Preparação para o Exame Nacional

Ficha 1 – páginas 130 a 136

1.

1.1 Opção (B)

Número de votantes: 362

Número de não votantes: $500 - 362 = 138$

Percentagem de abstenção: $\frac{138}{500} \times 100 = 27{,}6\%$

$27{,}6\% \approx 28\%$

1.2 $x = \frac{4}{5} \times 95 = 76$

Número de votos validamente expressos:

$362 - 12 - 8 = 342$

$127 + 95 + x + y = 342 \Leftrightarrow 76 + y = 120$

$\Leftrightarrow y = 44$

Por aplicação do método de Borda, a pontuação total obtida por cada atividade é:

Teatro: $127 \times 4 + 95 \times 2 + 76 \times 1 + 44 \times 3 = 906$

Música: $127 \times 3 + 95 \times 4 + 76 \times 2 + 44 \times 1 =$ **957**

Desporto: $127 \times 1 + 95 \times 3 + 76 \times 4 + 44 \times 2 = 804$

Ciência: $127 \times 2 + 95 \times 1 + 76 \times 3 + 44 \times 4 = 753$

O "Teatro" foi a atividade que obteve o maior número de votos na primeira preferência (127).

A atividade preferida pelos alunos da escola, por aplicação do método de Borda, é a "Música".

2. Seja x o número total de bilhetes vendidos a estudantes, seniores e crianças.

$$\frac{72 \times 8{,}6 + x \times 7{,}2}{72 + x} = 8 \Leftrightarrow 619{,}2 + 7{,}2x = 576 + 8x$$
$$\Leftrightarrow 0{,}8x = 43{,}2$$
$$\Leftrightarrow x = 54$$

Uma vez que o número de bilhetes vendidos a estudantes foi igual ao número total de bilhetes vendidos a seniores e a crianças juntos, tem-se que o número de bilhetes vendidos a estudantes foi $\frac{54}{2} = 27$.

3. Opção (C)

Inserimos na calculadora gráfica as listas com os dados apresentados:

x	y
60	156
61	164
62	162
67	148
68	168
68	170
73	171
74	163
74	175
80	176
82	174
82	179

Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, obtemos os valores de a e de b, da equação da reta de regressão linear, com arredondamento às centésimas: $a \approx 0{,}84$ e $b \approx 107{,}78$

Desta forma, a equação da reta de regressão linear é $y = 0{,}84x + 107{,}78$.

4. $[ABC]$ é um triângulo isósceles, pois $\overline{AB} = \overline{BC}$.

M é o ponto médio de $[AC]$, logo pertence à mediana do triângulo $[ABC]$, com origem no vértice em B.

I é o incentro do triângulo $[ABC]$, isto é, é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é isósceles, não equilátero, os quatro pontos notáveis são colineares. Desta forma, podemos garantir que $\dot{B}M$, bissetriz do ângulo ABC, passa pelo ponto I e pelo ponto M, e ainda que $[BM]$ é uma altura do triângulo.

Assim:

$$\overline{BM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 13^2 - 12^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 169 - 144$$
$$\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 25$$

Logo, $\overline{BM} = 5$.

Seja r a medida do raio da circunferência inscrita ao triângulo $[ABC]$.

Uma vez que I é o incentro do triângulo, a medida da altura do triângulo $[AIC]$, bem como a medida da altura do triângulo $[ABI]$ é r.

$$A_{[ABC]} = A_{[AIC]} + 2 \times A_{[ABI]} \Leftrightarrow \frac{24 \times 5}{2} = \frac{24 \times r}{2} + 2 \times \frac{13 \times r}{2}$$
$$\Leftrightarrow 60 = 12r + 13r$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{60}{25}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{12}{5}$$

$$\overline{MI}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{IC}^2 \Leftrightarrow r^2 + \overline{MC}^2 = \overline{IC}^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 + 12^2 = \overline{IC}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{IC}^2 = \frac{3744}{25}$$

Assim, o valor da área pedida é $\frac{3744}{25}\pi$ u.a.

5. Opção (D)

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\beta - \operatorname{sen}\beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha =$$
$$= -\frac{\sqrt{5}}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) =$$
$$= -\frac{2 + \sqrt{5}}{3}$$

Cálculo auxiliar

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2}{3}$$

$\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, logo, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

6. De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir que o ponto A tem coordenadas $(6, 0)$ e que o ponto B tem coordenadas $(6, 10)$.

Seja y, $y \in \mathbb{R}^+$, a ordenada do ponto D.

D tem coordenadas $(0, y)$.

Assim:

$\overrightarrow{DB} = B - D = (6, 10) - (0, y) =$
$= (6, 10 - y)$

$\overrightarrow{DA} = A - D = (6, 0) - (0, y) =$
$= (6, -y)$

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} = 20 \Leftrightarrow (6, 10 - y) \cdot (6, -y) = 20$
$\Leftrightarrow 36 - 10y + y^2 = 20$
$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 16 = 0$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{10 \pm 6}{2}$
$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = 8$

Como $\overline{OD} > \overline{DC}$, $y = 8$.

D tem coordenadas $(0, 8)$.

Assim, a equação reduzida da circunferência tangente ao eixo Ox e de centro no ponto D é $x^2 + (y - 8)^2 = 64$.

7. Para se formar a equipa com os requisitos pretendidos, existem dois tipos de casos que se excluem mutuamente: ou a equipa é constituída por sete candidatos, que são fluentes em inglês e um que não é fluente em inglês ou a equipa é constituída por oito candidatos, que são fluentes em inglês.

No primeiro caso, existem ${}^{95}C_7$ maneiras de escolher sete dos 95 candidatos que são fluentes em inglês e, para cada um dessas maneiras, existem 45 maneiras de escolher um candidato que não seja fluente em inglês e, para cada uma destas escolhas, existem 8! maneiras de distribuir as oito funções, que são distintas, pelos oito candidatos. Assim, ${}^{95}C_7 \times 45 \times 8! + {}^{95}A_8$ é o número de maneiras de constituir uma equipa com sete elementos fluentes em inglês.

Para o outro tipo de casos, existem ${}^{95}A_8$ maneiras de escolher ordenadamente oito, dos 95 candidatos que são fluentes a inglês, de modo a desempenharem funções distintas dentro da equipa.

Assim, ${}^{95}C_7 \times 45 \times 8! + {}^{95}A_8$ é o número de equipas diferentes que se podem constituir com os requisitos pretendidos.

8. $u_3 = 31 \Leftrightarrow -3u_2 + 5 \times 2 = 31$
$\Leftrightarrow -3u_2 = 21$
$\Leftrightarrow u_2 = -7$

$u_2 = -7 \Leftrightarrow -3u_1 + 5 \times 1 = -7$
$\Leftrightarrow -3u_1 = -12$
$\Leftrightarrow u_1 = 4$

$u_1 = 4 \Leftrightarrow a = 4$

$v_n = a \Leftrightarrow n^2 - 32 = 4 \Leftrightarrow n^2 = 36 \Leftrightarrow n = 6$
$\uparrow$
$n \in \mathbb{N}$

O valor de n é 6.

9. O comprimento da semicircunferência de diâmetro 1 é igual a $\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

O comprimento da semicircunferência de diâmetro 3 é igual a $\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

O comprimento da semicircunferência de diâmetro 5 é igual a $\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{5}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

Seja (c_n) a sequência dos perímetros das semicircunferências que compõem a espiral. Tem-se que:

$$c_n = \frac{\pi \times (2n - 1)}{2}$$

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{\pi \times (2(n + 1) - 1)}{2} - \dfrac{\pi \times (2n - 1)}{2} =$
$= \dfrac{\pi}{2} \times (2n + 2 - 1 - 2n + 1) = \dfrac{\pi}{2} \times 2 = \pi$, para qualquer $n \geq 1$.

Como a diferença entre dois quaisquer termos consecutivos é constante, a sequência dos comprimentos das semicircunferências é uma progressão aritmética e a sua razão é π.

$c_{50} = \dfrac{\pi \times (2 \times 50 - 1)}{2} = \dfrac{99\pi}{2}$

$S_{50} = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{99\pi}{2}}{2} = 25\pi \times 50 = 1250\pi$

10. Opção (C)

Como o triângulo $[OAB]$ é equilátero, então os pontos A e B são afixos de dois números complexos com o mesmo módulo e cujo argumento difere $\frac{\pi}{3}$ rad.

Assim, sendo A o afixo de um número complexo $z = re^{i\theta}$, então B é o afixo do número complexo $z' = re^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$.

Tem-se que:

$re^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} = re^{i\theta} \times e^{i\frac{\pi}{3}} =$
$= re^{i\theta} \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) =$
$= z \times \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

11. $z^3 - 4z \times \bar{z} + 10 - 2i = 0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\, e^{i\theta}\right)^3 - 4 \times 2 + 10 - 2i = 0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i(3\theta)} = -2 + 2i$
$\Leftrightarrow \sqrt{8}\, e^{i(3\theta)} = \sqrt{8}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$
$\Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{8} = \sqrt{8})}_{\text{condição universal}} \wedge 3\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Assim, $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Como z é uma das raízes sextas de um certo número complexo w, então $z^6 = w$.

$w = z^6 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 =$
$= \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i\frac{6\pi}{4}} =$

$= 8\, e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$= -8i$

Cálculos auxiliares

- $z \times \bar{z} = (\sqrt{2}\, e^{i\theta}) \times (\sqrt{2}\, e^{i(-\theta)}) =$
  $= (\sqrt{2})^2\, e^{i(\theta-\theta)} =$
  $= 2\, e^{i0} =$
  $= 2$
- $-2 + 2i = \sqrt{8}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$
  $|-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
  $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{-2} \wedge \alpha \in 2.^{\circ}\text{Q}$
  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

12. Seja $p = P(Y = -1)$. Então, $P(Y = 2) = 2p$ e, como $P(Y = 2) = \frac{1}{2} P(Y = 5)$, vem $P(Y = 5) = 2P(Y = 2) = 4p$.

Da condição $P(Y = -1) + P(Y = 0) + P(Y = 2) = 0{,}8$ fica:

$p + P(Y = 0) + 2p = 0{,}8 \Leftrightarrow P(Y = 0) = 0{,}8 - 3p$

Sabemos que:

$P(Y = -1) + P(Y = 0) + P(Y = 2) + P(Y = 5) = 1$

Logo:

$p + (0{,}8 - 3p) + 2p + 4p = 1 \Leftrightarrow 0{,}8 + 4p = 1$

$\Leftrightarrow 4p = 0{,}2$

$\Leftrightarrow p = 0{,}05$

Assim:

- $P(Y = -1) = 0{,}05$
- $P(Y = 2) = 2p = 0{,}10$
- $P(Y = 5) = 4p = 0{,}20$
- $P(Y = 0) = 0{,}8 - 3p = 0{,}8 - 0{,}15 = 0{,}65$

Distribuição de Y:

y	–1	0	2	5
$P(Y = y)$	0,05	0,65	0,10	0,20

13. Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: "Ser do sexo feminino."

S: "Ser da área da saúde."

Sabe-se que:

- $P(F) = 2P(S)$
- $P(F|S) = \frac{1}{4}$
- $P(\bar{S} \mid \bar{F}) = \frac{1}{2}$

Então:

$P(F \mid S) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow P(F \cap S) = \frac{1}{4} P(S)$

$P(\bar{S} \mid \bar{F}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{S} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{F}) = \frac{1}{2}(1 - P(F))$

$\Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{F}) = \frac{1}{2}(1 - 2P(S))$

$\Leftrightarrow P(\bar{S} \cap \bar{F}) = \frac{1}{2} - P(S)$

$\Leftrightarrow 1 - P(S \cup F) = \frac{1}{2} - P(S)$

$\Leftrightarrow -P(S \cup F) = -\frac{1}{2} - P(S)$

$\Leftrightarrow P(S \cup F) = \frac{1}{2} + P(S)$

Como $P(S \cup F) = P(S) + P(F) - P(S \cap F)$, então:

$\frac{1}{2} + P(S) = P(S) + 2P(S) - \frac{1}{4} P(S) \Leftrightarrow -\frac{7}{4} P(S) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P(S) = \frac{4}{14}$

$\Leftrightarrow P(S) = \frac{2}{7}$

14.

14.1 Opção (D)

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa –1 é $g'(-1)$. Como a reta é paralela à reta de equação $y = kx$, então $k = g'(-1)$.

Em $]-\infty, 0[$, tem-se que:

$g'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{(e^x - 1)' \times x - (e^x - 1) \times x'}{x^2} =$

$= \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} =$

$= \frac{e^x \times x - e^x + 1}{x^2}$

Assim:

$k = g'(-1) = \frac{e^{-1} \times (-1) - e^{-1} + 1}{(-1)^2} =$

$= \frac{-e^{-1} - e^{-1} + 1}{1} =$

$= 1 - 2\, e^{-1}$

14.2 **Assíntotas verticais**

A função g é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, logo, a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$

limite notável

O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{\frac{1}{+\infty}} =$

$= \frac{\ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

O gráfico de g não apresenta assíntotas horizontais quando $x \longrightarrow +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} =$

$= \frac{0 - 1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \longrightarrow -\infty$.

14.3 Em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)' = \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= x' \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= 1 \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

$g'(x) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e} \in]0, +\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	+	0	–
Variação de g	n.d.	↗	$g\left(\frac{1}{e}\right)$ Máx.	↘

Cálculos auxiliares

• $g'(e) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1 = \ln(e^{-1}) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

• $g'\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2e}}\right) - 1 = \ln(2e) - 1 = \ln 2 + \ln e - 1 = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$

• $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e}\ln(e) = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$

g é estritamente crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e é estritamente decrescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$; $\frac{1}{e}$ é um máximo (absoluto) para $x = \frac{1}{e}$.

15. $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^+$

$A(a, f(a))$, ou seja, $A\left(a, \frac{1}{a - \ln a}\right)$.

$B(2a, f(2a))$, ou seja, $B\left(2a, \frac{1}{2a - \ln(2a)}\right)$.

O declive da reta AB é igual a:

$$\frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} = \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a}$$

$[AB]$ é uma diagonal de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados se:

$$\frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} = 1 \vee \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} = -1$$

isto é:

$$\left|\frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a}\right| = 1$$

ou seja:

$$\frac{\left|\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}\right|}{a} = 1, \text{ pois } a \in \mathbb{R}^+.$$

Utilizando x como variável independente:

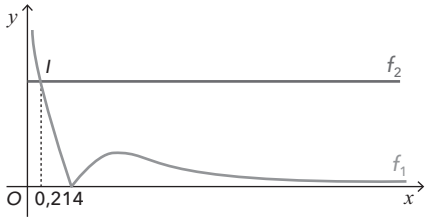
$$\frac{\left|\frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x}\right|}{x} = 1$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = \frac{\left|\frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x}\right|}{x}$$

$f_2(x) = 1$

$x > 0$



Logo, $a \approx 0{,}214$.

Grupo A

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo que:

• dimensão da amostra: $n = 100$

• média amostral: $\bar{x} = 2{,}4$

• desvio-padrão amostral: $s = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$

• valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, utilizando a fórmula:

$$\left[\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

obtém-se:

$$\left[2{,}4 - 1{,}645\frac{0{,}3}{\sqrt{100}}; 2{,}4 + 1{,}645\frac{0{,}3}{\sqrt{100}}\right] =$$

$= [2{,}4 - 1{,}645 \times 0{,}03; 2{,}4 + 1{,}645 \times 0{,}03] =$

$= [2{,}4 - 0{,}04935; 2{,}4 + 0{,}04935] =$

$= [2{,}35065; 2{,}44935]$

Apresentando os extremos do intervalo de confiança arredondados às centésimas, obtemos $[2{,}35; 2{,}45]$.

Grupo B

$2 + \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Em $[0, 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x - 2)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2 - 2 - \cos x)\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (2 + \cos x - 2)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx =$$

$$= [\text{sen } x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\text{sen } x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\text{sen } x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$= (1 - 0) + (1 - (-1)) + (0 - (-1)) =$$

$$= 1 + 2 + 1 =$$

$$= 4 \text{ u.a.}$$

Grupo C

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -9 & 3 \\ -5 & 7 & 1 \\ -3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Cálculos auxiliares

1ª linha
- $2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times 2 = 9$
- $2 \times 0 + (-1) \times 3 + 3 \times (-2) = -9$
- $2 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times 0 = 3$

2ª linha
- $0 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 2 = -5$
- $0 \times 0 + 1 \times 3 + (-2) \times (-2) = 7$
- $0 \times 2 + 1 \times 1 + (-2) \times 0 = 1$

3ª linha
- $1 \times 1 + 4 \times (-1) + 0 \times 2 = -3$
- $1 \times 0 + 4 \times 3 + 0 \times (-2) = 12$
- $1 \times 2 + 4 \times 1 + 0 \times 0 = 6$

$$3A + AB = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -9 & 3 \\ -5 & 7 & 1 \\ -3 & 12 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -12 & 12 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & 24 & 6 \end{bmatrix}$$

Ficha 2 – páginas 137 a 143

1. Dividindo o número de votos obtidos em cada uma das listas por 1, 2, 3 e 4, obtemos os seguintes quocientes.

Divisores	Lista		
	E	T	R
1	27	45	28
2	13,5	22,5	14
3	9	15	9,33
4	6,75	11,25	7
5	5,4	9	5,6

Escrevendo os quocientes obtidos por ordem decrescente:

Quociente	Lista
45	T
28	R
27	E
22,5	T
15	T
14	R
13,5	E
11,25	T
9,33	R
9	E/T

Na escolha do 10º quociente, deparámo-nos com dois valores iguais (9), na Lista E e na Lista T.

Uma vez que a Lista E tem um menor número de votos, relativamente à Lista T, o décimo elemento a constituir a equipa será da Lista E.

Número de elementos de cada lista na equipa constituída:

Lista T: 4 Lista E: 3 Lista R: 3

Conclui-se que o morador que afirmou que, usando o método de Hondt, as listas E e R teriam o mesmo número de elementos (3 cada) tinha razão.

2. Ordenando os valores registados:

23 23 24 25 31 31 32 33 34 **35**
38 38 38 42 42 44 50 50 51

Como são 19 dados, a mediana ocupa a posição $\frac{19 + 1}{2} = 10$.

Assim, a mediana é 35.

3. Introduzindo os valores da esperança de vida à nascença – homens (x), numa das listas da calculadora, e os valores da esperança de vida à nascença – mulheres (y) noutra lista da calculadora, obtêm-se os seguintes valores:

- mediana da variável x: 75,3
- 1º quartil da variável x: 72,4
- 3º quartil da variável x: 77,4

Assim:

I – c) 75,3

II – b) 5

$77{,}4 - 72{,}4 = 5$

III – a) 6,9%

$\frac{83{,}7 - 78{,}3}{78{,}3} \times 100 \approx 6{,}9$

IV – a) $y = 0{,}771x + 23{,}422$

A resposta correta é: I – c); II – b); III – a); IV – a)

4. O ponto I é o ponto de interseção das mediatrizes de dois lados do triângulo $[ABC]$, logo é equidistante de cada um dos seus vértices, isto é, $\overline{AI} = \overline{BI} = \overline{CI}$.

$\overline{AI} + 2\overline{BI} + 3\overline{CI} = 48 \Leftrightarrow 6\overline{AI} = 48 \Leftrightarrow \overline{AI} = 8$

Tem-se que o raio da circunferência (r) dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo [ABC], pelo que $r = 8 \div 2 = 4$.

Desta forma, o perímetro da circunferência dos nove pontos, relativamente ao triângulo [ABC], é igual a $2\pi \times 4 = 8\pi$ u.c.

5.

5.1 Tem-se que $A(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $B(0, \operatorname{sen}\alpha)$ e $C(1, \operatorname{tg}\alpha)$.

Como o ponto A pertence ao quarto quadrante, $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

Como o ponto C pertence ao quarto quadrante, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Assim, $\overline{AB} = \cos\alpha$.

Seja A' a projeção ortogonal de A sobre o eixo das tangentes.

$\overline{A'C} = -\operatorname{tg}\alpha - (-\operatorname{sen}\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

Logo, a área do triângulo [ABC] é dada, em função de α, por:

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{A'C}}{2} = \frac{\cos\alpha(-\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{2} = \frac{\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}{2}$$

5.2 Dado $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, e sabendo que A pertence ao 4º quadrante, tem-se $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $\operatorname{sen}\alpha < 0$, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Então:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

Da alínea **5.1**, a área do triângulo [ABC] é:

$$A = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) - \left(-\sqrt{15}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{16} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{16} + \frac{4\sqrt{15}}{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\frac{3\sqrt{15}}{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3\sqrt{15}}{32}$$

A área do triângulo [ABC] é $\frac{3\sqrt{15}}{32}$ u.a.

6.

6.1 Opção (C)

Se duas retas são perpendiculares, os seus vetores diretores também serão.

O vetor de coordenadas (6, 2, –3) é um vetor diretor da reta DH.

Assim, excluímos as opções (A) e (B).

O ponto A não pertence à reta definida por:

$$(x, y, z) = (7, 10, 1) + k(-3, 6, -2),\ k \in \mathbb{R}$$

$$(4, -4, -3) = (7, 10, 1) + k(-3, 6, -2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 7 - 3k \\ -4 = 10 + 6k \\ -3 = 1 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -3k \\ -14 = 6k \\ -4 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -\frac{7}{3} \\ k = 2 \end{cases}$$

Condição impossível, logo exclui-se a opção (D).

Verifica-se que $(6, 2, -3) \cdot (-3, 6, -2) = -18 + 12 + 6 = 0$ e ainda que o ponto A pertence à reta definida por:

$$(x, y, z) = (-2, 8, -7) + k(-3, 6, -2),\ k \in \mathbb{R}$$

$$(4, -4, -3) = (-2, 8, -7) + k(-3, 6, -2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2 - 3k \\ -4 = 8 + 6k \\ -3 = -7 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -3k \\ -12 = 6k \\ 4 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow k - 2$$

Assim, a opção correta é a (C).

6.2 O ponto C é o ponto de interseção da reta CG com o plano ABC.

Comecemos por definir o plano ABC.

O vetor de coordenadas (6, 2, –3) é um vetor normal ao plano ABC.

$$ABC: 6x + 2y - 3z + d = 0$$

Como o ponto $A(4, -4, -3)$ pertence ao plano ABC, vem que:

$$6 \times 4 + 2 \times (-4) - 3 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 24 - 8 + 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -25$$

$ABC: 6x + 2y - 3z - 25 = 0$

Determinemos uma equação vetorial da reta CG.

O vetor de coordenadas (6, 2, –3) é um vetor diretor da reta CG e G tem coordenadas (–7, 4, 13).

$CG: (x, y, z) = (-7, 4, 13) + k(6, 2, -3),\ k \in \mathbb{R}$

$(-7 + 6k, 4 + 2k, 13 - 3k),\ k \in \mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta CG na equação do plano ABC, vem que:

$6(-7 + 6k) + 2(4 + 2k) - 3(13 - 3k) - 25 = 0$

$\Leftrightarrow -42 + 36k + 8 + 4k - 39 + 9k - 25 = 0$

$\Leftrightarrow 49k = 98$

$\Leftrightarrow k = 2$

$k = 2 \rightsquigarrow C(-7 + 12, 4 + 4, 13 - 6)$, ou seja, $C(5, 8, 7)$.

7. Opção (B)

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{número de maneiras de}\\ \text{escolher a fila}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{trocas de}\\ \text{figurinistas}\\ \text{entre si}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{modos de estarem}\\ \text{juntos na mesma}\\ \text{fila}}} \times \underbrace{6!}_{\substack{\text{permutações}\\ \text{das restantes}\\ \text{seis pessoas}}}$$

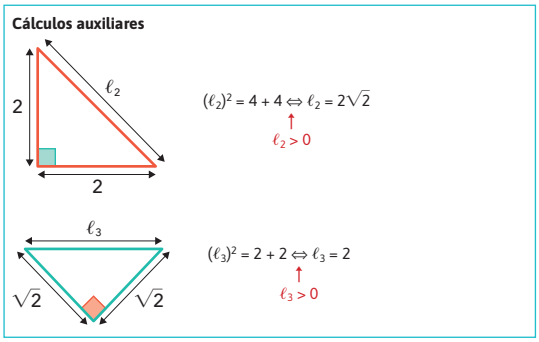
8. Consideremos a sucessão (a_n), cujos termos são as áreas dos quadrados descritos no enunciado.

$a_1 = 4^2 = 16$

$a_2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

$a_3 = 2^2 = 4$

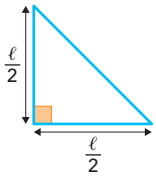
(...)



Em geral, se $a_n = \ell^2$:

$$\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{\ell^2}{2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ell}{2}$$

($\ell > 0$)



e $a_{n+1} = \frac{\ell^2}{2}$

Assim, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$.

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 16.

$$S_n < 32 \Leftrightarrow 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 32$$

$$\Leftrightarrow 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} < 32$$

$$\Leftrightarrow 32 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 32$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \quad \text{condição universal em } \mathbb{N}$$

Logo, a soma das áreas dos n quadrados da sequência é menor do que 32, qualquer que seja o valor de n.

9. Opção (D)

1º processo

Como W está no 2º quadrante e $\text{Im}(w) = -\text{Re}(w)$, podemos escrever $w = a + bi$, com $b = -a$ e $a < 0$.

Logo, $w = a - ai = a(1 - i)$.

Então:

$w^2 = a^2(1 - i)^2 = a^2(1 - 2i + i^2) = a^2(1 - 2i - 1) = -2a^2 i$

Agora, $w^2(-i) = (-2a^2 i)(-i) = 2a^2 i^2 = -2a^2$, que é um número real negativo.

Portanto, o afixo de $w^2(-i)$ pertence ao semieixo real negativo, isto é, ao ponto D.

2º processo

Como W está no 2º quadrante e $\text{Im}(w) = -\text{Re}(w)$, então $w = |w| e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$w^2(-i) = |w|^2 e^{i\frac{6\pi}{4}} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = |w|^2 e^{i\pi}$

Portanto, o afixo de $w^2(-i)$ pertence ao semieixo real negativo, isto é, ao ponto D.

10. Temos $z_1 = 3i^{17}$, $z_2 = \frac{2 - i}{1 + i}$ e $w = \sqrt{2}k\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Pretende-se que $|w - z_1| = |w - z_2|$.

Vamos escrever z_1 na forma algébrica:

$i^{17} = i^{16} \times i = (i^4)^4 \times i = 1 \times i = i$

Logo, $z_1 = 3i$.

Vamos escrever z_2 na forma algébrica:

$$z_2 = \frac{2 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i - i + i^2}{1 - i^2} = \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} i$$

Vamos escrever w na forma algébrica:

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$$w = \sqrt{2}\, k\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = k(-1 + i)$$

Logo, $w = -k + ki$.

$|w - z_1| = |w - z_2|$

$$|-k + ki - 3i| = \left|-k + ki - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i\right|$$

$$\Leftrightarrow |-k + i(k - 3)| = |-(k + 21) + i(k + 23)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-k)^2 + (k - 3)^2} = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(k + \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-k)^2 + (k - 3)^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(k + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 + (k^2 - 6k + 9) = \left(k^2 + k + \frac{1}{4}\right) + \left(k^2 + 3k + \frac{9}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 6k + 9 = 2k^2 + 4k + \frac{10}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 6k + 9 = 2k^2 + 4k + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -6k + 9 = 4k + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9 - \frac{5}{2} = 10k$$

$$\Leftrightarrow \frac{18}{2} - \frac{5}{2} = 10k$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{2} = 10k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{13}{20}$$

11.

11.1 **Número de resultados possíveis:** $^{52}C_3 = 22\,100$

Número de resultados favoráveis:

$$\underbrace{{}^{4}C_2}_{\substack{\text{número de maneiras de escolher 2 dos 4 naipes (naipe A e naipe B)}}} \times \underbrace{{}^{13}C_1}_{\substack{\text{número de maneiras de escolher 1 carta de um dos naipes}}} \times \underbrace{{}^{13}C_2}_{\substack{\text{número de maneiras de escolher 2 cartas do outro naipe escolhido}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{existem duas possibilidades: ou escolher 1 carta do naipe A e 2 cartas do naipe B ou escolher 1 carta do naipe B e 2 cartas do naipe A}}} = 12\,168$$

A probabilidade pedida é, então, $\frac{12\,168}{22\,100} \approx 0{,}551$, ou seja, aproximadamente, 55%.

11.2 O número de resultados possíveis é $^{52}A_4$, pois é o número de maneiras de retirar ao acaso, sucessivamente e sem reposição, quatro cartas do baralho completo.

O número de resultados favoráveis consiste no número de maneiras de, em quatro cartas, retirar, sucessivamente e sem reposição, no máximo, três cartas que sejam reis, que é o contrário de retirar, sucessivamente e sem reposição, os quatro reis existentes. Assim, o número de resultados favoráveis é igual à diferença entre o número de resultados possíveis, $^{52}A_4$, e o número de maneiras de retirar de forma sucessiva e sem reposição os quatro reis, o que pode ser feito de 4! maneiras diferentes. Assim, o número de resultados favoráveis é $^{52}A_4 - 4!$.

Segundo a regra de Laplace, numa experiência aleatória, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a esse acontecimento e o número de resultados possíveis, quando os acontecimentos elementares associados à experiência aleatória são equiprováveis e em número finito. Assim, a probabilidade de serem retiradas, no máximo, três cartas que sejam reis pode ser dada pela expressão $\frac{^{52}A_4 - 4!}{^{52}A_4}$.

12. Sejam os acontecimentos:

B: "O aluno frequenta Biologia."
I: "O aluno frequenta Inglês."

Sabe-se que:
- $P(B) = 2P(I)$
- $P(B \cup I) = 3P(B \cap I)$

Pretende-se determinar $P(\overline{I} \mid B)$.

$P(B \cup I) = P(B) + P(I) - P(B \cap I)$

$\Leftrightarrow P(B) + P(I) - P(B \cap I) = 3P(B \cap I)$

Como $P(B) = 2P(I)$, então:

$2P(I) + P(I) - P(B \cap I) = 3P(B \cap I) \Leftrightarrow 3P(I) = 4P(B \cap I)$

$$\Leftrightarrow P(B \cap I) = \frac{3}{4}P(I)$$

Como $P(I) = \frac{1}{2}P(B)$:

$$P(B \cap I) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}P(B) = \frac{3}{8}P(B)$$

Organizando a informação numa tabela:

	I	$\overline{I}$	Total
B	$\frac{3}{8}P(B)$		$P(B)$
$\overline{B}$			
Total	$\frac{P(B)}{2}$		

$$P(\overline{I} \cap B) = P(B) - P(I \cap B) = P(B) - \frac{3}{8}P(B) = \frac{5}{8}P(B)$$

Então, $P(\overline{I} \mid B) = \frac{P(\overline{I} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}P(B)}{P(B)} = \frac{5}{8}$.

13.

13.1 Sabe-se que:
- $a \in \mathbb{R}^-$;
- f é a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^4 + x - a$.

Pretende-se mostrar que $\exists\, c \in [-1, 0]: f(c) = -c$, ou seja, $\exists\, c \in [-1, 0]: f(c) + c = 0$.

Consideremos a função g, de domínio $[-1, 0]$, definida por $g(x) = f(x) + x$.

Tem-se que:
- g é contínua no intervalo $[-1, 0]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas nesse intervalo;
- $g(-1) = f(-1) + (-1) = a(-1)^4 + (-1) - a - 1 = -2 < 0$;
- $g(0) = f(0) + 0 = a(0)^4 + 0 - a = -a > 0$.

Assim, $g(-1) < 0 < g(0)$.

Portanto, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$\exists\, c \in]-1, 0[: f(c) + c = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in]-1, 0[: f(c) = -c$

Como $]-1, 0[\subset [-1, 0]$, fica provado que

$\exists\, c \in [-1, 0]: f(c) = -c$, ou seja, o gráfico de f interseta a bissetriz dos quadrantes pares, em, pelo menos, um ponto no intervalo $[-1, 0]$, como queríamos mostrar.

13.2 Vamos mostrar que g, definida na alínea anterior, é estritamente crescente em $[-1, 0]$.

$$g'(x) = 4ax^3 + 2$$

Para $x \in [-1, 0]$, tem-se $x^3 \leq 0$. Como $a < 0$, então $ax^3 \geq 0$ e, logo:

$$4ax^3 \geq 0 \Rightarrow g'(x) = 4ax^3 + 2 \geq 2 > 0$$

Portanto, g é estritamente crescente em $[-1, 0]$.

Uma função contínua e estritamente crescente só pode intersetar o eixo Ox uma vez nesse intervalo. Logo, o c que provamos existir na **13.1** é único.

13.3 Sabemos (das alíneas anteriores) que a raiz está em $[-1, 0]$. Vamos aplicar o método da bisseção.

1ª bisseção

$$m_1 = \frac{-1 + 0}{2} = -0{,}5$$

$$g(-0{,}5) = -(-0{,}5)^4 + 2(-0{,}5) + 1 = -\frac{1}{16} - 1 + 1 = -\frac{1}{16} < 0$$

Intervalo novo: $[-0{,}5; 0]$

2ª bisseção

$m_2 = \frac{-0,5 + 0}{2} = -0,25$

$g(-0,25) = -\left(\frac{1}{256}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = -\frac{1}{256} - \frac{1}{2} + 1 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{256} > 0$

Intervalo novo: [–0,5; –0,25]

3ª bisseção

$m_3 = \frac{-0,5 + (-0,25)}{2} = -0,375 = -\frac{3}{8}$

$g\left(-\frac{3}{8}\right) = -\left(\frac{81}{4096}\right) + 2\left(-\frac{3}{8}\right) + 1 =$

$= -\frac{81}{4096} - \frac{3}{4} + 1 =$

$= \frac{1}{4} - \frac{81}{4096} =$

$= \frac{1024 - 81}{4096} =$

$= \frac{943}{4096} > 0$

Intervalo novo: [–0,5; –0,375]

A amplitude do intervalo, após 3 bisseções, é:

$(-0,375) - (-0,5) = 0,125$

Tomando como aproximação o ponto médio do intervalo final, o erro absoluto máximo é metade da amplitude:

$\frac{0,125}{2} = 0,0625 < 0,1$

Portanto, uma aproximação com erro absoluto máximo inferior a 0,1 é:

$x \approx \frac{-0,5 + (-0,375)}{2} = -0,4375$

14.

14.1 $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe se $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^{1-x} - 2x + 1}{x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(e^{1-x} - 2x + 1)'}{(x - 1)'} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-e^{1-x} - 2}{1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} (-e^{1-x} - 2) =$

$= -e^0 - 2 =$

$= -3$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(-\frac{3 \ln x}{x - 1}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(-3 \ln x)'}{(x - 1)'} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-\frac{3}{x}}{1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-3}{x} =$

$= -3$

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$, então existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -3$.

14.2 Em $]-\infty, 1[$: $h(x) = \frac{e^{1-x} - 2x + 1}{x - 1} + \frac{2e^{1-x} + 2x - 1}{x - 1} =$

$= \frac{3e^{1-x}}{x - 1}$

$h'(x) = \frac{(3e^{1-x})'(x - 1) - 3e^{1-x} \times (x - 1)'}{(x - 1)^2} =$

$= \frac{-3e^{1-x}(x - 1) - 3e^{1-x}}{(x - 1)^2} =$

$= \frac{-3e^{1-x}(x - 1 + 1)}{(x - 1)^2} =$

$= \frac{-3e^{1-x} \times x}{(x - 1)^2}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3e^{1-x} \times x}{(x - 1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -3e^{1-x} \times x = 0 \wedge (x - 1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-3e^{1-x} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee x = 0) \wedge \underbrace{x \neq 1}_{\text{condição universal em }]-\infty, 1[}$

$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0		1
$-3e^{1-x}$	–	–	–	
x	–	0	+	
$(x - 1)^2$	+	+	+	
Sinal de h'	+	0	–	
Variação de h	↗	$h(0)$ Máx.	↘	

Cálculo auxiliar

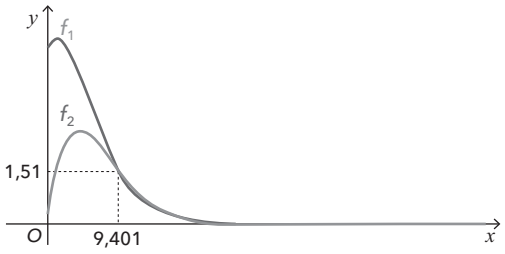
$h(0) = \frac{3e}{-1} = -3e$

h é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, 1[$; $-3e$ é máximo relativo em $x = 0$.

15. Pretendemos resolver a equação $P(x + 3) = \frac{1}{2} P(x)$, $x \geq 0$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = 1,2\, e^{-0,4(x + 3)} (x + 4)^2$

$f_2(x) = \frac{1,2}{2} e^{-0,4x} (x + 1)^2 = 0,6\, e^{-0,4x} (x + 1)^2$



$x \approx 9,401$

$9,401 \times 7 = 65,807$

Decorreram 66 dias.

Grupo A

a) Num intervalo de confiança para a média, a média amostral $\bar{x}$ é sempre o centro do intervalo.

Usando qualquer um dos intervalos:

$$\bar{x} = \frac{28{,}84 + 31{,}10}{2} = \frac{59{,}94}{2} = 29{,}97$$

b) Aplicando a fórmula:

$$\left[\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

em que:

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

σ – desvio-padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança

Para $z = 1{,}960$, temos:

$$29{,}97 - 1{,}960\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 28{,}48 \wedge 29{,}97 + 1{,}960\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 31{,}46$$

$$\Leftrightarrow -1{,}960\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = -1{,}49 \wedge 1{,}960\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}49$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}49}{1{,}96}$$

Aplicando novamente a fórmula acima, para $z = 2{,}576$:

$$\left[29{,}97 - 2{,}576 \times \frac{1{,}49}{1{,}96}; 29{,}97 + 2{,}576 \times \frac{1{,}49}{1{,}96}\right] = [28{,}01171429; 31{,}92828571]$$

Grupo B

a) Integrando termo a termo, temos:

$$2\int \cos x\, dx = 2\operatorname{sen} x$$

$$\int (-\operatorname{sen} x)\, dx = \cos x$$

Logo, uma primitiva geral é:

$$F(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

Como o gráfico contém o ponto $A(0, 2)$, então $F(0) = 2$.

Substituindo por $x = 0$:

$2 \operatorname{sen} 0 + \cos 0 + c = 0 + 1 + c = 2$, logo $c = 1$.

$$F(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos x + 1$$

b) A função não está definida em $x = 0$, logo trabalhamos em $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Escrevemos o integral e integramos diretamente:

$$\int \left(3x^2 - 4x + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int 3x^2\, dx - \int 4x\, dx + \int 2x^{-2}\, dx = x^3 - 2x^2 - 2x^{-1} + c$$

$G(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{2}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$ (válida em $x > 0$ ou em $x < 0$)

Grupo C

a)

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-3A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -9 & -3 & -12 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-3A + 2B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -9 & -3 & -12 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -9 & 3 & -8 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

b)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 10 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculos auxiliares

1.ª linha

- $1 \times 2 + (-2) \times 0 + 0 \times 1 = 2$
- $1 \times 1 + (-2) \times 3 + 0 \times (-2) = -5$
- $1 \times (-1) + (-2) \times 2 + 0 \times 0 = -5$

2.ª linha

- $3 \times 2 + 1 \times 0 + 4 \times 1 = 10$
- $3 \times 1 + 1 \times 3 + 4 \times (-2) = -2$
- $3 \times (-1) + 1 \times 2 + 4 \times 0 = -1$

3.ª linha

- $(-1) \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 1 = 0$
- $(-1) \times 1 + 0 \times 3 + 2 \times (-2) = -5$
- $(-1) \times (-1) + 0 \times 2 + 2 \times 0 = 1$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & 16 \\ -5 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Cálculos auxiliares

1.ª linha

- $2 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times (-1) = 6$
- $2 \times (-2) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = -3$
- $2 \times 0 + 1 \times 4 + (-1) \times 2 = 2$

2.ª linha

- $0 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times (-1) = 7$
- $0 \times (-2) + 3 \times 1 + 2 \times 0 = 3$
- $0 \times 0 + 3 \times 4 + 2 \times 2 = 16$

3.ª linha

- $1 \times 1 + (-2) \times 3 + 0 \times (-1) = -5$
- $1 \times (-2) + (-2) \times 1 + 0 \times 0 = -4$
- $1 \times 0 + (-2) \times 4 + 0 \times 2 = -8$

Ficha 3 – páginas 144 a 151

1.

1.1 Opção (B)

Considerando apenas a primeira preferência indicada pelos assinantes, o número de votos obtidos por cada uma das empresárias é:

Empresária A: $X + 120$

Empresária B: 260

Empresária C: 400

Um valor possível de X, de modo que a segunda empresária mais votada, nesta votação, fosse a empresária A, seria 180, uma vez que:

- na opção (A), $X = 110$. Assim, $110 + 120 = 230$ e $230 < 260$, ou seja, a empresária A ficaria em 3.º lugar;
- na opção (B), $X = 180$. Assim, $180 + 120 = 300$ e $260 < 300 < 400$, ou seja, a empresária A ficaria em 2.º lugar;
- na opção (C), $X = 290$. Assim, $290 + 120 = 410$ e $410 > 400$, ou seja, a empresária A ficaria em 1.º lugar;

• na Opção (D), $X = 320$. Assim, $320 + 120 = 440$ e $440 > 400$, ou seja a empresária A ficaria em 1º lugar.

1.2 Empresária A: $200 \times 3 + 400 \times 1 + 120 \times 3 + 260 \times 2 = 1880$

Empresária B: $200 \times 2 + 400 \times 2 + 120 \times 1 + 260 \times 3 = 2100$

Empresária C: $200 \times 1 + 400 \times 3 + 120 \times 2 + 260 \times 1 = 1900$

Por aplicação do método de Borda, a empresária mais empreendedora em 2025, escolhida pelos assinantes da revista, seria a empresária Bárbara.

2. $\frac{5 \times 1 + a \times 3 + 12 \times 5 + b \times 7 + 8 \times 9}{40} = 5{,}25$ e

$5 + a + 12 + b + 8 = 40$

$\Leftrightarrow 5 + 3a + 60 + 7b + 72 = 210$ e $a + b = 15$

$\Leftrightarrow 3a + 7b = 63$

$$\begin{cases} 3a + 7b = 73 \\ a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times (15 - b) + 7b = 73 \\ a = 15 - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45 - 3b + 7b = 73 \\ \text{———————} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 28 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 15 - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 8 \end{cases}$$

3.

Cálculos auxiliares

Determinação das frequências absolutas simples da sessão 1:

- $0{,}2 \times 120 = 24$
- $0{,}25 \times 120 = 30$
- $0{,}10 \times 120 = 12$
- $0{,}3 \times 120 = 36$
- $0{,}15 \times 120 = 18$

Determinação das frequências absolutas simples da sessão 2:

- $27 - 11 = 16$
- $41 - 27 = 14$
- $42 - 41 = 1$
- $50 - 42 = 8$

Assim:

Classes	Frequências absolutas simples		Total
	Sessão 1	Sessão 2	
[14, 18[	24	11	35
[18, 22[	30	16	46
[22, 26[	12	14	26
[26, 30[	36	1	37
[30, 34[	18	8	26

4. Como P é o ponto de interseção das medianas do triângulo, P é o baricentro deste triângulo e, assim, sabemos que o triângulo $[ABC]$ da figura está dividido em seis triângulos equivalentes.

Como a área do triângulo $[APE]$ é 10 cm^2, tem-se que a área do triângulo $[ABC]$ é 60 cm^2. Por outro lado, como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, a altura $[CD]$ é perpendicular à base $[AB]$ e $\overline{AD} = \overline{BD} = 5$.

Assim, $60 = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} \Leftrightarrow 60 = \frac{10 \times \overline{CD}}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = 12$.

Uma vez que P é o baricentro do triângulo $[ABC]$, sabemos que a distância de P a qualquer um dos vértices do triângulo é $\frac{2}{3}$ da mediana respetiva, logo $\overline{PC} = \frac{2}{3} \times 12 = 8$.

Portanto, a área do círculo cujo centro é o baricentro do triângulo $[ABC]$ e o raio é igual a $\overline{PC}$ é, então, $\pi \times 8^2$, isto é, $64\,\pi$ cm^2.

5. Opção (A)

$$\begin{aligned}(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \times ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = \\ &= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \left(\frac{3\pi}{4}\right) - 2 \times (\sqrt{2})^2 + 4^2 = \\ &= \sqrt{2} \times 4 \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) - 4 + 16 = \\ &= -4 - 4 + 16 = \\ &= 8\end{aligned}$$

6. A área da região a sombreado é obtida pela soma da área do setor circular correspondente ao ângulo AOB com a área do trapézio $[OBCD]$.

Comecemos por calcular a área do setor circular correspondente ao ângulo AOB:

$$\frac{\alpha \times 4^2}{2} = 8\alpha$$

A área do trapézio $[OBCD]$ é dada por

$$A_{[OBCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{OD}}{2} \times \overline{CD}.$$

As coordenadas do ponto B, em função de α, são $(4 \cos \alpha, 4 \operatorname{sen} \alpha)$.

De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir que:

$\overline{BC} = 2 \times 4 \operatorname{sen} \alpha = 8 \operatorname{sen} \alpha$

$\overline{OD} = 4 \operatorname{sen} \alpha$

$\overline{CD} = -4 \cos \alpha$

Assim:

$$\begin{aligned}A_{[OBCD]} &= \frac{8 \operatorname{sen} \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha}{2} \times (-4 \cos \alpha) = \\ &= 6 \operatorname{sen} \alpha \times (-4 \cos \alpha) = \\ &= -24 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

Desta forma, a área da região a sombreado é dada, em função de α, pela expressão:

$8\alpha + (-24 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) = 8\alpha - 24 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

7.

7.1 Opção (A)

O plano DCH é paralelo ao plano ABG, logo é definido por uma equação do tipo:

$$-\frac{3}{2}x - y + z + d = 0$$

Como o vértice $H(3, 8, 15)$ pertence ao plano DCH, então:

$$-\frac{3}{2} \times 3 - 8 + 15 + d = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} - \frac{16}{2} + \frac{30}{2} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{5}{2}$$

Logo, o plano DCH pode ser definido por:

$$-\frac{3}{2}x - y + z - \frac{5}{2} = 0$$

7.2 $B\hat{A}H = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}$

As coordenadas do ponto A são do tipo $(a, 0, 0)$, e o ponto A pertence ao plano ABG, logo:

$$-\frac{3}{2}a - 0 + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}a = -6 \Leftrightarrow a = 4$$

Assim, $A(4, 0, 0)$.

As coordenadas do ponto B são do tipo $(0, b, 0)$, e o ponto B pertence ao plano ABG, logo:

$$-\frac{3}{2} \times 0 - b + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow -b = -6 \Leftrightarrow b = 6$$

Assim, $B(0, 6, 0)$.

Sabemos que $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AH}||}$.

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{AB} = (0, 6, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 6, 0)$
- $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$
- $\overrightarrow{AH} = (3, 8, 15) - (4, 0, 0) = (-1, 8, 15)$
- $||\overrightarrow{AH}|| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 15^2} = \sqrt{1 + 64 + 225} = \sqrt{290}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = (-4, 6, 0) \cdot (-1, 8, 15) = 4 + 48 = 52$

Tem-se que:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{52}{\sqrt{52} \times \sqrt{290}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{52}{2\sqrt{3770}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \frac{26}{\sqrt{3770}}$$

Logo, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{26}{\sqrt{3770}}\right)$ e $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = 65°$.

8.

8.1 Opção (C)

$2 \times 5 \times 2! \times 4! = 480$

8.2 Uma vez que o código é constituído por seis algarismos e que representa um número superior a oitocentos mil, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: o número deverá começar por 8 ou por 9. Por outro lado, o algarismo que irá ocupar a sexta posição deverá ser 2, 4, 6 ou 8, uma vez que o código deverá representar um número par, mas 2 e 8 terão de estar juntos.

Contabilizemos os códigos cujo algarismo que ocupa a primeira posição é o 8. Nesta situação, 2 tem de ser o algarismo seguinte, podendo o sexto algarismo ser o 4 ou o 6. Há, ainda, três dígitos por escolher, sem repetição dos algarismos já utilizados. Existem, assim, seis opções na escolha do terceiro dígito; para cada uma destas, existem cinco opções na escolha do quarto dígito; e, para cada uma destas, existem quatro opções na escolha do quinto dígito.

Esquematicamente:

$$\underline{\mathbf{8}}_{1} \times \underline{\mathbf{2}}_{1} \times \underline{\quad}_{6} \times \underline{\quad}_{5} \times \underline{\quad}_{4} \times \underline{4/6}_{2}$$

Contabilizemos, agora, os códigos que começam por 9. Para esta situação, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: o código terminar em 2 ou em 8, ou o código terminar com os algarismos 4 ou 6, conforme se observa no esquema seguinte:

$$\underline{\mathbf{9}}_{1} \times \underline{\quad}_{6} \times \underline{\quad}_{5} \times \underline{\quad}_{4} \times \underline{\quad}_{1} \times \underline{2/8}_{2} +$$

$$+ \underline{\mathbf{9}}_{1} \times \underline{\quad}_{3} \times \underline{\quad}_{2!} \times \underline{\quad}_{5} \times \underline{\quad}_{4} \times \underline{4/6}_{2}$$

Na primeira alternativa, e uma vez que os algarismos 2 e 8 devem dispor-se lado a lado, existem duas opções para os dois últimos dígitos que são o 28 ou o 82. Seguidamente, há seis opções na escolha do segundo dígito; para cada uma destas, existem cinco opções na escolha do terceiro dígito e, para cada uma destas, existem quatro opções na escolha do quarto dígito.

Na segunda alternativa, o código terminar com os algarismos 4 ou 6, existem três opções na escolha do posicionamento dos algarismos 2 e 8, lado a lado, e, para cada uma destas formas, existem 2! modos distintos de eles se disporem entre si. Há, ainda, dois dígitos por escolher, sem repetição dos algarismos já utilizados. Há, assim, cinco opções na escolha de um dos dígitos em falta e, para cada uma destas, quatro opções na escolha do último dígito em falta.

Assim, de acordo com as condições do enunciado, o número de códigos existentes são:

$$240 + 240 + 240 = 720$$

9. Sabemos que (a_n) é uma progressão aritmética, que $a_1 + a_2 + \ldots + a_{50} = 662{,}5$ e que $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100} = 1912{,}5$.

Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_{50}}{2} \times 50 = 662{,}5 \\ \dfrac{a_{51} + a_{100}}{2} \times 50 = 1912{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_{50} = 26{,}5 \\ a_{51} + a_{100} = 76{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + 49r) = 26{,}5 \\ (a_1 + 50r) + (a_1 + 99r) = 76{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 49r = 26{,}5 \\ 2a_1 + 149r = 76{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 26{,}5 - 49r \\ 26{,}5 - 49r + 149r = 76{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{_____} \\ 100r = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 26{,}5 - \dfrac{49}{2} \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, $a_1 = b_1 = 1$ e a razão de ambas as progressões (a_n) e (b_n) é $\frac{1}{2}$.

Assim:

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} \times b_1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \times 1$$

$$\lim S_n = \lim \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \times 1 \right) =$$

$$= \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2$$

10.

10.1 $\overline{z_2} = z_2 \times z_1 \Leftrightarrow \overline{\sqrt{2}\, e^{i\alpha}} = \sqrt{2}\, e^{i\alpha} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\, e^{i(-\alpha)} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = \alpha + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Cálculos auxiliares

- $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
- Seja θ um argumento de z_1:

  $\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \wedge \theta \in 3.^{\circ}\text{Q}$, logo $\theta = \frac{4\pi}{3}$ (por exemplo).

10.2 Opção (D)

$$z_2 + z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\alpha} + \underbrace{2\sqrt{2}\, e^{i(\alpha + \pi)}}_{\text{simétrico de } 2\sqrt{2}\, e^{i\alpha}} =$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\alpha} + (-2\sqrt{2}\, e^{i\alpha}) =$$

$$= -\sqrt{2}\, e^{i\alpha} =$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i(\alpha + \pi)}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\alpha + \pi \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, isto é, o afixo de $z_2 + z_3$ pertence ao 4.º quadrante.

11. Consideremos os acontecimentos:

I: "Ter idade inferior a 45 anos."

O: "Fazer compras *online*."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(I) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$
- $P(O \mid \overline{I}) = \frac{2}{9}$
- $P(\overline{O} \cap I) = 0{,}1 = \frac{1}{10}$

Pretendemos determinar o valor de $P(I \mid O)$.

Assim:

	I	$\overline{I}$	Total
O	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{30}$
$\overline{O}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{17}{30}$
Total	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Cálculos auxiliares

- $P(O \mid \overline{I}) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{P(O \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow P(O \cap \overline{I}) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{5}$

  $\Leftrightarrow P(O \cap \overline{I}) = \frac{2}{15}$
- $P(O \cap I) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$
- $P(O) = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{13}{30}$

$$P(I \mid O) = \frac{P(I \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{90}{130} = \frac{9}{13}$$

12. Sabemos que existem sete pontos distintos assinalados na reta *r* e *n* pontos distintos assinalados na reta *s*.

$^{7+n}C_3$ é o número de maneiras de escolher quaisquer três pontos (sem que a ordem interesse), de entre os $7 + n$ pontos assinalados nas duas retas. Logo, o número de resultados possíveis é $^{7+n}C_3$.

Existem duas hipóteses mutuamente exclusivas para definir um triângulo com os três pontos escolhidos: ou se escolhe um ponto da reta *r* e dois pontos da reta *s* ou se escolhem dois pontos da reta *r* e um ponto da reta *s*.

Para o primeiro caso, existem 7 modos distintos de escolher um ponto da reta *r* e, por cada um destes modos, existem $^{n}C_2$ maneiras distintas de escolher dois pontos da reta *s* (sem que a ordem interesse).

Para o segundo caso, existem $^{7}C_2$ modos distintos de escolher dois pontos da reta *r* (sem que a ordem interesse) e, por cada um destes modos, existem *n* maneiras distintas de escolher um ponto da reta *s*.

Logo, o número de resultados favoráveis é $7 \times {}^{n}C_2 + {}^{7}C_2 \times n$.

Segundo a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a esse acontecimento e o número de resultados possíveis, quando estes são todos equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{7 \times {}^{n}C_2 + {}^{7}C_2 \times n}{{}^{7+n}C_3}$$

13.

13.1 Opção (B)

$$\text{t.m.v.}_{[a,\,2a]} = \frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} =$$

$$= \frac{(2a)^2 \ln(2a) + e^2 - (a^2 \ln a + e^2)}{a} =$$

$$= \frac{4a^2 \ln(2a) + e^2 - a^2 \ln a - e^2}{a} =$$

$$= \frac{4a^2 \ln(2a) - a^2 \ln a}{a} =$$

$= 4a \ln(2a) - a \ln a =$

$= a(4 \ln(2a) - \ln a) =$

$= a(\ln(2a)^4 - \ln a) =$

$= a \ln\left(\frac{(2a)^4}{a}\right) =$

$= a \ln\left(\frac{16a^4}{a}\right) =$

$= a \ln(16a^3)$

13.2 Para que f seja contínua em $x = -2$, tem de existir $\lim_{x \to -2} f(x)$ e $\lim_{x \to -2} f(x) = f(2)$, isto é:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$$

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{e^x - e^{-2}}{x^2 + 3x + 2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim_{x \to -2^-} \frac{(e^x - e^{-2})'}{(x^2 + 3x + 2)'} =$

$= \lim_{x \to -2^-} \frac{e^x - 0}{2x + 3} =$

$= \frac{e^{-2} - 0}{2 \times (-2) + 3} =$

$= -e^{-2}$

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) = \log k$

Assim, $\log k = -e^{-2} \Leftrightarrow k = 10^{-e^{-2}}$.

Logo, existe um valor real $k = 10^{-e^{-2}}$ tal que a função f é contínua em $x = -2$.

13.3 Em $]0, +\infty[$:

$f'(x) = (x^2 \ln x + e^2)' =$

$= (x^2)' \times \ln x + x^2 \times (\ln x)' + 0 =$

$= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} =$

$= 2x \ln x + x =$

$= x(2 \ln x + 1)$

$f'(x) = 0$

$x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2 \ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin\,]0, +\infty[} \vee x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x	n.d.	+	+	+
$2 \ln x + 1$	n.d.	–	0	+
Sinal de f'	n.d.	–	0	+
Variação de f	n.d.	↘	mín. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	↗

Cálculo auxiliar

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + e^2 =$

$= e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{e^{-1}}{2} + e^2 =$

$= e^2 - \frac{1}{2e}$

f é estritamente decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$ e é estritamente crescente em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$; $e^2 - \frac{1}{2e}$ é mínimo relativo em $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

14. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^a x^2 + x + 1 = \ln(a)x + a$

$\Leftrightarrow e^a x^2 + (1 - \ln a)x + 1 - a = 0$

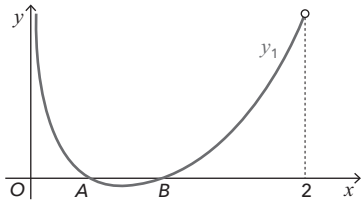
A equação de 2º grau acima tem uma única solução se e só se $(1 - \ln a)^2 - 4e^a(1 - a) = 0$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, e usando x como variável independente, tem-se:

$y_1 = (1 - \ln x)^2 - 4e^x(1 - x)$

$A(0{,}41; 0)$

$B(0{,}86; 0)$



Os valores de a, com arredondamento às centésimas, são 0,41 e 0,86.

Grupo A

$n = 800$

$\hat{p} = \frac{220}{800} = 0{,}275$

Para um nível de confiança de 95%, considera-se $z \approx 1{,}96$.

Aplicando a fórmula, e substituindo os valores, obtemos:

$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$

$= \left[0{,}275 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}275 \times 0{,}725}{800}}; 0{,}275 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}275 \times 0{,}725}{800}}\right]$

Conservando quatro casas decimais nos cálculos intermédios, obtemos [0,2441; 0,3059].

O intervalo pedido, arredondando os extremos às centésimas, é [0,24; 0,31].

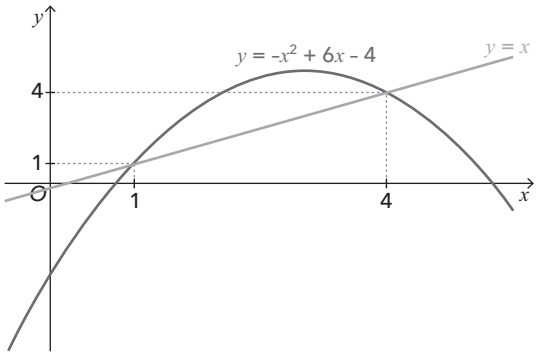
Este é o intervalo de confiança a 95% para a proporção de jovens adultos que assistem a vídeos curtos durante, no máximo, 30 minutos por dia.

Grupo B

$-x^2 + 6x - 4 = x \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$



A função que se pretende calcular a área é $(-x^2 + 6x - 4) - x$.

A área é:

$$A = \int_1^4 [(-x^2 + 6x - 4) - x]\, dx =$$

$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5 \times 4^2}{2} - 4 \times 4 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5 \times 1^2}{2} - 4 \times 1 \right) =$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Grupo C

a) $2C = 2\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 0 \times 0 & 5 \times (-3) + 0 \times (-1) & 5 \times 4 + 0 \times 2 \\ -1 \times 2 + 1 \times 0 & -1 \times (-3) + 1 \times (-1) & -1 \times 4 + 1 \times 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -15 & 20 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2C + BC = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -15 & 20 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -21 & 28 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Não é possível efetuar a operação.

Como a matriz C é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 2×2, não é possível efetuar a multiplicação da matriz C pela matriz B. Para ser possível multiplicar matrizes, o número de colunas da primeira matriz tem de ser igual ao número de linhas da segunda matriz, o que não se verifica, já que a matriz C tem 3 colunas e a matriz B tem 2 linhas.