2. Probabilidade

Recorda – páginas 94 a 97

1. Para responder ao pedido, vamos construir uma tabela de dupla entrada e pintar os números ímpares.

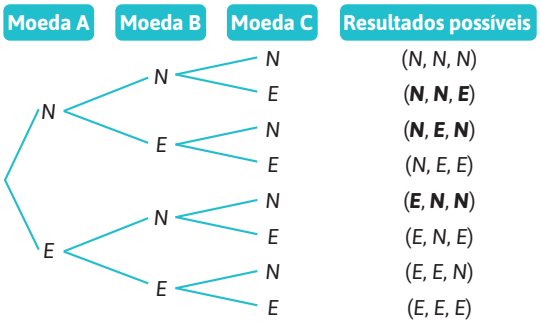
	1	2	3	4	5	6
1	**11**	12	**13**	14	**15**	16
2	**21**	22	**23**	24	**25**	26
3	**31**	32	**33**	34	**35**	36
4	**41**	42	**43**	44	**45**	46
5	**51**	52	**53**	54	**55**	56
6	**61**	62	**63**	64	**65**	66

Para estes números, vamos, agora, determinar o produto dos seus algarismos e pintar aqueles que são números primos.

	1	2	3	4	5	6
1	1		**3**		**5**	
2	**2**		6		10	
3	**3**		9		15	
4	4		12		20	
5	**5**		15		25	
6	6		18		30	

Concluímos que existem cinco números ímpares cujo produto dos seus algarismos é um número primo.

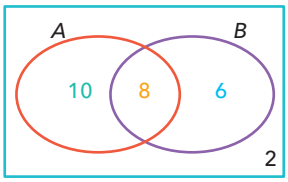
2. Para responder ao pedido, vamos construir um diagrama em árvore com todos os resultados possíveis e pintar apenas os resultados em que ocorrem duas faces nacionais.



Concluímos que existem três resultados em que ocorrem exatamente duas faces nacionais.

3. Designemos por A o conjunto constituído pelos alunos inscritos em Aplicações Informáticas e por B o conjunto constituído pelos alunos inscritos em Inglês:

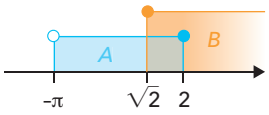
$26 - 2 = 24$ $\quad$ $14 + 18 = 32$



$32 - 24 = 8$
$18 - 8 = 10$
$14 - 8 = 6$

Por observação do diagrama de Venn, concluímos que existem seis alunos nas condições pedidas.

4.



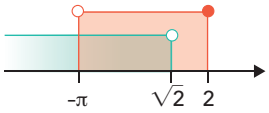
a) $\overline{A} =]-\infty, -\pi] \cup]2, +\infty[$

b) $\overline{B} =]-\infty, \sqrt{2}[$

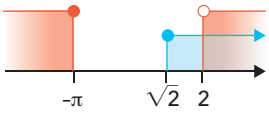
c) $A \cap B = [\sqrt{2}, 2]$

d) $A \cup B =]-\pi, +\infty[$

e) $A \cap \overline{B} =]-\pi, \sqrt{2}[$



f) $\overline{A} \cap B =]2, +\infty[$



5.

a) $P(\text{“selecionar uma carta vermelha”}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

b) $P(\text{“selecionar um rei”}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

c) $P(\text{“selecionar uma carta de copas”}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

d) $P(\text{“selecionar uma figura”}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

6.

a) ${}^{5}A'_{3} = 5^3 = 125$

b) ${}^{5}A_{3} = 60$

c) $5! = 120$

d) ${}^{5}C_{3} = 10$

7.

a) ${}^{24}A_{3} = 12\,144$

b) ${}^{24}C_{3} = 2024$

c) ${}^{24}A_{3} \times {}^{21}C_{2} = 2\,550\,240$

Capítulo 1 – Fenómeno aleatório

Tarefa – Os aniversários – página 98

1. **Número de resultados possíveis**

$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 12^3$

Número de resultados favoráveis

$\overline{12} \times \overline{11} \times \overline{10} = 1320$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1320}{12^3} \approx 0{,}764$, isto é, aproximadamente, 76%.

2.

a) **Número de resultados possíveis**

$\underbrace{365 \times 365 \times 365 \times \ldots \times 365}_{25 \text{ alunos}} = 365^{25}$

Número de resultados favoráveis

$\underbrace{365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times 341}_{25 \text{ alunos}} = {}^{365}A_{25}$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{365}A_{25}}{365^{25}} \approx 0{,}4313$, isto é, aproximadamente, 43,13%.

b) Pela alínea anterior, sabemos que a probabilidade de todos os alunos fazerem anos em dias distintos é $\frac{{}^{365}A_{25}}{365^{25}}$. Assim, a probabilidade do acontecimento "haver pelo menos dois alunos a fazer anos no mesmo dia" (acontecimento contrário do anterior) é $1 - \frac{{}^{365}A_{25}}{365^{25}} \approx 0{,}5687$, isto é, aproximadamente, 56,87%.

3.

Cálculos auxiliares

- $1 - \frac{{}^{365}A_{40}}{365^{40}} \approx 0{,}8912$
- $1 - \frac{{}^{365}A_{50}}{365^{50}} \approx 0{,}9704$
- $1 - \frac{{}^{365}A_{60}}{365^{60}} \approx 0{,}9941$
- $1 - \frac{{}^{365}A_{70}}{365^{70}} \approx 0{,}9992$
- $1 - \frac{{}^{365}A_{80}}{365^{80}} \approx 0{,}9999$

Probabilidade de haver aniversários repetidos

Número de pessoas	25	40	50	60	70	80
Probabilidade (em %)	56,87	89,12	97,04	99,41	99,92	99,99

Exercícios de margem – páginas 99 a 105

1.

a) $S = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $S = \{$verde, azul, rosa, amarelo, branco, laranja, vermelho$\}$

2.

a) Consideremos os acontecimentos:

N: "Sair face nacional."

E: "Sair face europeia."

Assim:

$S = \{(N, 1), (N, 2), (N, 3), (N, 4), (N, 5), (N, 6), (E, 1), (E, 2), (E, 3), (E, 4), (E, 5), (E, 6)\}$

b) Consideremos os acontecimentos:

F: "Ser a favor."

C: "Ser contra."

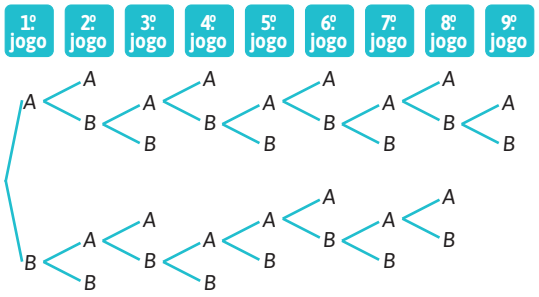
Assim:

$S = \{(F, F, F), (F, F, C), (F, C, F), (F, C, C), (C, F, F), (C, F, C), (C, C, F), (C, C, C)\}$

c) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

3. *A*: "Ganha o jogador A."

B: "Ganha o jogador B."



$S = \{AA, ABB, ABAA, ABABB, ABABAA, ABABABB, ABABABAA, ABABABABA, ABABABABB, BB, BAA, BABB, BABAA, BABABB, BABABAA, BABABABB, BABABABAB, BABABABAA\}$

$\#S = 18$

4.

a) $S = \{(F, F, F), (F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (M, F, F), (M, F, M), (M, M, F), (M, M, M)\}$

b) **i.** Por exemplo: *A*: "os três filhos serem rapazes".
$A = \{(M, M, M)\}$

ii. Por exemplo: *B*: "ter pelo menos dois rapazes".
$B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (M, M, M)\}$

iii. Por exemplo: *C*: "ter pelo menos um rapaz ou uma rapariga".

c) **i.** $\{(F, M, M), (M, F, M), (M, M, F)\}$

ii. $\{(F, M, M), (M, F, M), (M, M, F), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$

iii. $\{(M, M, M), (F, M, M), (M, F, M), (M, M, F), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F)\}$

iv. $\{(F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$

v. $\{(M, M, M)\}$

5. Opção (C)

O acontecimento contrário do acontecimento "saírem três faces de cor diferente" tem de contemplar os casos em que saem três faces da mesma cor, bem como os casos em que saem duas faces da mesma cor e uma face de cor diferente.

6. **A.** A proposição é verdadeira.

Se dois acontecimentos *A* e *B* de uma mesma experiência aleatória são contrários, então $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = S$. Assim, como $A \cap B = \varnothing$, então *A* e *B* são incompatíveis.

B. A proposição é falsa.

Contraexemplo:

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{1\}$

$B = \{3, 4\}$

$A \cap B = \varnothing$, ou seja, *A* e *B* são acontecimentos incompatíveis. Porém, $A \cup B \neq S$, logo *A* e *B* não são contrários.

7.

a) $A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$

b) $A \cap B = \{1, 7\}$

c) $\overline{A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

d) $A \cap \overline{B} = \{0, 8\}$

e) $\overline{A} \cap B = \{3, 5\}$

8.

a) $\overline{\overline{A} \cap A} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{A} = A \cup \overline{A} = U$

b) $\overline{B} \cup (A \cup B) = \overline{B} \cup A \cup B = A \cup \overline{B} \cup B = A \cup U = U$

c) $\overline{B} \cap (A \cap B) = \overline{B} \cap A \cap B = A \cap \overline{B} \cap B = A \cap \varnothing = \varnothing$

9.

$$\begin{aligned}(A \cup C) \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup C = \\ &= \varnothing \cup C = \\ &= C\end{aligned}$$

10.

a) $\overline{B \backslash A} = \overline{B \cap \overline{A}} = \overline{B} \cup \overline{\overline{A}} = A \cup \overline{B}$

b)
$$\begin{aligned}(A \cup \overline{B}) \cap \overline{A} &= (A \cap \overline{A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A}) = \\ &= \varnothing \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \\ &= \overline{A \cup B}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}(\overline{A \cup B}) \cup B &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B = \\ &= (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = \\ &= (\overline{A} \cup B) \cap U = \\ &= \overline{A} \cup B\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}A \cap (B \cup \overline{A}) &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{A}) = \\ &= (A \cap B) \cup \varnothing = \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B) &= \overline{\overline{B}} \cap (\overline{\overline{A} \cap B}) = \\ &= B \cap (\overline{\overline{A}} \cup \overline{B}) = \\ &= B \cap (A \cup \overline{B}) = \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) = \\ &= (A \cap B) \cup \varnothing = \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}(\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}) \cup (\overline{A} \cap B) &= (\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}) \cap (\overline{\overline{A} \cap B}) = \\ &= (B \cap C) \cap (A \cup \overline{B}) = \\ &= C \cap B \cap (A \cup \overline{B}) = \\ &= C \cap [(B \cap A) \cup (B \cap \overline{B})] = \\ &= C \cap [(B \cap A) \cup \varnothing] = \\ &= C \cap B \cap A = \\ &= A \cap B \cap C\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}\overline{\overline{A} \cup (A \cap B)} &= A \cap (\overline{A \cap B}) = \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \\ &= \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) = \\ &= A \cap \overline{B} = \\ &= A \backslash B\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) &= (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

Aprende fazendo (1) – páginas 106 e 107

11. Opção (B)

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{A \cup B} = \{1\}$

12. B: "A equipa vencedora ser o Brasil."

E: "A equipa vencedora ser a Espanha."

I: "A equipa vencedora ser a Itália."

T: "A equipa vencedora ser Portugal."

a) $S = \{B, E, I, T\}$

b) $\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{B\}, \{E\}, \{I\}, \{T\}, \{B, E\}, \{B, I\}, \{B, T\}, \{E, I\}, \{E, T\}, \{I, T\}, \{B, E, I\}, \{B, E, T\}, \{B, I, T\}, \{E, I, T\}, S\}$

c) Por exemplo:

"A equipa vencedora ser a China." ⟶ acontecimento impossível.

"A equipa vencedora ser Portugal." ⟶ acontecimento elementar.

"A equipa vencedora ser europeia." ⟶ acontecimento composto.

"A equipa vencedora ser europeia ou de língua portuguesa." ⟶ acontecimento certo.

13.

a) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

b) $A = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}$

$B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

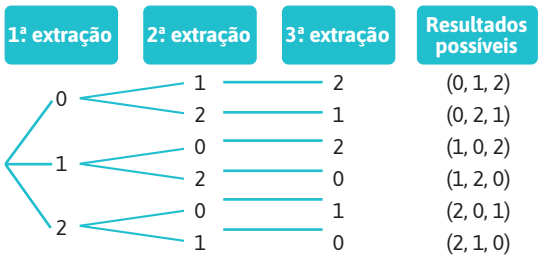
i. $A \cap B = A = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}$

ii. $A \cup B = B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

iii. $B \backslash A = \{(1, 2), (1, 6), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

iv. $A \backslash B = \varnothing$

14.



a) $S = \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

b) $A = \{(1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

$B = \{(0, 2, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0)\}$

$C = \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

i. $A \cap B = \{(2, 1, 0)\}$

ii. $A \cap C = \{(2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

iii. $A \cup B = \{(0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

iv. $\overline{B} \cup \overline{C} = \{(0, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1)\}$

v. $\overline{B \cup C} = \{(1, 0, 2)\}$

vi. $B \backslash C = \{(1, 2, 0)\}$

vii. $C \backslash B = \{(0, 1, 2), (2, 0, 1)\}$

15. $A = \{1, 2, 5\}$
$B = \{2, 4, 6\}$

a) $A \cap B$

b) $\overline{A \cup B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$

c) $A \backslash B$

d) $B \backslash A$

16.

a) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap U = A$

b) $\overline{(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} = \overline{(\overline{A} \cap B)} \cap \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} =$
$= (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) =$
$= A \cup (\overline{B} \cap B) =$
$= A \cup \varnothing =$
$= A$

17. Opção (B)
Por definição de acontecimentos incompatíveis ($A \cap B = \varnothing$), sabe-se que se ocorre A, não pode ocorrer B.
Assim, a opção correta é a (B).

Capítulo 2 – Probabilidade

Tarefa – Os dados – página 108

Galileu socorreu-se da seguinte estratégia: pintou os três dados de cores diferentes, branco, cinzento e preto. O dado branco podia apresentar 6 possibilidades diferentes, obtendo-se 6 × 6 possibilidades para os dois dados. Para cada uma destas possibilidades, o dado preto também admitia 6 possibilidades distintas. Obtinha-se, assim, um total de 6 × 6 × 6 = 216 possibilidades.
Galileu apresentou as 216 possibilidades e verificou que havia 25 casos cujo total era 9 e 27 casos cujo total era 10.
Cada caso era representado por um terno ordenado, onde o primeiro número se referia ao dado branco, o segundo número ao dado cinzento e o terceiro ao dado preto.

Casos cuja soma é igual a 9

(1, 2, 6)	(1, 3, 5)	(2, 3, 4)
(1, 6, 2)	(1, 5, 3)	(2, 4, 3)
(2, 1, 6)	(3, 1, 5)	(3, 2, 4)
(2, 6, 1)	(3, 5, 1)	(3, 4, 2)
(6, 1, 2)	(5, 1, 3)	(4, 2, 3)
(6, 2, 1)	(5, 3, 1)	(4, 3, 2)
6 casos	6 casos	6 casos
(1, 4, 4)	(2, 2, 5)	
(4, 1, 4)	(2, 5, 2)	
(4, 4, 1)	(5, 2, 2)	
3 casos	3 casos	

(3, 3, 3) ⟶ 1 caso

Casos cuja soma é igual a 10

(1, 4, 5)	(1, 3, 6)	(2, 3, 5)
(1, 5, 4)	(1, 6, 3)	(2, 5, 3)
(4, 1, 5)	(3, 1, 6)	(3, 2, 5)
(4, 5, 1)	(3, 6, 1)	(3, 5, 2)
(5, 1, 4)	(6, 1, 3)	(5, 2, 3)
(5, 4, 1)	(6, 3, 1)	(5, 3, 2)
6 casos	6 casos	6 casos
(2, 4, 4)	(2, 2, 6)	(3, 3, 4)
(4, 2, 4)	(2, 6, 2)	(3, 4, 3)
(4, 4, 2)	(6, 2, 2)	(4, 3, 3)
3 casos	3 casos	3 casos

Daqui concluiu que, apesar de existir o mesmo número de triplos cuja soma é 9 e cuja soma é 10, de facto a probabilidade de se obter soma 10 é superior à probabilidade de se obter soma 9. Os jogadores não tinham reparado que os triplos se podiam obter mediante um número diferente de maneiras. Por exemplo, o triplo 3 + 3 + 3 pode ser obtido de uma única forma, enquanto que o triplo 3 + 3 + 4 pode ser obtido de três maneiras diferentes, pois o 4 pode ter saído no dado branco, no cinzento ou no preto.
Galileu apercebeu-se de que, para tornar possível o cálculo do valor real desta probabilidade, teria de definir o espaço de resultados, de modo a que cada resultado elementar fosse equiprovável (com igual probabilidade de ocorrer).

Exercícios de margem – páginas 112 a 122

18.

a) $P(\text{“ser um número primo”}) = \frac{4}{9}$

b) $P(\text{“ser um número múltiplo de 3 e par”}) = \frac{1}{9}$

19.



a) $P(\text{“as pontuações obtidas são iguais”}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{“nenhuma pontuação é 2”}) = \frac{4}{9}$

c) $P(\text{“pelo menos uma pontuação é 3”}) = \frac{5}{9}$

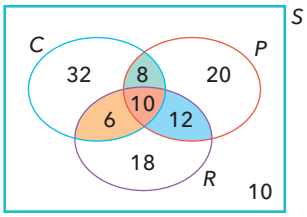
d) $P(\text{“nenhuma pontuação é 2 e ambas as pontuações são iguais”}) = \frac{2}{9}$

e) $P(\text{“nenhuma pontuação é 2 ou ambas as pontuações são iguais”}) = \frac{5}{9}$

20. Consideremos os acontecimentos:
C: "Especializar-se em Cardiologia."
P: "Especializar-se em Pediatria."
R: "Especializar-se em Reumatologia."

Pelo enunciado, sabemos que:
- $\#S = 116$
- $\#C = 56$
- $\#P = 50$
- $\#R = 46$
- $\#(C \cap P) = 18$
- $\#(C \cap R) = 16$
- $\#(P \cap R) = 22$

Logo:
$\#(C \cap P \cap R) = 10$
$\#(P \cap C \cap \overline{R}) = 18 - 10 = 8$
$\#(P \cap \overline{C} \cap R) = 22 - 10 = 12$
$\#(\overline{P} \cap C \cap R) = 16 - 10 = 6$
$\#(P \cap \overline{C} \cap \overline{R}) = 50 - 8 - 10 - 12 = 20$
$\#(\overline{P} \cap C \cap \overline{R}) = 56 - 8 - 10 - 6 = 32$
$\#(\overline{P} \cap \overline{C} \cap R) = 46 - 6 - 10 - 12 = 18$
$\#(\overline{P} \cap \overline{R} \cap \overline{C}) = 116 - (32 + 20 + 18 + 8 + 10 + 12 + 6) = 10$



Assim, por observação do diagrama, facilmente concluímos que as probabilidades pretendidas são:

a) $\frac{10}{116} = \frac{5}{58}$

b) $\frac{32 + 20 + 18}{116} = \frac{70}{116} = \frac{35}{58}$

c) $\frac{6 + 8 + 10 + 12}{116} = \frac{36}{116} = \frac{9}{29}$

21.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

a) $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

b) $\frac{11}{36}$

c) $\frac{25}{36}$

d)

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

e) $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

f)

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

g) 0

h) $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

22.

a) $\frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 9 \times 8} = \frac{60}{648} = \frac{5}{54}$

b) **Número de resultados favoráveis**

$\underbrace{9 \times 8 \times 1}_{\text{números que terminam em 0}} + \underbrace{8 \times 8 \times 1}_{\text{números que terminam em 5}}$

$\frac{9 \times 8 \times 1 + 8 \times 8 \times 1}{9 \times 9 \times 8} = \frac{136}{648} = \frac{17}{81}$

c) **Número de resultados favoráveis**

$\underbrace{1 \times 6 \times 8}_{\substack{\text{números entre} \\ \text{340 e 400}}} + \underbrace{6 \times 9 \times 8}_{\substack{\text{números maiores} \\ \text{que 400}}} - \underbrace{1}_{\substack{\text{o número 340 não} \\ \text{é superior a 340}}}$

$\frac{1 \times 6 \times 8 + 6 \times 9 \times 8 - 1}{9 \times 9 \times 8} = \frac{479}{648}$

23. $\frac{5 \times 6! \times 4}{8!} = \frac{5}{14}$

24.

a) $\frac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{48}{2\,598\,960} = \frac{1}{54\,145}$

b) $\frac{{}^4C_2 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_5} = \frac{103\,776}{2\,598\,960} = \frac{2162}{54\,145}$

c) $\frac{{}^{26}C_4 \times {}^{26}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{388\,700}{2\,598\,960} = \frac{1495}{9996}$

d) $\frac{{}^4C_2 \times {}^{48}C_3 + {}^4C_3 \times {}^{48}C_2 + {}^4C_4 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} =$

$= \frac{108\,336}{2\,598\,960} = \frac{2257}{54\,145}$

25. **Número de resultados possíveis:** 10! = 3 628 800

a) **Número resultados favoráveis**

Matemática Economia História

_ _ _ _ _	_ _ _	_ _

5! × 3! × 2! × 3! = 8640

Assim, a probabilidade pretendida é:

$$\frac{5! \times 3! \times 2! \times 3!}{10!} = \frac{8640}{3\,628\,800} = \frac{1}{420}$$

b) **Número de resultados favoráveis**

Matemática História Economia

_ _ _ _ _	_ _	_	_	_

5! × 2! × 1 × 1 × 1 × 5! = 28 800

Assim, a probabilidade pretendida é $\frac{5! \times 2! \times 5!}{10!} =$

$= \frac{28\,800}{3\,628\,800} = \frac{1}{126}$.

26. **Número de resultados possíveis:** 7!

a) M _ _ _ _ _ _ ou _ _ _ _ _ _ M

(6! + 6!)

A probabilidade pedida é $\frac{2 \times 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

b) M e J

_ _	_	_	_	_	_	_

2! × × 6!

A probabilidade pedida é $\frac{2! \times 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

c) _ _ _ J _ _ _

× 6!

A probabilidade pedida é $\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$.

d) Número total de casos – Número de casos em que ficam ao lado um do outro

= 7! – 2 × 6!

A probabilidade pedida é $\frac{7! - 2 \times 6!}{7!} = \frac{5}{7}$.

27. O número de resultados possíveis é 6^3, pois, como em cada lançamento existem seis possibilidades, em três lançamentos existem 6 × 6 × 6 possibilidades.

Relativamente aos resultados favoráveis, existem três hipóteses em alternativa, que se excluem mutuamente: ou os números saídos são 1, 2 e 3 ou são 1, 1 e 4 ou são 2, 2 e 2. No primeiro caso, temos 3! possibilidades, que é o número de permutações de três elementos. No segundo caso, temos três possibilidades (a face 4 pode sair ou no primeiro lançamento ou no segundo ou no terceiro). No terceiro caso, temos apenas uma possibilidade (a face 2 tem que sair no primeiro lançamento, no segundo e no terceiro). Portanto, o número de resultados favoráveis é 3! + 3 + 1 = 3! + 4.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. A probabilidade pedida é, portanto, $\frac{3! + 4}{6^3}$.

28. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a esse acontecimento e o número de resultados possíveis, quando estes são todos equiprováveis. Pretendemos colocar as 28 peças em quatro filas horizontais, cada uma com sete peças, e o número total de maneiras de o fazer é igual ao número de configurações visuais distintas que se podem obter com a colocação das peças. $^{28}C_8$ é o número de modos distintos de escolher quais as posições que vão tomar as oito peças azuis. Por cada um destes modos, existe apenas um modo de colocar as 20 peças vermelhas nas 20 posições restantes ($^{20}C_{20}$). O número de resultados possíveis é, então, $^{28}C_8 \times {}^{20}C_{20} = 3\,108\,105$.

Pretende-se preencher uma fila horizontal toda com peças azuis, o que pode ser feito de apenas quatro modos. Depois de escolhida a fila horizontal e de preenchida com peças azuis (o que pode ser feito apenas de quatro modos distintos, já que o que interessa contabilizar são configurações visuais distintas), sobra-nos uma peça azul e 20 vermelhas para colocar nas 21 posições restantes.

Assim, a peça azul pode ser colocada de 21 modos distintos ($^{21}C_1$) e, por cada um destes modos, só existe um modo de colocar as 20 peças vermelhas nas 20 posições restantes ($^{20}C_{20}$). Assim, o número de resultados favoráveis é $4 \times {}^{21}C_1 \times {}^{20}C_{20} = 84$.

Daqui se conclui que a probabilidade pedida é

$$\frac{84}{3\,108\,105} = \frac{4}{148\,005}.$$

29.

a) **i.** 5! × 7! = 604 800

ii. $(5 \times 6 \times {}^6A_4 + {}^5C^3 \times {}^6A_3 \times {}^6A_2 + {}^6A_5) \times 7! =$

$= 239\,500\,800$

b) $\frac{{}^{14}C_4 \times {}^{14}A_{10}}{15^{14}} \approx 0{,}000\,12$

30. Seja n o número de bolas azuis. Tem-se que:

$$\frac{n \times {}^2C_2}{{}^{n+2}C_3} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{n}{\frac{(n+2)(n+1)n}{6}} = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6n}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow 42 = (n+2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 2 - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-40)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -8 \vee n = 5$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 5$.

Logo, há 5 bolas azuis.

31. $P(A) = 1 - 3x$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 9x = 1 - 3x + \frac{1}{2} - 3x$

$\Leftrightarrow 9x + 6x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 15x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{30}$

$\Leftrightarrow x = 0{,}1$

32. $P(\{a, b\}) + P(b, c\}) = \frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) = \frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow P(\{a, b, c\}) + P(\{b\}) = \frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow 1 + P(\{b\}) = \frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow P(\{b\}) = \frac{1}{6}$

33. **A.** A proposição é verdadeira.

Sejam A e B dois acontecimentos quaisquer de um mesmo espaço de resultados.

Então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Como $P(A \cap B) \geq 0$, então $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

B. A proposição é falsa.

Consideremos o espaço de resultados $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e os resultados elementares são equiprováveis.

Tem-se que $P(A) = P(B) = 0{,}5$, ou seja, $1 - P(A) = P(B)$ e A e B não são acontecimentos contrários, já que $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset$ e $A \cup B = \{2, 3, 4\} \neq S$.

C. A proposição é falsa.

Considere-se o mesmo contraexemplo da alínea anterior.

Aprende fazendo (2) – páginas 123 a 125

34.

a) P("sair uma figura") $= \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

b) P("sair vermelha ou espadas") $= \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

c) P("sair preta e figura") $= \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

d) P("sair rei ou ás") $= \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

e) P("sair nem paus nem figura") $= \frac{21}{40}$

f) P("sair preta e não ás") $= \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

35. **Número de resultados possíveis:** $\overline{6} \times \overline{5}$

a) $\frac{3 \times 2}{6 \times 5} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{3 \times 3}{6 \times 5} + \frac{3 \times 3}{6 \times 5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{3 \times 2}{6 \times 5} + \frac{3 \times 3}{6 \times 5} + \frac{3 \times 3}{6 \times 5} = \frac{4}{5}$

d) $\frac{3 \times 2}{6 \times 5} + \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{4}{15}$

e) $\frac{5 \times 4}{6 \times 5} = \frac{2}{3}$

36. Opção (D)

$\frac{2 \times 6!}{7!} = \frac{2 \times 6!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$

37. **Número de resultados possíveis:** $6^4 = 1296$

Número de resultados favoráveis: $5^4 = 625$

P("nunca sair o número 1") $= \frac{625}{1296}$

Número de resultados possíveis: $6^4 = 1296$

Número de resultados favoráveis: $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

P("saírem números todos diferentes") $= \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$

Como $\frac{625}{1296} > \frac{360}{1296}$, concluímos que é mais provável nunca sair o número 1 do que saírem números todos diferentes.

38. Opção (C)

Número de resultados possíveis: $5 \times 5 = 25$

Número de resultados favoráveis: 5

A probabilidade pretendida é $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

39. **Número de resultados possíveis:** $\overline{52} \times \overline{51} = 2652$

a) **Número de resultados favoráveis**

$\underset{\overline{4} \times \overline{4}}{A\ R}$ ou $\underset{\overline{4} \times \overline{4}}{R\ A} = 32$

P("sair um ás e um rei, por qualquer ordem") =

$= \frac{32}{2652} = \frac{8}{663}$

b) **Número de resultados favoráveis**

$\underset{\overline{13} \times \overline{12}}{C\ C} = 156$

P("saírem ambos de copas") $= \frac{156}{2652} = \frac{1}{17}$

c) **Número de resultados favoráveis**

$\underset{\overline{13} \times \overline{39}}{C\ \overline{C}}$ ou $\underset{\overline{39} \times \overline{13}}{\overline{C}\ C}$ ou $\underset{\overline{13} \times \overline{12}}{C\ C} = 1170$

P("sair pelo menos uma carta de copas") =

$= \frac{1170}{2652} = \frac{15}{34}$

d) **Número de resultados favoráveis**

$\underset{\overline{39} \times \overline{38}}{\overline{C}\ \overline{C}} = 1482$

P("não sair copas") $= \frac{1482}{2652} = \frac{19}{34}$

40. P("não escolher nenhum fora do prazo") =

$= \frac{{}^{42}C_3}{{}^{50}C_3} = \frac{11\,480}{19\,600} = \frac{41}{70}$

41.

a) **Número de resultados possíveis**

$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 1728$

Número de resultados favoráveis

$\overline{12} \times \overline{1} \times \overline{1} = 12$

P("terem nascido todas no mesmo mês") =

$= \frac{12}{1728} = \frac{1}{144}$

b) **Número de resultados possíveis**

$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 1728$

Número de resultados favoráveis

$\overline{12} \times \overline{11} \times \overline{10} = 1320$

P("terem nascido todas em meses diferentes") =

$= \frac{1320}{1728} = \frac{55}{72}$

c) **Número de resultados possíveis**

$\overline{12} \times \overline{12} \times \overline{12} = 1728$

Número de resultados favoráveis

$(\overline{12} \times \overline{1} \times \overline{11}) \times 3 = 396$ (M M D)

P("terem nascido duas e só duas no mesmo mês") =

$= \frac{396}{1728} = \frac{11}{48}$

42. Opção (D)

Sendo $P(A) \leq P(B)$, $P(A \cap B) \leq P(A)$.

Assim, de todas as opções apresentadas, o único valor que $P(A \cap B)$ pode tomar é 0,3.

43. Opção (A)

Sendo $P(A) \leq P(B)$, $P(A \cup B) \geq P(B)$.

Assim, de todas as opções apresentadas, o único valor que $P(A \cup B)$ pode tomar é 0,8.

44. **Número de resultados possíveis**

$M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5$

$\overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} = 5^5 = 3125$

Número de resultados favoráveis

$M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5$

$\overline{5} \times \overline{4} \times \overline{3} \times \overline{2} \times \overline{1} = 120$

P("ficarem todos em hotéis distintos") =

$= \frac{120}{3125} = \frac{24}{625}$

45. Opção (C)

Considera o acontecimento S: "A e B não estarem juntas", ou seja, estarem separadas.

$\underbrace{A\ B}_{2!} \times \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _}_{6!} \times 7$

$P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{3}{4}$

46. Opção (C)

Números de resultados possíveis

$\overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} \times \overline{5} = 5^5 = 3125$

Números de resultados favoráveis

$\underbrace{\overline{5} \times \overline{1} \times \overline{1}}_{\text{Número de maneiras de três amigos escolherem o mesmo restaurante, de entre os cinco possíveis.}} \times \underbrace{\overline{4} \times \overline{3}}_{\text{Número de maneiras dos restantes amigos escolherem dois restaurantes diferentes, dos quatro ainda disponíveis.}} \times \underbrace{{}^5C_3}_{\text{Número de maneiras de formar o grupo de três amigos que escolhem o mesmo restaurante.}} = 600$

Assim, a probabilidade pretendida é $\frac{600}{3125} = \frac{24}{125}$.

47. **Número de resultados possíveis**

$x\ \ y\ \ z$

$\overline{6} \times \overline{6} \times \overline{6} = 216$

a) **Número de resultados favoráveis**

$\overline{6} \times \overline{6} \times \overline{1}$ (1) $= 36$

P("o ponto P pertencer ao plano $z = 1$") $= \frac{1}{6}$

b) **Número de resultados favoráveis**

$\overline{6} \times \overline{6} \times \overline{1} = 36$

P("o ponto P pertencer ao plano $y = z$") $= \frac{1}{6}$

c) **Número de resultados favoráveis**

$\overline{3} \times \overline{6} \times \overline{6} = 108$

P("o ponto P pertencer ao semiplano $x \leq 3$") $= \frac{1}{2}$

48.

a) **Número de resultados possíveis:** 8^4

Observe-se que cada objeto tem 8 possibilidades para a imagem:

$\overline{1}\ \ \overline{2}\ \ \overline{3}\ \ \overline{4}$

$\overline{8} \times \overline{8} \times \overline{8} \times \overline{8} = 8^4$

Número de resultados favoráveis

$\overline{1}\ \ \overline{2}\ \ \overline{3}\ \ \overline{4}$

$\overline{8} \times \overline{8} \times \overline{8} \times \overline{1} = 8^3$

A probabilidade pedida é $\frac{8^3}{8^4} = \frac{1}{8}$.

b) **Número de resultados favoráveis**

$\overline{1}\ \ \overline{2}\ \ \overline{3}\ \ \overline{4}$

$\overline{8} \times \overline{7} \times \overline{6} \times \overline{5} = 1680$

A probabilidade pedida é $\frac{1680}{8^4} = \frac{105}{256}$.

Capítulo 3 – Probabilidade condicionada

Tarefa – O problema de Monty Hall – página 126

Depois de teres refletido sobre o problema, provavelmente chegaste à conclusão que, após uma das portas ter sido aberta, é completamente indiferente alterar a escolha inicial, já que a probabilidade de qualquer uma das duas portas esconder o prémio é 50%.

Contudo, ao contrário do que a tua intuição te diz, será mais vantajoso trocar de porta!

Pensemos em todas as situações que podem ocorrer.

Sem perda de generalidade, supõe que, primeiramente, escolheste a porta A.

Nos jogos 1, 2 e 3 optas inicialmente pela porta A e alteras depois de o apresentador revelar uma porta com cabra. Nos jogos 4, 5 e 6 optas inicialmente pela porta A e manténs esta opção depois de o apresentador revelar uma porta com cabra.

Na tabela seguinte encontram-se todos os resultados possíveis:

	Porta A	Porta B	Porta C	Resultado
Jogo 1	Carro	Cabra	Cabra	Trocas e perdes
Jogo 2	Cabra	Carro	Cabra	Trocas e ganhas
Jogo 3	Cabra	Cabra	Carro	Trocas e ganhas
Jogo 4	Carro	Cabra	Cabra	Manténs e ganhas
Jogo 5	Cabra	Carro	Cabra	Manténs e perdes
Jogo 6	Cabra	Cabra	Carro	Manténs e perdes

Seguindo as regras do jogo, é chegada a altura de poderes mudar de porta, se não o fizeres, ganhas o carro no jogo 4 mas perdes nos jogos 5 e 6. Repara que se, pelo contrário, tivesses decidido trocar de porta tinhas duas situações em três possíveis em que ganharias o carro.

Assim, a probabilidade de sucesso, mantendo a escolha inicial, é $\frac{1}{3}$, sendo $\frac{2}{3}$ se optares por trocar de porta.

Note-se que a informação obtida pela abertura da porta altera o quadro de probabilidades e permite ao concorrente aumentar a sua probabilidade de ganhar.

Exercícios de margem – páginas 127 a 144

49. Opção (C)

Sejam R: "ser rapariga" e H: "ter hábitos de estudo".

Então, $P(H|R) = \frac{860}{1400} = \frac{43}{70}$.

50. Para a soma dos números obtidos ser 6, só pode ter ocorrido um dos seguintes casos: (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3).

Assim, a probabilidade de ter saído o mesmo número nos dois dados, sabendo que a soma dos números saídos foi 6, é $\frac{1}{5}$.

51. No contexto do problema, $P(Y|X)$ significa "probabilidade de a pessoa escolhida ser do sexo feminino, sabendo que a carta retirada foi uma copa".

Ora, se a carta retirada foi uma copa, escolhe-se uma pessoa da turma A, onde existem 15 raparigas, num total de 25 alunos.

Assim, e segundo a regra de Laplace, num espaço de resultados com um número finito de elementos e cujos resultados elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de resultados favoráveis a esse acontecimento (neste caso 15) e o número de resultados possíveis (neste caso 25). A probabilidade pedida é, então, $\frac{15}{25}$, ou seja, $\frac{3}{5}$.

52. No contexto da situação descrita, $P(B|\overline{A})$ é a probabilidade de as bolas retiradas da caixa serem da mesma cor, sabendo que a carta retirada do baralho não é de copas.

Dado que a carta retirada do baralho não é de copas, adiciona-se à caixa uma bola de cor verde, pelo que a caixa fica com cinco bolas brancas e quatro bolas verdes, num total de nove bolas.

Retiramos então duas bolas, dessas nove, e queremos determinar a probabilidade de elas serem da mesma cor, ou seja, ou as duas são brancas ou as duas são verdes, casos que se excluem mutuamente.

Existem ${}^9C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas, de entre as nove. Por isso, o número de resultados possíveis é ${}^9C_2$.

Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas brancas e ${}^4C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas verdes. Por isso, o número de resultados favoráveis é ${}^5C_2 + {}^4C_2$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{{}^5C_2 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$.

53. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 0{,}25 = \frac{0{,}1}{P(B)}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0{,}1}{0{,}25}$

$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

Então:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 0{,}8 = P(A) + 0{,}4 - 0{,}1$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$

Assim, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Como $P(A) = P(\overline{A})$, temos que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

54.

a) $P(A|B) = 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}6$

$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{0{,}3} = 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}18$

b) $P(B|A) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}18}{P(A)} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}36$

Assim, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}36 + 0{,}3 - 0{,}18 =$

$= 0{,}48$

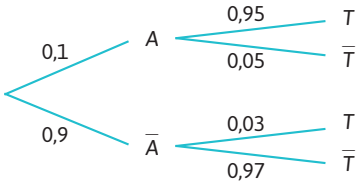
55. B: "Pratica *ballet* clássico."
D: "Pratica dança contemporânea."
- $P(B) = 0{,}6$
- $P(B \cap D) = 0{,}2$
- $P(B \cap \overline{D}) = 0{,}3$

	D	$\overline{D}$	Total
B	0,2	0,4	0,6
$\overline{B}$		0,3	
Total		0,7	

$P(B \cap \overline{D}) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$
$P(\overline{D}) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

$$P(B|\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}$$

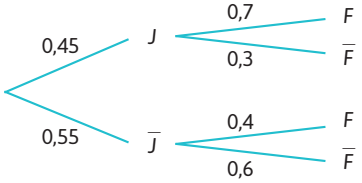
56. Sejam:
A: "Haver um assalto."
T: "O alarme tocar".



a) $P(T) = 0{,}1 \times 0{,}95 + 0{,}9 \times 0{,}03 = 0{,}122$

b) $P(\overline{A}|T) = \frac{P(\overline{A} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}03}{0{,}122} = \frac{27}{122}$

57. Sejam:
J: "Ser habitante jovem."
F: "Ser favorável ao projeto."



a) $P(F) = 0{,}45 \times 0{,}7 + 0{,}55 \times 0{,}4 = 0{,}535$

b) $P(J|F) = \frac{P(J \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}45 \times 0{,}7}{0{,}535} \approx 0{,}59$

58. Sejam:
M: "Ser rapaz."
F: "Ser rapariga."
D: "Ser estudante de Direito."
E: "Ser estudante de Engenharia."
A: "Ser estudante de Arquitetura."
Sabe-se que:
- $P(M) = \frac{1}{3}$
- $P(A) = \frac{1}{2}$
- $P(F|A) = 80\%$
- $P(E|M) = 50\%$
- $P(D \cap M) = P(D \cap F)$

Assim:
- $P(F|A) = 80\% \Leftrightarrow \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = 0{,}8$
$\Leftrightarrow P(F \cap A) = 0{,}8 \times \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow P(F \cap A) = 0{,}4$
- $P(E|M) = 50\% \Leftrightarrow \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = 0{,}5$
$\Leftrightarrow P(E \cap M) = 0{,}5 \times \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow P(E \cap M) = \frac{1}{6}$
- $P(A \cap M) = \frac{1}{2} - 0{,}4 = \frac{1}{10}$
- $P(D \cap M) = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$
- $P(D \cap F) = \frac{1}{15}$
- $P(D) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$
- $P(E) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{15} = \frac{11}{30}$
- $P(F \cap E) = \frac{11}{30} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$

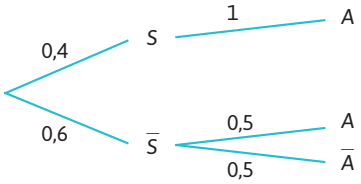
	D	E	A	Total
M	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$
F	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$
Total	$\mathbf{\frac{2}{15}}$	$\mathbf{\frac{11}{30}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	**1**

a) $P(E) = \frac{11}{30}$

b) $P(D|F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

c) Sabe-se que a probabilidade de ser estudante de Engenharia e rapaz é $\frac{1}{6}$. Como estão presentes 10 rapazes de Engenharia, então $\frac{10}{n} = \frac{1}{6}$, onde n é o número total de estudantes presentes. Assim, $n = 60$.
Como a probabilidade de ser uma rapariga e estudante de Arquitetura é $\frac{2}{5}$, estão presentes na atuação $\frac{2}{5} \times 60 = 24$ raparigas de Arquitetura.

59. Sejam:
S: "Saber a resposta certa."
A: "Acertar na resposta."



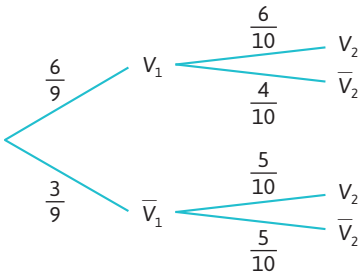
$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \times 1}{0{,}4 \times 1 + 0{,}6 \times 0{,}5} = \frac{4}{7}$$

60.



C_1 C_2

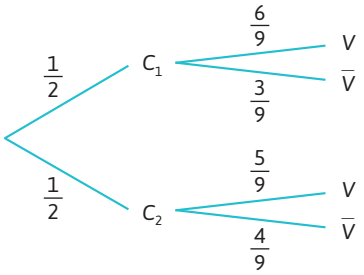
a) V_1: "Sair bola verde de C_1 para C_2."
V_2: "Sair bola verde de C_2 para fora."



i. $P(V_2|\overline{V}_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ii. $P(\overline{V}_2) = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{9} \times \frac{5}{10} = \frac{24}{90} + \frac{15}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30}$

b) V: "Sair bola verde."



i. $P(V|C_2) = \frac{5}{9}$

ii. $P(\overline{V}|C_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

iii. $P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{11}{18}$

iv. $P(C_2|\overline{V}) = \frac{P(C_2 \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}$

61. No contexto da situação descrita, $P(Y|X)$ representa a probabilidade de a bola retirada da caixa C_2 ser branca, sabendo que foram retiradas duas bolas de cor diferente da caixa C_1. Desta forma, uma vez que as duas bolas retiradas da caixa C_1 foram acrescentadas à caixa C_2, esta passou a ser constituída por 21 bolas, das quais consideraremos que n são brancas.

$P(Y|X) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{n}{21} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow n = 9$

Sabendo que foram acrescentadas duas bolas de cor diferente à caixa C_2, isso significa que inicialmente esta era constituída por $9 - 1 = 8$ bolas brancas e $19 - 8 = 11$ bolas pretas.

62.

a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{C}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$

63. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Para A e B serem independentes, tem que acontecer $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Assim:
$0{,}8 = k + (k + 0{,}1) - k \times (k + 0{,}1)$
$\Leftrightarrow 0{,}8 = 2k + 0{,}1 - k^2 - 0{,}1k \Leftrightarrow k^2 - 1{,}9k + 0{,}7 = 0$
$\Leftrightarrow k = \frac{7}{5} \vee k = \frac{1}{2}$
Como $\frac{7}{5} > 1$, k só pode admitir o valor $\frac{1}{2}$.

64. $P(A|B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} P(B)$
Assim:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = 2\,P(B) + P(B) - \frac{1}{5} P(B)$
$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{14}{5} P(B)$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{15}{56}$
Logo, $P(A) = 2 \times P(B) = \frac{30}{56}$.
$P(A \cap B) = \frac{1}{5} P(B) = \frac{15}{5 \times 56} = \frac{3}{56}$
Assim, verifica-se que $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, pois $\frac{30}{56} \times \frac{15}{56} \neq \frac{3}{56}$, logo A e B não são acontecimentos independentes.

65. Sejam os acontecimentos:
V: "A pessoa vê o anúncio."
C: "A pessoa compra o jogo."
Sabe-se que:
- $P(\overline{V}) = 0{,}35$
- $P(C) = 0{,}45$
- $P(\overline{V} \cap \overline{C}) = 0{,}2$

Assim:

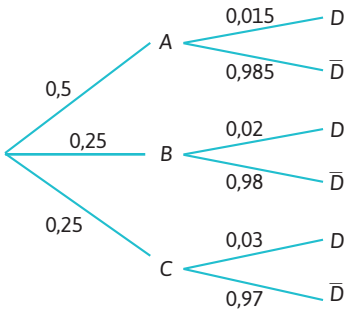
	C	$\overline{C}$	Total
V	0,30	0,35	**0,65**
$\overline{V}$	0,15	0,20	**0,35**
Total	**0,45**	**0,55**	**1**

a) $P(C|V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}30}{0{,}65} = \frac{6}{13}$
A probabilidade pedida é, aproximadamente, 46%.

b)
- $P(V \cap C) = 0{,}30$
- $P(V) = 0{,}65$
- $P(C) = 0{,}45$

$P(V) \times P(C) = 0{,}2925$
Como $P(V \cap C) \neq P(V) \times P(C)$, tem-se que V e C não são acontecimentos independentes.

66. Consideremos os acontecimentos:
A: "O cartão é produzido pela impressora *A*."
B: "O cartão é produzido pela impressora *B*."
C: "O cartão é produzido pela impressora *C*."
D: "O cartão apresenta falhas."



a) $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}015 + 0{,}25 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}03 = 0{,}02$

b) $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}03}{0{,}02} = 0{,}375$

Aprende fazendo (3) – páginas 147 a 151

67. Opção (D)
Pretende-se determinar o valor de $P(X|Y)$, ou seja, a probabilidade de, ao escolher um aluno ao acaso, ser escolhida uma rapariga, sabendo que o aluno é da turma B. Ora, na turma B há doze alunos, sendo oito raparigas. Assim, tem-se que $P(X|Y) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

68. Sejam os acontecimentos:
M: "O doente melhorou."
A: "O doente utilizou medicamento em creme."
B: "O doente utilizou medicamento em comprimido."

	M	$\overline{M}$	Total
A	36	14	**50**
B	30	20	**50**
Total	**66**	**34**	**100**

a) i. $P(M) = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$

ii. $P(\overline{M}|A) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$

b) $P(B|M) = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

69. Sejam *A* e *B* os acontecimentos:
A: "Ser português."
B: "Ser homem."
Tem-se:

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,15	0,45	**0,6**
$\overline{A}$	0,21	0,19	**0,4**
Total	**0,36**	**0,64**	**1**

Assim, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}19$.

70. Sejam os acontecimentos:
B: "Comprar o hambúrguer com bebida."
F: "Comprar o hambúrguer com batata frita."
Do enunciado, temos que:
- $P(B \cap F) = 40\%$
- $P(\overline{B} \cap \overline{F}) = 15\%$
- $P(B) = 65\%$

Assim:

	F	$\overline{F}$	Total
B	40%	25%	**65%**
$\overline{B}$	20%	15%	**35%**
Total	**60%**	**40%**	**100%**

a) $P(B \cap \overline{F}) = 25\%$ $P(\overline{B} \cap F) = 20\%$
A Maria tem razão. De facto, a probabilidade de um cliente comprar o hambúrguer com bebida e sem batata frita (25%) é maior que a probabilidade de um cliente comprar o hambúrguer com batata frita e sem bebida (20%).

b) Pretende-se determinar $P(F|B)$:
$P(F|B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}40}{0{,}65} = \frac{8}{13}$

c) $P(B) = 0{,}65$ $P(F) = 0{,}60$ $P(B \cap F) = 0{,}40$
$P(B) \times P(F) = 0{,}65 \times 0{,}60 = 0{,}39$
Como $P(B \cap F) \neq P(B) \times P(F)$, os acontecimentos *B*: "comprar hambúrguer com bebida" e *F*: "comprar hambúrguer com batata frita" não são acontecimentos independentes.

71. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ significa "a probabilidade de a segunda ficha retirada ser ímpar, sabendo que a primeira ficha retirada foi par".
Assim, o número de resultados possíveis é igual a 9, pois, após se ter retirado uma ficha da caixa, esta é de novo introduzida na caixa.
O número de resultados favoráveis é igual a 5, pois existem na caixa cinco fichas com um número ímpar (1, 3, 5, 7 e 9), que continuam na caixa após a primeira extração.
Segundo a regra de Laplace, num espaço de resultados com um número finito de elementos e cujos resultados elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de resultados favoráveis a esse acontecimento e o número de resultados possíveis. Assim, a probabilidade pedida é $\frac{5}{9}$.

72. Opção (C)
No contexto da situação descrita, $P(\overline{B}|A)$ significa "a probabilidade de não sair uma bola com um número ímpar na segunda extração, sabendo que saiu uma bola azul na primeira extração. Ora, se saiu uma bola azul na primeira extração quer dizer que saiu uma bola com um número par. Assim, e como não houve reposição, restam no saco cinco bolas, sendo três ímpares (vermelhas) e duas pares (azuis). Logo, $P(\overline{B}|A) = \frac{2}{5}$.

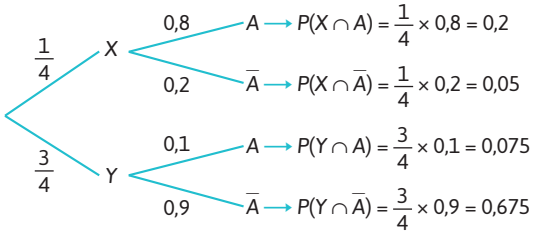
73. $P(A) = P(B)$
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = (P(A))^2$
Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então
$P(A \cup B) = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A)$, pois A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes.
$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 2\,P(A) - [P(A)]^2$
$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A)\,[2 - P(A)]$

74. No contexto da situação descrita, $P(B|L)$ significa "a probabilidade de o segundo bombom retirado ser de chocolate branco, sabendo que o primeiro bombom retirado foi de chocolate de leite". Ora, $P(B|L) = \frac{1}{2}$ significa que, no momento da segunda extração, encontravam-se na caixa tantos bombons de chocolate branco, como de chocolate de leite, ou seja, 15 bombons de cada – já que o primeiro bombom retirado e comido foi de chocolate de leite – restam na caixa todos os bombons de chocolate branco existentes inicialmente (15) e a mesma quantidade de bombons de chocolate de leite.
Conclui-se, assim, que existiam inicialmente na caixa 16 bombons de chocolate de leite.

75. No contexto da situação descrita, $P(B|\overline{A})$ significa "a probabilidade de sair um rebuçado de morango, sabendo que não saiu face par no lançamento do dado tetraédrico". Ora, se não saiu face par, significa que não saiu face 4 e, logo, retira-se, ao acaso, um rebuçado do saco 2. No saco 2 existem quinze rebuçados, sendo quatro de morango.
Como segundo a regra de Laplace, num espaço de resultados com um número finito de elementos e cujos resultados elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de resultados favoráveis a esse acontecimento (neste caso 4) e o número de resultados possíveis (neste caso 15), temos que $P(B|\overline{A}) = \frac{4}{15}$.
Assim, dos três amigos, quem tem razão é o José.

76. Sejam os acontecimentos:
X: "Tomar o analgésico X."
Y: "Tomar o analgésico Y."
A: "Sentir-se agoniado."
Do enunciado, sabe-se que:
- $P(X) = \frac{1}{4}$
- $P(A|X) = 0{,}8$
- $P(Y) = \frac{3}{4}$
- $P(A|Y) = 0{,}1$

Dispondo os dados num diagrama em árvore:



- $P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}275} = \frac{8}{11}$
- $P(Y|A) = \frac{P(Y \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}075}{0{,}275} = \frac{3}{11}$

Cálculo auxiliar
$P(A) = P(X \cap A) + P(Y \cap A) =$
$= 0{,}2 + 0{,}075 =$
$= 0{,}275$

Observe-se que $P(X|A) > P(Y|A)$, ou seja, sabendo que, de manhã, quando acorda, a Andreia se sente bastante agoniada, é mais provável ter tomado o analgésico X.

77. Sejam os acontecimentos:
A: "Ana embrulha o presente."
B: "Berta embrulha o presente."
C: "Carolina embrulha o presente."
T: "O presente ter o preço."
Do enunciado, temos que:
- $P(A) = 0{,}3$
- $P(T|A) = 0{,}03$
- $P(B) = 0{,}2$
- $P(T|B) = 0{,}08$
- $P(C) = 0{,}5$
- $P(T|C) = 0{,}05$

Daqui, podemos concluir que:

$P(T|A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow 0{,}03 = \frac{P(T \cap A)}{0{,}3}$
$\Leftrightarrow P(T \cap A) = 0{,}009$

$P(T|B) = \frac{P(T \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 0{,}08 = \frac{P(T \cap B)}{0{,}2}$
$\Leftrightarrow P(T \cap B) = 0{,}016$

$P(T|C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow 0{,}05 = \frac{P(T \cap C)}{0{,}5}$
$\Leftrightarrow P(T \cap C) = 0{,}025$

Organizando os dados numa tabela:

	A	B	C	Total
T	0,009	0,016	0,025	**0,05**
$\overline{T}$				
Total	**0,3**	**0,2**	**0,5**	**1**

a) $P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap B) + P(T \cap C) = 0{,}05$

b) Pretende-se determinar $P(B|T)$:

$P(B|T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}016}{0{,}05} = 0{,}32$

c) $P(T) = 0{,}05$
$P(B) = 0{,}2$
$P(T \cap B) = 0{,}016$
$P(T) \times P(B) = 0{,}05 \times 0{,}2 = 0{,}01$
Como $P(T \cap B) \neq P(T) \times P(B)$, conclui-se que os acontecimentos T: "o presente embrulhado ter preço" e B: "o presente ser embrulhado pela Berta" não são acontecimentos independentes.

d) $P(T) = 0{,}05$
$P(C) = 0{,}5$
$P(T \cap C) = 0{,}025$
$P(T) \times P(C) = 0{,}05 \times 0{,}5 = 0{,}025$
Como $P(T \cap C) = P(T) \times P(C)$, conclui-se que os acontecimentos T: "o presente embrulhado ter preço" e C: "o presente ser embrulhado pela Carolina" são acontecimentos independentes.

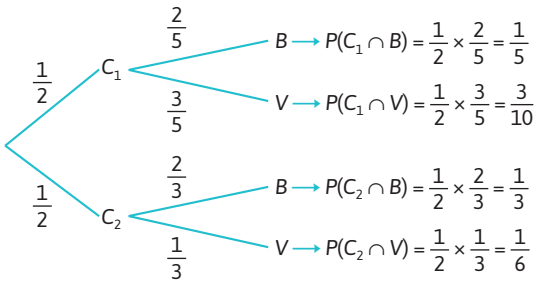
78. $P(A) = 0{,}4$
$P(A \cup B) = 0{,}5$

a) $P(A \cap B) = 0$
Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:
$0{,}5 = 0{,}4 + P(B) - 0 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}1$

b) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times P(B)$
Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:
$0{,}5 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}4\,P(B)$
$\Leftrightarrow 0{,}1 = 0{,}6\,P(B)$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6}$

c) $P(A|B) = 0{,}1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1 \times P(B)$
Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então:
$0{,}5 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}1\,P(B)$
$\Leftrightarrow 0{,}1 = 0{,}9\,P(B)$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{9}$

79.



a) $P(V|C_1) = \frac{3}{5}$

b) $P(V|C_2) = \frac{1}{3}$

c) $P(V) = P(V \cap C_1) + P(V \cap C_2) = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}$

d) $P(C_1|V) = \frac{P(C_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{9}{14}$

e) $P(C_2|B) = \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}$

Cálculo auxiliar
$P(B) = P(B \cap C_1) + P(B \cap C_2) =$
$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

f) $P(C_1|B) = \frac{P(C_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}$

80. A: "A carta extraída ser ás."
O: "A carta extraída ser de ouros."
$P(A) = 0{,}2$
$P(O) = 0{,}6$
$P(\overline{A} \cap \overline{O}) = 0{,}3$

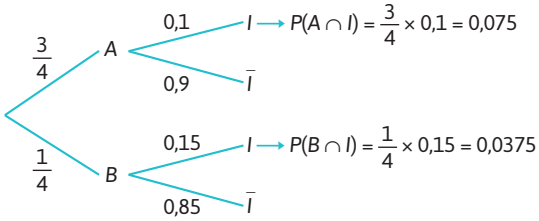
a) $P(\overline{A} \cap \overline{O}) = 0{,}3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup O}) = 0{,}3$
$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup O) = 0{,}3$
$\Leftrightarrow 1 - 0{,}3 = P(A \cup O)$
$\Leftrightarrow P(A \cup O) = 0{,}7$
Sabemos que:
$P(A \cup O) = P(A) + P(O) - P(A \cap O)$
$0{,}7 = 0{,}2 + 0{,}6 - P(A \cap O)$
$\Leftrightarrow P(A \cap O) = 0{,}8 - 0{,}7$
$\Leftrightarrow P(A \cap O) = 0{,}1$
Dado que $P(A \cap O) \neq 0$, concluímos que $A \cap O$: "a carta extraída ser o ás de ouros" é um acontecimento possível. Tal só pode acontecer se o ás de ouros estiver no baralho.

b) P("ser extraído o ás de ouros") $= 0{,}1$
Logo, $\frac{1}{10} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = 10$ é o número de cartas do baralho incompleto.

c) $\frac{6}{10} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 6$ é o número de cartas de ouros deste baralho incompleto.

81. Sejam os acontecimentos:
A: "O bolo é fornecido pela empresa A."
B: "O bolo é fornecido pela empresa B."
I: "O bolo apresenta peso significativamente inferior ao estabelecido."
- $P(A) = 3\,P(B)$
- $P(I|A) = 0{,}1$
- $P(I|B) = 0{,}15$

$P(A) + P(B) = 1 \Leftrightarrow 3P(B) + P(B) = 1$
$\Leftrightarrow 4P(B) = 1$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$



Pretende-se determinar $P(A|I)$:
$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} =$
$= \frac{0{,}075}{0{,}075 + 0{,}0375} =$
$= \frac{0{,}075}{0{,}1125}$
$= \frac{2}{3} \approx 0{,}667$

Assim, $P(A|I) \approx 67\%$.

Recorda – páginas 152 a 157

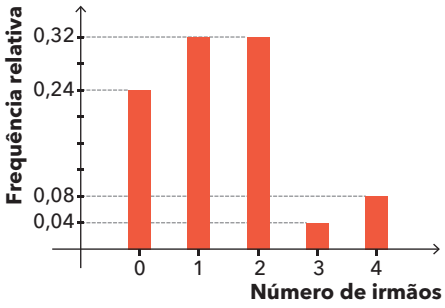
1. Variável qualitativa: B
Variável quantitativa discreta: A e D
Variável quantitativa contínua: C e E

2.

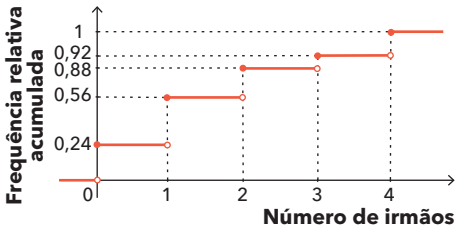
Números de irmãos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
0	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	$\frac{6}{25} = 0{,}24$
1	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	$\frac{14}{25} = 0{,}56$
2	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	$\frac{22}{25} = 0{,}88$
3	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	$\frac{23}{25} = 0{,}92$
4	2	$\frac{2}{25} = 0{,}08$	$\frac{25}{25} = 1$
Total	**25**	**1**	–

3.

a)



b)

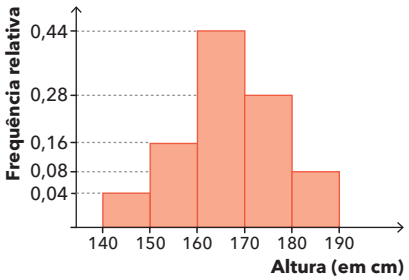


4.

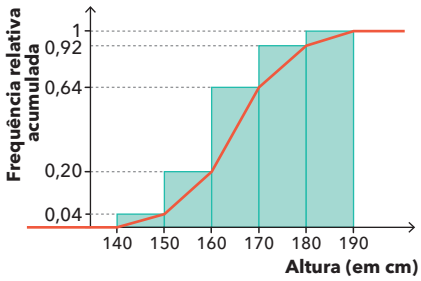
Altura (em cm)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
[140, 150[	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	$\frac{1}{25} = 0{,}04$
[150, 160[	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16$	$\frac{5}{25} = 0{,}2$
[160, 170[	11	$\frac{11}{25} = 0{,}44$	$\frac{16}{25} = 0{,}64$
[170, 180[	7	$\frac{7}{25} = 0{,}28$	$\frac{23}{25} = 0{,}92$
[180, 190[	2	$\frac{2}{25} = 0{,}08$	1

5.

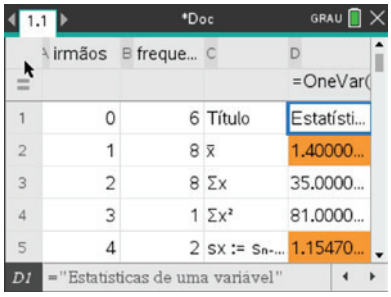
a)



b)

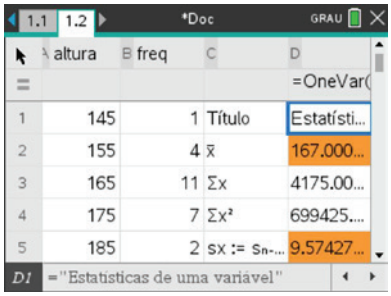


6.



$\bar{x} = 1{,}4$ e $s \approx 1{,}15$

7.

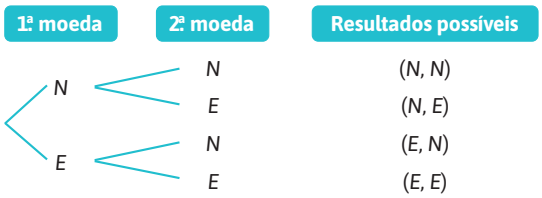


$\bar{x} = 167$ e $s \approx 9{,}57$

Capítulo 4 – Modelos de probabilidade em espaços finitos

Tarefa – As moedas – página 158

a)



Os resultados possíveis são (*N*, *N*), (*N*, *E*), (*E*, *N*) e (*E*, *E*).

b) Sim, são igualmente prováveis.

c) Contando o número de faces nacionais saídas em cada lançamento, podemos obter 0, 1 ou 2 faces nacionais.
A probabilidade de se obter 0 faces nacionais, que é a probabilidade de ocorrer o caso (*E*, *E*), é $\frac{1}{4}$.
A probabilidade de se obter 1 face nacional, que é a probabilidade de ocorrer os casos (*N*, *E*) e (*E*, *N*), é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
A probabilidade de se obter 2 faces nacionais, que é a probabilidade de ocorrer o caso (*N*, *N*), é $\frac{1}{4}$.

d)

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercícios de margem – páginas 159 a 173

82.

a) Por exemplo:

X: "soma da pontuação obtida em cada dado" e
Y: "produto da pontuação obtida em cada dado".

b) Por exemplo:

X: "número de vezes que se obteve face nacional" e
Y: "número de vezes que se obteve face europeia".

83.

a) X: "Maior número de pintas no lançamento dos dois dados."

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$P(X = 1) = \frac{1}{36}$

$P(X = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P(X = 3) = \frac{5}{36}$

$P(X = 4) = \frac{7}{36}$

$P(X = 5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P(X = 6) = \frac{11}{36}$

Tabela de distribuição de probabilidades de X:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

b) Y: "Valor absoluto da diferença do número de pintas no lançamento dos dois dados."

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$P(Y = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(Y = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(Y = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(Y = 3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(Y = 4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(Y = 5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Tabela de distribuição de probabilidades de Y:

y_i	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

c) Z: "Diferença entre a menor e a maior pontuação, ou zero se as pontuações forem iguais."

	1	2	3	4	5	6
1	0	−1	−2	−3	−4	−5
2	−1	0	−1	−2	−3	−4
3	−2	−1	0	−1	−2	−3
4	−3	−2	−1	0	−1	−2
5	−4	−3	−2	−1	0	−1
6	−5	−4	−3	−2	−1	0

$P(Z = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(Z = -1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(Z = -2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(Z = -3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(Z = -4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(Z = -5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Tabela de distribuição de probabilidades de Z:

z_i	−5	−4	−3	−2	−1	0
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$

d) W: "Máximo divisor comum das duas pontuações."

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

$P(W = 1) = \frac{23}{36}$

$P(W = 2) = \frac{7}{36}$

$P(W = 3) = \frac{3}{36}$

$P(W = 4) = \frac{1}{36}$

$P(W = 5) = \frac{1}{36}$

$P(W = 6) = \frac{1}{36}$

Tabela de distribuição de probabilidades de W:

w_i	1	2	3	4	5	6
$P(W = w_i)$	$\frac{23}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

84. Seja $a = P(X = 1)$.

$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$\Leftrightarrow a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 1$

$\Leftrightarrow 21a = 1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{21}$

Assim:

$P(X = 1) = \frac{1}{21}$ $\quad$ $P(X = 4) = \frac{4}{21}$

$P(X = 2) = \frac{2}{21}$ $\quad$ $P(X = 5) = \frac{5}{21}$

$P(X = 3) = \frac{3}{21}$ $\quad$ $P(X = 6) = \frac{6}{21}$

Tabela de distribuição de probabilidades de X:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

85.

a) $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + a + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

b) $P(Y = -1) + P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 1$

$\Leftrightarrow 0{,}5 + 0{,}26 + a^2 + a = 1$

$\Leftrightarrow a^2 + a - 0{,}24 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \vee a = -\frac{6}{5}$

Como $P(Y = 2) = a$, a só pode tomar valores positivos ou nulos. Assim, $a = \frac{1}{5}$.

86. Como a variável aleatória X pode tomar o valor 3, existem pelo menos três cápsulas de café pretas no saco, pelo que, no máximo, existem duas cápsulas de café roxas no saco.

Por outro lado, é dito no enunciado que, no saco, há pelo menos uma cápsula de cada tipo, pelo que existe, pelo menos, uma cápsula de café roxa no saco.

Se existissem no saco duas cápsulas de café roxas, poderia acontecer que, ao tirar três cápsulas do saco, saíssem duas cápsulas de café roxas e uma cápsula de café preta. Nesse caso, a variável aleatória X, "número de cápsulas de café pretas retiradas", tomaria o valor 1. Como X só toma os valores 2 e 3, não pode haver no saco duas cápsulas de café roxas.

Portanto, no saco há uma cápsula de café roxa e quatro cápsulas de café pretas.

87. Seja $P(Z = 1) = a$.

$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$\Leftrightarrow a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{5}a + \frac{1}{6}a = 1$

$\Leftrightarrow \frac{60a}{60} + \frac{30a}{60} + \frac{20a}{60} + \frac{15a}{60} + \frac{12a}{60} + \frac{10a}{60} = \frac{60}{60}$

$\Leftrightarrow 147a = 60$

$\Leftrightarrow a = \frac{60}{147}$

$\Leftrightarrow a = \frac{20}{49}$

Assim:

$P(Z = 1) = \frac{20}{49}$

$P(Z = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{49} = \frac{10}{49}$

$P(Z = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{20}{49} = \frac{20}{147}$

$P(Z = 4) = \frac{1}{4} \times \frac{20}{49} = \frac{5}{49}$

$P(Z = 5) = \frac{1}{5} \times \frac{20}{49} = \frac{4}{49}$

$P(Z = 6) = \frac{1}{6} \times \frac{20}{49} = \frac{10}{147}$

Tabela de distribuição de probabilidades de Z:

z_i	1	2	3	4	5	6
$P(Z = z_i)$	$\frac{20}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{20}{147}$	$\frac{5}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{10}{147}$

88. Seja X a variável aleatória que representa a quantia retirada em euros:

Número de resultados possíveis

$\underline{1ª \text{ extração}} \quad \underline{2ª \text{ extração}}$

$3 \times 2 = 6$ casos

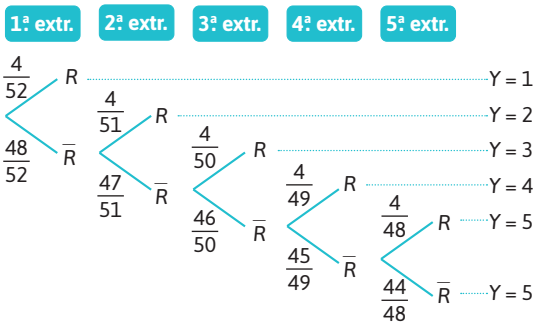
Número de resultados favoráveis

- **Para a soma 0,7 €:** (0,2; 0,5) e (0,5; 0,2), logo $P(X = 0{,}7) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- **Para a soma 1,2 €:** (0,2; 1) e (1; 0,2), logo $P(X = 1{,}2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- **Para a soma 1,5 €:** (0,5; 1) e (1; 0,5), logo $P(X = 1{,}5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Tabela de distribuição de probabilidades de X:

x_i	0,7	1,2	1,5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

89. Seja R o acontecimento "sair rei" e Y a variável aleatória que representa o número total de cartas retiradas.



Assim, a variável aleatória Y assume os valores 1, 2, 3, 4 e 5, e:

$P(Y = 1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$P(Y = 2) = \frac{48}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{16}{221}$

$P(Y = 3) = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{376}{5525}$

$P(Y = 4) = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} \times \frac{46}{50} \times \frac{4}{49} = \frac{415\,104}{6\,497\,400} = \frac{51\,888}{812\,175}$

$P(Y = 5) = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} \times \frac{46}{50} \times \frac{45}{49} \times \frac{4}{48} + \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} \times \frac{46}{50} \times \frac{45}{49} \times \frac{44}{48} = \frac{224\,156\,160}{311\,875\,200} = \frac{583\,740}{812\,175}$

Tabela de distribuição de probabilidades de Y:

y_i	1	2	3	4	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{16}{221}$	$\frac{376}{5525}$	$\frac{51\,888}{812\,175}$	$\frac{583\,740}{812\,175}$

90.

a)

Aparelho 1 \ Aparelho 2	0	1	3
0	0	1	3
1	1	2	4
3	3	4	6

Assim, a variável aleatória Y assume os valores 0, 1, 2, 3, 4 e 6, e:

$Y = 0$ corresponde ao caso (0, 0), logo:

$P(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$Y = 1$ corresponde ao caso (1, 0) e (0, 1), logo:

$P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$Y = 2$ corresponde ao caso (1, 1), logo:

$P(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$Y = 3$ corresponde ao caso (3, 0) e (0, 3), logo:

$P(Y = 3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$Y = 4$ corresponde ao caso (3, 1) e (1, 3), logo:

$P(Y = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

$Y = 6$ corresponde ao caso (3, 3), logo:

$P(Y = 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades de Y é:

y_i	0	1	2	3	4	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

b) A probabilidade de um aparelho deste tipo, cada vez que é utilizado, produzir uma descarga de 1 volt é $\frac{1}{3}$, logo, em 360 utilizações, espera-se que $\frac{1}{3} \times 360 = 120$ vezes tal aconteça.

91.

a) $\mu = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + x_4 \times p_4 + x_5 \times p_5 + x_6 \times p_6 =$
$= -2 \times 0{,}15 + (-1) \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}05 +$
$+ 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}05 = 0{,}05$

$\sigma = (x_1 - 0{,}05)^2 \times p_1 + (x_2 - 0{,}05)^2 \times p_2 + \ldots$
$+ (x_6 - 0{,}05)^2 \times p_6 =$
$= \sqrt{(-2 - 0{,}05)^2 \times 0{,}15 + (-1 - 0{,}05)^2 \times 0{,}25 +}$
$\sqrt{+ (0 - 0{,}05)^2 \times 0{,}3 + (1 - 0{,}05)^2 \times 0{,}05 +}$
$\sqrt{+ (2 - 0{,}05)^2 \times 0{,}2 + (3 - 0{,}05)^2 \times 0{,}05}$
$\approx 1{,}47$ (2 c.d.)

b) $a + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1 \Leftrightarrow a = 0{,}2$

$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 =$
$= 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}2 = 2{,}8$

$\sigma = (x_1 - 2{,}8)^2 \times p_1 + (x_2 - 2{,}8)^2 \times p_2 + \ldots + (x_5 - 2{,}8)^2 \times p_5 =$
$= \sqrt{(1 - 2{,}8)^2 \times 0{,}2 + (2 - 2{,}8)^2 \times 0{,}3 +}$
$\sqrt{+ (3 - 2{,}8)^2 \times 0{,}2 + (4 - 2{,}8)^2 \times 0{,}1 +}$
$\sqrt{+ (5 - 2{,}8)^2 \times 0{,}2} =$
$= 1{,}4$

92. Opção (A)

Seja X a variável aleatória que representa o número de chocolates em cada embalagem. Sabemos que a distribuição de probabilidades de X é:

x_i	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Assim, o valor médio (esperança matemática) do número de chocolates por embalagem é:

$\mu = 8 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5} + 10 \times \frac{1}{5} + 11 \times \frac{1}{5} + 12 \times \frac{1}{5} =$

$= \frac{8 + 9 + 10 + 11 + 12}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Logo, no total de 4800 embalagens, o número esperado de chocolates é:

$4800 \times 10 = 48\,000$

(Repara que o valor médio não tem de ser um valor assumido pela variável.)

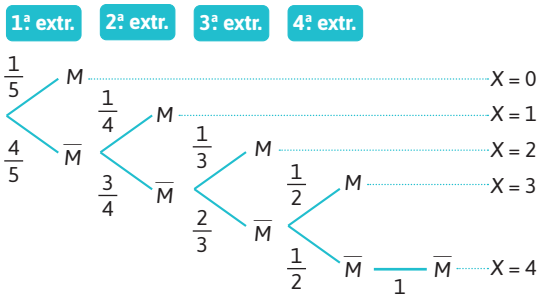
93. Opção (C)

Cálculo auxiliar
$a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$

$\mu = 2a + 3b =$
$= 2a + 3(1 - a) =$
$= 2a + 3 - 3a =$
$= 3 - a$

94. M: "Sair o rebuçado de morango."

X: "Número de rebuçados de mentol que a Vitória come."



Assim, a variável aleatória X assume os valores 0, 1, 2, 3 e 4, e:

$P(X = 0) = \frac{1}{5}$

$P(X = 1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

$P(X = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

$P(X = 3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$P(X = 4) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{5}$

Tabela de distribuição de probabilidades de X:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

b) O valor médio de X é:

$\mu = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = 2$

Espera-se que a Vitória coma 2 rebuçados até conseguir comer o rebuçado de morango.

95. Recorrendo à calculadora:

List 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
List 2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\mu = 7{,}00$

$\sigma \approx 2{,}42$

Aprende fazendo (4) – páginas 174 e 175

96. X: "Número de faces nacionais obtidas no lançamento de uma moeda equilibrada duas vezes."

X assume os valores 0, 1 e 2 e:

$P(X = 0) = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} \times 2 = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

Tabela de distribuição de probabilidades de X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

97. $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1$

$k + 3k + k^2 + k^2 + \frac{15}{32} = 1$

$\Leftrightarrow 2k^2 + 4k - \frac{17}{32} = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{17}{32}\right)}}{2 \times 2}$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{8} \vee k = -\frac{17}{8}$

Como, por exemplo, $P(X = 1) = k$, k terá de ser um valor compreendido entre 0 e 1. Assim, $k = \frac{1}{8}$.

98. X: "Número de ovos partidos numa caixa."

a) $E(X) = 0 \times 0{,}80 + 1 \times 0{,}14 + 2 \times 0{,}03 + 3 \times 0{,}02 + 4 \times 0{,}01 + 5 \times 0 + 6 \times 0 = 0{,}3$

$V(X) = (0 - 0{,}3)^2 \times 0{,}8 + (1 - 0{,}3)^2 \times 0{,}14 + (2 - 0{,}3)^2 \times 0{,}03 + (3 - 0{,}3)^2 \times 0{,}02 + (4 - 0{,}3)^2 \times 0{,}01 + 0 + 0 = 0{,}51$

b) Y: "Número de ovos não partidos numa caixa."

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0	0	0,01	0,02	0,03	0,14	0,80

Observe-se que:

$P(Y = 0) = P(X = 6)$

$P(Y = 1) = P(X = 5)$

$P(Y = 2) = P(X = 4)$

$P(Y = 3) = P(X = 3)$

$P(Y = 4) = P(X = 2)$

$P(Y = 5) = P(X = 1)$

$P(Y = 6) = P(X = 0)$

$E(Y) = 0 + 0 + 2 \times 0{,}01 + 3 \times 0{,}02 + 4 \times 0{,}03 + 5 \times 0{,}14 + 6 \times 0{,}8 = 5{,}7$

$V(Y) = 0 + 0 + (2 - 5{,}7)^2 \times 0{,}01 + (3 - 5{,}7)^2 \times 0{,}02 + (4 - 5{,}7)^2 \times 0{,}03 + (5 - 5{,}7)^2 \times 0{,}14 + (6 - 5{,}7)^2 \times 0{,}8 = 0{,}51$

c) Observa-se que $E(Y) = 6 - E(X)$ e $V(Y) = V(X)$.

A distribuição de probabilidades da variável Y é simétrica da distribuição de probabilidades da variável X em relação à reta da equação $x = 3$.

99. $P(X = 40) = P(X > 40) \Leftrightarrow 2a - \frac{1}{12} = P(X = 50)$

$\Leftrightarrow 2a - \frac{1}{12} = a$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{12}$

$P(X \leq 10) = 3P(X = 50) \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 10) = 3 \times \frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{12} + b = \frac{3}{12}$

$\Leftrightarrow b = \frac{2}{12}$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{6}$

$P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) + P(X = 50) = 1$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 1$

$\Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$

100. X: "Pontuação obtida."

a)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\mu = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$

$\sigma = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{5}{9}} \approx 0{,}745$

b) **i.** Y: "Soma das pontuações obtidas em dois lançamentos do dado."

1º lançamento \ 2º lançamento	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

$P(Y = 2) = \frac{1}{36}$

$P(Y = 3) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(Y = 4) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(Y = 5) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$P(Y = 6) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

y_i	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

ii. Recorrendo à calculadora:

$\mu \approx 4{,}67$

$\sigma_Y \approx 1{,}05409$

Logo, $\sigma_Y^2 \approx 1{,}11$.

101. Face obtida no lançamento do dado:

$1 \Rightarrow X = 2$

$2 \Rightarrow X = 1$

$3 \Rightarrow X = 6$

$4 \Rightarrow X = 2$

$5 \Rightarrow X = 10$

$6 \Rightarrow X = 3$

Como o dado é equilibrado, obtém-se a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	1	2	3	6	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

102.
$$\begin{cases} E(Z) = 4{,}9 \\ P(Z=2)+P(Z=3)+P(Z=4)+P(Z=5)+P(Z=6)+P(Z=7)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\times 0{,}05 + 3\times 0{,}25 + 4a + 5b + 6\times 0{,}1 + 7\times 0{,}3 = 4{,}9 \\ 0{,}05 + 0{,}25 + a + b + 0{,}1 + 0{,}3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 5b = 1{,}35 \\ a + b = 0{,}3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(0{,}3 - b) + 5b = 1{,}35 \\ a = 0{,}3 - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}2 - 4b + 5b = 1{,}35 \\ \text{———————} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0{,}15 \\ a = 0{,}3 - 0{,}15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}15 \\ b = 0{,}15 \end{cases}$$

De facto, $a = b$.

103. No caso do projeto A:

x_i	150 000	250 000	–100 000
$P(X = x_i)$	0,5	0,2	0,3

$E(X) = 95\,000$

No projeto B:

y_i	100 000	200 000	–50 000
$P(Y = y_i)$	0,6	0,3	0,1

$E(Y) = 115\,000$

Sendo que $E(Y) > E(X)$, o diretor financeiro deve aconselhar como sendo o mais vantajoso o projeto B.

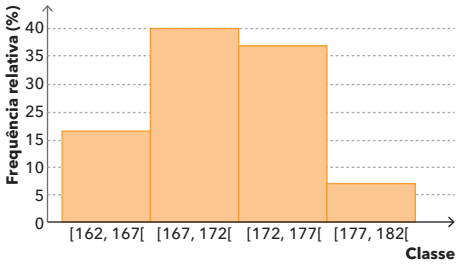
Capítulo 5 – Modelo normal

Tarefa – As alturas – página 176

a)

Classe	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
[162, 167[	5	16,7
[167, 172[	12	40
[172, 177[	11	36,7
[177, 182[	2	6,7
Total	**30**	**100**

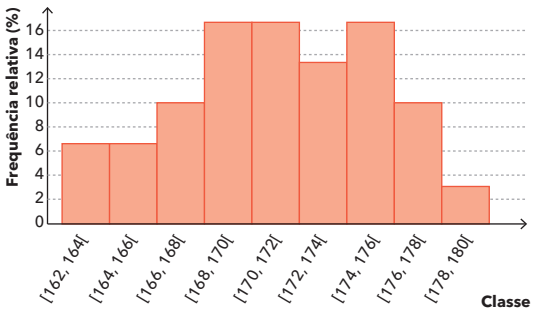
b)



c)

Classe	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
[162, 164[	2	6,7
[164, 166[	2	6,7
[166, 168[	3	10
[168, 170[	5	16,7
[170, 172[	5	16,7
[172, 174[	4	13,3
[174, 176[	5	16,7
[176, 178[	3	10
[178, 180[	1	3,3
Total	**30**	**100**

d)



e) Se recolhêssemos milhares de alturas de alunos em todo o país, o histograma tenderia a suavizar-se e a apresentar uma forma em sino: valores mais altos no meio (valores médios mais comuns) e mais baixos nas extremidades (alguns muito baixos ou muito altos).

Exercícios de margem – páginas 181 a 183

104. Opção (B)

$X_1 \sim N(a, b)$

$X_2 \sim N(c, d)$

Como os gráficos são simétricos relativamente à mesma reta, tem-se que $a = c$, e como a curva que representa a variável X_2 é mais achatada, tem-se que, o seu desvio-padrão é maior, isto é, $b < d$.

105. Opção (D)

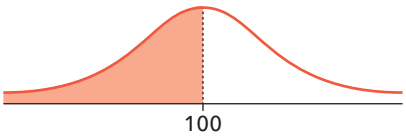
$X_1 \sim N(a, b)$

$X_2 \sim N(c, d)$

Como os gráficos são igualmente achatados, temos que $b = d$, e como a curva que representa a variável X_2 atinge o seu máximo num ponto mais à direita do que a curva X_1, tem-se que o seu valor médio é maior, isto é, $c > a$.

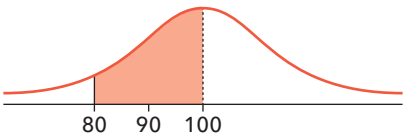
106. $X \sim N(100, 10)$

a)



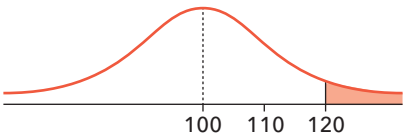
$P(X < 100) = 0,5$

b)



$P(80 < X < 100) = \frac{0,9545}{2} = 0,47725$

c)



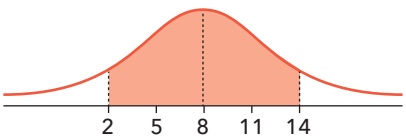
$P(X \geq 120) = \frac{1 - 0,9545}{2} = 0,02275$

$500 \times 0,02275 = 11,375$

Em 500 indivíduos, espera-se que haja 11 diabéticos.

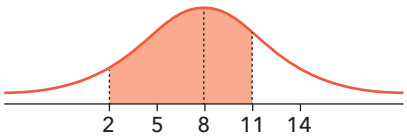
107. $X \sim N(8, 3)$

a)



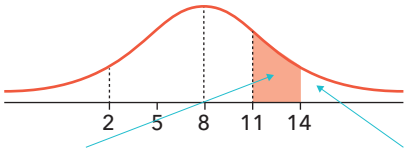
$P(2 < X < 14) \approx 0,9545$

b)



$P(X < 11) = 0,5 + \frac{0,6827}{2} = 0,84135$

c)



$\frac{0,6827}{2} = 0,34135$ $\qquad$ $\frac{1 - 0,9545}{2} = 0,02275$

$P(11 < X < 14) = 0,5 - 0,34135 - 0,02275 = 0,1359$

108. $X \sim N(161,3; 4,6)$

Recorrendo à calculadora:

a) $P(155 < X < 165) \approx 0,704$

b) $P(X > 170) \approx 0,029$

c) $P(X > a) = 0,1$

$a = 167$ cm

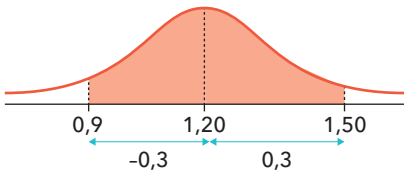
Aprende fazendo 5 – páginas 184 e 185

109. $\mu = 1,20$

$\sigma = 0,30$

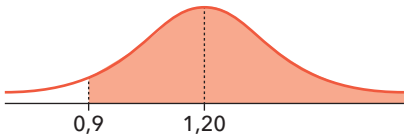
Sendo $X \sim N(1,20; 0,30)$, tem-se que:

a) $P(0,9 < X < 1,5) \approx 0,6827$

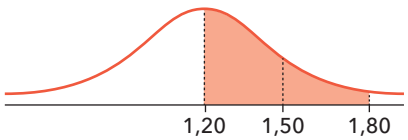


b) $P(X > 0,9) \approx 1 - \frac{1 - 0,6827}{2}$

$= 0,84135$



c) **i.** $P(X > 1,20) = 0,5$, logo, em 400 plantas, espera-se que metade, isto é, 200 plantas meçam mais de 1,20 m.



ii. $P(1,20 < X < 1,80) = 0,5 - \frac{1 - 0,9545}{2} = 0,47725$,

logo, em 400 plantas, espera-se que 191 plantas meçam entre 1,20 m e 1,80 m.

110. Opção (B)

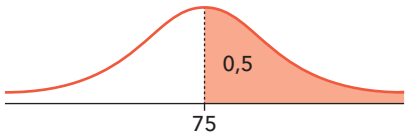
Sendo que X segue uma distribuição normal de valor médio 5, para se ter $P(X < k) = 20\%$, k terá de ser um valor inferior a 5. Assim, dos valores apresentados, k só pode ser 3.

111. Opção (D)

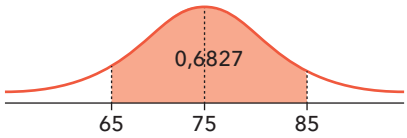
Seja X a variável aleatória que representa o comprimento, em centímetros, de uma certa espécie de catos.

$X \sim N(75, 10)$

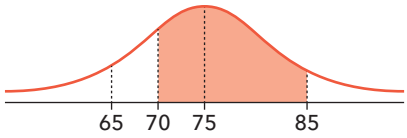
$P(A) = P(X > 75) = 0{,}5$



$P(B) = P(65 < X < 85) \approx 0{,}6827$



$P(C) = P(70 < X < 85)$



Observe-se que $P(C) < 0{,}6827$.

112. Opção (A)

Seja X a variável aleatória que representa o peso, em gramas, de uma certa qualidade de peras de um pomar. Sabemos que:

$X \sim N(100, \sigma)$ e $P(90 < x < 110) = 0{,}9545$

Sabemos também que se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$, logo, neste caso:

$$\begin{cases} 100 - 2\sigma = 90 \\ 100 + 2\sigma = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = 5 \\ \sigma = 5 \end{cases}$$

113. Opção (A)

Seja X a variável aleatória que representa o nível obtido:

$$\bar{x} = 1 \times \frac{10}{240} + 2 \times \frac{40}{240} + 3 \times \frac{50}{240} + 4 \times \frac{100}{240} + 5 \times \frac{40}{240} = 3{,}5$$

$$s = \sqrt{\frac{10}{240} \times (1 - 3{,}5)^2 + \frac{40}{240} \times (2 - 3{,}5)^2 + \ldots + \sqrt{+ \frac{40}{240} \times (5 - 3{,}5)^2}} \approx 1{,}08 \text{ (2 c.d.)}$$

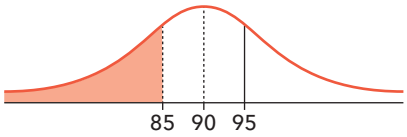
Assim:

$$P(\bar{x} - s < X < \bar{x} + s) = P(3{,}5 - 1{,}08 < X < 3{,}5 + 1{,}08) = P(2{,}42 < X < 4{,}58) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{50}{240} + \frac{100}{240} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

114. Seja X a variável aleatória que representa o tempo que um mecânico demora a substituir num carro as pastilhas dos travões.

$X \sim N(90, 5)$

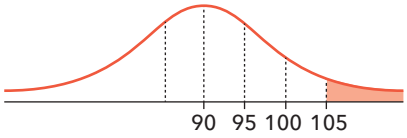
a)



$P(X < 85) \approx \frac{1 - 0{,}6827}{2} = 0{,}15865$, ou seja,

$P(X < 85) \approx 16\%$

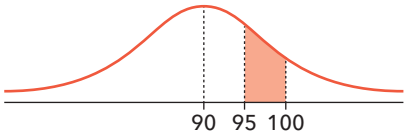
b)



$P(X > 105) \approx \frac{1 - 0{,}9973}{2} = 0{,}00135$, ou seja,

$P(X > 105) \approx 0{,}135\%$

c)

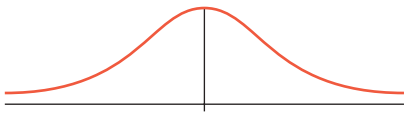


$P(95 < X < 100) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}6827}{2} - \frac{1 - 0{,}9545}{2} =$

$= 0{,}1359$, ou seja, $P(95 < X < 100) \approx 13{,}59\%$.

115. Opção (D)

Seja X a variável aleatória que representa as classificações obtidas a nível nacional no Exame de Matemática. Como X segue uma distribuição normal de valor médio 130, então a curva normal que lhe está associada é da forma:

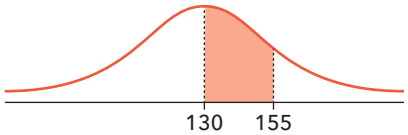


Tem-se que $P(X \leq 130) = 50\%$ e $P(X \geq 130) = 50\%$.

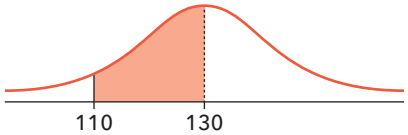
Sendo $P(a \leq X \leq b) = 65\%$, todas as opções apresentadas são excluídas, à excepção da opção (D).

Observe-se que:

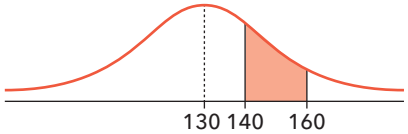
- Opção (A), $P(130 \leq X < 155) < 50\%$



- Opção (B), $P(110 \leq X \leq 130) < 50\%$



- Opção (C), $P(140 \leq X \leq 160) < 50\%$



116. X: "Tempo que o Tiago demora nos correios."
$X \sim N(6; 1{,}3)$
Pretende-se determinar k tal que $P(X \leq k) \geq 0{,}9545$.
Através da calculadora, e da opção **InV Norm**, obtemos $k \approx 8{,}20$.

Aprende Fazendo Global – páginas 196 a 203

1.

a) $x = 1500 - (312 + 409 + 501) = 1500 - 1222 = 278$
Pela Lei dos Grandes Números, a frequência relativa do acontecimento "sair número 4 na face que fica voltada para baixo", quando o número de repetições da experiência é suficientemente grande, é uma boa aproximação do valor da probabilidade do acontecimento em causa.
P("sair o número 4 na face voltada para baixo") = $= \frac{278}{1500} = \frac{139}{750}$

b) Aumentaria o número de repetições da experiência.

2.

a) $P(A \cap B) = \frac{7}{32}$

b) $P(A \cup B) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

c) $P(\overline{B}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

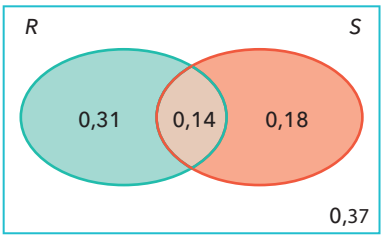
d) $P(A \backslash B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

e) $P(\overline{A} \backslash \overline{B}) = \frac{9}{32}$

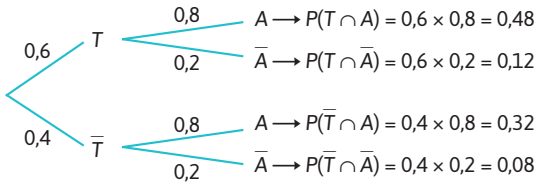
3. Opção (C)
Como A e B são acontecimentos independentes, $P(A|B) = P(A)$. Logo, $P(A|B) = 0{,}3$.

4. Opção (A)
Considere-se os acontecimentos:
M: "Ser funcionário mulher."
F: "Ser funcionário fumador."
$P(M|F) = \frac{30}{80} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

5. R: "Ter praticado rapel."
S: "Ter praticado slide."
$P(\overline{R}) = 0{,}55$ $\quad P(R) = 0{,}45$
$P(\overline{S}) = 0{,}68$ $\quad P(S) = 0{,}32$
$P(R \cap S) = 0{,}14$
$P(R \backslash S) = 0{,}45 - 0{,}14 = 0{,}31$
$P(S \backslash R) = 0{,}32 - 0{,}14 = 0{,}18$
$P(\overline{R} \cap \overline{S}) = 1 - 0{,}31 - 0{,}14 - 0{,}18 = 0{,}37$



6. Sejam os acontecimentos:
T: "Tomás passar no exame."
A: "António passar no exame."
$P(T) = 0{,}6$ e $P(A) = 0{,}8$
Dispondo os dados num diagrama de árvore:



Assim:

a) $P(\overline{T} \cap \overline{A}) = 0{,}08$

b) $P(\overline{T} \cap A) = 0{,}32$

c) $P(T \cap \overline{A}) + P(\overline{T} \cap A) = 0{,}12 + 0{,}32 = 0{,}44$

7. Sabe-se que:
- $P(A) = 0{,}4$
- $P(A \cup B) = 0{,}7$
- A e B são acontecimentos independentes, logo $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$0{,}7 = 0{,}4 + P(B) - P(A) \times P(B)$
$\Leftrightarrow 0{,}3 = P(B) - 0{,}4 \times P(B)$
$\Leftrightarrow 0{,}6\, P(B) = 0{,}3$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{0{,}3}{0{,}6}$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

8. Sabendo que X assume os valores 0, 1, 2, 3, 4 e 5, tem-se que:
- $P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0{,}116$
- $P(X \leq 1) = 0{,}428 \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}428$
  $\Leftrightarrow 0{,}116 + P(X = 1) = 0{,}428$
  $\Leftrightarrow P(X = 1) = 0{,}312$
- $P(X \leq 2) = 0{,}765 \Leftrightarrow P(X \leq 1) + P(X = 2) = 0{,}765$
  $\Leftrightarrow 0{,}428 + P(X = 2) = 0{,}765$
  $\Leftrightarrow P(X = 2) = 0{,}337$
- $P(X \leq 3) = 0{,}946 \Leftrightarrow P(X \leq 2) + P(X = 3) = 0{,}946$
  $\Leftrightarrow 0{,}765 + P(X = 3) = 0{,}946$
  $\Leftrightarrow P(X = 3) = 0{,}181$
- $P(X \leq 4) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \leq 3) + P(X = 4) = 0{,}995$
  $\Leftrightarrow 0{,}946 + P(X = 4) = 0{,}995$
  $\Leftrightarrow P(X = 4) = 0{,}049$
- $P(X \leq 5) = 1 \Leftrightarrow P(X \leq 4) + P(X = 5) = 1$
  $\Leftrightarrow 0{,}995 + P(X = 5) = 1$
  $\Leftrightarrow P(X = 5) = 0{,}005$

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades de X é:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,116	0,312	0,337	0,181	0,049	0,005

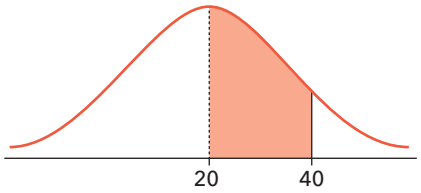
9. Opção (C)

$X \sim N(20, \sigma)$ e $P(a < X < b) = 0{,}7$

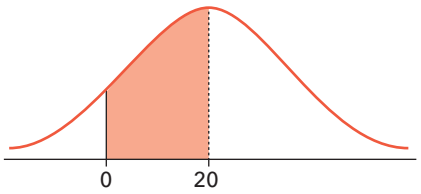
Sabemos que $P(X < 20) = P(X > 20) = 0{,}5$.

Com exceção da opção (C), em todas as restantes verifica-se que $P(a < X < b) < 0{,}5$.

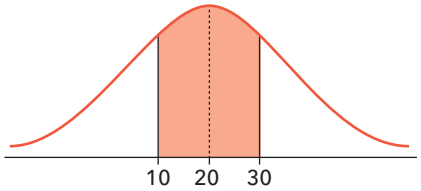
(A)



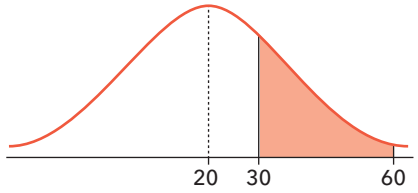
(B)



(C)



(D)



10. $P(\text{“Hermínia ganhar o prémio”}) = 1 - \frac{^{27}C_5}{^{30}C_5} = \frac{88}{203}$

11. **Número de resultados possíveis:** $5^{10} = 9\,765\,625$

Número de resultados favoráveis: 5

$P(\text{“saírem todos na mesma paragem”}) =$

$= \frac{5}{5^{10}} = \frac{1}{5^9} = \frac{1}{1\,953\,125}$

12. Opção (A)

$P = \frac{^8C_5}{^{10}C_5} = \frac{2}{9}$

13. Opção (D)

Números de resultados possíveis: 1 000 000

Número de resultados favoráveis

$\underbrace{\underline{P}\ 5 \times \underline{P}\ 5 \times \underline{P}\ 5}_{\substack{\text{Número de maneiras de escolher, ordenadamente, com repetição, três números pares, de entre cinco (0, 2, 4, 6 e 8).}}} \times \underbrace{\underline{I}\ 5 \times \underline{I}\ 5 \times \underline{I}\ 5}_{\substack{\text{Número de maneiras de escolher, ordenadamente, com repetição, três números ímpares, de entre cinco (1, 3, 5, 7 e 9).}}} \times \underbrace{^6C_3}_{\substack{\text{Número de maneiras diferentes de escolher as três posições, de entre seis, para colocar números pares.}}}$

Assim, $P = \frac{312\,500}{1\,000\,000} = \frac{5}{16}$.

14. Opção (C)

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$

Cálculo auxiliar

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$0{,}9 = 0{,}6 + P(B) - 0{,}1$
$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

15. Sejam os acontecimentos:

F: “Ser do sexo feminino.”

M: “Ser do sexo masculino.”

E: “Ser candidato ao primeiro emprego.”

Do enunciado, temos que:

- $P(F) = 0{,}7$
- $P(E) = 0{,}6$
- $P(M|E) = 0{,}25$

Então, podemos concluir que:

$P(M|E) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = 0{,}25$

$\Leftrightarrow \frac{P(M \cap E)}{0{,}6} = 0{,}25$

$\Leftrightarrow P(M \cap E) = 0{,}15$

Organizando os dados numa tabela, temos:

	F	M	Total
E	0,45	0,15	**0,6**
$\overline{E}$	0,25	0,15	**0,4**
Total	**0,7**	**0,3**	**1**

Pretende-se saber $P(F|E)$.

Assim:

$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}45}{0{,}6} = 0{,}75$

16.

a) **Número de resultados possíveis:** $^{10}C_4 = 210$

Número de resultados favoráveis: $^4C_4 = 1$

$P(\text{“serem todas da mesma cor”}) = \frac{1}{210}$

b) **Número de resultados possíveis:** $^{10}C_4 = 210$

Número de resultados favoráveis

Exatamente três da mesma cor **ou** quatro da mesma cor

$^4C_3 \times 6 + {}^3C_3 \times 7 + {}^4C_4 = 24 + 7 + 1 = 32$

$P(\text{“pelo menos três bolas serem da mesma cor”}) =$

$= \frac{32}{210} = \frac{16}{105}$

c) **Número de resultados possíveis:** $^4C_3 \times 6 + {}^3C_3 \times 7 = 31$

Número de resultados favoráveis: $^3C_3 \times 7 = 7$

$P(\text{“haver três bolas brancas, sabendo que três e só três são da mesma cor”}) = \frac{7}{31}$

17. Considera os acontecimentos:
N: "Sair face nacional."
E: "Sair face europeia."
Seja *X* a variável aleatória que representa o número de faces nacionais obtidas.
X assume os valores 0, 1, 2, 3 e 4.

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ (*E*, *E*, *E*, *E*)

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$
(*N*, *E*, *E*, *E*), (*E*, *N*, *E*, *E*), (*E*, *E*, *N*, *E*), (*E*, *E*, *E*, *N*)

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times6=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$
(*E*, *E*, *N*, *N*), (*N*, *N*, *E*, *E*), (*N*, *E*, *E*, *N*), (*E*, *N*, *N*, *E*), (*N*, *E*, *N*, *E*), (*E*, *N*, *E*, *N*)

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$
(*N*, *N*, *N*, *E*), (*N*, *E*, *N*, *N*), (*N*, *N*, *E*, *N*), (*E*, *N*, *N*, *N*)

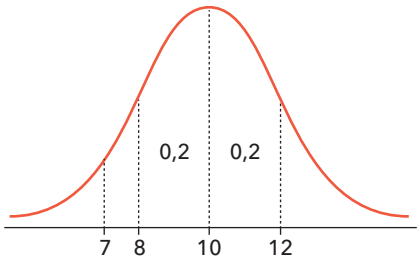
$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ (*N*, *N*, *N*, *N*)

Tabela de distribuição de probabilidades de variável X:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

18. Opção (A)
Se $P(X\leq1)=P(X=4)$, então:
$P(X=0)+P(X=1)=P(X=4)$
$\Leftrightarrow\frac{1}{12}+2a=a+\frac{1}{6}$
$\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$
$\Leftrightarrow a=\frac{1}{12}$
e $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$
$\Leftrightarrow\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{5}+b+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=1$
$\Leftrightarrow b=\frac{3}{10}$

19. Opção (D)
$X\sim N(10,\sigma)$



Então:
$P(X<12)=P(X<10)+P(10<X<12)=$
$=0,5+0,2=$
$=0,7$

$P(X>7)=P(7<X<8)+P(X>8)=P(7<X<8)+0,7$, logo, $P(X<12)<P(X>7)$.
$P(9\leq X\leq11)>P(8\leq X\leq10)=0,2$, pois a área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equações $x=9$ e $x=11$ é superior à área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equações $x=8$ e $x=10$.
$P(8\leq X\leq12)=0,4$
$P(X\leq8)=0,3$
$P(X\geq12)=0,3$
$P(X\leq8\ \vee\ X\geq12)=0,6$

20. $P=\frac{4\times{}^{36}C_9\times3\times{}^{27}C_9\times2\times{}^{18}C_9\times1\times{}^{9}C_9}{{}^{40}C_{10}\times{}^{30}C_{10}\times{}^{20}C_{10}\times{}^{10}C_{10}}=\frac{1000}{9139}$

21. Opção (C)
Num conjunto de seis pessoas, considere-se os acontecimentos:
A: "Pelo menos duas pessoas pertencerem ao mesmo signo."
Assim:
$\overline{A}$: "Nenhuma pessoa pertencer ao mesmo signo."
$P(A)=1-P(\overline{A})=$
$=1-\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{12\times12\times12\times12\times12\times12}=$
$=1-\frac{385}{1728}=$
$=\frac{1343}{1728}$

22. Opção (B)
Número de resultados possíveis
$6\times6\times6\times6\times6=6^5=7776$
Número de resultados favoráveis
$1\times1\times1\times5\times5\times{}^{5}C_3=250$
A probabilidade é $\frac{250}{7776}\approx0,032$.

23. Opção (B)
Seja $E=\{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$
$\#E=36$
X: "No dado D aparece um 1."
$X=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$
$P(X)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
Y: "A soma dos dois números é igual a 7."
$Y=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$
$P(Y)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
Z: "Os dois números são iguais."
$Z=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
$P(Z)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
$X\cap Y=\{(1,6)\}$
$P(X\cap Y)=\frac{1}{36}$
$P(X)\times P(Y)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

Como $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$, X e Y são acontecimentos independentes.

A opção (A) é falsa.

$X \cap Z = \{(1, 1)\}$

$P(X \cap Z) = \frac{1}{36}$

$P(X) \times P(Z) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Como $P(X \cap Z) = P(X) \times P(Z)$, X e Z são acontecimentos independentes.

A opção (B) é verdadeira.

$Y \cap Z = \varnothing$, logo Y e Z são acontecimentos incompatíveis e não são independentes.

$P(Y \cap Z) = 0$

$P(Y) \times P(Z) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

As opções (C) e (D) são falsas.

24. Consideremos os acontecimentos:

T_1: "Tomás escolher o café Central."

T_2: "Tomás escolher o café Convívio."

T_3: "Tomás escolher o café da Esquina."

Sabemos que $P(T_1) = \frac{5}{9}$, que $P(T_2) = P(T_3)$ e que $P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) = 1$, logo:

$$\frac{5}{9} + P(T_2) + P(T_2) = 1 \Leftrightarrow P(T_2) = \frac{1 - \frac{5}{9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(T_2) = \frac{2}{9} \text{ e } P(T_3) = \frac{2}{9}$$

M_1: "Joaquim escolher o café Central."

M_2: "Joaquim escolher o café Convívio."

M_3: "Joaquim escolher o café da Esquina."

Sabemos que $P(M_2) = \frac{1}{7}$, que $P(M_1) = P(M_3)$ e que $P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1$, logo:

$$P(M_1) + \frac{1}{7} + P(M_1) = 1 \Leftrightarrow P(M_1) = \frac{1 - \frac{1}{7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(M_1) = \frac{3}{7} \text{ e } P(M_3) = \frac{3}{7}$$

J_1: "João escolher o café Central."

J_2: "João escolher o café Convívio."

J_3: "João escolher o café da Esquina."

Sabemos que $P(J_1) = P(J_2) = P(J_3) = \frac{1}{3}$.

a) $P(T_1 \cap M_1 \cap J_1) = P(T_1) \times P(M_1) \times P(J_1) =$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{63}$$

b) $P(T_1 \cap M_1 \cap J_1) + P(T_2 \cap M_2 \cap J_2) + P(T_3 \cap M_3 \cap J_3) =$

$$= \frac{5}{63} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{63} + \frac{2}{189} + \frac{2}{63} =$$

$$= \frac{23}{189}$$

c) Seja A o acontecimento "no máximo dois amigos encontram-se no mesmo café", então $\overline{A}$ é o acontecimento "todos os amigos se encontram no mesmo café".

Assim:

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$

$= 1 - \frac{23}{189}$ (determinado na alínea anterior)

$= \frac{166}{189}$

25.

a) **Número de resultados possíveis:** ${}^{14}C_5$

Número de resultados favoráveis: ${}^{8}C_5 + {}^{6}C_5$

A probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{8}C_5 + {}^{6}C_5}{{}^{14}C_5} = \frac{62}{2002} = \frac{31}{1001}$$

b) **Número de resultados possíveis:** ${}^{14}C_3$

Número de resultados favoráveis: $6 \times {}^{4}C_3 + 8 \times {}^{4}C_3$

A probabilidade pedida é:

$$\frac{6 \times {}^{4}C_3 + 8 \times {}^{4}C_3}{{}^{14}C_3} = \frac{56}{364} = \frac{2}{13}$$

26. ${}^{25}C_{15}$ é o número de modos distintos de colocar os quinze carrinhos na caixa.

Supondo que os carrinhos ocupam pelo menos uma das diagonais, sobram-nos dez carrinhos para colocar em vinte compartimentos, o que pode ser feito de ${}^{20}C_{10}$ modos distintos, para cada diagonal, ou seja, podemos preencher pelo menos uma das diagonais de $2 \times {}^{20}C_{10}$ modos distintos.

Porém, $2 \times {}^{20}C_{10}$ contabilizou o dobro das vezes o caso em que as duas diagonais são preenchidas em simultâneo. Logo, temos de subtrair o número de modos de preencher as duas diagonais em simultâneo.

Uma vez preenchidas as duas diagonais em simultâneo, sobram $15 - 9 = 6$ carrinhos para colocar em dezasseis compartimentos, o que pode ser feito de ${}^{16}C_6$ maneiras distintas.

Assim, $2 \times {}^{20}C_{10} - {}^{16}C_6$ é o número de maneiras de ocupar pelo menos uma das diagonais.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pela razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis, quando os resultados elementares são equiprováveis e em número finito, ou seja, $\frac{2 \times {}^{20}C_{10} - {}^{16}C_6}{{}^{25}C_{15}}$ é uma resposta correta a este problema.

27. Opção (A)

Número de resultados possíveis: $9!$

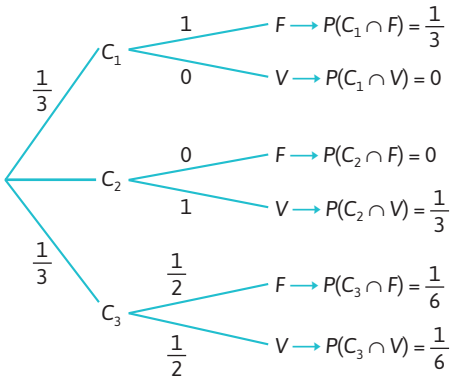
Como os homens não podem estar juntos, necessitamos de duas mulheres que funcionam como separadores. Logo, dos nove lugares disponíveis, retiramos dois para colocar as mulheres "separadoras".

Assim, restam-nos sete lugares para os três homens.

Número de resultados favoráveis: ${}^{7}C_3 \times 3! \times 6!$

A probabilidade pedida é $\frac{5}{12}$.

28. Através dos dados do enunciado:



a) $P(C_1) = \frac{1}{3}$

i. $P(F) = P(F \cap C_1) + P(F \cap C_2) + P(F \cap C_3) =$

$= \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{2}$

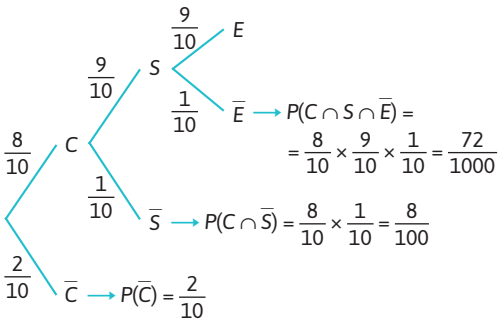
ii. $P(C_3|F) = \frac{P(C_3 \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

29. Sejam os acontecimentos:

C: "Maria escrever a carta."

S: "Não se perder a carta nos correios."

E: "O carteiro entregar a carta."



Seja ainda R o acontecimento: "a Rosa recebe a carta".

Pretende-se $P(\overline{C}|\overline{R})$.

Assim:

$$P(\overline{C}|\overline{R}) = \frac{P(\overline{C} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{72}{1000} + \frac{8}{100} + \frac{2}{10}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{10}}{\frac{44}{125}} =$$

$$= \frac{25}{44}$$

30. Sejam os acontecimentos:

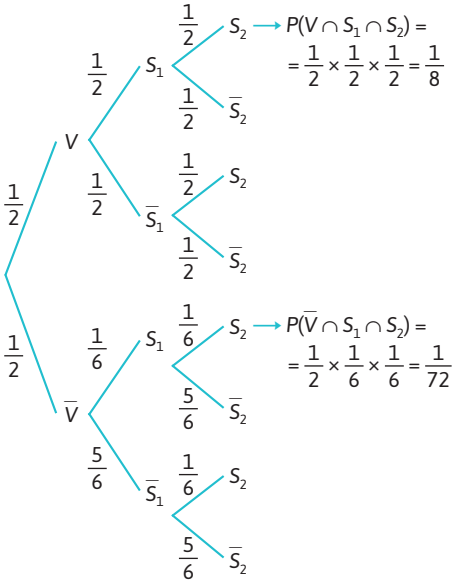
V: "Ser dado viciado."

S: "Sair um num lançamento do dado."

$P(S|V) = \frac{1}{2}$

$P(S|\overline{V}) = \frac{1}{6}$

Assim:



Pretende-se:

$$P(V|(S_1 \cap S_2)) = \frac{P(V \cap S_1 \cap S_2)}{P(S_1 \cap S_2)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{72}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{36}} = \frac{9}{10}$$

31. Seja $a = P(Y = 1) = P(Y = 4)$ e $b = P(Y = 2) = P(Y = 3)$.

a) Sabe-se que:

$$a + a + b + b = 1 \Leftrightarrow 2a + 2b = 1$$
$$\Leftrightarrow 2(a + b) = 1$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a + b = \frac{1}{2}}$$

Determinemos o valor médio da variável aleatória:

$$\mu = 1 \times a + 2 \times b + 3 \times b + 4 \times a = a + 2b + 3b + 4a =$$
$$= 5a + 5b =$$
$$= 5(\boldsymbol{a + b}) =$$
$$= 5 \times \boldsymbol{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{5}{2}$$

b) $P(Y > 3) = 2P(Y = 3) \Leftrightarrow P(Y = 4) = 2P(Y = 3) \Leftrightarrow a = 2b$

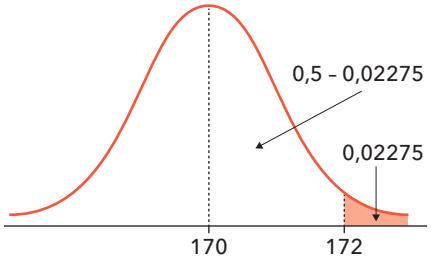
Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + b = \frac{1}{2} \\ _____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = \frac{1}{2} \\ _____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

y_i	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

32. $X \sim N(170, \sigma)$

a) $P(X > 172) = 0{,}02275$
$\Leftrightarrow P(\mu < X < 172) = 0{,}5 - 0{,}02275$
$\Leftrightarrow P(\mu < X < 172) = 0{,}47725$
$\Leftrightarrow 2 \times P(\mu < X < 172) = 0{,}9545$
$\Leftrightarrow \mu + 2\sigma = 172$
$\Leftrightarrow 2\sigma = 172 - 170$
$\Leftrightarrow 2\sigma = 2$
$\Leftrightarrow \sigma = 1$



b) Como 172 e 168 estão a igual distância do valor médio, tem-se que $P(X > 172) = P(X < 168)$.
Logo, em 200 000 jantes fabricadas por essa máquina, espera-se que $0{,}02275 \times 200\,000 = 4550$ tenham diâmetro inferior a 168 decímetros.

Exercícios Tipo-Exame – páginas 204 a 206

1. O número de resultados possíveis é igual a 6^5.

O número de resultados favoráveis é igual a:

$$\underbrace{\frac{5}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{1}\times\frac{6}{1}\times\frac{2}{1}}_{2} + \underbrace{\frac{5}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{1}\times\frac{6}{1}\times\frac{4}{1}}_{2} + \underbrace{\frac{5}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{}{5}\times\frac{6}{1}\times\frac{6}{1}\times\frac{2}{1}}_{2}$$

$$\underbrace{\frac{}{4}\times\frac{}{1}\times\frac{}{5}\times\frac{}{5}\times\frac{6}{1}\times\frac{}{3}}_{} + \underbrace{\frac{}{4}\times\frac{}{5}\times\frac{6}{1}\times\frac{6}{1}\times\frac{4}{1}\times{}^3C_2}_{} + \underbrace{\frac{}{4}\times\frac{6}{1}\times\frac{6}{1}\times\frac{}{5}\times\frac{2}{1}\times{}^3C_2}_{}$$

$= 2 + 2 + 20 + 300 + 60 + 60 = 444$

A probabilidade pedida é igual a $\frac{444}{6^5} \approx 0{,}06$.

2.

2.1 Consideremos os acontecimentos F e V definidos por:
F: "O aluno gosta de futebol."
V: "O aluno refere que não irá ver o jogo."
Sabemos que:

- $P(F) = 75\% = \frac{3}{4}$
- $P(\overline{V}) = \frac{3}{10}$
- $P(F|\overline{V}) = \frac{1}{3}$

Pretende-se determinar $P(V \cap \overline{F})$.
Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	V	$\overline{V}$	Total
F	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{F}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
Total	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Cálculos auxiliares

- $P(F|\overline{V}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(F \cap \overline{V}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(F \cap \overline{V}) = \frac{1}{10}$
- $P(F \cap V) = \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20}$
- $P(V \cap \overline{F}) = \frac{7}{10} - \frac{13}{20} = \frac{1}{20}$

Assim, $P(V \cap \overline{F}) = \frac{1}{20}$.

2.2 Opção (B)
Número de resultados possíveis: 12!
Número de resultados favoráveis: 3! × 10!

$$\underbrace{\frac{G}{}\times\frac{C}{}\times\frac{T}{}}_{3!} \times \underbrace{\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}\times\frac{}{}}_{\times\,10!}$$

A probabilidade pretendida é, então, $\frac{3! \times 10!}{12!} = \frac{1}{22}$.

2.3 Sendo n o número de jogadores com idade superior ou igual a 30 anos, $52 - n$ é, então, o número de jogadores com idade inferior a 30 anos.
Sabe-se que existem 731 maneiras de escolher esses dois jogadores, de modo que ambos tenham idade superior ou igual a 30 anos ou ambos tenham idade inferior a 30 anos.
Assim:
${}^nC_2 + {}^{52-n}C_2 = 731$
$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(52-n)!}{2!(52-n-2)!} = 731$
$\Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(52-n) \times (51-n) \times (50-n)!}{2!(50-n)!} = 731$
$\Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{(52-n) \times (51-n)}{2} = 731$
$\Leftrightarrow n^2 - n + 2652 - 52n - 51n + n^2 = 1462$
$\Leftrightarrow 2n^2 - 104n + 1190 = 0$
$\Leftrightarrow n = \frac{-(-104) \pm \sqrt{(-104)^2 - 4 \times 2 \times 1190}}{2 \times 2}$
$\Leftrightarrow n = \frac{104 \pm \sqrt{1296}}{4}$
$\Leftrightarrow n = \frac{104 - 36}{4} \vee n = \frac{104 + 36}{4}$
$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = 35$
Assim, $n = 17$, uma vez que existem menos jogadores com idade superior ou igual a 30 anos.

3. Consideremos os acontecimentos:
A: "A bola ser azul."
B: "A bola estar numerada."
Sabemos que:
$P(A) = 2P(B)$
$P(A|B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B)$
$P(A \cup B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$
$\Leftrightarrow 2P(B) + P(B) - \frac{1}{2} P(B) = \frac{5}{8}$
$\Leftrightarrow \frac{5}{2} P(B) = \frac{5}{8}$
$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$
Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
$\frac{1}{8} = \frac{3}{n} \Leftrightarrow n = 24$
A caixa contém 24 bolas.

4. O número de resultados possíveis é igual a $6 \times {}^6C_2 \times 4 \times {}^3C_3$.

- 6 é o número de posições distintas onde pode ser colocado o zero (uma vez que o número tem sete algarismos, logo não pode começar por zero);
- ${}^6C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher duas posições para os algarismos cinco, depois de colocado o zero;
- 4 é o número de posições distintas para colocar o algarismo seis, depois de colocados o zero e os dois algarismos cinco;
- ${}^3C_3 = 1$ é o número de maneiras de colocar os três algarismos oito nas três posições restantes.

O número de resultados favoráveis é igual a $5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3$, pois existem quatro casos mutuamente exclusivos.

Caso 1: 5 _ _ _ _ _ 0 $\quad 5 \times 4 \times {}^3C_3$

Caso 2: 6 _ _ _ _ _ 0 $\quad {}^5C_2 \times {}^3C_3$

Caso 3: 5 _ _ _ _ _ 5 $\quad 5 \times 4 \times {}^3C_3$

Caso 4: 6 _ _ _ _ _ 5 $\quad 5 \times 4 \times {}^3C_3$

Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3}{6 \times {}^6C_2 \times 4 \times {}^3C_3} =$$

$$= \frac{20 + 10 + 20 + 20}{360} =$$

$$= \frac{70}{360} =$$

$$= \frac{7}{36}$$

5. Opção (B)

$P(X = 0) = \frac{16}{81}$

A soma dos números saídos nos quatro lançamentos é zero apenas no caso em que sai face com o número zero voltada para cima nos quatro lançamentos.

Sendo n o número de faces do cubo com o número zero, tem-se que:

$$P(X = 0) = \frac{n \times n \times n \times n}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{n^4}{6^4}$$

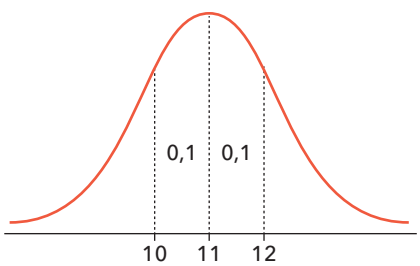
Assim:

$$\frac{n^4}{6^4} = \frac{16}{81} \Leftrightarrow n^4 = 6^4 \times \frac{2^4}{3^4} \Leftrightarrow n^4 = \left(\frac{6 \times 2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow n^4 = 4^4$$

Como $n > 0$, vem que $n = 4$.

6. Opção (D)

$X \sim N(11, \sigma)$



Então:

$P(X < 12) = P(X < 11) + P(11 < X < 12) =$

$= 0,5 + 0,1 =$

$= 0,6$

$P(X > 9) = P(9 < X < 10) + P(10 < X < 11) + P(X > 11)$

$= P(9 < X < 10) + 0,1 + 0,5 =$

$= P(9 < X < 10) + 0,6$

Como $P(9 < X < 10) > 0$, então $P(X < 12) < P(X > 9)$.

$P(9 \leq X \leq 11) = P(9 \leq X \leq 10) + P(10 \leq X \leq 11) =$

$= P(9 \leq X \leq 10) + 0,1 < 0,2$, pois a área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equações $x = 9$ e $x = 10$ é inferior à área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equações $x = 10$ e $x = 11$.

$P(9 \leq X \leq 13) =$

$= P(9 \leq X \leq 10) + P(10 \leq X \leq 12) + P(12 \leq X \leq 13) =$

$= 2P(9 \leq X \leq 10) + 0,2 < 0,4$, pois a área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equações $x = 9$ e $x = 10$ é inferior à área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equações $x = 10$ e $x = 11$.

$P(X \leq 10) = 0,4$

$P(X \geq 12) = 0,4$

$P(X \leq 10 \vee X \geq 12) = 0,8$

7. $P(B|\overline{A})$, no contexto da situação descrita, significa a probabilidade de se retirarem da caixa 2 duas bolas brancas, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor.

Se as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor, significa que se colocou na caixa 2 uma bola branca e uma bola preta, ficando a caixa 2 com 9 bolas, das quais x são brancas ($x > 0$) e $9 - x$ são pretas. Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{x(x-1)}{9 \times 8}$.

$$\frac{x(x-1)}{9 \times 8} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(x^2 - x) = 72$$
$$\Leftrightarrow 12x^2 - 12x - 72 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

Como $x > 0$, então $x = 3$. Logo, existiam inicialmente 2 bolas brancas e 5 bolas pretas.

8. Seja X a variável aleatória "massa, em gramas, do queijo Serra da Estrela".

$X \sim N(1180, 120)$

$\mu - \sigma = 1180 - 120 = 1060$

$P(X > 1060) = P(1060 < X < 1180) + P(X > 1180) \approx$

$\approx \frac{0,6827}{2} + 0,5 \approx$

$\approx 0,8414$

$90\,000 \times P(X > 1060) = 90\,000 \times 0,8414 = 75\,726$

Espera-se certificar aproximadamente 75 726 queijos.

9. Opção (A)

+	2	–1	–1	–1	–1	–1
2	4	1	1	1	1	1
–1	1	–2	–2	–2	–2	–2
–1	1	–2	–2	–2	–2	–2
–1	1	–2	–2	–2	–2	–2
–1	1	–2	–2	–2	–2	–2
–1	1	–2	–2	–2	–2	–2

$P(X = 4) = \frac{1}{36}$

$P(X = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(X = -2) = \frac{25}{36}$

Logo, $k = 1$.

10. $1 \times 1 = 1$
$1 \times 2 = 2$
$1 \times 5 = 5$
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 5 = 10$

$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$P(X = 5) = \frac{{}^4C_1 \times 1}{{}^9C_2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(X = 4) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(X = 10) = \frac{{}^4C_1 \times 1}{{}^9C_2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

x_i	1	2	4	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Teste Final – páginas 207 a 209

1. Opção (C)

Número de resultados possíveis: ${}^{52}A_4$

Número de resultados favoráveis: existem duas alternativas mutuamente exclusivas que devem ser tidas em consideração: a primeira carta é um às de paus ou a primeira carta é um às que não é de paus.

Assim, $1 \times {}^{50}A_2 \times 12 + 3 \times {}^{50}A_2 \times 13$.

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{1 \times {}^{50}A_2 \times 12 + 3 \times {}^{50}A_2 \times 13}{{}^{52}A_4} = \frac{29\,400 + 95\,550}{6\,497\,400} = \frac{124\,950}{6\,497\,400} = \frac{1}{52}$$

2.

2.1 $4\,P(A) = 5\,P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow P(\overline{B}|A) = \frac{4}{5}$

Seja a o número de canetas azuis existentes na caixa e seja c o número de canetas de outras cores, que não o azul, existentes na caixa.

Desta forma, inicialmente existiam $a + c$ canetas na caixa.

Como a probabilidade apresentada corresponde à probabilidade de a segunda caneta extraída ser azul, sabendo que a primeira caneta extraída foi azul, o número de resultados favoráveis é $a - 1$ e o número de resultados possíveis é $a - 1 + c$. Assim:

$$P(\overline{B}|A) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+c} = \frac{4}{5}$$
$$\Leftrightarrow 5a - 5 = 4a - 4 + 4c$$
$$\Leftrightarrow a = 4c + 1$$

Como $4c$ representa, necessariamente, um número par, então $4c + 1$ corresponde a um número ímpar. Como $a = 4c + 1$, significa que, inicialmente, existia um número ímpar de canetas azuis na caixa.

2.2 $0{,}32 \times 50 = 16$, logo 16 canetas são azuis e 34 canetas $(50 - 16 = 34)$ não são azuis.

Pretende-se obter a probabilidade de, ao serem retiradas seis canetas da caixa, o conjunto formado por essas seis canetas conter, pelo menos, duas canetas azuis.

Comecemos por calcular a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de, ao serem retiradas seis canetas da caixa, o conjunto formado por essas seis canetas conter, no máximo, uma caneta azul. O número de resultados possíveis é ${}^{50}C_6$.

No que diz respeito ao número de resultados favoráveis, como se pretende que o conjunto formado pelas seis canetas contenha, no máximo, uma caneta azul, tal significa que existem duas alternativas mutuamente exclusivas: nenhuma das canetas extraídas é azul, ou exatamente uma caneta retirada é azul e exatamente cinco canetas não são azuis.

Assim, o número de resultados favoráveis é ${}^{34}C_6 + 16 \times {}^{34}C_5$.

Desta forma, a probabilidade pedida é igual a $1 - \frac{{}^{34}C_6 + 16 \times {}^{34}C_5}{{}^{50}C_6} \approx 0{,}64$.

3. Seja $n \in \mathbb{N}$ o número de atletas deste clube. Sabe-se que 65% dos atletas praticam andebol, isto é, $0{,}65n$ praticam andebol, pelo que $0{,}35n$ atletas praticam futebol.

Pretende-se selecionar, aleatoriamente, dois desses atletas, o que pode ser feito de ${}^nC_2$ formas distintas. Existem $0{,}65n \times 0{,}35n$ maneiras diferentes de selecionar dois atletas que praticam modalidades distintas. Assim:

$$\frac{0{,}65n \times 0{,}35n}{{}^nC_2} = \frac{39}{85} \Leftrightarrow \frac{0{,}2275n^2}{\frac{n!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{39}{85}$$
$$\Leftrightarrow \frac{0{,}2275n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{39}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}2275n^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{39}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}455n}{n-1} = \frac{39}{85}$$

$n \neq 0$

$\Leftrightarrow 38{,}675n = 39n - 39$

$\Leftrightarrow 0{,}325n = 39$

$\Leftrightarrow n = 120$

O número de atletas deste clube é 120.

$0{,}65 \times 120 = 78$, logo, o número de atletas deste clube que pratica andebol é 78.

4. Opção (B)

Sabemos que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis, isto é, $P(A) = P(B)$;
- A e B são acontecimentos independentes, logo $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

então:

$0{,}84 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A)$

$\Leftrightarrow (P(A))^2 - 2P(A) + 0{,}84 = 0$

$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 0{,}84}}{2}$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}6 \vee P(A) = 1{,}4$

Como $0 \leq P(A) \leq 1$, então $P(A) = 0{,}6$.

Logo, $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

5.

5.1 ${}^{16}C_8$ é o número de maneiras distintas de escolher os 8 compartimentos, de entre os 16, onde vão ser colocados os bombons de chocolate negro (iguais entre si). Por cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras de colocar ordenadamente e sem repetição os 8 bombons de chocolate branco (distintos entre si) nos 8 compartimentos restantes. Assim, ${}^{16}C_8 \times 8!$ é o número de resultados possíveis.

${}^4C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher as 2 colunas, de entre as 4, que vão ser ocupadas. Por cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras de colocar os 8 bombons de chocolate branco (distintos entre si) nos 8 compartimentos definidos pela escolha das duas colunas. Assim, ${}^4C_2 \times 8!$ é o número de resultados favoráveis.

A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^4C_2 \times 8!}{{}^{16}C_8 \times 8!} = \frac{1}{2145}$.

5.2 7! é o número de maneiras distintas de permutar os sete *cupcakes* (distintos) entre si.

5! é o número de maneiras distintas de permutar os cinco *brownies* (distintos) entre si.

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três *donuts* (distintos) entre si.

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três tipos de doce (*cupcakes*, *brownies* e *donuts*) entre si.

Assim, $7! \times 5! \times 3! \times 3! = 21\,772\,800$ é o número de maneiras pedidas.

5.3 $P((A \cap B)|C)$ representa, no contexto do problema, a probabilidade de o Afonso receber sete miniaturas e de o Gonçalo receber um bolo de cada tipo, sabendo que os amigos Afonso e Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas.

Admitindo que os amigos Afonso e Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas, existem seis hipóteses mutuamente exclusivas: o Afonso recebe ou 1, ou 3, ou 5, ou 7, ou 9, ou 11 miniaturas, isto é, ${}^{12}C_1 + {}^{12}C_3 + {}^{12}C_5 + {}^{12}C_7 + {}^{12}C_9 + {}^{12}C_{11}$, que é igual a 2048 resultados possíveis.

Destes 2048 resultados, pretendemos determinar o número de casos em que o Afonso recebe sete miniaturas e o Gonçalo recebe pelo menos uma nata, um *éclair* e uma bola de berlim, isto é, o Gonçalo recebe cinco miniaturas, podendo ser:

- ou três natas, um *éclair* e uma bola de Berlim, ${}^5C_3 \times 4 \times 3$;
- ou uma nata, três *éclaires* e uma bola de Berlim, $5 \times {}^4C_3 \times 3$;
- ou uma nata, um *éclair* e três bolas de Berlim, $5 \times 4 \times {}^3C_3$;
- ou duas natas, dois *éclaires* e uma bola de Berlim, ${}^5C_2 \times {}^4C_2 \times 3$;
- ou duas natas, um *éclair* e duas bolas de Berlim, ${}^5C_2 \times 4 \times {}^3C_2$;
- ou uma nata, dois *éclaires* e duas bolas de Berlim, $5 \times {}^4C_2 \times {}^3C_2$;

Temos, assim:

${}^5C_3 \times 4 \times 3 + 5 \times {}^4C_3 \times 3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^4C_2 \times 3 + {}^5C_2 \times 4 \times {}^3C_2 + 5 \times {}^4C_2 \times {}^3C_2 = 590$ resultados possíveis.

Assim, tem-se que $P((A \cap B)|C) = \frac{590}{2048} = \frac{295}{1024}$.

6. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "A aluna escolhida frequenta o 9.º ano."

B: "A aluna escolhida tem uma altura superior a 1,7 metros."

Sabemos que:

- $P(B|A) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{11}{21}$
- $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$

Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada com a informação recolhida:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\frac{2}{7}$		$\frac{11}{21}$
$\overline{B}$			
Total			1

$$P(B|A) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{7}}{P(A)} = \frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{5}} = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{10}{14}$$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{7}$$

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{11}{21}$
$\overline{B}$		$\frac{1}{21}$	
Total	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

Cálculos auxiliares

- $P(B \cap \overline{A}) = \frac{11}{21} - \frac{2}{7} = \frac{5}{21}$
- $P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{7} - \frac{5}{21} = \frac{1}{21}$

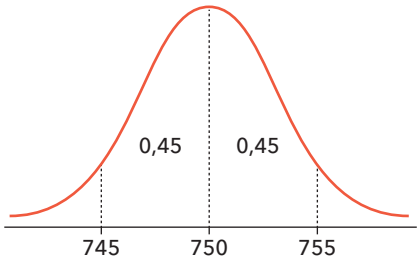
Pretendemos determinar:

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{42} \approx 0{,}17$$

7. Opção (A)

X: "Quantidade de azeite, em mℓ, de uma garrafa comercializada."

$X \sim N(750, \sigma)$



$P(X < 745) = 0{,}5 - 0{,}45 = 0{,}05$

8. Opção (D)

$4a^2 + 2a + a = 1 \Leftrightarrow 4a^2 + 3a - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{8}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm 5}{8}$$
$$\Leftrightarrow a = -1 \vee a = \frac{1}{4}$$

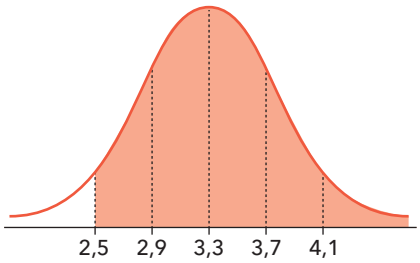
Como $a \geq 0$, então $a = \frac{1}{4}$.

$$\mu = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

9. Opção (B)

X: "Peso, em kg, dos recém-nascidos de um determinado hospital."

$X \sim N(3{,}3; 0{,}4)$



$$P(X < 2{,}5) = \frac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$$

$$P(X > 2{,}5) = 1 - 0{,}02275 = 0{,}97725$$

$$P(X < 3{,}3 | X > 2{,}5) = \frac{P(2{,}5 < X < 3{,}3)}{P(X > 2{,}5)} = \frac{0{,}47725}{0{,}97725} \approx 48{,}8\%$$