia seguinte.

85.2. $P'(t) = -3t^2 + 6{,}8t + 83{,}6$

$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 6{,}8t + 83{,}6 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-6{,}8 \pm \sqrt{6{,}8^2 + 4 \times 3 \times 83{,}6}}{-2 \times 3}$

Ou seja, $t \approx -4{,}266 \ \vee \ t \approx 6{,}533$.

t	0		6,533		11
Sinal de P'		+	0	–	
Variação de P		↗	Máx	↘	

0,533 h ≈ 32 min

O momento em que ocorreu uma maior concentração de pessoas no recinto foi passadas 6 horas e 32 minutos da abertura de portas, ou seja, às 22 horas e 32 minutos.

86. Opção (A)

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x-3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x - 3} =$

$= f'(1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

87. Tem-se que $f(2) = 3 \Leftrightarrow 8 + 2a + b = 3 \Leftrightarrow b = -5 - 2a$

$x + 5y = 6 \Leftrightarrow 5y = -x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$

$f'(x) = 4x + a$

Assim, $f'(2) = 5 \Leftrightarrow 8 + a = 5 \Leftrightarrow a = -3$. Logo, $a = -3$.

Então, $b = -5 + 6 = 1$.