

Testes

Teste 1 – páginas 85 a 87

1. Opção (B)

Se $\widehat{C\hat{D}A} = 60^\circ$, então $\widehat{B\hat{D}A} = 30^\circ$.

Logo, $\widehat{C\hat{A}D} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ e

$\widehat{A\hat{C}D} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Então, o triângulo $[ACD]$ é um triângulo equilátero e, por isso, $\overline{AC} = \overline{AD} = 7$.

Além disso, $\widehat{B\hat{A}D} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, pelo que o triângulo $[BAD]$ é retângulo em A.

$$\text{Logo, } \cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Assim, } A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{7 \times \frac{14\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{3}.$$

2. $C(1, 3)$, logo $\text{tg } \beta = 3$.

Então,

$$1 + \text{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow 1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{10}$$

E, portanto,

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \vee \sin \beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10} \vee \sin \beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Uma vez que } \beta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right], \text{ então } \sin \beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Por outro lado, } A\left(\cos \alpha, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \text{ ou seja, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Então, } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \vee \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Uma vez que } \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right], \text{ então } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Assim,

$$\cos \alpha \times \sin \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{6\sqrt{50}}{50} = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

3. Opção (B)

Tem-se que $-2026^\circ = -226^\circ - 5 \times 360^\circ$.

Logo, o ângulo de amplitude -2026° pertence ao segundo quadrante.

4.
$$\frac{\text{tg}(450^\circ - \alpha) \cos(810^\circ + \alpha) \cos(540^\circ + \alpha)}{\text{sen}(630^\circ + \alpha)} - \text{sen}(900^\circ + \alpha) =$$

$$= \frac{\text{tg}(360^\circ + 90^\circ - \alpha) \cos(2 \times 360^\circ + 90^\circ + \alpha) \cos(360^\circ + 180^\circ + \alpha)}{\text{sen}(360^\circ + 270^\circ + \alpha)} - \text{sen}(2 \times 360^\circ + 180^\circ + \alpha) =$$

$$= \frac{\text{tg}(90^\circ - \alpha) \cos(90^\circ + \alpha) \cos(180^\circ + \alpha)}{\text{sen}(270^\circ + \alpha)} - \text{sen}(180^\circ + \alpha) =$$

$$= \frac{\text{sen}(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} \frac{(-\text{sen } \alpha)(-\cos \alpha)}{-\cos \alpha} - (-\text{sen } \alpha) =$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} (-\text{sen } \alpha) + \text{sen } \alpha =$$

$$= -\cos \alpha + \text{sen } \alpha =$$

$$= \text{sen } \alpha - \cos \alpha$$

5. Tem-se que $\text{tg } 52^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AB} \text{ tg } 52^\circ$ e

$$\text{tg } 68^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{BC} \text{ tg } 68^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \text{ tg } 52^\circ = (367 - \overline{AB}) \text{ tg } 68^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \text{ tg } 52^\circ = 367 \text{ tg } 68^\circ - \overline{AB} \text{ tg } 68^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \text{ tg } 52^\circ + \overline{AB} \text{ tg } 68^\circ = 367 \text{ tg } 68^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} (\text{tg } 52^\circ + \text{tg } 68^\circ) = 367 \text{ tg } 68^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{367 \text{ tg } 68^\circ}{\text{tg } 52^\circ + \text{tg } 68^\circ}$$

$$\text{Logo, } \overline{BD} = \overline{AB} \text{ tg } 52^\circ \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{367 \text{ tg } 68^\circ}{\text{tg } 52^\circ + \text{tg } 68^\circ} \text{ tg } 52^\circ$$

$$\text{Assim, } \overline{BD} \approx 309,6 \text{ m.}$$

6. Opção (A)

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \times \text{sen}(5\pi - \alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \times \text{sen}(\pi - \alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \times \text{sen } \alpha > 0$$

Logo, o ângulo de amplitude α pertence ao primeiro quadrante ou ao terceiro quadrante, e, para qualquer destes casos, $\text{tg } \alpha > 0$.

$$\text{Como } 1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1, \text{ então}$$

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}.$$

7. Opção (A)

$$P = 8 + 3\pi \Leftrightarrow 2 \times 4 + \alpha \times 4 = 8 + 3\pi \Leftrightarrow 4\alpha = 3\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

8. Opção (D)

$$P = \frac{7\pi}{15} - \left(-\frac{13\pi}{15}\right) = \frac{20\pi}{15} = \frac{4\pi}{3}$$

9.

9.1. $B(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$, com $\cos \alpha < 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$.

$$E(\cos \alpha, 1)$$

$$\text{Então, } \overline{BE} = 1 - \text{sen } \alpha.$$

$$C(-\cos \alpha, -\text{sen } \alpha)$$

$$D(-\cos \alpha, 1)$$

$$\text{Então } \overline{CD} = 1 + \text{sen } \alpha \text{ e } \overline{DE} = -2 \cos \alpha.$$

$$\text{Logo, } A_{[BCDE]} = \frac{\overline{CD} + \overline{BE}}{2} \times \overline{DE} =$$

$$= \frac{1 + \text{sen } \alpha + 1 - \text{sen } \alpha}{2} \times (-2 \cos \alpha) =$$

$$= \frac{2}{2} \times (-2 \cos \alpha) = -2 \cos \alpha.$$

9.2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(-\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Leftrightarrow \sin \alpha - \sin(\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Leftrightarrow \sin \alpha + \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Então, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{6}$

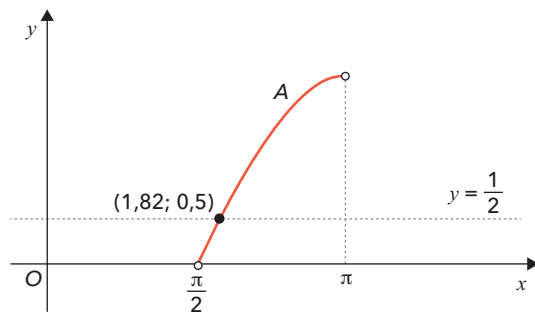
$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$ ou $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}$

Uma vez que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, então $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Logo, $A_{[BCDE]} = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = \frac{\sqrt{30}}{3}$ u.a.

9.3. $A\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Pretende-se, assim, resolver a equação $A(x) = \frac{1}{2}$.



Logo, $\alpha \approx 1,82$.

10. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2}$

$\sin \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\overline{AC}}{a} \Leftrightarrow \overline{AC} = a \sin \beta$

$\cos \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\overline{AB}}{a} \Leftrightarrow \overline{AB} = a \cos \beta$

Logo, $A_{[ABC]} = \frac{a \cos \beta \times a \sin \beta}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \cos \beta}{2}$,
como queríamos demonstrar.

Teste 2 - páginas 88 a 90

1.

1.1. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{PA} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

$\overline{PA} = \overline{QC}$

$\overline{OQ} = \overline{OP} = 1 - PA = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Então, $A(\alpha) = A_{[ABCD]} - A_{[OPQ]} - A_{[PAB]} - A_{[CQB]} =$
 $= 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}{2} - 2 \times \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \times 1}{2} =$
 $= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$
 $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} =$
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)$

1.2. Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$ então a inclinação, em radianos, da reta

PB é $\frac{\pi}{3}$. Logo, o declive desta reta é $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

O declive de qualquer reta perpendicular à reta PB é, então, $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, a equação reduzida da reta perpendicular a PB que passa no ponto A é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$. Como o ponto A(1, 0) pertence a esta reta:

$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, a equação reduzida da reta perpendicular a PB que passa no ponto A é $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Opção (A)

Como $x \in [90^\circ, 180^\circ]$, então

$0 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \sin x \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq 6k + 1 \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq 6k \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{6}$

Ou seja, $k \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$.

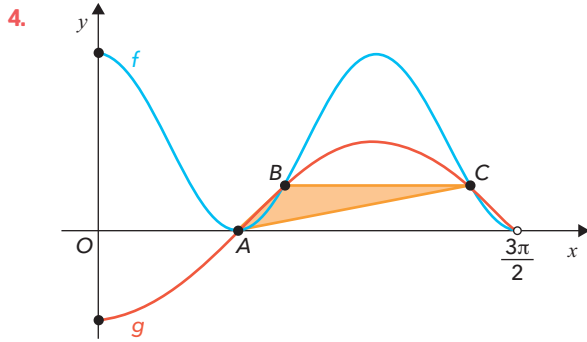
3. Opção (B)

Seja $\alpha = A\hat{C}B$.

$A = \frac{95\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{a \times (\sqrt{38})^2}{2} = \frac{95\pi}{6} \Leftrightarrow a \times 19 = \frac{95\pi}{6}$

$\Leftrightarrow a = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \|\overline{CA}\| \times \|\overline{CB}\| \times \cos \alpha =$
 $= \sqrt{38} \times \sqrt{38} \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$
 $= 38 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -19\sqrt{3}$



$A(1,57; 0)$
 $B(2,09; 0,5)$
 $C(4,19; 0,5)$
 Logo, $A_{[ABC]} \approx \frac{(4,19 - 2,09) \times 0,5}{2} \approx 0,5$ u.a.

5. Opção (D)

$$\begin{aligned}
 &(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (2\bar{a} - \bar{b}) = \\
 &= 2\bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} + 4\bar{a} \cdot \bar{b} - 2\bar{b} \cdot \bar{b} = \\
 &= 2\|\bar{a}\|^2 - 0 + 0 - 2\|\bar{b}\|^2 = \\
 &= 2 \times 2^2 - 2 \times 3^2 = \\
 &= 8 - 18 = \\
 &= -10
 \end{aligned}$$

6. Opção (A)

$$r: \sqrt{3}x + 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3y = -\sqrt{3}x - 3 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$$

Logo, o declive da reta r é $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como a reta s é perpendicular à reta r , então o declive da reta s é $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Seja α a inclinação da reta s . Então, $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$, com $\alpha \in [0, \pi[$.

$$\text{Assim, } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

7. Opção (C)

Um vetor normal ao plano α é $\bar{n}(2, 3, -4)$.

Na opção (A), um vetor diretor da reta é $\bar{r}(2, 3, -4)$. Como \bar{r} é colinear com \bar{n} , então esta reta não é paralela ao plano α .

Na opção (B), um vetor diretor da reta é $\bar{s}(2, -1, 2)$. Tem-se que $\bar{n} \cdot \bar{s} = (2, 3, -4) \cdot (2, -1, 2) = 4 - 3 - 8 = -7$ e $-7 \neq 0$.

Logo, esta reta não é paralela ao plano α .

Na opção (C), um vetor diretor da reta é $\bar{u}(2, 0, 1)$.

Tem-se que $\bar{n} \cdot \bar{u} = (2, 3, -4) \cdot (2, 0, 1) = 4 + 0 - 4 = 0$.

Além disso, $(2, -1, 2) = (4, -1, 3) + k(2, 0, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2k = 2 \\ -1 = -1 \\ 3 + k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -2 \\ k = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow k = -1$, ou seja, o ponto A pertence a esta reta.

Logo, esta reta é paralela ao plano α e contém o ponto A.

Na opção (D), um vetor diretor da reta é $\bar{v}(0, 4, 3)$.

Tem-se que $\bar{n} \cdot \bar{v} = (2, 3, -4) \cdot (0, 4, 3) = 0 + 12 - 12 = 0$.

No entanto, $(2, -1, 2) = (2, 3, 3) + k(0, 4, 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 4k + 3 = -1 \\ 3 + 3k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -4 \\ 3k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

o ponto A não pertence a esta reta.

Logo, esta reta é paralela ao plano α mas não contém o ponto A.

8.

8.1. O ponto F tem coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 5, 5\right)$.

Logo, $\overline{OF} \left(\frac{5}{2}, 5, 5\right)$.

O ponto S tem coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 5, z\right)$.

Então, $\overline{OS} \left(\frac{5}{2}, 5, z\right)$.

Assim, $\overline{OF} \cdot \overline{OS} = 50$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}, 5, 5\right) \cdot \left(\frac{5}{2}, 5, z\right) = 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{4} + 25 + 5z = 50$$

$$\Leftrightarrow 5z = \frac{75}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{15}{4}$$

A cota do ponto S é $\frac{15}{4}$.

8.2. Os pontos P, Q e R têm coordenadas $P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$, $Q(0, 5, 0)$ e $R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$.

$$\text{Então, } \overline{QP} = P - Q = \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) - (0, 5, 0) = \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right)$$

$$\overline{QR} = R - Q = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - (0, 5, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$$

$$\begin{aligned} \|\overline{QP}\| &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{61}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\overline{QR}\| &= \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{61}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{QP} \cdot \overline{QR} &= \left(\frac{5}{2}, -3, 0\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right) = -\frac{25}{4} + 0 + 0 = \\ &= -\frac{25}{4} \end{aligned}$$

Assim,

$$\overline{QP} \cdot \overline{QR} = \|\overline{QP}\| \times \|\overline{QR}\| \times \cos(P\hat{Q}R)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{25}{4} = \frac{\sqrt{61}}{2} \times \frac{\sqrt{61}}{2} \times \cos(P\hat{Q}R)$$

$$\Leftrightarrow \cos(P\hat{Q}R) = -\frac{25}{61}$$

$$\text{Logo, } P\hat{Q}R = \cos^{-1}\left(-\frac{25}{61}\right) \approx 114,2^\circ.$$

8.3. As coordenadas dos pontos G, B e H são $G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right)$,

$$B\left(\frac{5}{2}, 5, 0\right) \text{ e } H\left(-\frac{5}{2}, 0, 5\right).$$

$$\text{Então, } \overline{BH} = H - B = \left(-\frac{5}{2}, 0, 5\right) - \left(\frac{5}{2}, 5, 0\right) = (-5, -5, 5).$$

Logo, a equação pretendida é da forma

$$-5x - 5y + 5z + d = 0.$$

Como o ponto G pertence ao plano,

$$-5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 5 \times 5 + 5 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{25}{2}$$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no vértice G e é perpendicular ao vetor BH é:

$$-5x - 5y + 5z - \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow 10x + 10y - 10z + 25 = 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 2y - 2z + 5 = 0$$

- 8.4. As coordenadas dos pontos A e G são $A\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$ e $G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right)$.

$$\text{Logo, } \overline{AG} = G - A = \left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right) - \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right) = (-5, 5, 5)$$

Assim, uma equação vetorial da reta AG é:

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right) + k(-5, 5, 5), k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta AG com o plano α são da forma $\left(\frac{5}{2} - 5k, 5k, 5k, k \in \mathbb{R}\right)$.

$$\text{Então, } 4\left(\frac{5}{2} - 5k\right) - 5k + 2 \times 5k - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10 - 20k - 5k + 10k - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -15k = -5$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta AG com o plano α são $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

9. $\overline{AE} \cdot \overline{EF} = (\overline{AD} + \overline{DE}) \cdot (\overline{EC} + \overline{CF}) =$
 $= \overline{AD} \cdot \overline{EC} + \overline{AD} \cdot \overline{CF} + \overline{DE} \cdot \overline{EC} + \overline{DE} \cdot \overline{CF} =$
 $= 0 + k \times \frac{k}{2} \times \cos(180^\circ) + \frac{2k}{5} \times \frac{3k}{5} \times \cos(0^\circ) + 0 =$
 $= -\frac{k^2}{2} + \frac{6k^2}{25} =$
 $= -\frac{13}{50} k^2$

Teste 3 – páginas 91 a 93

1. Opção (C)

Se $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[$, então $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$.

Além disso, $2x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ e, portanto, $\sin(2x) < 0$ e $\cos(2x) < 0$.

Assim:

- $\sin x \times \cos(2x) < 0$
- $\sin x \times \cos x < 0$
- $\sin(2x) \cos x > 0$
- $\sin(-2x) \cos(2x) = -\sin(2x) \cos(2x) < 0$

2. $\cos \alpha = \frac{\overline{OR}}{2} \Leftrightarrow \overline{OR} = 2 \cos \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PR}}{2} \Leftrightarrow \overline{PR} = 2 \sin \alpha$$

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{RQ}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 \Leftrightarrow \overline{RQ}^2 + (2 \sin \alpha)^2 = 6^2 \\ \Leftrightarrow \overline{RQ}^2 = 36 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Logo, } \overline{RQ} = \sqrt{36 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

Assim, $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} = 2 \cos \alpha + \sqrt{36 - 4 \sin^2 \alpha}$ e, portanto, a abcissa do ponto Q é dada por

$$2 \cos \alpha + \sqrt{36 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

- 3.

- 3.1. Como a circunferência de centro C é definida por $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$, então $C(-1, 2)$.

$$\overline{CB} = (-4, 4) - (-1, 2) = (-3, 2)$$

Logo, $m_{CB} = -\frac{2}{3}$. Como as retas CB e s são perpendiculares, então $m_s = \frac{3}{2}$.

Assim, a equação reduzida da reta s é da forma

$$s: y = \frac{3}{2}x + b.$$

Como o ponto B pertence à reta s , então:

$$4 = \frac{3}{2} \times (-4) + b \Leftrightarrow b = 4 + 6 \Leftrightarrow b = 10.$$

Logo, a equação reduzida da reta s é $y = \frac{3}{2}x + 10$.

- 3.2. $\overline{CD} = (1, 5) - (-1, 2) = (2, 3)$

Logo, $m_{CD} = \frac{3}{2}$. Como as retas CD e r são perpendiculares, então $m_r = -\frac{2}{3}$ e a sua equação reduzida

é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como o ponto D pertence à reta r , então $5 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{17}{3}$.

$$\text{Logo, } r: y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}.$$

Como A é o ponto de interseção das retas r e s :

$$\frac{3}{2}x + 10 = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9x + 60 = -4x + 34$$

$$\Leftrightarrow 13x = -26$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Então, } y = \frac{3}{2} \times (-2) + 10 = 7.$$

Logo, $A(-2, 7)$.

Como F é o ponto de interseção da reta r com o eixo

$$Ox, \text{ então } -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3} = 0 \Leftrightarrow 2x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}.$$

$$\text{Logo, } F\left(\frac{17}{2}, 0\right).$$

Como E é o ponto de interseção da reta s com o eixo

$$\text{Ox, então } \frac{3}{2}x + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x = -20 \Leftrightarrow x = -\frac{20}{3}.$$

$$\text{Logo, } E\left(-\frac{20}{3}, 0\right).$$

$$\text{Assim, } \overline{EF} = \frac{17}{2} + \frac{20}{3} = \frac{91}{6}.$$

Logo, a área do triângulo $[AEF]$ é dada por

$$\frac{\frac{91}{6} \times 7}{6} \approx 53,08 \text{ u.a.}$$

4. Opção (A)

$$\overline{AB} = (1, 2, 1) - (1, 1, m) = (0, 1, 1 - m)$$

$$\overline{AC} = (2, 1, 1) - (1, 1, m) = (1, 0, 1 - m)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (0, 1, 1 - m) \cdot (1, 0, 1 - m) = (1 - m) \times (1 - m) = m^2 - 2m + 1$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (1 - m)^2} = \sqrt{1 + (1 - m)^2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (1 - m)^2} = \sqrt{1 + (1 - m)^2}$$

$$\text{Então, } \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{\sqrt{1 + (1 - m)^2} \times \sqrt{1 + (1 - m)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{1 + (1 - m)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 1 + 1 - 2m + m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$$

Os valores de m são 0 e 2.

5. O ponto F é o ponto de interseção da reta FE com o plano ABC .

A reta FE passa pelo ponto E e é perpendicular ao plano ABC . Logo, uma equação vetorial da reta FE é $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -2, -2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Os pontos da reta EF são da forma $(-3 + k, 3 - 2k, 1 - 2k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano ABC :

$$-3 + k - 2(3 - 2k) - 2(1 - 2k) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + k - 6 + 4k - 2 + 4k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9k = 9$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Logo, $F(-2, 1, -1)$.

Assim, a altura da pirâmide é igual a

$$\overline{EF} = \sqrt{(-3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

Como B pertence ao plano xOy e tem a abcissa e a ordenada iguais, então $B(b, b, 0)$.

Além disso, B pertence ao plano ABC , logo

$$b - 2b - 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow -b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

Assim, $B(2, 2, 0)$.

$$\overline{BF} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (2 - 1)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = \overline{CF}$$

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{BC}^2$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{18}^2 + \sqrt{18}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36$$

Logo, $\overline{BC} = 6$ e a área da base da pirâmide é 36.

$$\text{Assim, } V = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36 \text{ u.v.}$$

6. Opção (D)

Há $9 \times 10 \times 10 \times 10 - 1$ números superiores a 1000 e inferiores a 10 000. Desses, há $8 \times 9 \times 9 \times 9 - 1$ números que não têm qualquer algarismo igual a 7. Assim, há $9 \times 10^3 - 1 - (8 \times 9^3 - 1) = 3168$ números entre 1000 e 10 000 que têm pelo menos um algarismo 7.

7.

7.1. Opção (C)

O número de maneiras de a Carla e o Vítor ficarem juntos numa fila com nove pessoas é:

$$2! \times 7! \times 8 = 80\,640$$

7.2. O número de maneiras de os amigos se sentarem, de modo que a Carla e o Vítor fiquem em lugares com número ímpar é dado por ${}^5A_2 \times 7! = 100\,800$.

8. Opção (B)

$$\begin{aligned} \frac{{}^{2(n+1)}A_2}{{}^{n+1}C_2} &= \frac{2(n+1)! \frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}} = \\ &= \frac{2 \frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{1}{2(n-1)!}} = \\ &= \frac{4n!(n-1)!}{(n-2)!} = \\ &= 4n!(n-1) \end{aligned}$$

9. O número de maneiras de pintar duas das 10 faces restantes de azul é ${}^{10}C_2$.

O número de maneiras de pintar as oito faces que faltam com as outras 16 cores é ${}^{16}A_8$. Logo, a expressão pedida é ${}^{10}C_2 \times {}^{16}A_8$.

10. $m = 15 - n$

$$n \times {}^{15-n}C_2 + {}^nC_2 \times (15 - n) = 364$$

$$\Leftrightarrow n \times \frac{(15-n)!}{2!(13-n)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \times (15-n) = 364$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(15-n)(14-n)}{2} + \frac{n(n-1)(15-n)}{2} = 364$$

$$\Leftrightarrow n(15-n)(14-n+n-1) = 728$$

$$\Leftrightarrow 13(15n-n^2) = 728$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 15n = 56$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 15n + 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times 1 \times 56}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 7 \vee n = 8$$

Se $n = 7$, então $m = 8$.

Assim, $n = 8$ e $m = 7$, pois $n > m$.

11. O número de maneiras de a Isaura e a Joana irem ambas para a montanha-russa é dado por 6C_2 , que corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos restantes seis amigos para as acompanharem, sendo que os restantes quatro amigos vão para a roda-gigante.

O número de maneiras de nenhuma das amigas irem para a montanha-russa é dado por 6C_2 , que corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos restantes seis amigos para as acompanharem na roda-gigante, sendo que os restantes quatro amigos vão para a montanha-russa.

O número de maneiras de a Isaura ir para a montanha-russa sem a Joana, é dado por 6C_3 , que corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos restantes seis amigos para a acompanharem, sendo que os restantes quatro amigos, incluindo a Joana, vão para a roda-gigante. Assim, uma expressão que permite determinar o número de maneiras de os oito amigos se distribuírem é ${}^6C_2 + {}^6C_2 + {}^6C_3 = 2 \times {}^6C_2 + {}^6C_3$.

Teste 4 – páginas 94 a 96

- Opção (A)
 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, com $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$.
 $A_{[ABCDE]} = A_{[ABCE]} + A_{[CDE]} =$
 $= 2 \times (-\cos \alpha \sin \alpha) + 2 \times \frac{1 \times \sin \alpha}{2} =$
 $= -2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha =$
 $= \sin \alpha (-2 \cos \alpha + 1) =$
 $= \sin \alpha (1 - 2 \cos \alpha)$
- Opção (D)
 Um vetor normal a um plano da família de planos dada é $\vec{n}(1, m, m)$, $m \in \mathbb{R}$.
 Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, -1, 2)$.
 Para esta reta ser paralela ao plano:
 $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$
 $\Leftrightarrow (1, m, m) \cdot (2, -1, 2) = 0$
 $\Leftrightarrow 2 - m + 2m = 0$
 $\Leftrightarrow m = -2$
- Se $m = -1$, então $\alpha: x - y - z - 2 = 0$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{u}(1, -1, -1)$.
 Como a reta s é perpendicular ao plano β e um vetor diretor da reta s é $\vec{v}(1, -2, -5)$, então um vetor normal ao plano β é $\vec{v}(1, -2, -5)$.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -1, -1) \cdot (1, -2, -5) = 1 + 2 + 5 = 8$
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$
 Seja θ o ângulo formado pelos dois vetores normais.
 Então, $\cos \theta = \frac{8}{\sqrt{3} \times \sqrt{30}}$.
 Logo, $\theta \approx 32,5^\circ$.
- Opção (B)
 O comboio pode parar em nove pares de estações consecutivas. Para cada um destes pares, pode ser escolhida uma das oito estações restantes. Assim, o número de maneiras de escolher um par de estações e uma terceira estação é 9×8 . No entanto, ao efetuar a contagem desta forma, os grupos de três estações consecutivas foram contabilizados duas vezes, pelo que é necessário retirar o número de maneiras de escolher três estações consecutivas ao número anterior.
 Logo, o valor pedido é $9 \times 8 - 8 = 64$.
- O número de maneiras de dispor, ao acaso, lado a lado, as 13 cartas é dado por $13!$.
 O número de maneiras de, nessas condições, a dama e o rei ficarem juntos é dado por $2! \times 11! \times 12$. Assim, o número pedido é $13! - 2! \times 11! \times 12 = 5\,269\,017\,600$.
- O número de maneiras de escolher aleatoriamente dois dos nove algarismos possíveis para se repetirem é 9C_2 . Para cada uma destas maneiras há 6C_2 maneiras de escolher as posições ocupadas pelo primeiro desses números, e, após essa escolha, há 4C_2 maneiras de escolher as posições ocupadas pelo segundo desses números. Restam duas posições que podem ser ocupadas de 7×6 maneiras diferentes pelos restantes números.

Assim, há ${}^9C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 7 \times 6 = 136\,080$ números nas condições do enunciado.

6.

6.1. Opção (D)

$$u_3 = -\frac{3 \times 3 - 1}{3 + 2} = -\frac{8}{5}. \text{ Logo, a opção (A) é falsa.}$$

$$u_n = -3 \Leftrightarrow -\frac{3n - 1}{n + 2} = -3 \Leftrightarrow \frac{3n - 1}{n + 2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3n - 1 = 3n + 6 \Leftrightarrow -1 = 6. \text{ Logo, a opção (B) é falsa.}$$

$$u_1 = -\frac{3 \times 1 - 1}{1 + 2} = -\frac{2}{3} > -1. \text{ Logo, a opção (C) é falsa.}$$

$$u_n = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{3n - 1}{n + 2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3n - 1}{n + 2} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6n - 2 = 5n + 10 \Leftrightarrow n = 12.$$

Logo, a opção (D) é verdadeira.

6.2. $a_1 = u_5 = -\frac{3 \times 5 - 1}{5 + 2} = -\frac{14}{7} = -2$

$$a_{15} = -17u_{15} = -17 \times \left(-\frac{3 \times 15 - 1}{15 + 2}\right) = 17 \times \frac{44}{17} = 44$$

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1) \times r \Leftrightarrow 44 = -2 + 14r \Leftrightarrow 46 = 14r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{23}{7}$$

$$\text{Logo, } a_{22} = -2 + (22 - 1) \times \frac{23}{7} = 67.$$

7. Seja (a_n) a sucessão cujos termos são os montantes depositados pela Patrícia.

7.1. A sucessão (a_n) é uma progressão aritmética de razão 50 e primeiro termo 300.

$$30 - 18 + 1 = 12$$

$$\text{Assim, } S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \times 13 =$$

$$= \frac{300 + (300 + 12 \times 50)}{2} \times 13 = 7800$$

A Patrícia acumulou 7800 euros.

7.2. $S_n > 10000 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} \times n > 10\,000$

$$\Leftrightarrow \frac{300 + (300 + (n - 1) \times 50)}{2} \times n > 10\,000$$

$$\Leftrightarrow (275 + 25n) \times n - 10\,000 > 0$$

$$\Leftrightarrow 25n^2 + 275n - 10\,000 > 0$$

Cálculo auxiliar

$$25n^2 + 275n - 10000 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 11n - 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times 1 \times 400}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{1721}}{2}$$

Logo, $n = -26,2$ ou $n = 15,2$.

$$18 + 16 = 34$$

Ou seja, a Patrícia deverá fazer um último depósito aos 34 anos e levantar o dinheiro quando fizer 35 anos.

8.

8.1. Opção (A)

$$\text{Tem-se que } \begin{cases} c_1 = 12 \\ c_{n+1} = \frac{2}{3} c_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Então, } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{2}{3} c_n}{c_n} = \frac{2}{3}, \forall n \geq 1.$$

Uma vez que $\frac{2}{3}$ é uma constante, então (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

$$\text{Logo, } c_n = 12 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2^2 \times 3 \times 2^{n-1} \times 3^{-n+1} = 2^{n+1} \times 3^{2-n}.$$

8.2. Como $|r| < 1$, então $S = \frac{12}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{12}{\frac{1}{3}} = 36$.

9. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{u_n + 2}{3} - 1}{\frac{u_n + 2}{3} - 1} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^+$

Uma vez que $\frac{1}{3}$ é uma constante, então (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

$$v_1 = u_1 - 1 = 7 - 1 = 6$$

$$\text{Assim, o termo geral de } (v_n) \text{ é } v_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

10. $\frac{12k + 18}{4k + 6} = \frac{4k + 6}{\frac{3}{2}k} \Leftrightarrow 18k^2 + 27k = 16k^2 + 48k + 36$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 21k - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{3}{2} \vee k = 12$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, então $k = 12$.

Assim, os termos apresentados são 18, 54 e 162 e a razão da progressão é $r = \frac{54}{18} = 3$.

$$\text{Logo, } b_n = 2 \times 3^{n-1}.$$

$$\text{Então, } 2 \times 3^{n-1} = 18 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 9 \Leftrightarrow n - 1 = 2 \Leftrightarrow n = 3.$$

Logo, os termos apresentados são os termos de ordens 3, 4 e 5, respetivamente.

Teste 5 – páginas 97 a 100

1. Como a abcissa de A é $-\frac{12}{13}$, então $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{5}{13}$$

Como α pertence ao terceiro quadrante, então

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{Tem-se assim que } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

Como a ordenada de B é $-\frac{3}{5}$, então $\sin \beta = -\frac{3}{5}$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta = \pm \frac{4}{5}$$

Como β pertence ao quarto quadrante, então

$$\cos \beta = \frac{4}{5}.$$

Assim, $\operatorname{tg} \alpha + \sin \beta - \sin \alpha \times \cos \beta =$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{12} + \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right) \times \frac{4}{5} = \\ &= \frac{97}{780} \end{aligned}$$

2. Como B pertence ao semieixo positivo Oy , então $B(0, b, 0)$, com $b > 0$.

Além disso, B pertence ao plano ABD, logo

$$2 \times 0 + 3b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = 2.$$

Logo, $B(0, 2, 0)$ e, portanto, $C(0, -2, 0)$.

Como $D(3, 0, 6)$ e A pertence ao eixo Ox , então

$$A(3, 0, 0).$$

Tem-se ainda que $E(0, 2, 6)$, pois abcissa e ordenada iguais às de B e cota igual à de D.

$$\overline{CD} = D - C = (3, 0, 6) - (0, -2, 0) = (3, 2, 6)$$

Assim, $\alpha: 3(x - 3) + 2(y - 0) + 6(z - 0) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x - 9 + 2y + 6z = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + 6z - 9 = 0$$

Seja r a reta perpendicular ao plano α e que passa no ponto E.

$$r: (x, y, z) = (0, 2, 6) + k(3, 2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Os pontos desta reta são da forma

$$(3k, 2 + 2k, 6 + 6k), k \in \mathbb{R}.$$

Substituindo na equação do plano α :

$$3 \times 3k + 2(2 + 2k) + 6(6 + 6k) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9k + 4 + 4k + 36 + 36k - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 49k = -31$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{31}{49}$$

Seja P o ponto de interseção da reta r com o plano α .

$$\text{Então, } P\left(3 \times \left(-\frac{31}{49}\right), 2 + 2 \times \left(-\frac{31}{49}\right), 6 + 6 \times \left(-\frac{31}{49}\right)\right),$$

$$\text{ou seja, } P\left(-\frac{93}{49}, \frac{36}{49}, \frac{108}{49}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \overline{EP} &= \sqrt{\left(0 + \frac{93}{49}\right)^2 + \left(2 - \frac{36}{49}\right)^2 + \left(6 - \frac{108}{49}\right)^2} = \\ &= \frac{31}{7} \end{aligned}$$

Ou seja, a distância do ponto E ao plano α é $\frac{31}{7}$ u.c.

3.

3.1. Opção (C)

O número de maneiras de ordenar os 10 concorrentes de forma que a cantora Sílvia seja a primeira a apresentar-se e sem restrições para os restantes concorrentes é 9!.

Se a cantora Sílvia ficar na primeira posição e os dois mágicos atuarem consecutivamente, os concorrentes podem ser ordenados de $2! \times 8!$ maneiras diferentes.

Assim, o número de maneiras de os 10 concorrentes se apresentarem sendo a cantora Sílvia a primeira a apresentar-se e os dois mágicos não atuarem consecutivamente é $9! - 2! \times 8! = 282\,240$.

3.2.

O número de maneiras diferentes de escolher aleatoriamente dois cantores, um humorista e um mágico de entre quatro cantores, três humoristas e dois mágicos é ${}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1$.

Para cada uma destas maneiras, há 4! maneiras de ordenar os concorrentes selecionados.

Assim, o valor pedido é ${}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1 \times 4! = 864$.

4. Opção (A)

Como a cada ano se somam 50 anos ao prémio, a sucessão dos valores do prémio é uma progressão aritmética de razão 50. O primeiro termo desta progressão aritmética é 100.

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é $100 + 50(n - 1) = 50n + 50$.

$$\text{Então, } 50n + 50 = 950$$

$$\Leftrightarrow 50n = 900$$

$$\Leftrightarrow n = 18$$

Logo, um trabalhador que recebe 950 euros está há 18 anos na empresa.

5.

Seja P_n o perímetro do n -ésimo triângulo.

$$P_1 = 12; P_2 = 6; P_3 = 3; \text{ e assim sucessivamente.}$$

A sequência cujos termos são os perímetros dos vários triângulos é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 12.

Assim, a soma de todos os perímetros desta sequên-

$$\text{cia é } 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3069}{128}.$$

6. Opção (A)

Como o polinómio $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e por $x + \frac{1}{2}$, então:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \times 1^3 + a \times 1^2 + 2 \times 1 + b = 0 \\ 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 4 = 0 \\ \frac{a}{4} + b - \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 4 \\ -\frac{b-4}{4} + b - \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 4 + 4b - 5 = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 - 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 3 \end{cases}$$

7.

7.1. $C(8) = 0,05 \times 8^3 - 3 \times 8^2 + 50 \times 8 + 200 = 433,6$
 $C(12) = 0,05 \times 12^3 - 3 \times 12^2 + 50 \times 12 + 200 = 454,4$
 Assim, $\frac{C(12) - C(8)}{C(8)} \times 100 = \frac{454,4 - 433,6}{433,6} \times 100 \approx 4,8$.
 O aumento foi de, aproximadamente, 4,8%.

7.2.

$C(x) = 400$
 $\Leftrightarrow 0,05x^3 - 3x^2 + 50x + 200 = 400$
 $\Leftrightarrow 0,05x^3 - 3x^2 + 50x - 200 = 0$
 Como $C(20) = 400 \Leftrightarrow C(20) - 400 = 0$, então

	0,05	-3	50	-200
20		1	-40	200
	0,05	-2	10	0

Logo,
 $0,05x^3 - 3x^2 + 50x - 200 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 20 \vee 0,05x^2 - 2x + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 20 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 0,05 \times 10}}{2 \times 0,05}$

$$\Leftrightarrow x = 20 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{0,1}$$

Logo, podem ser transportadas com custo de 400 euros, 20 toneladas, ou 5,86 toneladas ou 34,14 toneladas de mercadorias.

8.

8.1. Sabendo que $P(1) = 0$, então:

	2	-5	1	2
1		2	-3	-2
	2	-3	-2	0

Logo, $P(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 2)$.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 2 \times 2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 4}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

Logo, $P(x) = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2)$.

8.2. $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 3x - 2) \leq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 - 3x - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

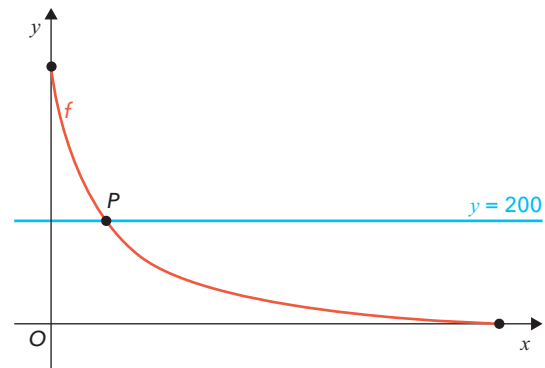
Logo, C.S. = $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, 2]$.

9. Opção (B)

As assintotas ao gráfico de f têm equações $x = -2$ e $y = 2$.
 Logo, $f(x) = 2 + \frac{b}{x + 2}$.
 Assim, $a = 2$ e $c = -2$.

10. Se 60% dos lugares estavam preenchidos, então 40% dos lugares estavam vazios.
 $0,4 \times 500 = 200$
 Assim, pretende-se determinar o instante em que o número de lugares vazios era 200.

$$f(t) = 200 \Leftrightarrow \frac{2000 - 50t}{2t + 4} = 200$$



$P(4,8; 200)$
 Então, passados 5 minutos da abertura de portas, ou seja, às 9 h 50 min, estavam preenchidos 60% dos lugares.

11. Opção (D)

Nas opções (A) e (B), se $x < a$, então $f(x) < 0$, o que contaria a informação apresentada no gráfico de f . Na opção (C), se $a < x < b$, então $f(x) > 0$, o que contaria a informação apresentada no gráfico de f . No gráfico da opção (D):

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
g	+	+	+	0	-	0	+
h	+	0	-	+	-	-	-
f	+	0	-	0	+	0	-

Teste 6 – páginas 101 a 103

1. Como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, cujo raio é 5 ($= \sqrt{25}$), então $\|AB\| = 10$.

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C , pois está inscrito na circunferência e $[AB]$ é um diâmetro. Então,

$$\cos \alpha = \frac{\|AC\|}{\|AB\|} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\|AC\|}{10} \Leftrightarrow \|AC\| = 10 \cos \alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 20 \Leftrightarrow \|AB\| \times \|AC\| \times \cos \alpha = 20 \\ &\Leftrightarrow 10 \times 10 \cos \alpha \times \cos \alpha = 20 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{20}{100} \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Uma vez que α é um ângulo agudo, então

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$$\sin \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

Como α é um ângulo agudo, então

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \times \cos(\alpha - \pi) &= \\ = \sin \alpha + \sin \alpha \times (-\cos \alpha) &= \\ = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} &= \\ = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

2. Opção (C)

O número de maneiras de escolher um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro de entre os 12 candidatos é dada por ${}^{12}A_4$. Para cada uma destas maneiras, há 8C_3 maneiras de escolher aleatoriamente três vogais entre os 8 candidatos restantes. Assim, a resposta ao problema é ${}^{12}A_4 \times {}^8C_3 = 665\,280$.

3. Tem-se que:

$$S_{10} = 615 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10 = 615 \Leftrightarrow u_1 + u_{10} + 9r = 123$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 9r = 123$$

Além disso,

$$S_{20} - S_{10} = 315 \Leftrightarrow \frac{u_{11} + u_{20}}{2} \times 10 = 315$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 10r + u_1 + 19r = 63 \Leftrightarrow 2u_1 + 29r = 63$$

Assim:

$$\begin{cases} 2u_1 + 9r = 123 \\ 2u_1 + 29r = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 123 - 9r \\ 123 - 9r + 29r = 63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 20r = -60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 123 - 9 \times (-3) \\ r = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 150 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 75 \\ r = -3 \end{cases}$$

O termo geral da sucessão é, então,

$$u_n = 75 + (n - 1) \times (-3) \Leftrightarrow u_n = 78 - 3n.$$

Como se pretende mostrar que existe um termo nulo, $u_n = 0 \Leftrightarrow 78 - 3n = 0 \Leftrightarrow 3n = 78 \Leftrightarrow n = 26$

Logo, a sucessão tem um termo nulo, que é o termo de ordem 26.

4. Como -3 é uma raiz dupla do polinómio que define a função f , de grau 3, e como 2 é um zero desta função, tem-se que $f(x) = a(x + 3)^2(x - 2)$.

$$\text{Além disso, } f(1) = 32 \Leftrightarrow a(1 + 3)^2(1 - 2) = 32$$

$$\Leftrightarrow a \times 16 \times (-1) = 32 \Leftrightarrow a = -2.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } f(x) &= -2(x + 3)^2(x - 2) = -2(x^2 + 6x + 9)(x - 2) = \\ &= -2(x^3 + 4x^2 - 3x - 18) = \\ &= -2x^3 - 8x^2 + 6x + 36, \end{aligned}$$

ou seja, $f(x) = -2x^3 - 8x^2 + 6x + 36$.

5. Opção (B)

A reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, pelo que a opção (A) é falsa.

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de g . Logo, a opção (B) é verdadeira.

Como a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de g , então $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, e a opção (C) é falsa.

Como a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de g , então $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, e a opção (D) é falsa.

6. Opção (D)

A opção (A) é verdadeira, pois existe um valor de $x \in]a, +\infty[$ tal que $f(x) = g(x)$ e, portanto, $(f - g)(x) = 0$. A opção (B) é verdadeira, como se pode constatar pela observação dos gráficos das funções f e g em $]0, a[$.

A opção (C) é verdadeira, pois existe um valor de $x \in]-a, a[$ tal que $f(x) = g(x)$ e, portanto, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$.

A opção (D) é falsa pois, para $x \in]b, a[$, tem-se que $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$, pelo que $(f \times g)(x) < 0$.

7.

7.1. Como um dos zeros de f é 3, tem-se:

	1	-5	-2	24
3		3	-6	-24
	1	-2	-8	0

$$\text{Assim, } f(x) = (x - 3)(x^2 - 2x - 8).$$

Tem-se ainda que:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$$

x	$-\infty$	-2		3		4	$+\infty$
$x - 3$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 2x - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Logo, C.S. = $] -2, 3[\cup] 4, +\infty[$.

7.2. $f'(x) = 3x^2 - 10x - 2$

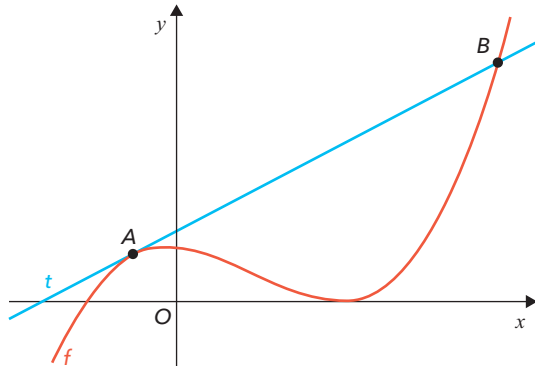
O declive da reta tangente é

$$m = f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 10 \times (-1) - 2 = 11.$$

Assim, a reta tangente é do tipo $t: y = 11x + b$.

$$f(-1) = (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 24 = 20$$

O ponto de coordenadas $(-1, 20)$ pertence à reta tangente, logo $20 = 11 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 31$. Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 é $t: y = 11x + 31$. Recorrendo à calculadora gráfica:



$B(7, 108)$
Logo, a abscissa do ponto pedida é 7.

8. Opção (B)

$$g'(x) = ((3x + 2)^2 f(x))' =$$

$$= ((3x + 2)^2)' f(x) + (3x + 2)^2 f'(x) =$$

$$= 2(3x + 2)(3x + 2)' f(x) + (3x + 2)^2 f'(x) =$$

$$= 2(3x + 2)3f(x) + (3x + 2)^2 f'(x) =$$

$$= 6(3x + 2)f(x) + (3x + 2)^2 f'(x)$$

Então, $g'(1) = 6 \times (3 \times 1 + 2)f(1) + (3 \times 1 + 2)^2 f'(1) =$
 $= 6 \times 5 \times 1 + 5^2 \times 3 = 105.$

9. 9.1. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} =$

$$\frac{\frac{1}{2} - 3x}{2x + 1} - \frac{1 - 3 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1 - 3x}{2x + 1} - \frac{1 - 3 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 1}}{x - \frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1 - 3x}{2x + 1} + \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{5 - 10x}{4(2x + 1)}}{x - \frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{5 - 10x}{\left(x - \frac{1}{2}\right)4(2x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{5(1 - 2x)}{2(2x - 1)(2x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(-\frac{5}{2(2x + 1)}\right) =$$

$$= -\frac{5}{2\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)} =$$

$$= -\frac{5}{4}$$

9.2. Se $x > 1$,

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 8x - 10}{x^2 + x - 2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x^2 + 8x - 10)'(x^2 + x - 2) - (2x^2 + 8x - 10)(x^2 + x - 2)'}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{(4x + 8)(x^2 + x - 2) - (2x^2 + 8x - 10)(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 12x^2 - 16 - (4x^3 + 18x^2 - 12x - 10))}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{-6x^2 + 12x - 6}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{-6(x^2 - 2x + 1)}{((x + 2)(x - 1))^2} =$$

$$= \frac{-6(x - 1)^2}{((x + 2)(x - 1))^2} =$$

$$= -\frac{6}{(x + 2)^2}$$

10. Opção (A)
Se $x < -1$, a função f é crescente, logo $f'(x) > 0$, o que elimina as opções (B) e (D).
Se $x > -1$, a função f é crescente, logo $f'(x) > 0$, o que elimina as opções (B) e (C).

11. 11.1. $tmv_{[0, 0,5]} = \frac{d(0,5) - d(0)}{0,5 - 0} =$

$$= \frac{6 - 0,975 \times 0,5 \times (4 \times 0,5^2 - 4 \times 0,5 - 15) - 0}{0,5} =$$

$$= 15,6 \text{ km/h}$$

11.2. $d'(t) = (-0,975t(4t^2 - 4t - 15))' =$

$$= (-0,975t)'(4t^2 - 4t - 15) + (-0,975t)(4t^2 - 4t - 15)' =$$

$$= -0,975(4t^2 - 4t - 15) - 0,975t(8t - 4) =$$

$$= -3,9t^2 + 3,9t + 14,625 - 7,8t^2 + 3,9t =$$

$$= -11,7t^2 + 7,8t + 14,625$$

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow -11,7t^2 + 7,8t + 14,625 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-7,8 \pm \sqrt{7,8^2 - 4 \times (-11,7) \times 14,625}}{2 \times (-11,7)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-7,8 \pm 27,3}{-23,4}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{5}{6} \vee t = 1,5$$

Assim:

t	0		1,5		2,5
Sinal de d'		+	0	-	
Varição de d'		↗	Máx.	↘	

$d(1,5) = -0,975 \times 1,5 \times (4 \times 1,5^2 - 4 \times 1,5 - 15) = 17,55$
A distância máxima percorrida pelos amigos nessa estrada foi de 17,55 km, o que significa que não percorreram os 20 km. A distância máxima foi alcançada ao fim de uma hora e trinta minutos.