# 3. Funções

## Recorda – páginas 6 a 9

**1.**

**a)** $3^4 \times 3^{-2} \div 3^{-5} \div 6^7 = 3^{4-2-(-5)} \div 6^7 =$
$= 3^7 \div 6^7 =$
$= \left(\frac{3}{6}\right)^7 =$
$= \frac{1}{128}$

**b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \div 2026^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \div 1 =$
$= \left(\frac{3}{2}\right)^5 \div 1 =$
$= \frac{243}{32}$

**c)** $((-4)^2)^{-3} \times (-4)^5 \div (-4) = (-4)^{-6} \times (-4)^5 \div (-4) =$
$= (-4)^{-1} \div (-4) =$
$= (-4)^{-2} =$
$= \frac{1}{16}$

**d)** $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} \div \left(\frac{6}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \div \left(\frac{6}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 =$
$= \left(\frac{6}{5}\right)^6 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 =$
$= \left(\frac{6}{5}\right)^6 \times \left(\frac{6}{5}\right)^{-4} =$
$= \left(\frac{6}{5}\right)^2 =$
$= \frac{36}{25}$

**e)** $\frac{(2^3 \times 4^{-2})^2}{(8^{-1})^3} = \frac{(2^3)^2 \times (4^{-2})^2}{8^{-3}} = \frac{2^6 \times 4^{-4}}{8^{-3}} =$
$= \frac{2^6 \times (2^2)^{-4}}{(2^3)^{-3}} =$
$= \frac{2^6 \times 2^{-8}}{2^{-9}} =$
$= \frac{2^{-2}}{2^{-9}} =$
$= 2^7 =$
$= 128$

**f)** $\left[\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^{-1} =$
$= \left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right]^{-1} =$
$= \frac{3}{7}$

**g)** $\frac{(-2)^5 \times (-2)^{-3}}{(-2)^{-4} \div \left(\frac{4}{5}\right)^0} = \frac{(-2)^2}{(-2)^{-4} \div 1} = (-2)^6 = 64$

**2.**

**a)** $\sqrt{4^3} - \sqrt[3]{-8} = \sqrt{64} - (-2) = 8 + 2 = 10$

**b)** $\sqrt{2^0} + \sqrt{(-7)^2} = 1 + \sqrt{49} = 1 + 7 = 8$

**3.**

**a)** $25\,000(1 + 0{,}02n)$

**b)** $25\,000(1 + 0{,}02)^n$

**c)** $25\,000\left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12n}$

## Capítulo 1 – Função exponencial

## Tarefa – Os fungos – página 10

**a)**

| $t$ (tempo decorrido, em dias) | $p$ (número, em milhares, de fungos por cm³ de água) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |

**b)** Segundo o modelo definido pela função afim, $P(t) = 2t$, a variação sofrida em cada intervalo de um dia seria sempre a mesma (2 milhares). No entanto, não é isso que acontece – quanto maior é a população de fungos, maior é o aumento por unidade de tempo. O aumento da população de fungos não se verifica a uma taxa constante; o que é constante em cada um destes períodos é a variação relativa: se no primeiro dia a população duplicou, o mesmo acontece nos dias seguintes, isto é, $P(t + 1) = 2 \times P(t)$. De um modo geral, podemos expressar o número, em milhares, de fungos, por cm³ de água, ao fim de $t$ dias, por $P(t) = 1 \times 2^t$.

**c)** **i.** Às 21 horas do dia 2 de setembro de 2020 correspondem a $t = 1{,}5$.
Assim, $P(1{,}5) = 2^{1{,}5} \approx 2{,}828$ milhares.

**ii.** Às 15 horas do dia 3 de setembro de 2020 correspondem a $t = 2{,}25$.
Logo, $P(2{,}25) = 2^{2{,}25} \approx 4{,}757$ milhares.

**iii.** Às 9 horas do dia 31 de agosto de 2020 correspondem a $t = -1$.
Assim, $P(-1) = 2^{-1} = 0{,}5$ milhares.

## Exercícios de margem – páginas 10 a 24

**1.**

**a)** $32^{\frac{2}{5}} + 64^{\frac{2}{3}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} + (2^6)^{\frac{2}{3}} =$
$= 2^2 + 2^4 =$
$= 4 + 16 =$
$= 20$

**b)** $16^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{49}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{7}{3}\right)^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$
$= 2^6 - \frac{7}{3} =$
$= 64 - \frac{7}{3} =$
$= \frac{185}{3}$

c) $100^{-2,5} = (10^2)^{-\frac{5}{2}} = 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000}$

d) $\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\pi^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \pi^2$

e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} =$

$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} =$

$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$

$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{25} =$

$= \frac{8}{75}$

**2.**

a) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

b) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $\left(x^{-\frac{7}{8}}\right)^{-\frac{8}{7}} = x$

d) $\left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{5}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

e) $(27x^6)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} (x^6)^{\frac{2}{3}} = 3^2 x^4 = 9x^4$

f) $(8x^2 y^3)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} (x^2)^{\frac{1}{3}} (y^3)^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{2}{3}} y$

g) $\left(\frac{x^2 y^3}{x^0}\right)^{\frac{1}{6}} = (x^2)^{\frac{1}{6}} (y^3)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$

h) $(z^{2012})^{\frac{1}{1006}} \times (x^{10} + y^{20})^0 = z^2 \times 1 = z^2$

**3.**

a) $4^{-\pi} \times 24^{\pi} \div 6^{\pi} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\pi} \times 24^{\pi} \div 6^{\pi} =$

$= \left(\frac{24}{4}\right)^{\pi} \div 6^{\pi} =$

$= 6^{\pi} \div 6^{\pi} =$

$= 1$

b) $(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 6^2 = 36$

c) $\frac{e^{\sqrt{3}+1}}{e^{\sqrt{3}}} - e^0 = e^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} - 1 = e - 1$

**4.**

a) $5^x = \frac{5^{x+1}}{5} = \frac{15}{5} = 3$

b) $5^{3x} = (5^x)^3 = 3^3 = 27$

c) $25^x = (5^2)^x = (5^x)^2 = 3^2 = 9$

d) $5^{\frac{x}{3}} = (5^x)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

e) $5^{-x+2} = (5^x)^{-1} \times 5^2 = 3^{-1} \times 25 = \frac{25}{3}$

f) $5^{-\frac{x}{2}+1} = (5x)^{-\frac{1}{2}} \times 5 = 3^{-\frac{1}{2}} \times 5 = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

**5.** Opção (B)

$f(k + x) = 100 \times f(x) \Leftrightarrow 10^{k+x} = 10^2 \times 10^x$

$\Leftrightarrow 10^{k+x} = 10^{2+x}$

$\Leftrightarrow k + x = 2 + x$

$\Leftrightarrow k = 2$

**6.**

a) $f(0) = 2 \Leftrightarrow b \times a^0 = 2 \Leftrightarrow b = 2$

$f$ é crescente se $a > 1$.

b) $f(0) = 3 \Leftrightarrow b \times a^0 = 3 \Leftrightarrow b = 3$

$f$ é decrescente se $0 < a < 1$.

**7.** $\begin{cases} 12 = b \times a^2 \\ 24 = b \times a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 12 \\ a \times a^2 b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} _____ \\ 12a = 24 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 b = 12 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$

**8.**

a) $E(0) = 3{,}97e^{-0{,}9 \times 0} = 3{,}97 \times 1 = 3{,}97$ mg/mℓ

b) $\text{t.m.v.}_{[1,\,2]} = \frac{C(2) - C(1)}{2 - 1} = \frac{3{,}97e^{-0{,}9 \times 2} - 3{,}97e^{-0{,}9}}{1}$

$\approx -0{,}96$

O resultado obtido (–0,96) significa que, durante a segunda hora, a concentração de medicamento no sangue decresceu a uma taxa média de, aproximadamente, 0,96 mg/mℓ por hora.

**9.**

a) $Q(0) = Q_0 e^{k \times 0} \Leftrightarrow 2000 = Q_0 e^0$

$\Leftrightarrow 2000 = Q_0 \times 1$

$\Leftrightarrow Q_0 = 2000$

b) $Q(t) = 2000e^{kt}$

Pretende-se determinar $Q(60)$.

Sabe-se que $Q(20) = 6000$, ou seja,

$2000e^{k \times 20} = 6000 \Leftrightarrow e^{20k} = 3$

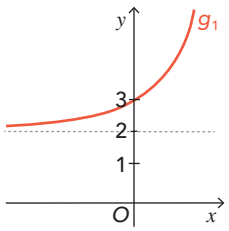
Logo, $Q(60) = 2000e^{k \times 60} = 2000 \times \underbrace{(e^{20k})^3}_{3}$

$= 2000 \times 3^3 = 54\,000$

Assim, após 1 hora existirão 54 000 bactérias.

**10.**

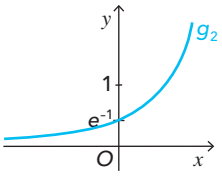
a)




$g_1(x) = g(x) + 2 = e^x + 2$

O gráfico de $g_1$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma translação associada ao vetor (0, 2).

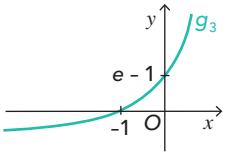
**b)**




$g_2(x) = g(x - 1) = e^{x-1}$

O gráfico de $g_2$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma translação associada ao vetor (1, 0).

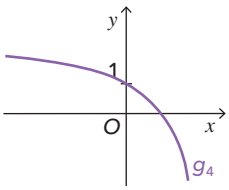
**c)**




$g_3(x) = g(x + 1) - 1 = e^{x+1} - 1$

O gráfico de $g_3$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma translação associada ao vetor (–1, –1).

**d)**




$g_4(x) = -g(x) + 2 = -e^x + 2$

O gráfico de $g_4$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma simetria relativamente a $Ox$, seguida de uma translação associada ao vetor (0, 2).

**11.**

**a)** $t = 0$, $T(0) = 20 + 60\,e^{-0{,}11 \times 0} = 20 + 60 \times e^0 = 80$

O café é-nos entregue a 80 °C.

**b)** $T = 60 \Leftrightarrow 20 + 60\,e^{-0{,}11t} = 60$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}11t} = \frac{40}{60}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}11t = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}11}$$

$t \approx 3{,}686$

3,686 min = 3 min + 0,686 min

$0{,}686 \times 60 \approx 41$ s

Quem gosta de beber o café a 60 °C, terá de esperar, aproximadamente, 3 minutos e 41 segundos.

**c)** $\text{t.m.v.}_{[0,\,2]} = \dfrac{T(2) - T(0)}{2 - 0} = \dfrac{20 + 60\,e^{-0{,}11 \times 2} - 80}{2} =$

$\approx -5{,}92$

$\text{t.m.v.}_{[2,\,4]} = \dfrac{T(4) - T(2)}{4 - 2} =$

$= \dfrac{20 + 60\,e^{-0{,}11 \times 4} - (20 + 60\,e^{-0{,}11 \times 2})}{2}$

$\approx -4{,}75$

Isto significa que, nos dois primeiros minutos, o café arrefeceu a uma taxa média de, aproximadamente, 5,92 °C por minuto, enquanto que, nos dois minutos seguintes, o café arrefeceu a uma taxa média de, aproximadamente, 4,75 °C por minuto.

Conclui-se, assim, que o arrefecimento do café foi mais acentuado nos dois primeiros minutos.

**d)** Se deixarmos o café arrefecer durante muito tempo, a temperatura do mesmo tenderá a aproximar-se da temperatura ambiente – neste caso, 20 °C.

**12.**

**a)** $P(t) = P_0\,e^{kt}$

1960 ⟶ $t = 0$

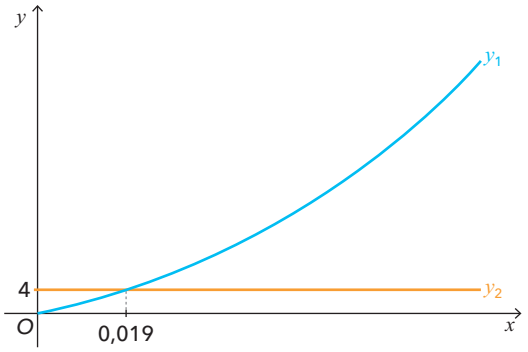
1975 ⟶ $t = 15$

ou seja, $P(0) = 3$ e $P(15) = 4$.

- $P(0) = P_0\,e^{k \times 0} \Leftrightarrow 3 = P_0\,e^0 \Leftrightarrow P_0 = 3$
- Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 3e^{15x}$

$y_2 = 4$




Assim, $k = 0{,}019$

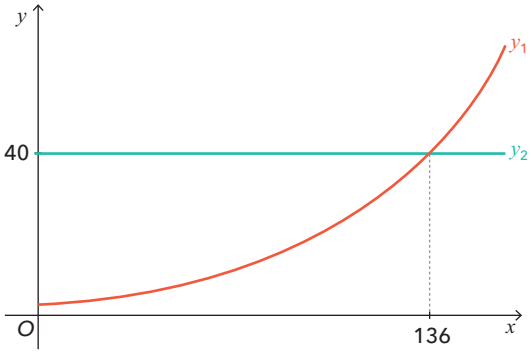
**b)** Sendo $P_0 = 3$ e $k = 0{,}019$, $P(t) = 3e^{0{,}019t}$.

Pretende-se determinar $t$ tal que $P(t) = 40$.

Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 3e^{0{,}019x}$

$y_2 = 40$




$t \approx 136$ e 1960 + 136 = 2096

Assim, de acordo com este modelo, a terra atingirá a sua capacidade máxima em 2096.

**13.** $P(t) = \dfrac{40}{1 + C\,e^{-kt}}$

1960 ⟶ $t = 0$

1975 ⟶ $t = 15$

ou seja, $P(0) = 3$ e $P(15) = 4$.

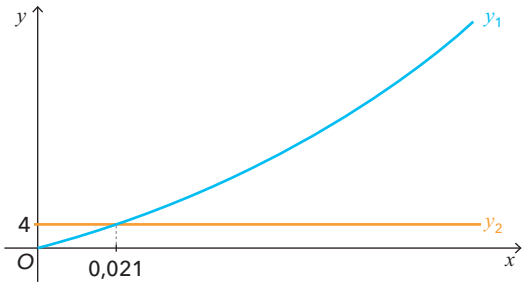
- $P(0) = \dfrac{40}{1 + C\,e^{-k \times 0}} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{40}{1 + C\,e^0} \Leftrightarrow 3 + 3C = 40$

$$\Leftrightarrow C = \frac{37}{3}$$

• Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = \dfrac{40}{1 + \frac{37}{3}e^{-15x}}$

$y_2 = 4$



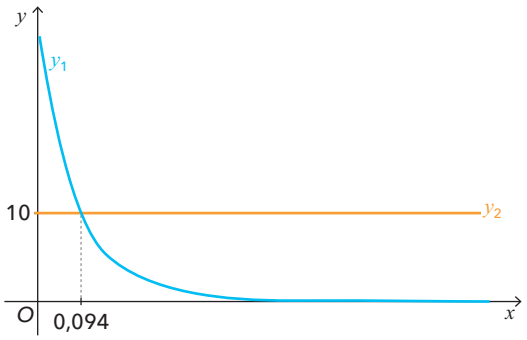

Assim, $k = 0{,}021$.

**14.**

**a)** Sabe-se que $Q(11{,}7) = 10$, isto é, $30\,e^{-k \times 11{,}7} = 10$.
Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 30\,e^{-11{,}7\,x}$

$y_2 = 10$

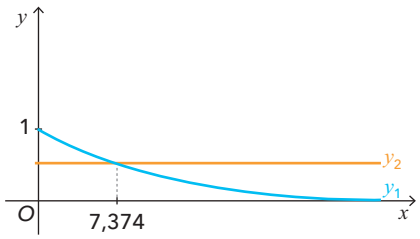



Assim, $k = 0{,}094$.

**b)** Sendo $A = 30$ e $k = 0{,}094$, tem-se $Q(t) = 30\,e^{-0{,}094t}$.
Pretende-se determinar $t$ tal que $Q(t) = 15$, ou, de forma equivalente, $e^{-0{,}094t} = \dfrac{15}{30}$, isto é, $e^{-0{,}094t} = \dfrac{1}{2}$.
Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = e^{-0{,}094x}$

$y_2 = \dfrac{1}{2}$




Assim, a semivida desta substância é de, aproximadamente, 7,374 dias.

**c)** $\dfrac{Q(t+1)}{Q(t)} = \dfrac{A\,e^{-0{,}094 \times (t+1)}}{A\,e^{-0{,}094t}} = e^{-0{,}094t - 0{,}094 - (-0{,}094t)} =$
$= e^{-0{,}094} \approx 0{,}9$
$Q(t+1) = 0{,}9\,Q(t)$
$Q(t+1) = (1 - 0{,}1) \times Q(t)$
$Q(t+1) = Q(t) - 0{,}1\,Q(t)$
Por dia, a quantidade $Q$ de massa de einstéinio-253 diminui 10% (aproximadamente).

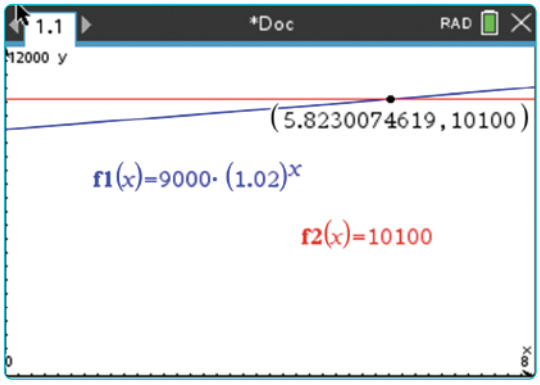
**15.** Sabemos que dado um capital inicial $C_i$, e aplicando-se juros compostos à taxa anual de $r$, tem-se que o capital disponível ao fim de $n$ anos é igual a $C_i(1 + r)^n$.

**a)** $C_i = 9000$, $r = 0{,}02$, $n = 1$ ano
$9000(1 + 0{,}02) = 9000 \times 1{,}02 = 9180$ €
Assim, o capital acumulado ao final de um ano é 9180 €.

**b)** $9000(1 + 0{,}02)^{10} = 9000 \times 1{,}02^{10} \approx 10\,970{,}95$€
O capital acumulado ao fim de dez anos é 10 970,95 €.

**c)** $C_n = 9000(1 + 0{,}02)^n = 9000 \times 1{,}02^n$

**d)** $C_n > 9000 \Leftrightarrow 8500 \times 1{,}02^n > 10\,100$
Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos as seguintes partes das representações gráficas das funções definidas por $f_1(x) = 9000 \times 1{,}02^x$ e $f_2(x) = 10\,100$.

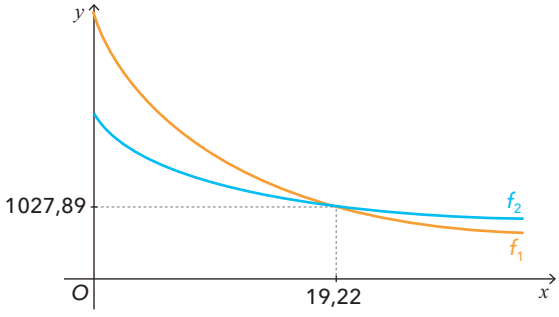



Ao fim de 6 anos, é possível obter um capital acumulado superior a 10 100 euros.

**16.** Pretendemos determinar o valor $n_1$ tal que $P(2n_1) = P(n_1) - 370$, com $8 \leq n_1 \leq 20$.
Usando $x$ como variável independente:

$f_1(x) = \dfrac{180\,000 \times 0{,}0025 \times (1{,}0025)^{12 \times 2x}}{(1{,}0025)^{12 \times 2x} - 1}$

$f_2(x) = \dfrac{180\,000 \times 0{,}0025 \times (1{,}0025)^{12x}}{(1{,}0025)^{12x} - 1} - 370$




$P(19{,}22) = \dfrac{180\,000 \times 0{,}0025 \times (1{,}0025)^{12 \times 19{,}22}}{(1{,}0025)^{12 \times 19{,}22} - 1} \approx 1027{,}89$

A prestação será de 1027,89 euros.

## Aprende fazendo (1) – páginas 25 a 27

**17.**

**a)** Ao fim de um ano: $2000\left(1+\frac{1,3}{100}\right)^1 = 2026$ euros

Ao fim de quatro anos: $2000\left(1+\frac{1,3}{100}\right)^4 \approx 2106$ euros

**b)** Opção (C)

Sabemos que dado um capital inicial $C_i$, e aplicando-se juros compostos à taxa anual de $r$, tem-se que o capital disponível ao fim de $n$ anos é igual a $C_i(1+r)^n$.

$C_i = 2000$, $r = 0,013$

$2000(1+0,013)^n = 2000 \times 1,013^n$

**18.**

**a)** $h(5) = 585 + 15e^{-16\times 5} - 6 \times 5 \approx 555$

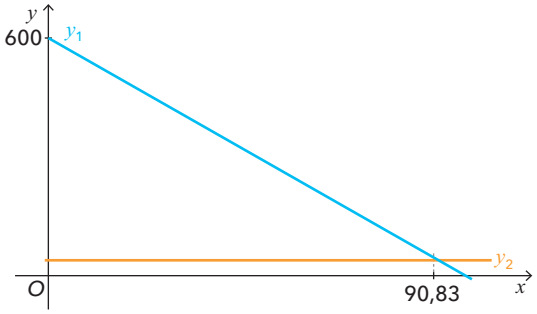
Após 5 segundos da abertura do paraquedas, o paraquedista encontrava-se a 555 metros de altitude.

**b)** Pretende-se determinar $t$ tal que $h(t) = 40$.

Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 585 + 15e^{-1,6x} - 6x$

$y_2 = 40$




Assim, $x \approx 90,83$, ou seja, 91 segundos, isto é, o paraquedista atingiu uma altitude de 40 metros após, aproximadamente, 1 min e 31 segundos.

**19.**

**a)** $C_n = 10\,000 \times \left(1+\frac{0,75}{100}\right)^n \Leftrightarrow C_n = 10\,000 \times 1,0075^n$

**b)** $C_1 = 10\,000 \times 1,0075^1 = 10\,075$ euros

Juros pagos mensalmente:

$10\,000 \times \left(1+\frac{0,75}{100\times 12}\right)^{12} \approx 10\,075,26$ euros

O capital acumulado seria 0,26 euros superior à opção descrita inicialmente.

**20.** Opção (C)

Se $y$ é a quantidade após $t$ anos, então após 5 anos há $y = y_0 \times 0,88^5 \approx 0,5277\, y_0$, ou seja, há, aproximadamente, 53% da quantidade inicial.

**21.**

**a)** $D(0) = 12e^{-0,07\times 0} = 12$ e $D(12) = 12e^{-0,07\times 2} \approx 10,432$

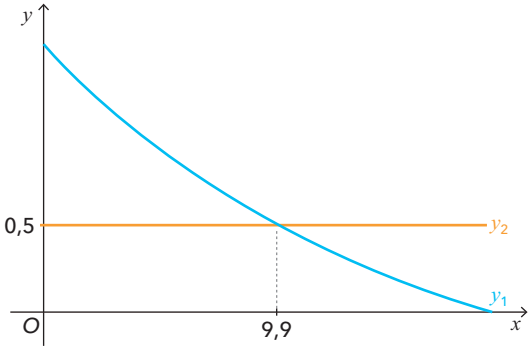
A densidade populacional no centro desta cidade é 12 milhares por km$^2$, e a 2 km do centro a densidade populacional é, aproximadamente, 10,432 milhares de habitantes por km$^2$.

**b)** Pretende-se determinar $x$ tal que $D(x) = \frac{12}{2}$, isto é, $12e^{-0,07x} = 6$, ou, de forma equivalente, $e^{-0,07x} = \frac{1}{2}$.

Recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = e^{-0,07x}$

$y_2 = \frac{1}{2}$




Assim, $x = 9,9$ quilómetros.

**c)** $\frac{D(x+1)}{D(x)} = \frac{12e^{-0,07(x+1)}}{12e^{-0,07x}} =$

$= \frac{e^{-0,07x-0,07}}{e^{-0,07x}} =$

$= e^{-0,07x-0,07+0,07x}$

$= e^{-0,07}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

**22.** Opção (A)

$b^{u+3v} = b^u \times b^{3v} = b^u \times (b^v)^3 =$

$= 2 \times 5^3 =$

$= 250$

$\frac{1}{b^{-2u}} = b^{2u} = (b^u)^2 = 2^2 = 4$

**23.**

**a)** $t = 0$, $p(0) = 0,89(0,01 + 0,99 \times 0,85^0) = 0,89$

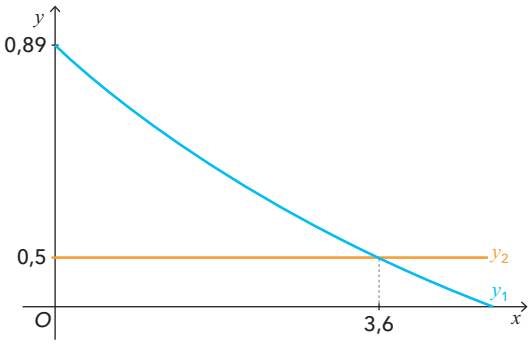
Segundo este modelo, a probabilidade de um indivíduo recordar a sequência imediatamente após ter sido mostrada é 89%.

**b)** Pretende-se determinar $t$ tal que $p(t) = 0,5$.

Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 0,89(0,01 + 0,99 \times 0,85^x)$

$y_2 = 0,5$

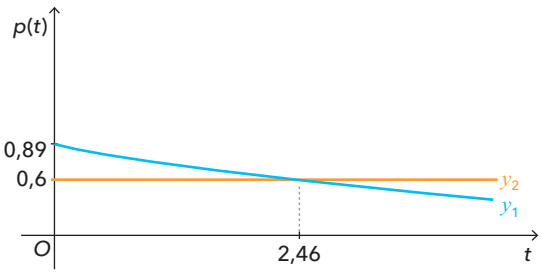



Assim, $x = 3,6$ segundos.

**c)** $p(t) > 0{,}6$

$y_1 = 0{,}89(0{,}01 + 0{,}99 \times 0{,}85^t)$

$y_2 = 0{,}6$




A probabilidade é superior a 60% durante, aproximadamente, 2,46 segundos.

**24.**

**a)** $q(t) = 15{,}3 \times 0{,}886^t$

2012 + 1 = 2013 anos corresponde a 2,013 milhares de anos.

$q(2{,}013) = 15{,}3 \times 0{,}886^{2{,}013} \approx 12$ (dmg)

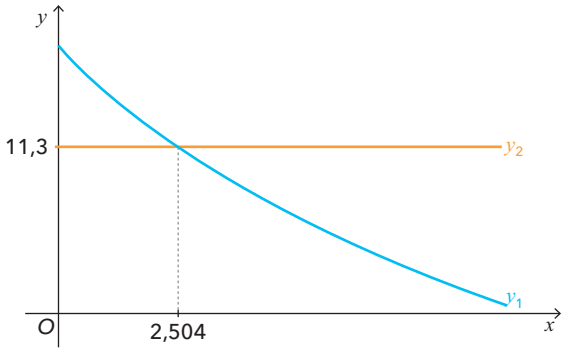
Deverá ser encontrada 12 dmg, aproximadamente.

**b)** Pretende-se determinar $t$ tal que $q(t) = 11{,}3$.

Utilizando $x$ como variável independente e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 15{,}3 \times 0{,}886^x$

$y_2 = 11{,}3$




Assim, $x = 2{,}504$, ou seja, a idade das sepulturas era, aproximadamente, 2504 anos.

**25.**

**a)** $\dfrac{C(x+1)}{C(x)} = \dfrac{150\,000\left(\frac{27}{25}\right)^{x+1}}{150\,000\left(\frac{27}{25}\right)^{x}} =$

$= \left(\dfrac{27}{25}\right)^{x+1-x} = \dfrac{27}{25} = 1{,}08$

A valorização do andar é 8% por ano.

**b)** O valor inicial do apartamento é:

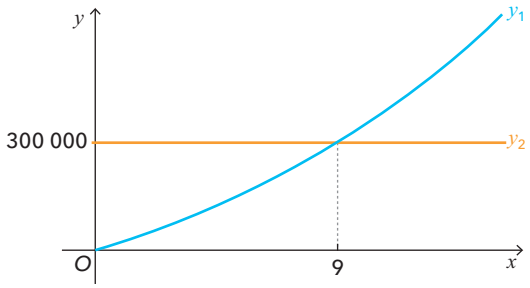
$C(0) = 150\,000\left(\dfrac{27}{25}\right)^0 = 150\,000$

Assim, pretende-se determinar $t$ tal que $C(t) = 300\,000$.

Utilizando $x$ como variável independente e recorrendo à calculadora numa janela de visualização adequada, obtemos:

$y_1 = 150\,000\left(\dfrac{27}{25}\right)^x$

$y_2 = 300\,000$




$x = 9$, ou seja, o Pedro terá de esperar 9 anos para que o apartamento duplique o seu valor inicial.

## Capítulo 2 – Função inversa

### Tarefa – O número desconhecido – página 28

**a)** $4x - 2 = 10 \longrightarrow 4x = 12 \longrightarrow x = 3$

A Laura pensou no número 3.

**b)**

| Número pensado | Resultado do jogo da Laura ($4x - 2$) | Resultado do jogo do Diogo $\left(\frac{L+2}{4}\right)$ |
|---|---|---|
| –2 | –10 | –2 |
| 0 | –2 | 0 |
| 2 | 6 | 2 |
| 5 | 18 | 5 |

**c)** O jogo do Diogo é a operação inversa do jogo da Laura, ou seja, enquanto a Laura aplica $f(x) = 4x - 2$, o Diogo aplica $g(L) = \dfrac{L+2}{4}$. Cada jogo "anula" o efeito do outro.

**d)** $f(x) = 4x - 2$

$g(x) = \dfrac{x+2}{4}$

### Exercícios de margem – páginas 29 a 37

**26.**

**a)** Como $A_{quadrado} = l^2$, então $l = \sqrt{36} = 6$ cm.

**b)** Como $V_{cubo} = a^3$, então $a = \sqrt[3]{8} = 2$ cm.

**c)** $\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = 9$

Como $r > 0$, então $r = \sqrt{9}$, ou seja, $r = 3$ cm.

**27.**

**a)** $x^5 = -32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-32} \Leftrightarrow x = -2$

C.S. = {–2}

**b)** $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$

C.S. = {–2, 2}

**c)** $x^{10} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[10]{0} \Leftrightarrow x = 0$

C.S. = {0}

**28.**

**a)** $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

**b)** $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

**c)** $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

**d)** $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 9$

**e)** $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 8$

**f)** $16^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{16^7} = \sqrt[4]{(2^4)^7} = \sqrt[4]{(2^7)^4} = 2^7 = 128$

**29.**

**a)** $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

**b)** $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

**c)** $81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$

**d)** $64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^6)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{12}}} = \frac{1}{2^{\frac{12}{3}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

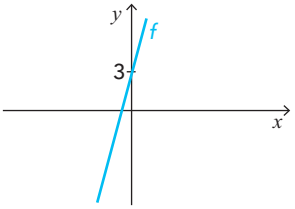
**30.** Opção (B)

Das funções apresentadas, a única que não é injetiva, isto é, que a objetos diferentes pode corresponder imagens iguais, é a que se encontra na opção (B).

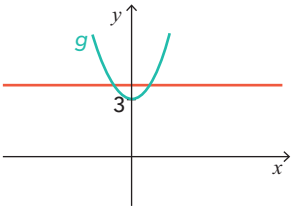
Por exemplo, $3 \neq -3$ e $3^2 = (-3)^2$.

**31.**

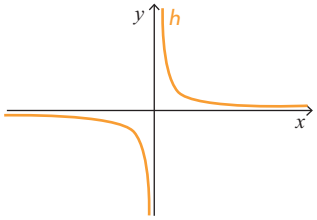
**a)** *f* é injetiva.



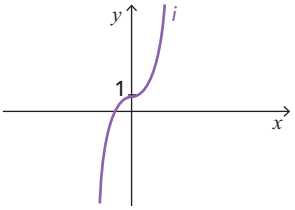

**b)** *g* não é injetiva.




**c)** *h* é injetiva.

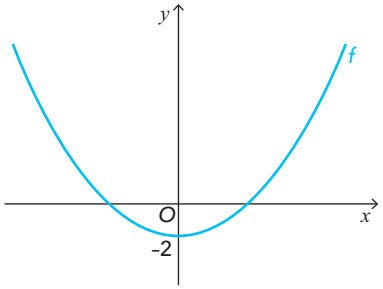



**d)** *i* é injetiva.



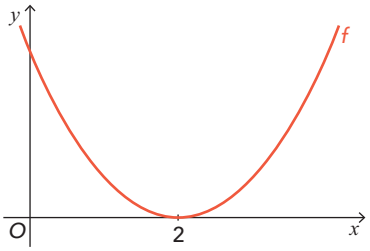

**32.** Observando as respetivas representações gráficas, concluímos que:

**a)** $f(x) = x^2 - 2$



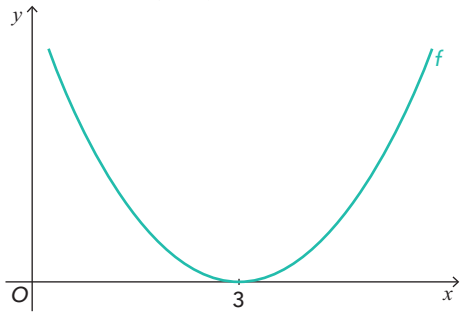

$[0, +\infty[$, ou seja, $k = 0$.

**b)** $f(x) = (x - 2)^2$



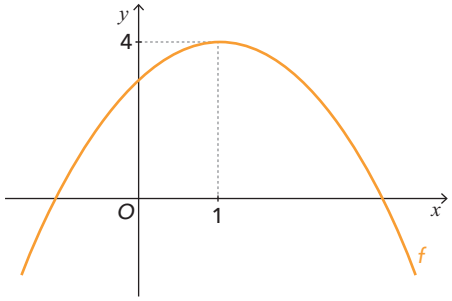

$[2, +\infty[$, ou seja, $k = 2$.

**c)** $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$




$[3, +\infty[$, ou seja, $k = 3$.

**d)** $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$




$[1, +\infty[$, ou seja, $k = 1$.

**33.**

**a)** **i.** $f(5) = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

**ii.** $f^{-1}(5) = 4$, pois $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$

**iii.** $f^{-1}(-4) = -\frac{1}{2}$, pois $2x - 3 = -4 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

**iv.** $f^{-1}(0) = \frac{3}{2}$, pois $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

**b)** $2x - 3 = y \Leftrightarrow 2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y + 3}{2}$. Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$.

**34.**

**a)** $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$4x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{4}$

Assim, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$.

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

**b)** $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$-x + 2 = y \Leftrightarrow x = 2 - y$

Assim, $f^{-1}(x) = -x + 2$.

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

**35.** Opção (B)

Sabemos que os gráficos cartesianos das funções $f$ e $f^{-1}$ são simétricos em relação à reta de equação $y = x$. Das opções apresentadas, tal só se verifica na opção (B).

**36.**

**a)** **i.** $f(2) = (2-1)^2 + 2 = 3$

**ii.** $(x-1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

**iii.** $(x-1)^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \vee x - 1 = -1$

Como o domínio da função $f$ é $[1, +\infty[$, então só podemos ter $x - 1 = 1$, e, assim, $x = 2$.

**b)** Como a função $f$ tem domínio $[1, +\infty[$ e contradomínio $[2, +\infty[$, então $D_{f^{-1}} = [2, +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = [1, +\infty[$.

$(x-1)^2 + 2 = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y - 2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y-2}$

Como $x \geq 1$, $x = 1 + \sqrt{y-2}$.

Assim, $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$.

**37.** Como a função $f$ tem domínio $[-2, +\infty[$ e contradomínio $[-1, +\infty[$, então $D_{f^{-1}} = [-1, +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = [-2, +\infty[$.

Comecemos por transformar a expressão $x^2 + 4x + 3$ numa expressão do tipo $(x-h)^2 + k$, e depois resolver, em ordem a $x$, a equação $y = (x-h)^2 + k$.

$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 4 + 3 =$

$= (x+2)^2 - 1$

Assim:

$(x+2)^2 - 1 = y \Leftrightarrow (x+2)^2 = y + 1 \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{y+1}$

Como $x \geq -2$, $x = -2 + \sqrt{y+1}$.

Assim, $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x+1}$.

**38.**

**a)** **i.** $f(2) = (2-2)^3 + 1 = 1$

**ii.** $(x-2)^3 + 1 = 2 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$

**iii.** $(x-2)^3 + 1 = 9 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 8 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{8}$

$\Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$

**b)** Como a função $f$ tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, então $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ e $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

$(x-2)^3 + 1 = y \Leftrightarrow (x-2)^3 = y - 1 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y-1}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y-1}$

Assim, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$.

**39.** Como a função $f$ tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e contradomínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, então $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ e $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$\frac{x+2}{x-2} = y \Leftrightarrow x + 2 = y(x-2) \Leftrightarrow x + 2 = yx - 2y$

$\Leftrightarrow x - yx = -2y - 2$

$\Leftrightarrow x(1-y) = -2y - 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2y-2}{1-y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2y+2}{y-1}$

Assim, $f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$.

## Aprende fazendo (2) – páginas 38 e 39

**40.** Opção (C)

$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{9}{12}+\frac{10}{12}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}}$

**41.** Opção (C)

$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[2\times3]{2^{1\times3}} \times \sqrt[3\times2]{5^{1\times2}} = \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{25} =$

$= \sqrt[6]{200}$

**42.**

**a)** Opção (B)

$F = \frac{9}{5}C + 32$, onde $F = 356$.

Assim, $356 = \frac{9}{5}C + 32$, logo:

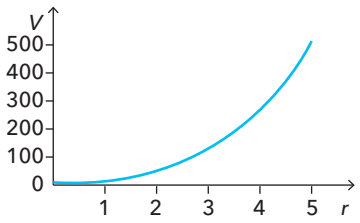
$\frac{9}{5}C = 356 - 32 \Leftrightarrow C = 324 \times \frac{5}{9} \Leftrightarrow C = 180$

**b)** Opção (C)

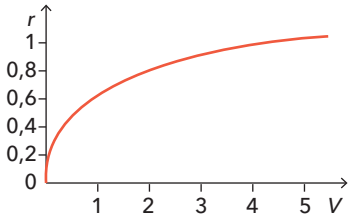
$F = \frac{9}{5}C + 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5}C = F - 32 \Leftrightarrow C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$

**43.**

**a)**




**b)** $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3V}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$




**44.** Opção (D)

$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}} = \left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{12}}$

**45.**

**a)** $f(x) = -3x + 4$, $D_f = \mathbb{R}$

$D'_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$

$-3x + 4 = y \Leftrightarrow -3x = y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{-3}$

Assim, $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{-3}$.

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

**b)** $g(x) = \frac{x}{2x-1}$, $D_g = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D'_{g^{-1}} = D_g = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{x}{2x-1} = y \Leftrightarrow x = 2xy - y \Leftrightarrow x - 2xy = -y$

$\Leftrightarrow x(1-2y) = -y$

$\Leftrightarrow x = \frac{-y}{1-2y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{y}{2y-1}$

Assim, $g^{-1}(x) = \frac{x}{2x-1}$.

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

**c)** $h(x) = x^2 + 5$, $D_h = \mathbb{R}^-$

$D'_{h^{-1}} = D_h = \mathbb{R}^-$

$x^2 + 5 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-5}$ e, como $x \in \mathbb{R}^-$, vem que $x = -\sqrt{y-5}$.

Assim, $h^{-1}(x) = -\sqrt{x-5}$.

$D_{h^{-1}} = ]5, +\infty[$

**d)** $j(x) = \sqrt{x} + 1$, $D_j = \mathbb{R}^+$

$D'_{j^{-1}} = D_j = \mathbb{R}^+$

$\sqrt{x} + 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y - 1$

$x = (y-1)^2$, com $y - 1 > 0$, isto é, com $y > 1$.

Assim, $j^{-1}(x) = (x-1)^2$, com $x > 1$.

$D_{j^{-1}} = ]1, +\infty[$

**46.** Opção (D)

Sabemos que os gráficos cartesianos das funções $f$ e $f^{-1}$ são simétricos em relação à reta de equação $y = x$.

Das opções apresentadas, tal só se verifica na opção (D).

**47.** Opção (C)

Seja $V_{\text{cubo }A} = a^3$ e $V_{\text{cubo }B} = b^3$.

Sabe-se que $V_{\text{cubo }B} = 2 \times V_{\text{cubo }A}$, logo:

$b^3 = 2 \times a^3 \Leftrightarrow \frac{b^3}{a^3} = 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$

**48.** Como a função $f$ tem domínio $[3, +\infty[$ e contradomínio $[1, +\infty[$, então $D_{f^{-1}} = [1, +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = [3, +\infty[$.

Comecemos por transformar a expressão $x^2 - 6x + 10$ numa expressão do tipo $(x-h)^2 + k$, e depois resolver, em ordem a $x$, a equação $y = (x-h)^2 + k$.

$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 10 =$

$= (x-3)^2 - 9 + 10 =$

$= (x-3)^2 + 1$

Assim:

$(x-3)^2 + 1 = y \Leftrightarrow (x-3)^2 = y - 1$

$\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{y-1}$

$\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{y-1}$

Como $x \geq 3$, $x = 3 + \sqrt{y-1}$.

Assim, $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-1}$.

## Capítulo 3 – Função logarítmica

### Tarefa – As dobragens até à Lua – página 40

**1ª etapa**

| Número de dobras | Espessura (em mm) |
|---|---|
| 0 | 0,1 |
| 1 | 0,2 |
| 2 | 0,4 |
| 3 | 0,8 |
| 4 | 1,6 |
| 5 | 3,2 |

**2ª etapa**

$E(n) = 0{,}1 \times 2^n$

**3ª etapa**

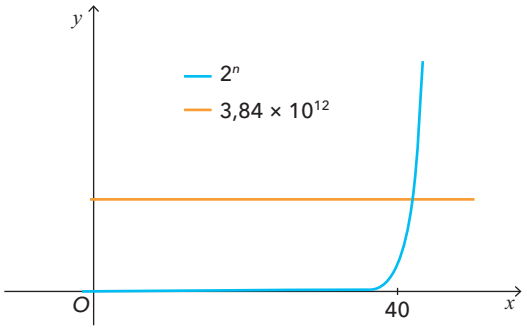
384 000 km = 384 000 × 1 000 000 mm =

= 384 000 000 000 mm = $3{,}84 \times 10^{11}$ mm

**4ª etapa**

Pretende-se determinar $n$ tal que $0{,}1 \times 2^n = 3{,}84 \times 10^{11}$, o que é equivalente a $2^n = 3{,}84 \times 10^{12}$.

**5ª etapa**




$n = 41{,}804$

Será, então, necessário dobrar a folha 42 vezes para que a sua espessura atinja os 384 000 km.

**6ª etapa**

Colocando $\log_2(3{,}84 \times 10^{12})$ obtém-se, aproximadamente, 41,804.

**7ª etapa**

O valor $n = 41{,}804$ é o valor aproximado de dobras que teriam de ser feitas para responder à questão.

Como $n$ é a solução da equação $2^n = 3{,}84 \times 10^{12}$ e $n = \log_2(3{,}84 \times 10^{12})$, conclui-se que $n$ é o valor a que é necessário elevar a base 2 para se obter $3{,}84 \times 10^{12}$.

**8ª etapa** Ao cuidado do aluno.

### Exercícios de margem – páginas 42 a 56

**49.**

**a)** $\log_2 64 = 6$, pois $2^6 = 64$.

**b)** $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, pois $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

**c)** $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, pois $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

**d)** $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$, pois $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

**e)** $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$.

**f)** $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, pois $(\sqrt{5})^4 = 25$.

**g)** $\log_{2012} 1 = 0$, pois $2012^0 = 1$.

**h)** $\log_{2012} 2012 = 1$, pois $2012^1 = 2012$.

**i)** $\log_{12}(12^{10}) = 10$, pois $12^{10} = 12^{10}$.

**j)** $3^{\log_3 81} = 81$

**50.**

**a)** $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
Logo, $x \in ]-1, +\infty[$.

**b)** $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
Logo, $x \in \mathbb{R}^+$.

**c)** $x^2 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 0$
Logo, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**d)** $x^2 + 1 > 0$ Condição universal em $\mathbb{R}$
Logo, $x \in \mathbb{R}$.

**e)** $2 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$
Logo, $x \in ]-\infty, 2[$.

**51.**

**a)** $3^{1+\log_3 x} = 3^1 \times 3^{\log_3 x} = 3x$

**b)** $4^{3\log_4 x} = 4^{\log_4(x^3)} = x^3$

**c)** $5^{6\log_5 x - 2\log_5 x} = 5^{4\log_5 x} = 5^{\log_5(x^4)} = x^4$

**d)** $\log_3(9^x) = \log_3(3^{2x}) = 2x$

**52.**

**a)** $13 = \log_2(2^{13}) = \log_2 8192$

**b)** $13 = \log_3(3^{13}) = \log_3 1\,594\,323$

**c)** $13 = \log_5(5^{13}) = \log_5 1\,220\,703\,125$

**d)** $13 = \log(10^{13}) = \log 10\,000\,000\,000\,000$

**e)** $13 = \ln(e^{13})$

**53.**

**a)** $13 = 2^{\log_2 13}$

**b)** $13 = 3^{\log_3 13}$

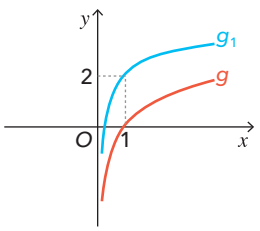
**c)** $13 = 5^{\log_5 13}$

**d)** $13 = 10^{\log 13}$

**e)** $13 = e^{\ln 13}$

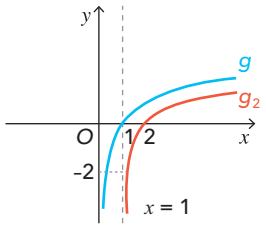
**54.**

**a)** **i.**



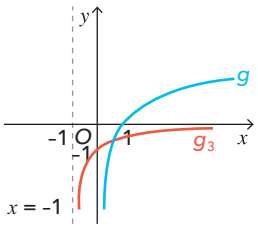

O gráfico de $g_1$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma translação associada ao vetor $(0, 2)$.

**ii.**



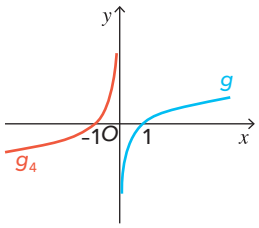

O gráfico de $g_2$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma translação associada ao vetor $(1, 0)$.

**iii.**




O gráfico de $g_3$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma translação associada ao vetor $(-1, 0)$, seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -1)$.

**iv.**




O gráfico de $g_4$ obtém-se a partir do gráfico de $g$ segundo uma simetria em relação a $Oy$, seguida de uma simetria em relação a $Ox$.

**b)** $D_{g_1} = \mathbb{R}^+$ $\quad D'_{g_1} = \mathbb{R}$
Equação da assíntota: $x = 0$
$D_{g_2} = ]1, +\infty[$ $\quad D'_{g_2} = \mathbb{R}$
Equação da assíntota: $x = 1$
$D_{g_3} = ]-1, +\infty[$ $\quad D'_{g_3} = \mathbb{R}$
Equação da assíntota: $x = -1$
$D_{g_4} = \mathbb{R}^-$ $\quad D'_{g_4} = \mathbb{R}$
Equação da assíntota: $x = 0$

**55.**

- Se o ponto $(0, 2)$ pertence ao gráfico de $f$, então $f(0) = 2$.
- Se o ponto $(1, -2)$ pertence ao gráfico de $f^{-1}$, então $f(-2) = 1$.

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(0 + b) = 2 \\ \log_a(-2 + b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 \\ -2 + b = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ b = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = a^2 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Mas $-1 \notin ]1, +\infty[$, logo $a = 2$ e $b = 4$.

**56.** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$f(7) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

Assim, $A(7, -3)$ e $B(0, -3)$.

Logo, $A_{[BAO]} = \frac{7 \times 3}{2} = \frac{21}{2}$ u.a.

**57.**

**a)** $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 \Leftrightarrow x = 16$

**b)** $\ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5$

**c)** $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

**d)** $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

**e)** $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

**f)** $\log x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 \Leftrightarrow x = 1000$

**g)** $4^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_4 3$

**h)** $10^x = 4 \Leftrightarrow x = \log 4$

**i)** $e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln 6$

**j)** $e^x = -2$

Condição impossível, logo não existe qualquer valor de $x$ que satisfaça a igualdade.

**58.**

**a)** $H(100) = 2^{21 - 0{,}2 \times 100} = 2^{21-20} = 2$ horas

**b)** $H(d) = 8 \Leftrightarrow 2^{21 - 0{,}2d} = 8$

$\Leftrightarrow 2^{21 - 0{,}2d} = 2^3$

$\Leftrightarrow 21 - 0{,}2d = 3$

$\Leftrightarrow 0{,}2d = 18$

$\Leftrightarrow d = 90$ decibéis

**59.** $\log(2\sqrt{10}) - \frac{1}{3}\log\left(\frac{8}{10}\right) - \log\left(\frac{3}{10}\right)^{-1} =$

$= \log 2 + \log\sqrt{10} - \frac{1}{3}(\log 8 - \log 10) + \log\left(\frac{3}{10}\right) =$

$= \log 2 + \frac{1}{2}\log 10 - \frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{3}\log 10 +$

$+ \log 3 - \log 10 =$

$= \log 2 - \frac{1}{3}\log(2^3) + \log 3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1\right)\log 10 =$

$= \log 2 - \frac{3}{3}\log 2 + \log 3 - \frac{1}{6} \times 1 =$

$= -\frac{1}{6} + \log 3$

**60.** **A.** Afirmação verdadeira. Por exemplo, $\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1$.

**B.** Afirmação falsa. Se $a > 0$ e $b < 0$, então $\frac{a}{b} < 0$ e $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ não existe.

**C.** Afirmação falsa. Se $a < 0$ e $b < 0$, então $\frac{a}{b} > 0$ e $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ existe.

**D.** Afirmação falsa. Por exemplo, se $k = -2$, $f(x) = \log(|-2|x) = \log(2x)$ tem domínio $\mathbb{R}^+$.

**E.** Afirmação falsa. Por exemplo, $2 > 0$ e $3 > 0$ e $\log 2 + \log 3 \neq \log 5$.

**F.** Afirmação falsa. Por exemplo, $2 > 0$ e $3 > 0$ e $\log 2 : \log 3 \neq \log\left(\frac{2}{3}\right)$.

**G.** Afirmação falsa. Se $a > 0$, $\log(\sqrt{a}) = \log(a^{0,5})$ e não $(\log a)^{0,5}$.

**61.**

**a)** $\log_2 12 + \log_2 20 - \log_2 15 =$

$= \log_2(4 \times 3) + \log_2(4 \times 5) - \log_2(3 \times 5) =$

$= \log_2 4 + \log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5 - \log_2 3 - \log_2 5 =$

$= 2 + 2 = 4$

**b)** $\frac{1}{2}\log_5 16 - \log_5\left(\frac{4}{5}\right) =$

$= \log_5\left(16^{\frac{1}{2}}\right) - \log_5 4 + \log_5 5 =$

$= \log_5 4 - \log_5 4 + 1 = 1$

**c)** $\ln 64 - 2\ln 4 + 5\ln 2 - \ln(2^7) =$

$= \ln(2^6) - 2\ln(2^2) + 5\ln 2 - 7\ln 2 =$

$= 6\ln 2 - 4\ln 2 - 2\ln 2 =$

$= 2\ln 2 - 2\ln 2 = 0$

**d)** $\log_3\left(\frac{27^{26} \times 3^{21} \times \sqrt{243}}{\sqrt[3]{81} \times 9^{50}}\right) =$

$= \log_3\left(\frac{3^{3 \times 26} \times 3^{21} \times 3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{4}{3}} \times 3^{2 \times 50}}\right) =$

$= \log_3\left(\frac{3^{99} \times 3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{4}{3}} \times 3^{100}}\right) =$

$= \log_3\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{4}{3}} \times 3}\right) =$

$= \log_3\left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{7}{3}}}\right) =$

$= \log_3\left(3^{\frac{1}{6}}\right) =$

$= \frac{1}{6}$

**62.**

**a)** $\ln 125 = \ln(5^3) = 3\ln 5$

**b)** $\ln\left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right) = \ln 25 - \ln\sqrt{5} =$

$= \ln(5^2) - \ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right) =$

$= 2\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 5 =$

$= \frac{3}{2}\ln 5$

**c)** $\ln 65 - 2\ln\sqrt{13} = \ln 65 - \ln 13 =$

$= \ln\left(\frac{65}{13}\right) = \ln 5$

**d)** $\ln\pi + \ln\left(\frac{\sqrt{125}}{\pi}\right) = \ln\left(\cancel{\pi} \times \frac{\sqrt{125}}{\cancel{\pi}}\right) =$

$= \ln(5^3)^{\frac{1}{2}} =$

$= \ln\left(5^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\ln 5$

**63.**

**a)** $\log_a(bc^3) = \log_a b + \log_a(c^3) =$
$= \log_a b + 3\log_a c = x + 3y$

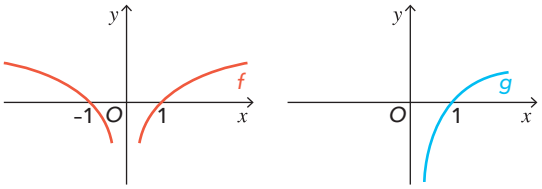
**b)** $\log_a\left(\frac{b^2}{c}\right) = \log_a(b^2) - \log_a c =$
$= 2\log_a b - \log_a c = 2x - y$

**c)** $\log_b(a\sqrt{b}) = \log_b a + \log_b(\sqrt{b}) =$
$= \frac{\log_a a}{\log_a b} + \log_b\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

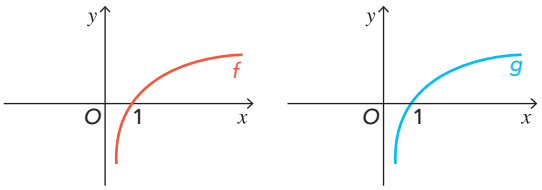
**64.** $2^x = 3^y$ e, como $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$, vem que:
$2^x = 3^y \Leftrightarrow 2^x = 3^{2-x}$
$\Leftrightarrow 2^x = \frac{3^2}{3^x}$
$\Leftrightarrow 2^x \times 3^x = 9$
$\Leftrightarrow 6^x = 9$
$\Leftrightarrow x = \log_6 9$
$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 9}{\ln 6}$

**65.**

**a)** $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$
Como $D_f \neq D_g$, então as funções $f$ e $g$ não são iguais.




**b)** $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} > 0\} = \mathbb{R}^+$
$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$
$g(x) = \frac{1}{2}\log x = \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log(\sqrt{x}) = f(x)$
Como $D_f = D_g$ e $g(x) = f(x)$, então as funções $f$ e $g$ são iguais.

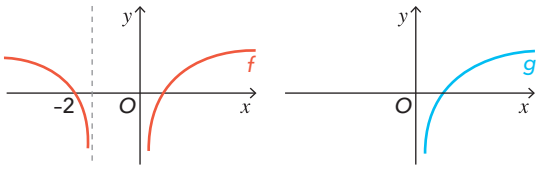



**c)** $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x(x + 2) > 0\} = ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | – | – | – | 0 | + |
| $x+2$ | – | 0 | + | + | + |
| $x(x+2)$ | + | 0 | – | 0 | + |

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x + 2 > 0\} = ]0, +\infty[$
Como $D_f \neq D_g$, então as funções $f$ e $g$ não são iguais.

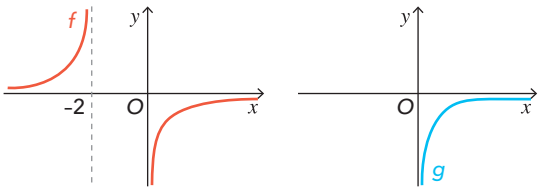



**d)** $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{x+2} > 0\right\} = ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | – | – | – | 0 | + |
| $x+2$ | – | 0 | + | + | + |
| $\frac{x}{x+2}$ | + | n.d. | – | 0 | + |

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x + 2 > 0\} = ]0, +\infty[$
Como $D_f \neq D_g$, então as funções $f$ e $g$ não são iguais.




**66.**

**a)** $D = \mathbb{R}^+$
$\log(x^5) + \log(\sqrt{x}) - \log(x^2) =$
$= 5\log x + \frac{1}{2}\log x - 2\log x \wedge x \in D =$
$= 3\log x + \frac{1}{2}\log x \wedge x \in D =$
$= \frac{7}{2}\log x \wedge x \in D$

**b)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x > 0 \wedge 4 + x > 0\} = ]-4, 4[$
$\ln(4 - x) + \ln(4 + x) =$
$= \ln[(4 - x)(4 + x)] \wedge x \in D =$
$= \ln(16 - x^2) \wedge x \in D$

**c)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 25x > 0\} = \mathbb{R}^+$
$4\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(25x) =$
$= \ln(2^4) + \ln(\sqrt{25x}) \wedge x \in D =$
$= \ln(16 \times 5 \times \sqrt{x}) \wedge x \in D =$
$= \ln(80\sqrt{x}) \wedge x \in D$

**d)** $D = \mathbb{R}^+$
$2\log x + 3 =$
$= 2\log x + \log 1000 \wedge x \in D =$
$= \log(x^2) + \log 1000 \wedge x \in D =$
$= \log(1000x^2) \wedge x \in D$

**e)** $D = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 0 \wedge x + 2 > 0\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge x > -2\} = ]-2, 0[ \cup ]0, +\infty[$
$2\log|x| - \log(x + 2) =$
$= \log|x|^2 - \log(x + 2) \wedge x \in D =$
$= \log(x^2) - \log(x + 2) \wedge x \in D =$
$= \log\left(\frac{x^2}{x+2}\right) \wedge x \in D$

**67.**

**a)** $f(x) = \log(10x^3) - \log x =$
$= \log 10 + \log(x^3) - \log x =$
$= 1 + 3\log x - \log x =$
$= 1 + 2\log x, \forall x \in \mathbb{R}^+$

**b)** $f(x) = 11 \Leftrightarrow 1 + 2\log x = 11$
$\Leftrightarrow 2\log x = 10$
$\Leftrightarrow \log x = 5$
$\Leftrightarrow x = 10^5$

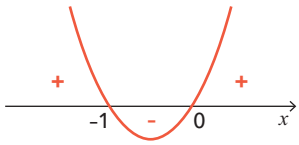
**68.**

**a)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 2 > 0 \wedge 2x + 5 > 0\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R}: x > -\frac{2}{3} \wedge x > -\frac{5}{2}\right\} = \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$
$\log_6(3x + 2) = \log_6(2x + 5)$
$\Leftrightarrow 3x + 2 = 2x + 5 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = 3 \wedge x \in D$
C.S. $= \{3\}$

**b)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge x^2 + x > 0\} = ]0, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$




$x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$

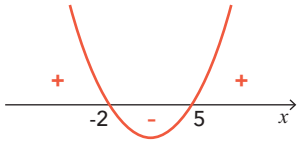
$\log_2(x + 1) = \log_2(x^2 + x)$
$\Leftrightarrow x + 1 = x^2 + x \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1) \wedge x \in D$
C.S. $= \{1\}$

**c)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 5 > 0\} = \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$
$\ln(3x - 5) = \ln 7$
$\Leftrightarrow 3x - 5 = 7 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow 3x = 12 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = 4 \wedge x \in D$
C.S. $= \{4\}$

**d)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x - 10 > 0 \wedge 2 - 2x > 0\} = ]-\infty, -2[$

**Cálculo auxiliar**

• $x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-10)}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2}$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$




$x^2 - 3x - 10 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$

• $2 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2 > 2x \Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[$

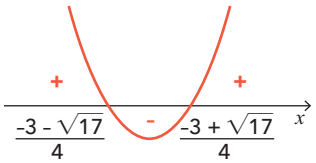
$\log(x^2 - 3x - 10) = \log(2 - 2x)$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-12)}}{2} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -3) \wedge x \in D$
C.S. $= \{-3\}$

**e)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0\} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
$\log_3(2x + 1) = 4$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 3^4 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 81 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow 2x = 80 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = 40 \wedge x \in D$
C.S. $= \{40\}$

**f)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 3x - 1 > 0\} =$
$= \left]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right[ \cup \left]\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$

**Cálculo auxiliar**

$2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$



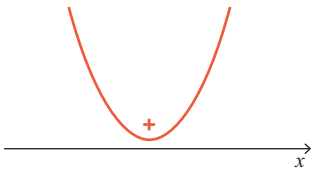

$2x^2 + 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right[ \cup \left]\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$

$\log_3(2x^2 + 3x - 1) = 2$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 9 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 10 = 0 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-10)}}{4} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{4} \wedge x \in D$
C.S. $= \left\{\frac{-3 - \sqrt{89}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{89}}{4}\right\}$

**g)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 5x + 4 > 0\} = \mathbb{R}$

**Cálculo auxiliar**

$2x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 4}}{4}$
$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4}}$
condição impossível em $\mathbb{R}$




$2x^2 + 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$\log_2(2x^2 + 5x + 4) = 4$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2^4 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 16 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 12 = 0 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times (-12)}}{4} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 11}{4} \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow \left(x = -4 \vee x = \frac{3}{2}\right) \wedge x \in D$
C.S. $= \left\{-4, \frac{3}{2}\right\}$

**h)** $D = \{x \in \mathbb{R}: (x-1)^2 > 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\log_5((x-1)^2) = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 5^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x-1 = 5 \vee x-1 = -5) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 6 \vee x = -4) \wedge x \in D$

C.S. $= \{-4, 6\}$

**69.**

**a)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x-2 > 0\} = ]2, +\infty[$

$10^{3\log(x-2)} = 125$

$\Leftrightarrow 10^{\log(x-2)^3} = 5^3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x-2)^3 = 5^3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x-2 = 5 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 7 \wedge x \in D$

C.S. $= \{7\}$

**b)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x+2 > 0 \wedge x^2 > 0\} =$

$= \left]-\frac{2}{3}, 0\right[ \cup ]0, +\infty[$

$2\log_5(3x+2) = \log_5(x^2)$

$\Leftrightarrow \log_5(3x+2)^2 = \log_5(x^2) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (3x+2)^2 = x^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (3x+2 = x \vee 3x+2 = -x) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (2x = -2 \vee 4x = -2) \wedge x \in D$

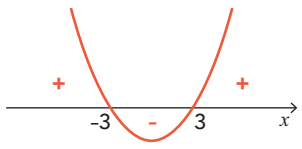
$\Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}\right) \wedge x \in D$

C.S. $= \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

**c)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 > 0 \wedge x - 3 > 0\} = ]3, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$




$x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3[ \cup ]3, +\infty[$

$\ln(x^2-9) - \ln(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x^2-9) = \ln(x-3) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x - 3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times(-6)}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -2) \wedge x \in D$

C.S. $= \varnothing$

**d)** $D = \mathbb{R}^+$

$\frac{1}{3}\log x + \log 3 = \log 5$

$\Leftrightarrow \log(\sqrt[3]{x}) = \log 5 - \log 3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log(\sqrt[3]{x}) = \log\left(\frac{5}{3}\right) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{5}{3} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{125}{27} \wedge x \in D$

C.S. $= \left\{\frac{125}{27}\right\}$

**e)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x+3 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log(x+3) + \log x = \log 28$

$\Leftrightarrow \log[x(x+3)] = \log 28 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log(x^2+3x) = \log 28 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 28 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\times1\times(-28)}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = -7 \vee x = 4) \wedge x \in D$

C.S. $= \{4\}$

**f)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x+1 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log(x+1) - \log x = \log 3$

$\Leftrightarrow \log(x+1) = \log 3 + \log x \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log(x+1) = \log(3x) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x+1 = 3x \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow -2x = -1 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \in D$

C.S. $= \left\{\frac{1}{2}\right\}$

**g)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 2x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log_2 x + \log_4(2x) = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2(2x)}{\log_2 4} = 4 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2(2x)}{2} = 4 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x + \log_2(2x) = 8 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2) + \log_2(2x) = 8 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 \times 2x) = 8 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log_2(2x^3) = 8 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 2x^3 = 2^8 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^3 = 128 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt[3]{2} \wedge x \in D$

C.S. $= \{4\sqrt[3]{2}\}$

**h)** $D = \mathbb{R}^+$

$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

Considerando a mudança de variável $\log_2 x = y$, temos:

$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times(-2)}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$

Voltando a substituir $y$ por $\log_2(x)$, vem que:

$(\log_2 x = 2 \vee \log_2 x = -1) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 2^2 \vee x = 2^{-1}) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \left(x = 4 \vee x = \frac{1}{2}\right) \wedge x \in D$

C.S. $= \left\{4, \frac{1}{2}\right\}$

**i)** $\log_{\sqrt{2}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\sqrt{2}}(2x^2 - 5x + 3)$

$D = \{x \in \mathbb{R}: 3x^2 - 4x - 17 > 0 \wedge 2x^2 - 5x + 3 > 0\} =$

$= \left]-\infty, \frac{2 - \sqrt{55}}{3}\right[ \cup \left]\frac{2 + \sqrt{55}}{3}, +\infty\right[$

**Cálculos auxiliares**

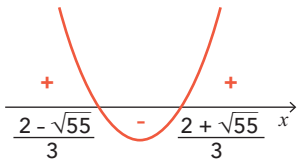
- $3x^2 - 4x - 17 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3 \times (-17)}}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{220}}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{55}}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{55}}{3}$

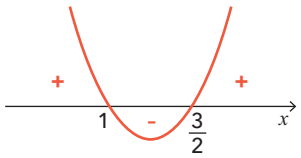
| 220 | 2 |
|---|---|
| 110 | 2 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |
| 1 | |




- $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 3}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 1$




$\log_{\sqrt{2}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\sqrt{2}}(2x^2 - 5x + 3)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-20)}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = -5 \vee x = 4) \wedge x \in D$

C.S. $= \{-5, 4\}$

**j)** $\log[(x + 2) \times (x - 7)] + \log\left(\frac{x + 2}{x - 7}\right) = 2$

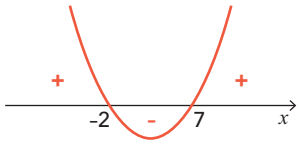
$D = \left\{x \in \mathbb{R}: (x + 2)(x - 7) > 0 \wedge \frac{x + 2}{x - 7} > 0\right\} =$

$= ]-\infty, -2[ \cup ]7, +\infty[$

**Cálculos auxiliares**

- $(x + 2)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 7$

$(x + 2)(x - 7) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 7$




- $\frac{x + 2}{x - 7} > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 7$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $7$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x + 2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x - 7$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x + 2}{x - 7}$ | $+$ | $0$ | $-$ | n.d. | $+$ |

$x \in ]-\infty, -2[ \cup ]7, +\infty[$

$\log[(x + 2) \times (x - 7)] + \log\left(\frac{x + 2}{x - 7}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \log\left[(x + 2) \times (x - 7)\left(\frac{x + 2}{x - 7}\right)\right] = 2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log(x + 2)^2 = 2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 10^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x + 2 = 10 \vee x + 2 = -10) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 8 \vee x = -12) \wedge x \in D$

C.S. $= \{8, -12\}$

**70.**

**a)** $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$

$3 - 4e^{-x} = y \Leftrightarrow -4e^{-x} = y - 3$

$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{3 - y}{4}$

$\Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{3 - y}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{3 - y}{4}\right)$

Assim, $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{3 - x}{4}\right)$.

$D_{f^{-1}} = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{3 - x}{4} > 0\right\} = ]-\infty, 3[$

**Cálculo auxiliar**

$\frac{3 - x}{4} > 0 \Leftrightarrow 3 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$

$f^{-1}: ]-\infty, 3[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto -\ln\left(\frac{3 - x}{4}\right)$

**b)** $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2 - 8x > 0\} = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[ = D'_{g^{-1}}$

$5 - \ln(2 - 8x) = y$

$\Leftrightarrow \ln(2 - 8x) = 5 - y$

$\Leftrightarrow 2 - 8x = e^{5 - y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^{5 - y} - 2}{-8}$

Assim, $g^{-1}(x) = \frac{2 - e^{5 - x}}{8}$ e $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$.

$g^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$

$x \longmapsto \frac{2 - e^{5 - x}}{8}$

**c)** $D_h = \mathbb{R}\backslash\{0\} = D'_{h^{-1}}$

$10^{\frac{1}{x}} + 3 = y \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{x}} = y - 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log(y - 3)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(y - 3)}$

Assim, $h^{-1}(x) = \frac{1}{\log(x - 3)}$.

$D_{h^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 > 0 \wedge \log(x - 3) \neq 0\} =$

$= ]3, +\infty[\backslash\{4\}$

**Cálculo auxiliar**

$\log(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$

$h^{-1}: ]3, +\infty[\backslash\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$x \longmapsto \frac{1}{\log(x - 3)}$

**71.**

**a)** $P(t) = a \times b^t$

Como se sabe que a população está a aumentar à taxa de 10% ao dia, então $b = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$.

Assim, $P(t) = a \times 1{,}1^t$.

Como se sabe também que ao fim de dois dias existiam 605 formigas, isto é, 0,605 milhares, então, tem-se que $P(2) = a \times 1{,}1^2$, ou seja, $0{,}605 = a \times 1{,}1^2$

$\Leftrightarrow a = \frac{0{,}605}{1{,}1^2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Assim, $P(t) = \frac{1}{2} \times 1{,}1^t$, com $t \geq 0$.

**b)** $P(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 1{,}1^t = 3$

$\Leftrightarrow 1{,}1^t = 6$

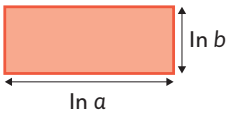
$\Leftrightarrow t = \log_{1{,}1} 6$

$\Leftrightarrow t \approx 19$

O número de formigas é igual a 3000 ao fim de 19 dias, aproximadamente.

## Aprende fazendo (3) – páginas 58 a 61

**72.** Opção (A)




Perímetro $= 2 \ln a + 2 \ln b = 2(\ln a + \ln b) =$

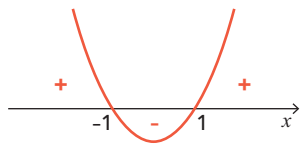
$= 2 \ln(a \times b)$

**73.**

**a)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0\} = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$




$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$\log_2(x^2 - 1) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 4 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 = 5 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}) \wedge x \in D$

C.S. $= \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

**b)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 3 + 5x > 0\} = \left]-\frac{3}{5}, +\infty\right[$

**Cálculo auxiliar**

$3 + 5x > 0 \Leftrightarrow 5x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5}$

$\log_{\frac{1}{2}}(3 + 5x) = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3 + 5x) = \log_{\frac{1}{2}} 1$

$\Leftrightarrow 3 + 5x = 1 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 5x = -2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \wedge x \in D$

C.S. $= \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

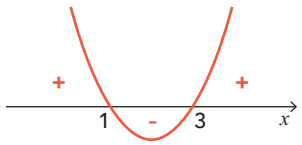
**c)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 3 > 0\} = ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$




$x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$

$\log_4(x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \log_4(x^2 - 4x + 3) = \log_4 2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \wedge x \in D$

C.S. $= \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$

**d)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0\} = ]-1, +\infty[$

$\log(x + 1) = 1$

$\Leftrightarrow x + 1 = 10 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 9 \wedge x \in D$

C.S. $= \{9\}$

**e)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = ]0, +\infty[$

$\ln x - \ln 4 = 1$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln e + \ln 4 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln(4e) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 4e \wedge x \in D$

C.S. $= \{4e\}$

**f)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = ]0, +\infty[$

$3 \log_3 2 + \log_3 x = -1$

$\Leftrightarrow \log_3 8 + \log_3 x = \log_3(3^{-1}) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log_3(8x) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 8x = \frac{1}{3} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{24} \wedge x \in D$

C.S. $= \left\{\frac{1}{24}\right\}$

**g)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 2 - x > 0\} = ]0, 2[$

$\ln x + \ln(2 - x) = \ln 5$

$\Leftrightarrow \ln(2x - x^2) = \ln 5 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 5 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{-2}}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \wedge x \in D$

C.S. $= \varnothing$

**h)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = ]0, +\infty[$

$5 = \log_4 x$

$\Leftrightarrow x = 4^5 \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow x = 1024 \ \wedge \ x \in D$

C.S. = {1024}

**i)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = ]0, +\infty[$

$\log_2 x = 16$

$\Leftrightarrow x = 2^{16} \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow x = 65\,536 \ \wedge \ x \in D$

C.S. = {65 536}

**j)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \ \wedge \ x \neq 1\} = ]0, +\infty[\setminus\{1\}$

$\log_x 16 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 16 \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 4 \ \vee \ x = -4) \ \wedge \ x \in D$

C.S. = {4}

**74.** Opção (B)

$\log_b\left(\frac{b}{a}\right) = \log_b b - \log_b a = 1 - c$

**75.** Opção (A)

$\ln(ex) = y \Leftrightarrow ex = e^y$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e}$

$\Leftrightarrow x = e^{y-1}$

Assim, $f^{-1}(x) = e^{x-1}$.

**76.** Opção (D)

**Cálculo auxiliar**

- A abscissa de A corresponde ao zero de $f$:
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_k x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  Logo, $\overline{AC} = 2(k - 1)$.
- $f(k) = \log_k k = 1$

$A = \frac{\overline{AC} \times f(k)}{2} = \frac{2(k-1) \times 1}{2} = k - 1$

**77.** $A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln p$, $e^{2{,}3} \leq p \leq e^{4{,}1}$

1,3 m corresponde a 130 cm.

**a)** $1{,}3 = -0{,}52 + 0{,}55 \ln p \Leftrightarrow 1{,}3 + 0{,}52 = 0{,}55 \ln p$

$\Leftrightarrow 1{,}82 = 0{,}55 \ln p$

$\Leftrightarrow \frac{1{,}82}{0{,}55} = \ln p$

$\Leftrightarrow p = e^{\frac{1{,}82}{0{,}55}}$

$\Leftrightarrow p \approx 27$ kg

O irmão do Pedro pesa 27 kg.

**b)** $A(2p) - A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(2p) - (-0{,}52 + 0{,}55 \ln p) =$

$= -0{,}52 + 0{,}55 \ln(2p) + 0{,}52 - 0{,}55 \ln p =$

$= 0{,}55 [\ln(2p) - \ln p] =$

$= 0{,}55 [\ln(2p) + \ln p - \ln p] =$

$= 0{,}55 \times \ln 2 =$

$\approx 0{,}38$

$A(2p) - A(p) = 0{,}38$

$A(2p) = A(p) + 0{,}38$

Quando o peso duplica a altura aumenta 38 cm, aproximadamente.

**78.** $10^{0{,}4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$

**a)** $10^{0{,}4(-1{,}44 - 1{,}45)} = \frac{d^2}{100} \Leftrightarrow 10^{0{,}4 \times (-2{,}89)} = \frac{d^2}{100}$

$\Leftrightarrow 10^2 \times 10^{-1{,}156} = d^2$

$\Leftrightarrow 10^{0{,}844} = d^2$

$\Leftrightarrow d = \sqrt{10^{0{,}844}}$, pois $d > 0$

$\Leftrightarrow d = 10^{0{,}422}$

$d = 3$ parsec

**b)** $10^{0{,}4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$

$\Leftrightarrow 0{,}4\,(m - M) = \log\left(\frac{d^2}{100}\right) \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow m - M = \frac{\left(\frac{d^2}{100}\right)}{0{,}4} \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow m - M = \frac{10}{4} \times \log\left(\frac{d^2}{100}\right) \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow m - M = \frac{5}{2} \times [\log(d^2) - \log 100] \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow m - M = \frac{5}{2} [2 \log d - 2] \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow m - M = 5 \log d - 5 \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow M = m - 5 \log d + 5 \ \wedge \ d > 0$

$\Leftrightarrow M = m + 5(1 - \log d) \ \wedge \ d > 0$

**79.**

**a)** $R(5{,}96 \times 10^{16}) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{5{,}96 \times 10^{16}}{10^{4{,}4}}\right) \approx 8{,}25$

A magnitude do terramoto de São Francisco de 1906 foi, aproximadamente, 8,3 na escala de Richter.

**b)** $R(E) = 6{,}4 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{10^{4{,}4}}\right) = 6{,}4$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{E}{10^{4{,}4}}\right) = 9{,}6$

$\Leftrightarrow \frac{E}{10^{4{,}4}} = 10^{9{,}6}$

$\Leftrightarrow E = 10^{4{,}4} \times 10^{9{,}6}$

$\Leftrightarrow E = 10^{14}$

A energia libertada pelo terramoto da Índia de 1993 foi $10^{14}$ joules.

**c)** $E = 4{,}2 \times 10^{17}$, logo, a sua magnitude foi $R(4{,}2 \times 10^{17}) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{4{,}2 \times 10^{17}}{10^{4{,}4}}\right) \approx 8{,}815$ na escala de Richter, logo, a sua intensidade será $I$:

$R = \frac{\ln I}{\ln 10} \Leftrightarrow 8{,}815 = \frac{\ln I}{\ln 10}$

$\Leftrightarrow \ln I = 8{,}815 \ln 10$

$\Leftrightarrow I = e^{8{,}815 \ln 10}$

$\Leftrightarrow I \approx 653\,130\,552{,}6$

Assim, a intensidade do terramoto de Lisboa de 1755 foi $7 \times 10^8$.

**80.**

**a)** $f(x) = 3^{x+1}$

$D_f = D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f(x) = y \Leftrightarrow 3^{x+1} = y$

$\Leftrightarrow x + 1 = \log_3 y$

$\Leftrightarrow x = -1 + \log_3 y$

Logo, $f^{-1}(x) = -1 + \log_3 x$.

$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto -1 + \log_3 x$

**b)** $g(x) = 2 + \log(x + 4)$

$D_g = D'_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x + 4 > 0\} = ]-4, +\infty[$

$g(x) = y \Leftrightarrow 2 + \log(x + 4) = y$

$\Leftrightarrow \log(x + 4) = y - 2$

$\Leftrightarrow x + 4 = 10^{y-2}$

$\Leftrightarrow x = -4 + 10^{y-2}$

Logo, $g^{-1}(x) = -4 + 10^{x-2}$.

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

$g^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow ]-4, +\infty[$

$x \longmapsto -4 + 10^{x-2}$

**c)** $h(x) = 1 - 6 \times 4^{2x+3}$

$D_h = D'_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

$h(x) = y \Leftrightarrow 1 - 6 \times 4^{2x+3} = y$

$\Leftrightarrow 6 \times 4^{2x+3} = 1 - y$

$\Leftrightarrow 4^{2x+3} = \dfrac{1-y}{6}$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = \log_4\left(\dfrac{1-y}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-3 + \log_4\left(\dfrac{1-y}{6}\right)}{2}$

Logo, $h^{-1}(x) = \dfrac{-3 + \log_4\left(\dfrac{1-x}{6}\right)}{2}$.

$D_{h^{-1}} = \left\{x \in \mathbb{R}: \dfrac{1-x}{6} > 0\right\} = ]-\infty, 1[$

$h^{-1}: ]-\infty, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{-3 + \log_4\left(\dfrac{1-x}{6}\right)}{2}$

**d)** $j(x) = 6 + 3\log_5(x - 2)$

$D_j = D'_{j^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 > 0\} = ]2, +\infty[$

$j(x) = y \Leftrightarrow 6 + 3\log_5(x - 2) = y$

$\Leftrightarrow \log_5(x - 2) = \dfrac{y-6}{3}$

$\Leftrightarrow x - 2 = 5^{\frac{y-6}{3}}$

$\Leftrightarrow x = 2 + 5^{\frac{y-6}{3}}$

Logo, $j^{-1}(x) = 2 + 5^{\frac{x-6}{3}}$.

$D_{j^{-1}} = \mathbb{R}$

$j^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow ]2, +\infty[$

$x \longmapsto 2 + 5^{\frac{x-6}{3}}$

**81.**

**a)** $C(6) = 1{,}86 \Leftrightarrow 6 \times 1{,}05^{-A \times 6} = 1{,}86$

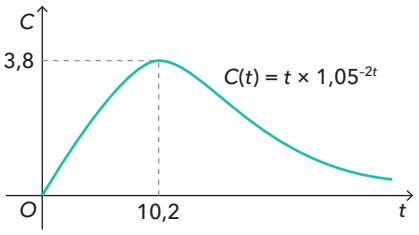
$\Leftrightarrow 1{,}05^{-6 \times A} = \dfrac{1{,}86}{6}$

$\Leftrightarrow -6A = \log_{1{,}05}\left(\dfrac{1{,}86}{6}\right)$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{\log_{1{,}05}\left(\dfrac{1{,}86}{6}\right)}{-6}$

Logo, $A = 4$.

**b)** $C(t) = t \times 1{,}05^{-2t}$




10,2 horas = 10 horas + 0,2 hora

0,2 × 60 = 12 min

Recorrendo à calculadora gráfica, descobrimos que a concentração de *Stopdor* é máxima 10,2 horas após a administração do medicamento. Assim, o Tomás, tendo tomado o Stopdor às 8 horas, devia ter tomado o 2.º medicamento às 18 h 12 min (8 h + 10 h + 12 min) e não às 15 horas como tomou. Conclui-se, assim, que não cumpriu com as recomendações do médico.

**82.** Opção (B)

$\ln a = 2 - \ln b \Leftrightarrow \ln a + \ln b = 2$

$\Leftrightarrow \ln(a \times b) = 2$

$\Leftrightarrow a \times b = e^2$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{e^2}{b}$

**83.** Opção (D)

$\log_5(2b) = x \Leftrightarrow 2b = 5^x$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{5^x}{2}$

e $\log_5 a = y \Leftrightarrow a = 5^y$

Logo, $a \times b = 5^y \times \dfrac{5^x}{2} = \dfrac{5^{x+y}}{2}$.

**84.**

**a)** $C(x) = ae^{bx}$

$C(0) = 45\,000 \Leftrightarrow a \times e^0 = 45\,000 \Leftrightarrow a = 45\,000$

$C(1) = 45\,000 \times (1 - 0{,}2) \Leftrightarrow e^b = 0{,}8 \Leftrightarrow b = \ln(0{,}8)$

Logo, $b \approx -0{,}223$.

Assim, $C(x) = 45\,000 \times e^{-0{,}223x}$.

**b)** $C(x) = \dfrac{45\,000}{5} \Leftrightarrow e^{-0{,}223x} = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow -0{,}223x = \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}{-0{,}223}$

Logo, $x = 7{,}217$.

**Cálculo auxiliar**

$0{,}217 \times 365 = 79{,}025$

Passados 7 anos e 79 dias, o carro vale a quinta parte do seu valor inicial.

**c)** $\dfrac{C\left(x+\frac{1}{12}\right)}{C(x)} = \dfrac{45\,000\,e^{-0{,}223\left(x+\frac{1}{12}\right)}}{45\,000\,e^{-0{,}223x}} =$

$= e^{-0{,}223x - 0{,}223 \times \frac{1}{12} + 0{,}223x}$

$= e^{-0{,}223 \times \frac{1}{12}} \approx 0{,}982$

**Cálculo auxiliar**

$1 - 0{,}982 = 0{,}018$

O carro desvaloriza cerca de 1,8% por mês.

**85.**

**a)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 7x + 12 > 0\} =$

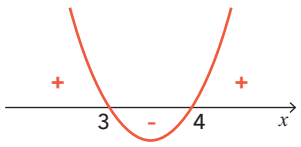
$= \{x \in \mathbb{R}: x < 3 \vee x > 4\} = ]-\infty, 3[ \cup ]4, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 3$




$x \log_6(x^2 - 7x + 12) = x$

$\Leftrightarrow x \log_6(x^2 - 7x + 12) - x = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x\,[\log_6(x^2 - 7x + 12) - 1] = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow [x = 0 \vee \log_6(x^2 - 7x + 12) - 1 = 0] \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow [x = 0 \vee \log_6(x^2 - 7x + 12) = 1] \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow [x = 0 \vee \log_6(x^2 - 7x + 12) = \log_6 6] \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 - 7x + 12 = 6) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 6}}{2}\right) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \dfrac{7 \pm 5}{2}\right) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 6 \vee x = 1) \wedge x \in D$

C.S. = {0, 1, 6}

**b)** $D = \{x \in \mathbb{R}: |x + 1| - 3 > 0\} = ]-\infty, -4[ \cup ]2, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$|x + 1| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x + 1| > 3$

$\Leftrightarrow x + 1 > 3 \vee x + 1 < -3$

$\Leftrightarrow x > 2 \vee x < -4$

$\log_2(|x + 1| - 3) = 1$

$\Leftrightarrow \log_2(|x + 1| - 3) = \log_2 2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow |x + 1| - 3 = 2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow |x + 1| = 5 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x + 1 = 5 \vee x + 1 = -5) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -6) \wedge x \in D$

C.S. = {4, −6}

**c)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\log_3^2 x - 5 \log_9 x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x - \dfrac{5}{2} \log_3 x + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

**Cálculo auxiliar**

$\log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 x}{2}$

Consideremos a mudança de variável $\log_3(x) = y$.

Então:

$y^2 - \dfrac{5}{2} y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{5 \pm 3}{4}$

$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = \dfrac{1}{2}$

Substituindo $y$ por $\log_3 x$, tem-se que:

$\log_3 x = 2 \vee \log_3 x = \dfrac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \left(x = 9 \vee x = \sqrt{3}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+$

C.S. = $\{9, \sqrt{3}\}$

**d)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x^7 > 0 \wedge x^{\log(x^7)} > 0 \wedge x^5 > 0\} = \mathbb{R}^+$

$\dfrac{1}{7} \log(x^{\log(x^7)}) - \log(x^5) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log(x^{\log(x^7)})^{\frac{1}{7}} - 5 \log x + 4 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log\left(x^{\frac{1}{7}\log(x^7)}\right) - 5 \log x + 4 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log(x^{\log x}) - 5 \log x + 4 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log x \times \log x - 5 \log x + 4 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (\log x)^2 - 5 \log x + 4 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow \log x = \dfrac{5 \pm 3}{2} \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (\log x = 1 \vee \log x = 4) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 10 \vee x = 10\,000) \wedge x \in D$

C.S. = {10, 10 000}

**86.**

**a)** $f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$

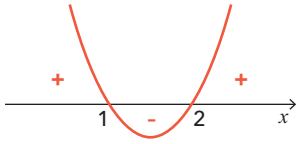
$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 > 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x < 1 \vee x > 2\} = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$




$g(x) = \dfrac{1}{1 - \log_7 x}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 1 - \log_7 x \neq 0\} = ]0, +\infty[\setminus\{7\}$

**Cálculo auxiliar**

$1 - \log_7 x = 0 \Leftrightarrow \log_7 x = 1 \Leftrightarrow x = 7$

$h(x) = \dfrac{\log_{\sqrt{3}}(x + 1)}{1 - 2^x}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge 1 - 2^x \neq 0\} = ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$

**Cálculo auxiliar**

$1 - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

**b)** $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 1 \wedge x \in D_f$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \wedge x \in D_f$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \wedge x \in D_f$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$f$ tem dois zeros: $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \log_7 x} = 0$

Condição impossível, logo $g$ não tem zeros.

$h(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\log_{\sqrt{3}}(x + 1)}{1 - 2^x} = 0$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x + 1) = 0 \wedge x \in D_h$

$\Leftrightarrow x + 1 = 1 \wedge x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$

$0 \notin D_h$, logo $h$ não tem zeros.

**c)** $D'_g = D_{g^{-1}}$

$\frac{1}{1 - \log_7 x} = y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 - \log_7 x$

$\Leftrightarrow \log_7 x = 1 - \frac{1}{y}$

$\Leftrightarrow x = 7^{1 - \frac{1}{y}}$

Assim:

$g^{-1}(x) = 7^{1 - \frac{1}{x}}$ e $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, logo $D'_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**87.**

**a)** $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$

**b)** $\log_n\left[\log_n\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right)\right] = \log_n\left[\log_n\left[\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n}}\right] =$

$= \log_n\left(\log_n\left(n^{\frac{1}{n^3}}\right)\right) =$

$= \log_n\left(\frac{1}{n^3}\right) = \log_n(n^{-3}) = -3$

**c)** $a^{\ln b} = (b^{\log_b(a)})^{\ln b}$, pois $a = b^{\log_b a}$

$= b^{\ln b \times \log_b a} =$

$= b^{\ln b \times \frac{\ln a}{\ln b}}$, pois $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

$= b^{\ln a}$

## Capítulo 4 – Função composta

### Tarefa – O automóvel – página 62

**1.**

**a)** Vamos calcular $C(v)$ para cada valor de $v$.

- Para $v = 60$ km/h:

$C(60) = 0{,}0005 \times (60 - 80)^2 + 5 =$

$= 0{,}0005 \times 400 + 5 =$

$= 0{,}2 + 5 =$

$= 5{,}2\ \ell/100$ km

- Para $v = 80$ km/h:

$C(80) = 0{,}0005 \times (80 - 80)^2 + 5 = 5\ \ell/100$ km

- Para $v = 100$ km/h:

$C(100) = 0{,}0005 \times (100 - 80)^2 + 5 =$

$= 0{,}0005 \times 400 + 5 =$

$= 5{,}2\ \ell/100$ km

- Para $v = 140$ km/h

$C(140) = 0{,}0005 \times (140 - 80)^2 + 5 =$

$= 0{,}0005 \times 3600 + 5 =$

$= 1{,}8 + 5 =$

$= 6{,}8\ \ell/100$ km

**b)** Usamos agora a função $A(c) = \frac{5000}{c}$.

- Para $c = 5{,}2$:

$A(5{,}2) = \frac{5000}{5{,}2} \approx 961{,}5$ km

- Para $c = 5$:

$A(5) = \frac{5000}{5} = 1000$ km

- Para $c = 6{,}8$:

$A(6{,}8) = \frac{5000}{6{,}8} \approx 735{,}3$ km

**c)** Pretende-se calcular $A(C(x))$.

Sabemos que $C(x) = 0{,}0005(x - 80)^2 + 5$.

$A(C(x)) = A(0{,}0005(x - 80)^2 + 5) = \frac{5000}{0{,}0005(x - 80)^2 + 5}$

**2.**

| $v$ (em km/h) | $C(v)$ (em $\ell$/100 km) | $A(C(v))$ (em km) |
|---|---|---|
| 60 | 5,2 | ≈ 961,5 |
| 80 | 5,0 | 1000 |
| 100 | 5,2 | ≈ 961,5 |
| 140 | 6,8 | ≈ 735,3 |

**3.** A expressão $A(C(v))$ representa a autonomia do veículo em função da velocidade média.

Observe-se que, com a velocidade $v$ determinamos o consumo através da função $C$. Esse consumo é depois usado na função $A$, para calcular a autonomia, por isso, $A(C(v))$ diz-se uma função composta, pois a "saída" da função $C$ é a "entrada" da função $A$.

As grandezas relacionadas por esta função composta são, então:

- velocidade média (km/h);
- consumo médio ($\ell$/100 km);
- autonomia (km).

### Exercícios de margem – páginas 63 a 65

**88.**

**a)** $g(f(2)) = g(4) = 9$

**b)** $f(g(2)) = f(3) = 7$

**c)** $g(f(0)) = g(5) = 12$

**d)** $f(g(0))$ não existe, pois 0 não pertence ao domínio de $g$.

**e)** $f(g(5)) = f(12) =$ não existe, pois 12 não pertence ao domínio de $f$.

**89.**

**a)** **i.** $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(2 \times (-2) + 3) = g(-4 + 3) = g(-1) =$
$= (-1)^2 = 1$

**ii.** $(f \circ g)(\sqrt{3}) + (g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right) = f(g(\sqrt{3})) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$
$= f((\sqrt{3})^2) + g\left(2 \times \frac{1}{2} + 3\right) =$
$= f(3) + g(1 + 3) =$
$= 2 \times 3 + 3 + g(4) =$
$= 6 + 3 + 4^2 =$
$= 9 + 16 = 25$

**b)** $D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge 2x + 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
Conjunto de chegada: $\mathbb{R}$
$D_{f \circ g} = \{x \in D_g: g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 3$
Conjunto de chegada: $\mathbb{R}$

**c)** A composição de funções não é comutativa, pois, na alínea anterior, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

**90.**

**a)** $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-3x + 2) = 4(-3x + 2) - 1 =$
$= -12x + 8 - 1 = -12x + 7$

**b)** $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x - 1) = -3(4x - 1) + 2 =$
$= -12x + 3 + 2 = -12x + 5$

**c)** $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(4x - 1) = 4(4x - 1) - 1 = 16x - 4 - 1 =$
$= 16x - 5$

**d)** $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-3x + 2) = -3(-3x + 2) + 2 =$
$= 9x - 6 + 2 = 9x - 4$

**91.**

**a)** $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{3x+1}) =$
$= \ln(2e^{3x+1}) =$
$= \ln 2 + \ln(e^{3x+1}) =$
$= \ln 2 + 3x + 1 =$
$= 3x + \ln 2 + 1$
$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge e^{3x+1} \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}$

**b)** $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln(2x)) =$
$= e^{3\ln(2x)+1} = e^{3\ln(2x)} \times e^1 =$
$= e^{\ln(2x)^3} \times e = (2x)^3 \times e = 8ex^3$
$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+ \wedge \ln(2x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$

**92.** Opção (B)
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$, o que exclui a opção (D).
$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(2) = 2$, o que exclui a opção (A).
$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = 0$, o que exclui a opção (C).

## Aprende fazendo 4 – páginas 66 e 67

**93**

**a)** $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}: f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 3 =$
$= \frac{2x + 2 + 3(x-2)}{x-2} =$
$= \frac{2x + 2 + 3x - 6}{x-2} =$
$= \frac{5x - 4}{x-2}$

**b)** $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

**Cálculo auxiliar**
$g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Leftrightarrow 2x + 3 \neq 2 \Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3) = \frac{2x + 3 + 1}{2x + 3 - 2} = \frac{2x + 4}{2x + 1}$

**94.**

**a)** $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge 10^{x+2} \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(10^{x+2}) =$
$= \log(10^{x+2}) =$
$= x + 2$

**b)** $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+ \wedge \log x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log x) =$
$= 10^{\log x + 2} =$
$= 10^{\log x} \times 10^2 =$
$= 100x$

**95.**

**a)** Por exemplo, $g(x) = x^2$ e $f(x) = \ln x$.
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \ln(x^2)$

**b)** Por exemplo, $g(x) = \ln x$ e $f(x) = \frac{2}{3 - x}$.
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = \frac{2}{3 - \ln x}$

**96.** $(f \circ g)(x) = 6x + 9 \Leftrightarrow f(g(x)) = 6x + 9$
$\Leftrightarrow 2g(x) - 5 = 6x + 9$
$\Leftrightarrow 2g(x) = 6x + 14$
$\Leftrightarrow g(x) = 3x + 7$

**97.** Opção (C)
$(h^{-1} \circ g)(2) = h^{-1}(g(2)) = h^{-1}(3) = -2$

**Cálculo auxiliar**
$g(2) = 2^3 - \frac{5}{2} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 2 + 4 = 3$
$h(x) = 3 \Leftrightarrow -2x - 1 = 3 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$

**98.**

**a)** $D_h = D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{g(x) \in \mathbb{R}^+}\} = ]-1, 1[$
procuramos os valores de $x$ para os quais a função $g$ é positiva

**b)** Pretende-se determinar os valores de $x$ para os quais $h(x) = 0$.
Assim:
$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0$
O zero da função $f$ definida por $\log_2 x$ é 1, ou seja, $f(1) = 0$.

Pretendemos, assim, determinar os valores de $x$ para os quais $g(x) = 1$. Por observação do gráfico, vem que $x = 0$.

**99.** Opção (B)

$(g \circ f)(x) = 2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 \vee f(x) = 3$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Logo, $x \in \{1, 2\}$.

**100.** Opção (B)

Seja $x > 3$. Então, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 2$, pelo que o gráfico da função composta $f \circ g$ só pode ser o gráfico representado na opção (B).

**101.** Opção (D)

- $(g \circ f^{-1})(9) = g(f^{-1}(9)) = g(5) = 5$, pois, para qualquer $x > 3$, tem-se que $g(x) = 5$, já que se verifica $g(-x) = g(x)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

**Cálculo auxiliar**

$f^{-1}(9) = 5$, pois $f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 5$

- $(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(5) = 3$

**Cálculo auxiliar**

- $g(3) = g(-3) = 5$, pois $g(-x) = g(x)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(5) = 3$, pois $f(x) = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

- $(f \circ g)(9) = f(g(9)) = f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$
- $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$

## Aprende Fazendo Global – páginas 74 a 77

**1.** Opção (D)

$\log_2\left(\frac{2^k}{8}\right) = \log_2(2^k) - \log_2 8 = k - 3$

**2.** Opção (C)

O ponto $P(3, 81)$ pertence ao gráfico de $f$, logo $f(3) = 81$, isto é:

$e^{a \ln 3} = 81 \Leftrightarrow e^{\ln(3^a)} = 81 \Leftrightarrow 3^a = 81 \Leftrightarrow a = 4$

**3.**

**a)** Opção (B)

$g(x) = 2e^x - 3$

$y = 2e^x - 3 \Leftrightarrow 2e^x = y + 3 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+3}{2}\right)$

Assim, $g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$.

**b)** Opção (A)

$(h \circ g)(2) = h(g(2)) = h(2e^2 - 3) =$

$= \ln(2e^2 - 3 + 3) =$

$= \ln(2e^2) =$

$= \ln 2 + \ln(e^2) =$

$= \ln 2 + 2$

Assim, a afirmação I é verdadeira.

$(g \circ h)(2) = g(h(2)) = g(\ln(2 + 3)) =$

$= 2e^{\ln 5} - 3 =$

$= 2 \times 5 - 3 =$

$= 7$

Assim, a afirmação II é verdadeira.

**4.** Opção (B)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: e - e^x \neq 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$e - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e$

$\Leftrightarrow x = 1$

**5.** Opção (B)

$\log_a(a^3 \times \sqrt{b}) = \log_a(a^3) + \log_a(\sqrt{b}) =$

$= 3 + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) =$

$= 3 + \frac{1}{2}\log_a b =$

$= 3 + \frac{1}{2} \times 5 =$

$= \frac{11}{2}$

**6.**

**a)** $f(x) = -2 + \log(2 - 7x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2 - 7x > 0\} = \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[ = D'_{f^{-1}}$

**Cálculo auxiliar**

$2 - 7x > 0 \Leftrightarrow -7x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{7}$

$-2 + \log(2 - 7x) = y \Leftrightarrow \log(2 - 7x) = y + 2$

$\Leftrightarrow 2 - 7x = 10^{y+2}$

$\Leftrightarrow -7x = 10^{y+2} - 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 - 10^{y+2}}{7}$

Assim, $f^{-1}(x) = \frac{2 - 10^{x+2}}{7}$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[$

$x \longmapsto \frac{2 - 10^{x+2}}{7}$

**b)** $10^{f(x)} = 10^{-2 + \log(2 - 7x)} =$

$= 10^{-2} \times 10^{\log(2 - 7x)} =$

$= \frac{1}{100} \times (2 - 7x) =$

$= \frac{2 - 7x}{100}, \forall x \in \left]-\infty, \frac{2}{7}\right[$

**7.**

**a)** $f(\ln(3)) = 1 - e^{1 + 2\ln 3} =$

$= 1 - e \times e^{2 \ln 3} =$

$= 1 - e \times e^{\ln(3^2)} =$

$= 1 - e \times 3^2 =$

$= 1 - 9e$

**b)** $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$

$f(x) = 1 - e^{1 + 2x}$

$1 - e^{1 + 2x} = y \Leftrightarrow -e^{1 + 2x} = y - 1$

$\Leftrightarrow e^{1 + 2x} = 1 - y$

$\Leftrightarrow 1 + 2x = \ln(1 - y)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(1 - y) - 1}{2}$

Assim, $f^{-1}(x) = \frac{\ln(1 - x) - 1}{2}$.

$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x > 0\} = ]-\infty, 1[$

$f^{-1}: ]-\infty, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{\ln(1 - x) - 1}{2}$

**8.**

**a)** Opção (A)

$f(\ln a) = e^{\ln a} + 12e^{-\ln a} - 1 = a + 12e^{\ln(a^{-1})} - 1 =$

$= a + 12a^{-1} - 1 =$

$= a + \frac{12}{a} - 1 =$

$= \frac{a^2 - a + 12}{a}$

**b)** Opção (C)

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(e^0 + 12e^0 - 1) =$

$= g(12) = 2 - \log_2(12^2) =$

$= 2 - \log_2 144 = 2 - \log_2(2^4 \times 3^2) =$

$= 2 - (\log_2(2^4) + \log_2(3^2)) = 2 - 4 - 2\log_2 3 =$

$= -2 - 2\log_2 3$

**c)** $f(x) = g\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow e^x + 12e^{-x} - 1 = 6$

$\Leftrightarrow e^x + 12e^{-x} - 7 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 12 - 7e^x = 0$

$e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 7e^x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{7 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \vee e^x = 4$

$\Leftrightarrow x = \ln 3 \vee x = \ln 4$

**Cálculo auxiliar**

$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 - \log_2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 2 - \log_2\left(\frac{1}{16}\right) =$

$= 2 - \log_2(2^{-4}) =$

$= 2 - (-4) =$

$= 2 + 4 =$

$= 6$

C.S. = {ln 3, ln 4}

**9.** Opção (B)

$\log_b\left(\frac{a}{b^2}\right) = 8 \Leftrightarrow \log_b a - \log_b(b^2) = 8$

$\Leftrightarrow \log_b a - 2 = 8$

$\Leftrightarrow \log_b a = 10$

$\log_b(a) = 10 \Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a b} = 10$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} = 10$

$\Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{10}$

$\log_a(b^5) - b^{3\log_b\left(\frac{1}{2}\right)} = 5\log_a(b) - b^{\log_b\left(\frac{1}{2}\right)^3} =$

$= 5 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$

$= \frac{3}{8}$

**10.**

**a)** $\frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{1500\, e^{0,2(t+1)}}{1500\, e^{0,2t}} =$

$= \frac{e^{0,2t + 0,2}}{e^{0,2t}} =$

$= e^{0,2t + 0,2 - 0,2t} =$

$= e^{0,2}$

$\approx 1,22$

Observe-se que $P(t + 1) = 1,22P(t)$, ou seja, $P(t + 1) = P(t) + 0,22P(t)$, o que significa que, a cada dia que passa o número de utilizadores desta aplicação está a crescer à taxa de, aproximadamente, 22%.

**b)** $f(-1) = 1500\, e \Leftrightarrow P(-1 + k) = 1500\, e$

$\Leftrightarrow 1500\, e^{0,2(-1+k)} = 1500\, e$

$\Leftrightarrow e^{0,2(-1+k)} = e$

$\Leftrightarrow 0,2(-1 + k) = 1$

$\Leftrightarrow -1 + k = 5$

$\Leftrightarrow k = 6$

**11.** Opção (A)

$(\ln(a^3) + \ln(a^4) + \ln(a^5)) \times (\ln 36)^{-1} = \frac{\ln(a^3 \times a^4 \times a^5)}{\ln 36} =$

$= \frac{\ln(a^{12})}{\ln(6^2)} =$

$= \frac{12 \ln a}{2 \ln 6} =$

$= 6\frac{\ln a}{\ln 6} =$

$= 6\log_6 a$

**12.** $h(t_1 + 5) = 1,35 \times h(t_1)$

Utilizando $x$ como variável independente:

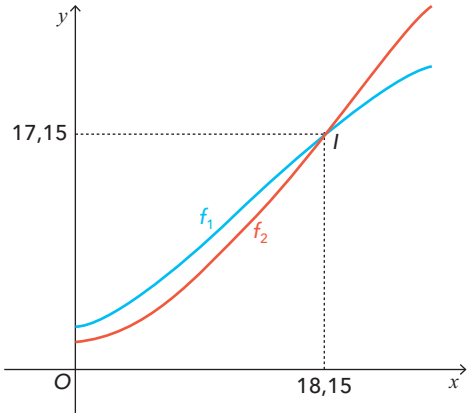
$h(x + 5) = 1,35 \times h(x)$

$\Leftrightarrow \frac{24}{1 + 16,24e^{-0,16(x+5)}} = 1,35 \times \frac{24}{1 + 16,24e^{-0,16x}}$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = \frac{24}{1 + 16,24e^{-0,16(x+5)}}$

$f_2(x) = 1,35 \times \frac{24}{1 + 16,24e^{-0,16x}}, \quad x > 0$




$t_1 \approx 18,2$

**13.** $\log_2\left(\sqrt{a+4}+\sqrt{a-4}\right)=b$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+4}+\sqrt{a-4}=2^b$

$\Leftrightarrow (a+4)-(a-4)=2^b\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)$

$\Leftrightarrow a+4-a+4=2^b\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)$

$\Leftrightarrow 8=2^b\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}=\dfrac{8}{2^b}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}=2^{3-b}$

Assim:

$\log_2\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)=\log_2(2^{3-b})=3-b$

**14.**

**a)** $P(0)=1200\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^0=1200$

$P(7)=1200\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^7$

$P(7)-P(0)=1200\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^7-1200\approx 3760$

O aumento foi de 3760 unidades, aproximadamente.

**b)** $P(t)=1200\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^t=1200\times 1{,}5^{\frac{t}{2}}=$

$=1200\times(e^{\ln(1{,}5)})^{\frac{t}{2}}=1200\times e^{\frac{\ln(1{,}5)}{2}\times t}$

$k=\dfrac{\ln(1{,}5)}{2}\Leftrightarrow k\approx 0{,}203$

$P(t)=1200\,e^{0{,}203t}$

**c)** $1200\,e^{0{,}203t}=3600\Leftrightarrow e^{0{,}203t}=\dfrac{3600}{1200}$

$\Leftrightarrow e^{0{,}203t}=3$

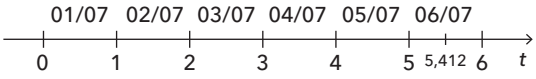
$\Leftrightarrow 0{,}203t=\ln 3$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 3}{0{,}203}$

$t\approx 5{,}412$ dias

5,412 dias = 5 dias + 0,412 dia

$0{,}412\times 24\approx 10$ horas




Às 10 h, aproximadamente, do dia 6 de julho.

**15.**

**a)** $t=0$

$\dfrac{350}{1+6\,e^{k\times 0}}=\dfrac{350}{1+6}=\dfrac{350}{7}=50$

50 chimpanzés.

**b)** $k=-0{,}2$

$\dfrac{350}{1+6\,e^{-0{,}2t}}=70$

$\Leftrightarrow \dfrac{350}{1+6\,e^{-0{,}2t}}-70=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{350-70-420e^{-0{,}2t}}{1+6\,e^{-0{,}2t}}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{280-420e^{-0{,}2t}}{1+6\,e^{-0{,}2t}}=0$

$\Leftrightarrow 280-420\,e^{-0{,}2t}=0\wedge \underbrace{1+6\,e^{-0{,}2t}\neq 0}_{\text{condição universal em }\mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow 280=420\,e^{-0{,}2t}$

$\Leftrightarrow \dfrac{280}{420}=e^{-0{,}2t}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}2t}=\dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow -0{,}2t=\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

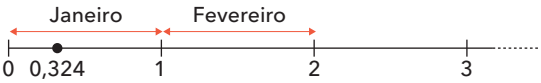
$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}2}$

$\Leftrightarrow t=-5\times\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$\Leftrightarrow t\approx 2{,}027$ anos

2,027 anos = 2 anos + 0,027 ano

$0{,}027\times 12=0{,}324$

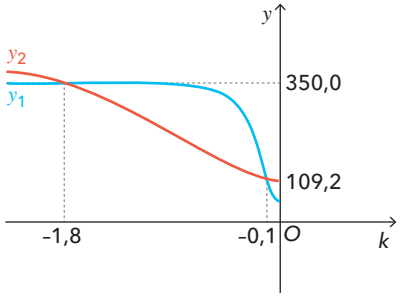



Em janeiro de 2024.

**c)** $\dfrac{350}{1+6\,e^{10k}}=50+\dfrac{350}{1+6\,e^{2k}}$

$y_1=\dfrac{350}{1+6\,e^{10k}}$

$y_2=50+\dfrac{350}{1+6\,e^{2k}}$




$k=-1{,}8\ \vee\ k=-0{,}1$

**16.** Para $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$h(x)=3\log_{64}(1+\operatorname{sen}x)+\log_4(1-\operatorname{sen}x)+\log_2(4\operatorname{sen}x)=$

$=3\dfrac{\log_4(1+\operatorname{sen}x)}{\log_4 64}+\log_4(1-\operatorname{sen}x)+\dfrac{\log_4(4\operatorname{sen}x)}{\log_4 2}=$

$=3\dfrac{\log_4(1+\operatorname{sen}x)}{\log_4(4^3)}+\log_4(1-\operatorname{sen}x)+\dfrac{\log_4(4\operatorname{sen}x)}{\frac{1}{2}}=$

$=3\dfrac{\log_4(1+\operatorname{sen}x)}{3}+\log_4(1-\operatorname{sen}x)+2\log_4(4\operatorname{sen}x)=$

$=\log_4(1+\operatorname{sen}x)+\log_4(1-\operatorname{sen}x)+2\log_4(4\operatorname{sen}x)=$

$=\log_4(1-\operatorname{sen}^2x)+2\log_4(4\operatorname{sen}x)=$

$=\log_4(\cos^2x)+\log_4((4\operatorname{sen}x)^2)=$

$=\log_4(\cos^2x)+\log_4(16\operatorname{sen}^2x)=$

$=\log_4(16\operatorname{sen}^2x\cos^2x)=$

$=\log_4(4^2(\operatorname{sen}x\cos x)^2)=$

$=\log_4(4^2)+\log_4((\operatorname{sen}x\cos x)^2)=$

$=2+2\log_4(\operatorname{sen}x\cos x)$

## Teste Final – páginas 78 a 81

**1.** Opção (A)

Comecemos por determinar a abcissa do ponto $A$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(2x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 10 = 1 \wedge 2x + 10 > 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \wedge x > -5$

A abcissa do ponto $A$ é $-\frac{9}{2}$.

Determinemos a ordenada do ponto $B$:

$f(0) = \log(2 \times 0 + 10) = \log(10) = 1$

$B$ tem ordenada 1.

Por fim, determinemos a ordenada do ponto $C$:

$g(0) = -2^{0+2} + 8 = -4 + 8 = 4$

$C$ tem ordenada 4.

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

$\frac{(4-1) \times \frac{9}{2}}{2} = \frac{27}{4}$ u.a.

**2.** Opção (D)

$\log_b\left(\frac{a}{b^2}\right) = 6 \Leftrightarrow \log_b a - \log_b(b^2) = 6$

$\Leftrightarrow \log_b a - 2 = 6$

$\Leftrightarrow \log_b a = 8$

$\Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a b} = 8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} = 8$

$\Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{8}$

$\log_a(b^2) - b^{3\log_b\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\log_a b - b^{\log_b\left(\frac{1}{2}\right)^3} =$

$= 2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

$= \frac{2}{8} - \frac{1}{8} =$

$= \frac{1}{8}$

**3.**

**3.1** $\frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{1500\, e^{0,3(t+1)}}{1500\, e^{0,3t}} =$

$= \frac{e^{0,3t+0,3}}{e^{0,3t}} =$

$= e^{0,3t+0,3-0,3t} =$

$= e^{0,3}$

$\approx 1,35$

Observe-se que $P(t + 1) = 1,35\, P(t)$, ou seja, $P(t + 1) = P(t) + 0,35\, P(t)$, o que significa que, a cada dia que passa, o número de indivíduos desta colónia está a crescer à taxa de, aproximadamente, 35%.

**3.2** $f(-1) = 1500e \Leftrightarrow P(-1 + k) = 1500e$

$\Leftrightarrow 1500\, e^{0,3(-1+k)} = 1500e$

$\Leftrightarrow e^{0,3(-1+k)} = e$

$\Leftrightarrow 0,3(-1 + k) = 1$

$\Leftrightarrow -1 + k = \frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow k = \frac{13}{3}$

**4.** **I.** Área no início: $A(0) = 1,5 \times e^0 \times (0 + 2)^2 = 1,5 \times 4 = 6$

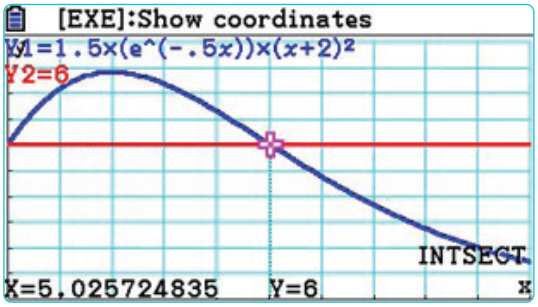
Logo, **I – b)**.

**II.** Queremos $A(x) = A(0) \Leftrightarrow A(x) = 6$

$\Leftrightarrow 1,5\, e^{-0,5x}\, (x + 2)^2 = 6$

Resolvendo graficamente na calculadora, obtém-se a solução não nula:

$x \approx 5,0257$ anos

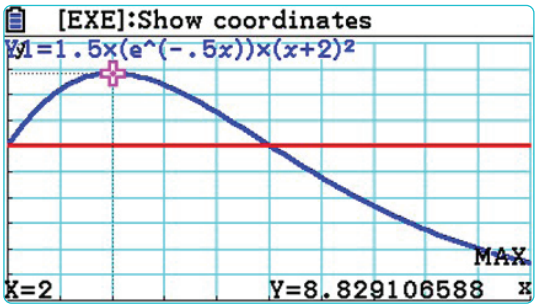



A parte "extra", para além de 5 anos, é:

$(5,0257 - 5) \times 365 \approx 0,0257 \times 365 \approx 9,3896 \approx 9$ dias

Logo, **II – a)**.

**III.**




Logo, **III – b)**.

Logo, **IV – c)**.

Assim, a resposta correta é: I – b); II – a); III – b); IV – c)

**5.** Observa que:

- $3 = 3^1$;
- $27 = 3^3$;
- o último termo é $3^{2n-1}$.

Logo:

$a_n = \ln(3^1) + \ln(3^3) + \ln(3^5) + \ldots + \ln(3^{2n-1}) =$

$= \ln 3 + 3 \ln 3 + 5 \ln 3 + \ldots + (2n - 1) \ln 3 =$

$= (1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)) \ln 3.$

Como $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ é a soma de $n$ termos de uma progressão aritmética:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = \frac{1 + 2n - 1}{2} \times n = n^2$

$= (1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)) \ln 3 =$

$= n^2 \ln 3$

Provámos, assim, que $a_n = \ln 3 \times n^2$.

**6.** Opção(A)

$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0$

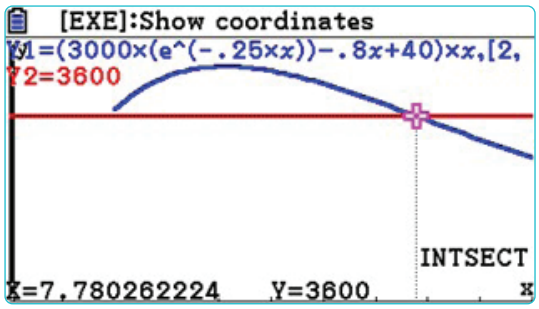
$\Leftrightarrow f(e^x) = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 3$

C.S. = {0, ln 3}

**7.** O valor total que se prevê obter com a venda é dado pelo produto do preço de cada unidade, $p$, pelo número de unidades vendidas, $N(p)$.
Assim, o valor total, em função do preço, é dado por $p \times N(p)$, e o preço que permite obter um valor total igual a 360 milhares de euros é a solução da equação $p \times N(p) = 3600$.
Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, e utilizando $x$ como variável independente:
$y_1 = x \times (3000\, e^{-0{,}25p} - 0{,}8p + 40$
$y_2 = 3600$




$x \approx 7{,}78$
Assim, o preço de cada *tablet*, para o qual o valor total que se prevê obter com a venda dos *tablets* seja igual a 360 milhares de euros, é 7,78 centenas de euros, ou seja, 778 euros.

**8.** Opção (B)
Sabemos que os gráficos cartesianos das funções $f$ e $f^{-1}$ são simétricos em relação à reta de equação $y = x$.
Das opções apresentadas, tal só se verifica na opção (B), sendo esta a resposta correta.

## Recorda – páginas 82 a 86

**1.**

**a)** $f(x) = x^3 - x$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{6 - 0}{3} = 2$$

**b)** $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x - 1}$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - \frac{5}{2}}{3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

**2.** Opção (C)
$2y + x = 3 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$
A taxa média de variação de $f$, entre $a$ e $b$, é o declive da reta secante $AB$, onde $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, que é $-\dfrac{1}{2}$.

**3.**

**a)** $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x - 1)^2}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x \to 1} (-(x - 1)) = 0$$
Assim, $f'(1) = 0$.

**b)** $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^3 + x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} (-2x^2 + 1) = 1$$
Assim, $f'(0) = 1$.

**c)** $$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x} - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1 + x}{x}}{x + 1} =$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x} = -1$$
Assim, $f'(-1) = -1$.

**d)** $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x + 2}{x - 1} - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{x + 2 - 4x + 4}{x - 1}}{x - 2} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{-3x + 6}{(x - 1)(x - 2)} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{-3(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{-3}{x - 1} =$$
$$= -3$$
Assim, $f'(2) = -3$.

**4.** Opção (D)
O valor de $f'(a)$, derivada da função $f$ no ponto de abcissa $a$, é o declive da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $a$, que, por observação gráfica, é um declive positivo. Assim, das opções apresentadas, só 1 satisfaz a condição.

**5.**

**a)** $$f'(x) = \left(-x^4 + 2x^3 - 5x^2 + \frac{x}{2}\right)' = -4x^3 + 6x^2 - 10x + \frac{1}{2}$$

**b)** $$f'(x) = \left(\frac{5x}{2x + 3}\right)' = \frac{(5x)' \times (2x + 3) - 5x \times (2x + 3)'}{(2x + 3)^2} =$$
$$= \frac{5 \times (2x + 3) - 5x \times 2}{(2x + 3)^2} =$$
$$= \frac{15}{(2x + 3)^2}$$

**c)** $$f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{(2)' \times x - 2 \times (x)'}{x^2} = \frac{0 - 2 \times 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

**Outro processo**
$$f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = 2 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^2}$$

**d)** $$f'(x) = \left(\left(\frac{x - 5}{x + 2}\right)^3\right)' =$$
$$= 3 \times \left(\frac{x - 5}{x + 2}\right)^2 \times \left(\frac{x - 5}{x + 2}\right)' =$$
$$= 3 \times \left(\frac{x - 5}{x + 2}\right)^2 \times \frac{(x - 5)' \times (x + 2) - (x - 5) \times (x + 2)'}{(x + 2)^2} =$$
$$= 3 \times \frac{(x - 5)^2}{(x + 2)^2} \times \frac{1 \times (x + 2) - (x - 5) \times 1}{(x + 2)^2} =$$
$$= \frac{3(x - 5)^2 \times 7}{(x + 2)^4} =$$
$$= \frac{21(x - 5)^2}{(x + 2)^4}$$

**e)** $f'(x) = \left((-x+1) \times \frac{2}{x+1}\right)' =$

$= (-x+1)' \times \frac{2}{x+1} + (-x+1) \times \left(\frac{2}{x+1}\right)' =$

$= -1 \times \frac{2}{x+1} + (-x+1) \times \frac{2' \times (x+1) - 2 \times (x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= -\frac{2}{x+1} + (-x+1)\frac{-2}{(x+1)^2} =$

$= -\frac{2(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2(-x+1)}{(x+1)^2} =$

$= \frac{-2x-2+2x-2}{(x+1)^2} =$

$= \frac{-4}{(x+1)^2}$

**f)** $f'(x) = \left((3x+x^2)^2 \times \frac{4}{(x-2)^2}\right)' =$

$= ((3x+x^2)^2)' \times \frac{4}{(x-2)^2} + (3x+x^2)^2 \times \left(\frac{4}{(x-2)^2}\right)' =$

$= 2(3x+x^2)^1 (3x+x^2)' \times \frac{4}{(x-2)^2} + (3x+x^2)^2 \times$

$\times \frac{4' \times (x-2)^2 - 4 \times ((x-2)^2)'}{((x-2)^2)^2} =$

$= 2(3x+x^2)(3+2x) \times \frac{4}{(x-2)^2} + (3x+x^2)^2 \times$

$\times \frac{0 - 4 \times 2 \times (x-2)^1 \times (x-2)'}{(x-2)^4}$

$= \frac{8(3x+x^2)(3+2x)}{(x-2)^2} + (3x+x^2)^2 \times \frac{-8(x-2)}{(x-2)^4} =$

$= \frac{8(3x+x^2)(3+2x)(x-2)}{(x-2)^3} + \frac{-8(3x+x^2)^2}{(x-2)^3} =$

$= \frac{8(3x+x^2)[(3+2x)(x-2) - (3x+x^2)]}{(x-2)^3} =$

$= \frac{8(3x+x^2)(x^2-4x-6)}{(x-2)^3}$

**6.** Opção (B)

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f'$ | + | | 0 | | − |
| Variação de $f$ | ↗ | | $f(1)$ Máx. | | ↘ |

**7.** $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x - 2 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x - 2\right)' = x^2 + x - 6 \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f'$ | + | | 0 | − | 0 | | + |
| Variação de $f$ | ↗ | | $f(-3)$ Máx. | ↘ | $f(2)$ mín. | | ↗ |

**Cálculos auxiliares**

- $f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6 \times (-3) - 2 = \frac{23}{2}$
- $f(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 6 \times 2 - 2 = -\frac{28}{3}$

$f$ é estritamente crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]2, +\infty[$; $f$ é estritamente decrescente em $]-3, 2[$; $\frac{23}{2}$ é máximo relativo em $x = -3$; $-\frac{28}{3}$ é mínimo relativo em $x = 2$.

## Capítulo 5 – Derivadas

### Tarefa – As tangentes – página 87

**1.**

**a)** $f(x) = 2^x$

| $x_0$ | $f(x_0)$ | Declive da tangente | $f'(x_0)$ |
|---|---|---|---|
| −1 | 0,500 | 0,347 | 0,347 |
| 0 | 1,000 | 0,693 | 0,693 |
| 1 | 2,000 | 1,386 | 1,386 |
| 2 | 4,000 | 2,773 | 2,773 |

**b)** $f(x) = 2{,}7^x$

| $x_0$ | $f(x_0)$ | Declive da tangente | $f'(x_0)$ |
|---|---|---|---|
| −1 | 0,370 | 0,368 | 0,368 |
| 0 | 1,000 | 0,993 | 0,993 |
| 1 | 2,700 | 2,682 | 2,682 |
| 2 | 7,290 | 7,241 | 7,241 |

**c)** $f(x) = 2{,}71^x$

| $x_0$ | $f(x_0)$ | Declive da tangente | $f'(x_0)$ |
|---|---|---|---|
| −1 | 0,369 | 0,368 | 0,368 |
| 0 | 1,000 | 0,997 | 0,997 |
| 1 | 2,710 | 2,702 | 2,702 |
| 2 | 7,344 | 7,322 | 7,322 |

**2.** Parece existir um valor de $a \in [2, 3]$, aproximadamente, $a = 2{,}718$, para o qual a função $f(x) = a^x$ coincide com a sua derivada.

### Exercícios de margem – páginas 88 a 107

**1.** Opção (B)
$h(x) = e^{\pi}$
$h'(x) = 0$
Logo, $h'(1) = 0$.

**2.**

**a)** $f'(x) = (6x^2 + e^x)' =$
$= (6x^2)' + (e^x)' =$
$= 12x + e^x$

**b)** $g'(x) = ((x^2 + 3x) \times e^x)' =$
$= (x^2 + 3x)' \times e^x + (x^2 + 3x) \times (e^x)' =$
$= (2x + 3) \times e^x + (x^2 + 3x) \times e^x =$
$= e^x (2x + 3 + x^2 + 3x) =$
$= e^x (x^2 + 5x + 3)$

**c)** $h'(x) = \left(\frac{2x}{e^x}\right)' = \frac{(2x)' \times e^x - (2x) \times (e^x)'}{(e^x)^2} =$

$= \frac{2 \times e^x - 2x \times e^x}{(e^x)^2} =$

$= \frac{e^x(2 - 2x)}{(e^x)^2} =$

$= \frac{2 - 2x}{e^x}$

**d)** $i'(x) = (\ln x + e^x)' = (\ln x)' + (e^x)' = \frac{1}{x} + e^x$

**3.**

**a)** $i'(x) = (e^{2x-7})' = (2x - 7)' e^{2x-7} = 2e^{2x-7}$

**b)** $j'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

**c)** $k'(x) = (3e^{x+\sqrt{x}} + x^2)' =$

$= 3\left(x + \sqrt{x}\right)' e^{x+\sqrt{x}} + 2x =$

$= 3\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) e^{x+\sqrt{x}} + 2x$

**d)** $i'(x) = (\ln(x^2 + 2))' = \frac{(x^2 + 2)'}{x^2 + 2} = \frac{2x}{x^2 + 2}$

**4.**

**a)** $f'(x) = (10^x)' = 10^x \ln 10$

**b)** $g'(x) = (2^x + \ln x)' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x}$

**c)** $h'(x) = (3^x + x^3)' = 3^x \ln 3 + 3x^2$

**d)** $i'(x) = (e^x \ln x)' =$

$= (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' =$

$= e^x \ln x + e^x \times \frac{1}{x} =$

$= e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

**e)** $j'(x) = (x \ln x)' =$

$= x' \ln x + x (\ln x)' =$

$= \ln x + x \times \frac{1}{x} =$

$= 1 + \ln x$

**f)** $k'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' =$

$= \frac{x' \ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} =$

$= \frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} =$

$= \frac{-1 + \ln x}{(\ln x)^2}$

**g)** $l'(x) = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

**5.**

**a)** $f'(x) = (e^{2x+3})' =$

$= (2x + 3)' e^{2x+3} =$

$= 2e^{2x+3}$

$f'(0) = 2e^3$

$f(0) = e^3$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 0 é $y = 2e^3x + e^3$.

**b)** $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2e^{2x+3} = 2$

$\Leftrightarrow e^{2x+3} = 1$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = e^0 = 1$

$1 = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = 4$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$, que é paralela à reta de equação $y = 2x$, é $y = 2x + 4$.

**6.** $f(2) = \ln(1 + 2^2) = \ln 5$

$f'(x) = (\ln (1 + x^2))' =$

$= \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} =$

$= \frac{2x}{1 + x^2}$

$f'(x) = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$

$\ln 5 = \frac{4}{5} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{5} + \ln 5$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ em $x = 2$ é $y = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5} + \ln 5$.

$\ln 5 = -\frac{5}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2} + \ln 5$

A equação reduzida da reta normal ao gráfico de $f$ em $x = 2$ é $y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2} + \ln 5$.

**7.**

**a)** $f'(x) = (2^{2x-7})' =$

$= (2x - 7)' \times 2^{2x-7} \times \ln 2 =$

$= 2 \ln 2 \times 2^{2x-7}$

**b)** $g'(x) = (10^{x^2-3x+4})' =$

$= (x^2 - 3x + 4)' \times 10^{x^2-3x+4} \times \ln 10 =$

$= (2x - 3) \times 10^{x^2-3x+4} \times \ln 10$

**c)** $h'(x) = (\log_2(-2x + 1))' =$

$= \frac{(-2x + 1)'}{(-2x + 1) \ln 2} =$

$= \frac{-2}{(-2x + 1) \ln 2}$

**d)** $i'(x) = \left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x} \times \ln 10} =$

$= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} \times \ln 10} =$

$= -\frac{1}{x \ln 10}$

**e)** $j'(x) = \left(\sqrt{\ln x}\right)' =$

$= \left((\ln x)^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}}(\ln x)' =$

$= \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \times \frac{1}{x} =$

$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

**8.**

**a)** $f'(x) = ((x^2 + 5x)^3)' =$

$= 3(x^2 + 5x)^2 \times (x^2 + 5x)' =$

$= 3(x^2 + 5x)^2 \times (2x + 5) =$

$= (6x + 15)(x^2 + 5x)^2$

**b)** $g'(x) = (3^{x^2 + 5x})' =$

$= (x^2 + 5x)' \times 3^{x^2 + 5x} \times \ln 3 =$

$= (2x + 5) \times 3^{x^2 + 5x} \times \ln 3$

**9.**

**a)** $f'(x) = (3 \operatorname{sen} x + 4)' =$

$= (3 \operatorname{sen} x)' + 4' =$

$= 3 \cos x$

**b)** $f'(x) = (x^2 - \cos x)' =$

$= (x^2)' - (\cos x)' =$

$= 2x + \operatorname{sen} x$

**c)** $f'(x) = (\operatorname{sen}(5x + \pi))' =$

$= (5x + \pi)' \cos(5x + \pi) =$

$= 5 \cos(5x + \pi)$

**d)** $f'(x) = \left(\frac{\cos(2x)}{x}\right)' =$

$= \frac{(\cos(2x))' \times x - (\cos(2x)) \times x'}{x^2} =$

$= \frac{-2 \operatorname{sen}(2x) \times x - \cos(2x)}{x^2} =$

$= -\frac{2x \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)}{x^2}$

**e)** $f'(x) = (\operatorname{sen}^3(5x))' = 3 \operatorname{sen}^2(5x) \times (\operatorname{sen}(5x))' =$

$= 3 \operatorname{sen}^2(5x) \times 5 \times \cos(5x) =$

$= 15 \operatorname{sen}^2(5x) \cos(5x)$

**f)** $f'(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)' = \cos x - \operatorname{sen} x$

**g)** $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\cos x)' \times \operatorname{sen} x - \cos x \times (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$= \frac{-\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x - \cos x \times \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} =$

$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

**h)** $f'(x) = (\cos(x^2) - 3 \operatorname{sen}^2 x)' =$

$= (\cos(x^2))' - 3 \times (\operatorname{sen}^2 x)' =$

$= -(x^2)' \operatorname{sen}(x^2) - 3 \times 2 \operatorname{sen} x \times (\operatorname{sen} x)' =$

$= -2x \operatorname{sen}(x^2) - 6 \operatorname{sen} x \cos x$

**i)** $f'(x) = (\operatorname{tg} x \times \operatorname{sen} x)' =$

$= (\operatorname{tg} x)' \times \operatorname{sen} x + (\operatorname{tg} x) \times (\operatorname{sen} x)' =$

$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x \times \cos x =$

$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \cos x =$

$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \operatorname{tg} x \times \cos x =$

$= \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x\right)$

**j)** $f'(x) = (\operatorname{tg}(2x) + x)' = \frac{2}{\cos^2(2x)} + 1$

**10.**

**a)** $f(x) = x^3 e^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^3 e^{-x})' =$

$= (x^3)' \times e^{-x} + x^3 \times (e^{-x})' =$

$= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} =$

$= e^{-x} x^2 (3 - x)$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \times x^2(3 - x) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \vee x^2 = 0 \vee 3 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x} \times x^2$ | + | | 0 | + | + | + |
| $3 - x$ | + | + | + | 0 | – | |
| Sinal de $f'$ | + | | 0 | + | 0 | – |
| Variação de $f$ | ↗ | | $f(0)$ | ↗ | Máx. $f(3)$ | ↘ |

**Cálculos auxiliares**

- $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$
- $f(3) = 3^3 \times e^{-3} = \frac{27}{e^3}$

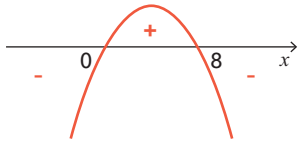
$f$ é estritamente crescente em $]-\infty, 3[$ e é estritamente decrescente em $]3, +\infty[$; $\frac{27}{e^3}$ é máximo relativo para $x = 3$.

**b)** $g(x) = \ln(-x^2 + 8x)$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 8x > 0\} = ]0, 8[$

**Cálculo auxiliar**

$-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$




$g'(x) = (\ln(-x^2 + 8x))' = \frac{(-x^2 + 8x)'}{-x^2 + 8x} = \frac{-2x + 8}{-x^2 + 8x}$

$D_{g'} = ]0, 8[$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 8}{-x^2 + 8x} = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \wedge x \in D_{g'}$

$\Leftrightarrow x = 4$

| $x$ | 0 | | 4 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+8$ | n.d. | + | 0 | – | n.d. |
| $-x^2+8x$ | n.d. | + | + | + | n.d. |
| Sinal de $g'$ | n.d. | + | 0 | – | n.d. |
| Variação de $g$ | n.d. | ↗ | Máx. $g(4)$ | ↘ | n.d. |

**Cálculo auxiliar**

$g(4) = \ln(-4^2 + 8 \times 4) = \ln 16$

$g$ é estritamente crescente em $]0, 4[$ e é estritamente decrescente em $]4, 8[$; $\ln 16$ é máximo relativo para $x = 4$.

**c)** $h(x) = x - \ln(1 - e^{-x})$

$D_h = \{x \in \mathbb{R}: 1 - e^{-x} > 0\} = \mathbb{R}^+$

**Cálculo auxiliar**

$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1$
$\Leftrightarrow -x < \ln 1 \Leftrightarrow x > 0$

$h'(x) = (x - \ln(1 - e^{-x}))' =$

$= x' - \dfrac{(1 - e^{-x})'}{1 - e^{-x}} =$

$= 1 - \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} =$

$= \dfrac{1 - 2e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

$D_{h'} = \mathbb{R}^+$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - 2e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \wedge x \in D_{h'}$

$\Leftrightarrow 2e^{-x} = 1 \wedge x \in D_{h'}$

$\Leftrightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{2} \wedge x \in D_{h'}$

$\Leftrightarrow -x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \wedge x \in D_{h'}$

$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \wedge x \in D_{h'}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

| $x$ | 0 | | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $1 - 2e^{-x}$ | n.d. | – | 0 | + |
| $1 - e^{-x}$ | n.d. | + | + | + |
| Sinal de $h'$ | n.d. | – | 0 | + |
| Variação de $h$ | n.d. | ↘ | mín. $h(\ln 2)$ | ↗ |

**Cálculo auxiliar**

$h(\ln 2) = \ln 2 - \ln(1 - e^{-\ln 2}) =$

$= \ln 2 - \ln\left(1 - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right) =$

$= \ln 2 - \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) =$

$= \ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2$

$h$ é estritamente decrescente em $]0, \ln 2[$ e é estritamente crescente em $]\ln 2, +\infty[$; $2 \ln 2$ é mínimo relativo de $h$ para $x = \ln 2$.

**11.** $R(t) = 4t\, e^{-0{,}16t} \quad D_R = \mathbb{R}^+$

$R'(t) = 4(t' \times e^{-0{,}16t} + t \times (e^{-0{,}16t})') =$

$= 4(e^{-0{,}16t} - t \times 0{,}16e^{-0{,}16t}) =$

$= 4e^{-0{,}16t}(1 - 0{,}16t)$

$R'(t) = 0 \Leftrightarrow 4e^{-0{,}16t}(1 - 0{,}16t) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{4e^{-0{,}16t} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 1 - 0{,}16t = 0$

$\Leftrightarrow t = 6{,}25$

| $x$ | 0 | | 6,25 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Sinal de $R'$ | n.d. | + | 0 | – |
| Variação de $R$ | n.d. | ↗ | Máx. | ↘ |

A população de roedores é máxima após 6,25 semanas do solstício de inverno. Como o tempo de inclinação dos ovos de falcão é cinco semanas, para que o nascimento de filhotes de falcão coincida com a época em que a população de roedores é máxima, os ovos deverão ser postos após 1,25 semanas do solstício de inverno.

**12.**

**a)** $f(x) = \dfrac{4{,}6 \ln(2x)}{x}$

$D_f = [0{,}5; +\infty[$

$f'(x) = \left(4{,}6 \dfrac{\ln(2x)}{x}\right)' =$

$= 4{,}6 \times \dfrac{(\ln(2x))' \times x - \ln(2x) \times x'}{x^2} =$

$= 4{,}6 \times \dfrac{\frac{2}{2x} \times x - \ln(2x) \times 1}{x^2} =$

$= 4{,}6 \times \dfrac{1 - \ln(2x)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4{,}6 \times \dfrac{1 - \ln(2x)}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln(2x) = 0 \wedge x \in D_{f'}$

$\Leftrightarrow \ln(2x) = 1 \wedge x \in D_{f'}$

$\Leftrightarrow 2x = e \wedge x \in D_{f'}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{e}{2}$

| $x$ | 0,5 | | $\frac{e}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $4{,}6(1 - \ln(2x))$ | + | + | 0 | – |
| $x^2$ | + | + | + | + |
| Sinal de $f'$ | + | + | 0 | – |
| Variação de $f$ | mín. $f(0{,}5)$ | ↗ | Máx. $f\left(\frac{e}{2}\right)$ | ↘ |

**Cálculos auxiliares**

- $f(0{,}5) = \dfrac{4{,}6 \ln 1}{0{,}5} = 0$
- $f\left(\dfrac{e}{2}\right) = \dfrac{4{,}6 \ln\left(2 \times \frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \dfrac{4{,}6 \times 1}{\frac{e}{2}} = \dfrac{9{,}2}{e}$

$f$ é estritamente crescente em $\left]0{,}5; \dfrac{e}{2}\right[$ e é estritamente decrescente em $\left]\dfrac{e}{2}, +\infty\right[$; 0 é mínimo relativo para $x = 0{,}5$; $\dfrac{9{,}2}{e}$ é máximo relativo para $x = \dfrac{e}{2}$.

Como $\dfrac{e}{2} \approx 1{,}4$, então é com 1,4 anos de idade que as fêmeas geram o maior número de indivíduos.

**b)** $\text{t.m.v.}_{[2,\,4]} = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} =$

$$= \frac{\frac{4{,}6 \ln 8}{4} - \frac{4{,}6 \ln 4}{2}}{2} =$$

$$= \frac{4{,}6 \times \frac{1}{4} \ln 8 - 4{,}6 \times \frac{1}{2} \ln 4}{2} =$$

$$= \frac{4{,}6 \times \ln\left(8^{\frac{1}{4}}\right) - 4{,}6 \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right)}{2} =$$

$$= \frac{4{,}6}{2} \times \ln\left(\frac{8^{\frac{1}{4}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= 2{,}3 \ln\left(\frac{(2^3)^{\frac{1}{4}}}{2}\right) =$$

$$= 2{,}3 \ln\left(\frac{2^{\frac{3}{4}}}{2}\right) =$$

$$= 2{,}3 \ln\left(2^{-\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= 2{,}3 \ln\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

**13.**

**a)** $f'(x) = (2x^5 + 3x^2 - 4)' = 10x^4 + 6x$

$f''(x) = (10x^4 + 6x)' = 40x^3 + 6$

$f'': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 40x^3 + 6$

**b)** $f'''(x) = (40x^3 + 6)' = 120x^2$

$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow 120x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x = 0$ é o único zero de $f'''$.

**c)** $f^{(IV)}(x) = (120x^2)' = 240x$

$f^{(V)}(x) = 240$

$f^{(VI)}(x) = 0$

$n = 6$

**14.**

**a)** $f(x) = \ln x$

$f'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

**b)** $g(x) = e^{2x}$

$g'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$

$g''(x) = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$

**c)** $h(x) = \text{sen}(3x)$

$h'(x) = (\text{sen}(3x))' = 3\cos(3x)$

$h''(x) = (3\cos(3x))' = -9\,\text{sen}(3x)$

**d)** $i(x) = x^2 \ln x$

$i'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' =$

$= 2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} =$

$= 2x \ln x + x$

$i''(x) = (2x \ln x + x)' = (2x \ln x)' + x' =$

$= (2x)' \ln x + (2x)(\ln x)' + 1 =$

$= 2 \ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} + 1 =$

$= 2 \ln x + 2 + 1 =$

$= 2 \ln x + 3$

**15.**

**a)** Como se observa pelo gráfico apresentado, $f'$ é uma função negativa em todo o seu domínio, logo, $f$ é estritamente decrescente, pelo que, dos valores de $x$ assinalados, é em $x_5$ que $f$ assume o menor valor.

**b)** Pelo mesmo motivo da alínea anterior, é em $x_1$ que $f$ assume o maior valor.

**c)** Por observação do gráfico de $f'$, conclui-se que, dos valores assinalados, é em $x_5$ que $f'$ atinge o menor valor.

**d)** Pelo mesmo motivo da alínea anterior, dos valores assinalados, é em $x_2$ que $f'$ assume o maior valor.

**e)** Como o gráfico apresentado diz respeito à função $f'$, tem-se que os declives das retas tangentes ao gráfico de $f'$, nos pontos de abcissa $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ e $x_5$, correspondem aos valores de $f''(x_1)$, $f''(x_2)$, $f'(x_3)$, $f''(x_4)$ e $f'(x_5)$.

Assim, e como em $x_3$ e em $x_5$ a reta tangente ao gráfico tem declive igual e negativo, conclui-se que é em $x_3$ e em $x_5$ que $f''$ assume o menor valor.

**f)** Pelo mesmo motivo da alínea anterior, conclui-se que, dos valores assinalados, é apenas em $x_1$ que a reta tangente ao gráfico de $f'$ tem declive positivo, logo, é em $x_1$ que $f''$ assume o maior valor.

**16.** Opção (A)

Por observação da representação gráfica de $g'$, sabe-se que:

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| **Variação de $g'$** | ↗ | Máx. | ↘ | mín. | ↗ |

Completando a tabela anterior, e sendo $g'$ uma função contínua, terá de se verificar:

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sinal de $g''$** | + | 0 | − | 0 | + |
| **Variação de $g'$** | ↗ | Máx. | ↘ | mín. | ↗ |

Das opções apresentadas, apenas a representação gráfica que se encontra na opção (A) verifica todas as condições.

**17.** Opção (D)

$f''(x) = 4 - x^2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sinal de $f''$** | − | 0 | + | 0 | − |
| **Sentido das concavidades do gráfico de $f$** | ∩ | P.I. | ∪ | P.I. | ∩ |

O gráfico da função $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-2, 2[$, apresenta dois pontos de inflexão nos pontos de abcissas $-2$ e $2$.
Das opções apresentadas, apenas a representação gráfica que se encontra na opção (D) verifica estas características.

**18.** Opção (C)

$f''(x) = x + 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | $-$ | 0 | $+$ |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | $\cap$ | P.I. | $\cup$ |

Assim, $-3$ é a abcissa do ponto de inflexão do gráfico de $f$.

**19.**

**a)** $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 + 12x - 5 \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$

$f''(x) = 12x + 12 \qquad D_{f''} = \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | $-$ | 0 | $+$ |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | $\cap$ | P.I. $f(-1)$ | $\cup$ |

**Cálculo auxiliar**

$f(-1) = 10$

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-1, 10)$.

**b)** $g(x) = x + \frac{4}{x} \qquad D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g'(x) = 1 + \frac{4' \times x - 4 \times x'}{x^2} =$

$= 1 - \frac{4}{x^2} \qquad D_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g''(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)' = 0 - \frac{4' \times x^2 - 4 \times (x^2)'}{(x^2)^2} =$

$= -\frac{0 - 8x}{x^4} =$

$= \frac{8}{x^3} \qquad D_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 0$

condição impossível, logo $g''$ não tem zeros.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Sinal de $g''$ | $-$ | n.d. | $+$ |
| Sentido das concavidades do gráfico de $g$ | $\cap$ | n.d. | $\cup$ |

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$. Não existem pontos de inflexão.

**20.** Opção (B)

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^3(x^2-4)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \vee \underbrace{x^2 + \frac{1}{2} = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \vee (x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)^3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2 - 4$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x^2 + \frac{1}{2}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x+1)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Sinal de $f''$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | $\cap$ | P.I. | $\cup$ | | $\cup$ | P.I. | $\cap$ | P.I. | $\cup$ |

O gráfico de $f$ tem três pontos de inflexão.

**21.**

**a)** $f''(x) = \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)' =$

$= \frac{(1 + \ln x)'\, x - (1 + \ln x)\, x'}{x^2} =$

$= \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x)}{x^2} =$

$= \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} =$

$= -\frac{\ln x}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = 1$

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | n.d. | $+$ | 0 | $-$ |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | n.d. | $\cup$ | P.I. 0 | $\cap$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1, +\infty[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 0)$.

**22.**

**a)** $f(x) = (x^2 + x + 2)e^{-x} \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^2 + x + 2)' \times e^{-x} + (x^2 + x + 2) \times (e^{-x})' =$

$= (2x + 1) \times e^{-x} - (x^2 + x + 2)\, e^{-x} =$

$= e^{-x}(2x + 1 - x^2 - x - 2) =$

$= e^{-x}(-x^2 + x - 1) \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$

$f''(x) = (e^{-x})' \times (-x^2 + x - 1) + (e^{-x}) \times (-x^2 + x - 1)' =$
$= -e^{-x}(-x^2 + x - 1) + e^{-x}(-2x + 1) =$
$= e^{-x}(x^2 - x + 1 - 2x + 1) =$
$= e^{-x}(x^2 - 3x + 2) \qquad D_{f''} = \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - 3x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | + | 0 | – | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | ∪ | P.I. | ∩ | P.I. | ∪ |

**Cálculos auxiliares**
- $f(1) = 4e^{-1}$
- $f(2) = 8e^{-2}$

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2[$.
Existem dois pontos de inflexão de coordenadas $(1, 4e^{-1})$ e $(2, 8e^{-2})$.

**b)** $g(x) = (\ln x)^2 \qquad D_g = \mathbb{R}^+$

$g'(x) = ((\ln x)^2)' =$
$= 2 \ln x \times (\ln x)' =$
$= 2 \ln x \times \frac{1}{x} \qquad D_{g'} = \mathbb{R}^+$

$g''(x) = \left(\frac{2 \ln x}{x}\right)' =$
$= 2 \times \frac{(\ln x)' \times x - (\ln x) \times x'}{x^2} =$
$= 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} =$
$= 2 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad D_{g''} = \mathbb{R}^+$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$
$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x \in D_{g''}$
$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x \in D_{g''}$
$\Leftrightarrow x = e$

| $x$ | 0 | | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2(1 - \ln x)$ | n.d. | + | 0 | – |
| $x^2$ | n.d. | + | + | + |
| Sinal de $g''$ | n.d. | + | 0 | – |
| Sentido das concavidades do gráfico de $g$ | n.d. | ∪ | P.I. $g(e)$ | ∩ |

**Cálculo auxiliar**
$g(e) = (\ln e)^2 = 1$

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para cima em $]0, e[$ e tem concavidade voltada para baixo em $]e, +\infty[$. Apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(e, 1)$.

**c)** $h(x) = x^2 - 2 \ln x \qquad D_h = \mathbb{R}^+$
$h'(x) = (x^2 - 2 \ln x)' = 2x - 2 \times \frac{1}{x} \qquad D_{h'} = \mathbb{R}^+$

$h''(x) = \left(2x - 2 \times \frac{1}{x}\right)' =$
$= 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$
$= 2 + \frac{2}{x^2} \qquad D_{h''} = \mathbb{R}^+$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2 + \frac{2}{x^2} = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}}$, logo $h''$ não tem zeros.

| $x$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Sinal de $h''$ | n.d. | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $h$ | n.d. | ∪ |

O gráfico de $h$ apresenta a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio.
Não existem pontos de inflexão.

**23.**

**a)** $Q'(t) = \left(1 - \frac{3t}{t^2 + 4}\right)' =$
$= -\frac{(3t)'(t^2 + 4) - 3t(t^2 + 4)'}{(t^2 + 4)^2} =$
$= -\frac{3t^2 + 12 - 6t^2}{(t^2 + 4)^2} =$
$= \frac{3t^2 - 12}{(t^2 + 4)^2}$

Logo, $Q'(3) = \frac{3 \times 3^2 - 12}{(3^2 + 4)^2} = \frac{15}{169} = 0{,}09$.
Após três dias da descoberta do surto, o número de pessoas contagiadas está a aumentar aproximadamente à taxa de 9 pessoas por dia.

**b)** $Q''(t) = \left(\frac{3t^2 - 12}{(t^2 + 4)^2}\right)' =$
$= \frac{(3t^2 - 12)'(t^2 + 4)^2 - (3t^2 - 12)((t^2 + 4)^2)'}{(t^2 + 4)^4} =$
$= \frac{6t(t^2 + 4)^2 - (3t^2 - 12)2(t^2 + 4)2t}{(t^2 + 4)^4} =$
$= \frac{(t^2 + 4)[6t(t^2 + 4) - 4t(3t^2 - 12)]}{(t^2 + 4)^4} =$
$= \frac{2t[3(t^2 + 4) - 2(3t^2 - 12)]}{(t^2 + 4)^3} =$
$= \frac{2t(3t^2 + 12 - 6t^2 + 24)}{(t^2 + 4)^3} =$
$= \frac{2t(-3t^2 + 36)}{(t^2 + 4)^3}$

$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2t(-3t^2 + 36)}{(t^2 + 4)^3} = 0$
$\Leftrightarrow 2t(-3t^2 + 36) = 0 \wedge \underbrace{(t^2 + 4)^3 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$
$\Leftrightarrow 2t = 0 \vee -3t^2 + 36 = 0$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 = 12$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2\sqrt{3} \vee t = -2\sqrt{3}$

Como $t \geq 0$, então, $t = 0 \vee t = 2\sqrt{3}$.

| $t$ | 0 | | $2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2t$ | 0 | + | + | + |
| $(-3t^2 + 36)$ | + | + | 0 | − |
| $(t^2 + 4)^3$ | + | + | + | + |
| Sinal de $Q''$ | 0 | + | 0 | − |
| Variação de $Q'$ | mín. | ↗ | Máx. | ↘ |

O máximo de $Q'$ é atingido quando $t = 2\sqrt{3}$. Como $2\sqrt{3} \approx 3{,}5$; conclui-se que o momento em que a doença está a alastrar-se mais rapidamente é 3,5 dias, aproximadamente, após o seu aparecimento.

## Aprende fazendo (5) – páginas 109 a 113

**24.**

**a)** $a'(x) = (e^{2x+1})' = (2x+1)' \times e^{2x+1} = 2e^{2x+1}$

**b)** $b'(x) = (\ln(2x+1))' = \dfrac{(2x+1)'}{2x+1} = \dfrac{2}{2x+1}$

**c)** $c'(x) = (2e^{-x^2} + 2x)' =$
$= 2 \times (-x^2)' \times e^{-x^2} + x' \times 2^x \times \ln 2 =$
$= -4xe^{-x^2} + 2^x \times \ln 2$

**d)** $d'(x) = (\ln(\ln x))' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$

**e)** $e'(x) = \left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)' = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\dfrac{x}{x^2} = -\dfrac{1}{x}$

**f)** $f'(x) = (e^{4x} \log_2(3x))' =$
$= (e^{4x})' \times \log_2(3x) + e^{4x} \times (\log_2(3x))' =$
$= 4e^{4x} \times \log_2(3x) + e^{4x} \times \dfrac{3}{3x \times \ln 2} =$
$= 4e^{4x} \times \log_2(3x) + \dfrac{e^{4x}}{x \ln 2}$

**g)** $g'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x^4}\right)' =$
$= \dfrac{(\ln x)' \times x^4 - (\ln x) \times (x^4)'}{(x^4)^2} =$
$= \dfrac{\frac{1}{x} \times x^4 - \ln x \times 4x^3}{x^8} =$
$= \dfrac{x^3(1 - 4\ln x)}{x^8} =$
$= \dfrac{1 - 4\ln x}{x^5}$

**h)** $h'(x) = \left(\sqrt{\ln(5x)}\right)' = \left((\ln(5x))^{\frac{1}{2}}\right)' =$
$= \dfrac{1}{2}(\ln(5x))^{-\frac{1}{2}} \times (\ln(5x))' =$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\ln(5x)}} \times \dfrac{5}{5x} =$
$= \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(5x)}}$

**i)** $i'(x) = \left(\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^3\right)' = 3 \times \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2 \times \left(\dfrac{e^x}{x}\right)' =$
$= 3 \times \dfrac{(e^x)^2}{x^2} \times \dfrac{(e^x)' \times x - e^x \times x'}{x^2} =$
$= \dfrac{3e^{2x}}{x^2} \times \dfrac{e^x \times x - e^x}{x^2} =$
$= \dfrac{3e^{2x} \times e^x(x-1)}{x^4} =$
$= \dfrac{3e^{3x}(x-1)}{x^4}$

**j)** $j(x) = \dfrac{x}{\cos x}$
$j'(x) = \left(\dfrac{x}{\cos x}\right)' = \dfrac{x' \times \cos x - x \times (\cos x)'}{\cos^2 x} =$
$= \dfrac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

**k)** $k'(x) = (\ln(\cos x + 1))' = \dfrac{(\cos x + 1)'}{\cos x + 1} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}$

**l)** $l'(x) = (e^{x + \operatorname{sen} x})' = (x + \operatorname{sen} x)'\, e^{x + \operatorname{sen} x} =$
$= (1 + \cos x)\, e^{x + \operatorname{sen} x}$

**25.** Opção (A)
$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \dfrac{(x+k)'}{x+k} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+k} = \dfrac{1}{x}$
$\Leftrightarrow x + k = x$
$\Leftrightarrow k = 0$

**26.** Opção (A)

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Sinal de $h''$ | − | |
| Sentido das concavidades do gráfico de $h$ | ∩ | |

**27.** Opção (B)
O único gráfico que apresenta mudança de sinal no ponto de abcissa 2 é o gráfico da opção (B).

**28.**

**a)** $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - 2x^2 + 2 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{4x^3}{12} - 4x = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

$f''(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 4 = x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | + | 0 | − | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | ∪ | P.I. $-\frac{14}{3}$ | ∩ | P.I. $-\frac{14}{3}$ | ∪ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, 2[$, tem dois pontos de inflexão de coordenadas $\left(-2, -\frac{14}{3}\right)$ e $\left(2, -\frac{14}{3}\right)$.

**b)** $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f'(x) = \frac{x+2-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{-5 \times 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-10}{(x+2)^3}$

$f''(x) \neq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | + | n.d. | – |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | $\cup$ | n.d. | $\cap$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, +\infty[$, não tem pontos de inflexão.

**c)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - x^2 \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{4(x^2+2)^2 - 4x \times 2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^4} =$

$= \frac{4(x^2+2) - 16x^2}{(x^2+2)^3} =$

$= \frac{-12x^2+8}{(x^2+2)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-12x^2+8}{(x^2+2)^3} = 0$

$\Leftrightarrow -12x^2 + 8 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+2)^3 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ | | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | – | 0 | + | 0 | – |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | $\cap$ | P.I. $\frac{1}{4}$ | $\cup$ | P.I. $\frac{1}{4}$ | $\cap$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right[$ e em $\left]\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right[$, tem dois pontos de inflexão de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

**d)** $f(x) = \frac{e^x}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x x'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f''(x) = \left(\frac{e^x x - e^x}{x^2}\right)' =$

$= \frac{(e^x x - e^x)' x^2 - (e^x x - e^x)(x^2)'}{(x^2)^2} =$

$= \frac{(e^x x + e^x - e^x) x^2 - (e^x x - e^x)2x}{x^4} =$

$= \frac{(e^x x) x - (e^x x - e^x)2}{x^3} =$

$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$ $\quad D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f''(x) = 0$ em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2-2x+2) = 0 \wedge x^3 \neq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(e^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee \underbrace{x^2 - 2x + 2) = 0}_{\text{condição impossível}} \wedge x^3 \neq 0$

$f''$ não tem zeros.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^x(x^2-2x+2)$ | + | n.d. | + |
| $x^3$ | – | n.d. | + |
| Sinal de $f''$ | – | n.d. | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | $\cap$ | n.d. | $\cup$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$. Não apresenta pontos de inflexão.

**29.**

**a)** $f(x) = e^{3x-1}$

**Cálculo auxiliar**

$f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ $\quad P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$f'(x) = (e^{3x-1})' = 3e^{3x-1}$

Seja $t$ a reta da equação $y = mx + b$, onde

$m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3e^{3 \times \frac{1}{3} - 1} = 3.$

$P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ pertence à reta $t$, logo:

$1 = 3 \times \frac{1}{3} + b \Leftrightarrow b = 0$

Assim, $y = 3x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de ordenada 1.

Seja $n$ a reta de equação $y = mx + b$, onde

$m = -\frac{1}{f'\left(\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}$

$P\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ pertence à reta $n$, logo:

$1 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{9} \Leftrightarrow b = \frac{10}{9}$

Assim, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{9}$ é a equação reduzida da normal à curva representativa da função $f$ no ponto de ordenada 1.

**b)** $g(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x^2 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \wedge x \in D_g$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \in D_g$

$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2) \wedge x \in D_g$

$g'(x) = (\log(x^2-3))' = \frac{(x^2-3)'}{(x^2-3) \times \ln 10} =$

$= \frac{2x}{(x^2-3)\ln 10}$

• Em $x = 2$:

Seja $t$ a reta de equação $y = mx + b$, onde

$m = g'(2) = \frac{4}{\ln 10}$.

$P(2, 0)$ pertence à reta $t$, logo:

$0 = \frac{4}{\ln 10} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{\ln 10}$

Assim, $y = \frac{4}{\ln 10}x - \frac{8}{\ln 10}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 2.

Seja $n$ a reta de equação $y = mx + b$, onde:

$m = -\frac{1}{g'(2)} = -\frac{\ln 10}{4}$

$P(2, 0)$ pertence à reta $n$, logo:

$0 = -\frac{\ln 10}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{\ln 10}{2}$

Assim, $y = -\frac{\ln 10}{4}x + \frac{\ln 10}{2}$ é a equação reduzida da normal à curva representativa da função $g$ no ponto de abcissa 2.

• Em $x = -2$:

Seja $t$ a reta de equação $y = mx + b$, onde

$m = g'(-2) = -\frac{4}{\ln 10}$

$P(-2, 0)$ pertence à reta $t$, logo:

$0 = -\frac{4}{\ln 10} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{\ln 10}$

Assim, $y = -\frac{4}{\ln 10}x - \frac{8}{\ln 10}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $-2$.

Seja $n$ a reta de equação $y = mx + b$, onde:

$m = -\frac{1}{g'(-2)} = \frac{\ln 10}{4}$.

$P(-2, 0)$ pertence à reta $n$, logo:

$0 = \frac{\ln 10}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{\ln 10}{2}$

Assim, $y = \frac{\ln 10}{4}x + \frac{\ln 10}{2}$ é a equação reduzida da normal à curva representativa da função $g$ no ponto de abcissa $-2$.

**30.** $6x - 2y = 7 \Leftrightarrow -2y = -6x + 7$

$\Leftrightarrow y = 3x - \frac{7}{2}$

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow (x - e^{-x})' = 3$

$\Leftrightarrow 1 + e^{-x} = 3$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow -x = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

$f(-\ln 2) = -\ln 2 - e^{-(-\ln 2)} = -\ln 2 - 2$

$-\ln 2 - 2 = 3 \times (-\ln 2) + b$

$\Leftrightarrow b = -\ln 2 - 2 + 3 \ln 2$

$\Leftrightarrow b = -2 + 2 \ln 2$

$\Leftrightarrow b = -2 + \ln 4$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de $f$, e paralela à reta de equação $6x - 2y = 7$, é $y = 3x - 2 + \ln 4$.

**31.** Opção (D)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)e^{x^2 + x} = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \vee e^{x^2 + x} = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}} \neq e$

Logo, a reta de equação $y = e$ não é tangente ao gráfico de $f$.

$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \neq 0 \ \forall x \in D_{g'}$

Logo, a reta de equação $y = e$ não é tangente ao gráfico de $g$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = e$

$h(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \neq e$

Logo, a reta de equação $y = e$ não é tangente ao gráfico de $h$.

$j'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(x - 1) = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$j(1) = \frac{e}{1} = e$

Logo, a reta de equação $y = e$ é tangente ao gráfico de $j$.

**32.**

**a)** $C'(t) = \left(12t\, e^{-\frac{t}{2}}\right)' = 12\left(t' \times e^{-\frac{t}{2}} + t \times \left(e^{-\frac{t}{2}}\right)'\right) =$

$= 12\left(e^{-\frac{t}{2}} + t \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}\right) =$

$= 12 \times e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}t\right)$

**b)** $C'(t) = 0 \Leftrightarrow 12\, e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{12\, e^{-\frac{t}{2}} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 1 - \frac{1}{2}t = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$

| $t$ | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $12\, e^{-\frac{t}{2}}$ | + | + | + | + |
| $1 - \frac{1}{2}t$ | + | + | 0 | − |
| Sinal de $C'$ | + | + | 0 | − |
| Variação de $C$ | mín. | ↗ | Máx. | ↘ |

Observa-se que a função é estritamente crescente em $]0, 2[$ e é estritamente decrescente em $]2, +\infty[$, logo, são necessárias 2 horas, após a ingestão do álcool, para que o nível no sangue comece a decrescer.

**33.**

**a)** $P'_1(t) = \left(\frac{21}{1 + 25\,e^{-0,3t}}\right)' =$

$= \frac{21' \times (1 + 25\,e^{-0,3t}) - 21 \times (1 + 25\,e^{-0,3t})'}{(1 + 25\,e^{-0,3t})^2} =$

$= \frac{0 - 21 \times (0 + 25 \times (-0,3)e^{-0,3t})}{(1 + 25\,e^{-0,3t})^2} =$

$= \frac{157,5\,e^{-0,3t}}{(1 + 25\,e^{-0,3t})^2}$

Assim, $P'_1(10) \approx 1,556$.

Quando $t = 10$, a planta 1 está a crescer à taxa de 1,556 centímetros por dia.

$P'_2(t) = \left(\frac{20}{1 + 17\,e^{-0,6t}}\right) =$

$= \frac{20' \times (1 + 17\,e^{-0,6t}) - 20 \times (1 + 17\,e^{-0,6t})'}{(1 + 17\,e^{-0,6t})^2} =$

$= \frac{0 - 20 \times 17 \times (-0,6)e^{-0,6t}}{(1 + 17\,e^{-0,6t})^2} =$

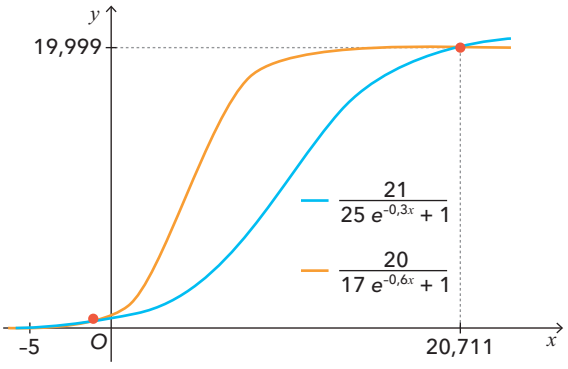
$= \frac{204\,e^{-0,6t}}{(1 + 17\,e^{-0,6t})^2}$

Assim, $P'_2(10) \approx 0,466$.

Quando $t = 10$, a planta 2 está a crescer à taxa de 0,466 centímetros por dia.

**b)** Pretende-se determinar $t$ tal que $\frac{21}{1 + 25\,e^{-0,3t}} = \frac{20}{1 + 17\,e^{-0,6t}}$.

Utilizando $x$ como variável independente, e recorrendo às capacidades gráficas da calculadora numa janela adequada, obtemos:




As coordenadas, arredondadas às centésimas, do ponto de interseção pretendido são (20,711; 19,999).

Assim, as plantas atingem a mesma altura passados 21 dias de terem sido plantadas.

**c)** Após, aproximadamente, 21 dias de terem sido plantadas, as duas plantas atingiram a mesma altura.

$P'_1(21) = \frac{157,5\,e^{-0,3t}}{(1 + 25\,e^{-0,3t})^2} \approx 0,26439$

$P'_2(21) = \frac{204\,e^{-0,6t}}{(1 + 17\,e^{-0,6t})^2} \approx 0,00069$

Como $P'_1(21) > P'_2(21)$, conclui-se que, no momento em que as duas plantas atingiram a mesma altura, era a planta 1 que estava a crescer mais rapidamente.

**34.**

**a)** $f(x) = \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln x - \ln(x^2 + 1) = \ln 2 \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln 2 + \ln(x^2 + 1) \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln(2x^2 + 2) \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = 2x^2 + 2 \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow -2x^2 + x - 2 = 0 \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2) \times (-2)}}{2 \times (-2)} \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{-4} \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

condição impossível

C.S. = $\varnothing$

**b)** $f'(x) = (\ln x)' - [\ln(x^2 + 1)]' =$

$= \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} =$

$= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^3 + x} =$

$= \frac{-x^2 + 1}{x^3 + x}$ $\qquad D_{f'} = \mathbb{R}^+$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \ \wedge\ x^3 + x \neq 0 \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow -x^2 = -1 \ \wedge\ x(x^2 + 1) \neq 0 \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \ \wedge\ x \neq 0 \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (x = -1 \ \vee\ x = 1) \ \wedge\ x \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + 1$ | n.d. | + | 0 | – |
| $x(x^2 + 1)$ | n.d. | + | + | + |
| Sinal de $f'$ | n.d. | + | 0 | – |
| Variação de $f$ | n.d. | ↗ | Máx. $f(1)$ | ↘ |

**Cálculo auxiliar**

$f(1) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

$f$ é estritamente crescente em $]0, 1[$;

$f$ é estritamente decrescente em $]1, +\infty[$;

$f(1) = -\ln 2$ é máximo relativo (absoluto) de $f$.

**35.** Opção (A)

Sabe-se que:

- $h(0) = 2$;
- $h'(0)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de $h$ no ponto de abcissa 0. Como esta reta é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, então o seu declive é –1. Assim, $h'(0) = -1$;
- $h''(0) = 0$, pois, em $x = 0$, o gráfico da função $h$ muda o sentido das concavidades.

Assim, $h(0) + h'(0) + h''(0) = 2 + (-1) + 0 = 1$.

**36.** Opção (C)

Por observação do gráfico de $g$, sabe-se que $g(a) < 0$, $g'(a) < 0$ e $g''(a) > 0$. Assim, $g'(a) \times g''(a) < 0$.

**37.** Opção (B)

$g'(x) = (\cos^2 x - \operatorname{sen} x)' =$

$= 2\cos x\,(-\operatorname{sen} x) - \cos x =$

$= -2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x$

$g'(\pi) = -2\operatorname{sen}\pi\cos\pi - \cos\pi = 1$

Logo, a equação da reta $t$ é do tipo $y = x + b$.

$g(\pi) = \cos^2(\pi) - \operatorname{sen}\pi = 1$

O ponto de coordenadas $(\pi, 1)$ pertence à reta $t$.

Assim:

$1 = \pi + b \Leftrightarrow b = -\pi + 1$

Então $t$: $y = x - \pi + 1$.

Se $y = 0$, então:

$0 = x - \pi + 1 \Leftrightarrow x = \pi - 1$

As coordenadas do ponto de interseção da reta $t$ com o eixo das abcissas são $(\pi - 1, 0)$.

**38.** A concentração máxima de antibiótico ocorre passadas 2 horas de ter sido administrado, logo, nesse momento, a taxa de variação é nula, isto é, $C'(2) = 0$.

Como $C'(t) = (At\,e^{-kt}) =$

$= A(t' \times e^{-kt} + t \times (e^{-kt})') =$

$= A(e^{-kt} + t \times (-k) \times e^{-kt}) =$

$= A\,e^{-kt}(1 - kt)$

vem que:

$C'(2) = 0 \Leftrightarrow A\,e^{-2k}(1 - 2k) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{A\,e^{-2k} = 0}_{\text{condição impossível}} \vee 1 - 2k = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Como também se sabe que a concentração máxima é 10 microgramas por mililitro de sangue, para $t = 2$, vem que:

$C(2) = 10 \Leftrightarrow A \times 2 \times e^{-\frac{1}{2}\times 2} = 10$

$\Leftrightarrow A = \frac{10}{2e^{-1}}$

$\Leftrightarrow A = 5e$

**39.**

**a)** $R'(t) = \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' =$

$= \frac{(\ln(t+1))' \times (t+1) - \ln(t+1) \times (t+1)'}{(t+1)^2} =$

$= \frac{\frac{1}{t+1} \times (t+1) - \ln(t+1)}{(t+1)^2} =$

$= \frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2}$

$R'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln(t+1) = 0 \wedge t \in [0, 5]$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \wedge t \in [0, 5]$

$\Leftrightarrow t + 1 = e \wedge t \in [0, 5]$

$\Leftrightarrow t = e - 1 \wedge t \in [0, 5]$

| $t$ | 0 | | $e-1$ | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 - \ln(t+1)$ | + | + | 0 | − | − |
| $(t+1)^2$ | + | + | + | + | + |
| Sinal de $R'$ | + | + | 0 | − | − |
| Variação de $R$ | mín. | ↗ | Máx. | ↘ | mín. |

$e - 1 \approx 1{,}7$

É aproximadamente aos 2 anos de idade que a criança atinge a sua maior capacidade de aprendizagem.

$R''(t) = \left(\frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2}\right)' =$

$= \frac{(1 - \ln(t+1))' \times (t+1)^2 - (1 - \ln(t+1)) \times ((t+1)^2)'}{((t+1)^2)^2} =$

$= \frac{-\frac{1}{t+1} \times (t+1)^2 - (1 - \ln(t+1)) \times 2(t+1)}{(t+1)^4} =$

$= \frac{-(t+1) - 2(t+1)(1 - \ln(t+1))}{(t+1)^4} =$

$= \frac{-1 - 2 + 2\ln(t+1)}{(t+1)^3} =$

$= \frac{-3 + 2\ln(t+1)}{(t+1)^3}$

$R''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3 + 2\ln(t+1)}{(t+1)^3} = 0$

$\Leftrightarrow -3 + 2\ln(t+1) = 0 \wedge t \in [0, 5]$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{3}{2} \wedge t \in [0, 5]$

$\Leftrightarrow t + 1 = e^{\frac{3}{2}} \wedge t \in [0, 5]$

$\Leftrightarrow t = e^{\frac{3}{2}} - 1 \wedge t \in [0, 5]$

| $t$ | 0 | | $e^{\frac{3}{2}} - 1$ | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3 + 2\ln(t+1)$ | − | − | 0 | + | + |
| $(t+1)^3$ | + | + | + | + | + |
| Sinal de $R''$ | − | − | 0 | + | + |
| Variação de $R'$ | Máx. 1 | ↘ | mín. | ↗ | Máx. −0,02 |

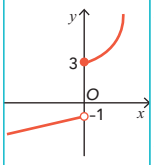
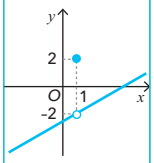
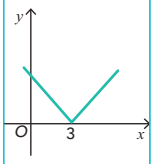
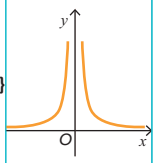
**Cálculos auxiliares**

- $R'(0) = 1$
- $R'(5) \approx -0{,}02$

Como o máximo de $R'$ é atingido em $t = 0$, isto significa que, para este modelo, o momento em que a capacidade de aprendizagem está a aumentar mais rapidamente é logo após o momento do nascimento.

## Capítulo 6 – Funções contínuas e deriváveis

### Tarefa – Os vizinhos – página 114

| Função | Domínio | Representação gráfica | O que acontece às imagens na vizinhança do ponto... | | Imagens |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Pontos do gráfico de $f$, com abscissas cada vez mais próximas de 0, pelo lado direito, têm ordenadas cada vez mais próximas de **3**. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$ | Pontos do gráfico de $f$, com abscissas cada vez mais próximas de 0, pelo lado esquerdo, têm ordenadas cada vez mais próximas de **–1**. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ | |
| $f$ | $D_f = \mathbb{R}$ |  | | | $f(0) = 3$ |
| $g$ | $D_g = \mathbb{R}$ |  | Pontos do gráfico de $g$, com abscissas cada vez mais próximas de 1, pelo lado direito, têm ordenadas cada vez mais próximas de **–2**. $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$ | Pontos do gráfico de $g$, com abscissas cada vez mais próximas de 1, pelo lado esquerdo, têm ordenadas cada vez mais próximas de **–2**. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$ | $g(1) = 2$ |
| $h$ | $D_h = \mathbb{R}$ |  | Pontos do gráfico de $h$, com abscissas cada vez mais próximas de 3, pelo lado direito, têm ordenadas cada vez mais próximas de **0**. $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = 0$ | Pontos do gráfico de $h$, com abscissas cada vez mais próximas de 3, pelo lado esquerdo, têm ordenadas cada vez mais próximas de **0**. $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = 0$ | $h(3) = 0$ |
| $j$ | $D_j = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ |  | Pontos do gráfico de $j$, com abscissas cada vez mais próximas de 0, pelo lado direito, têm ordenadas cada vez **maiores**. $\lim\limits_{x\to 0^+} j(x) = +\infty$ | Pontos do gráfico de $j$, com abscissas cada vez mais próximas de 0, pelo lado esquerdo, têm ordenadas cada vez **maiores**. $\lim\limits_{x\to 0^-} j(x) = +\infty$ | A função $j$ não está definida no ponto de abscissa $x = 0$. |

## Exercícios de margem – páginas 115 a 148

**40.**

**a)** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

$D'_f = ]-\infty, 1] \cup ]2, 5]$

**b)** **i.** $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$

**ii.** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

**iii.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

**iv.** $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5$

**c)** $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

Como $f(1) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, então não existe limite no ponto de abscissa 1.

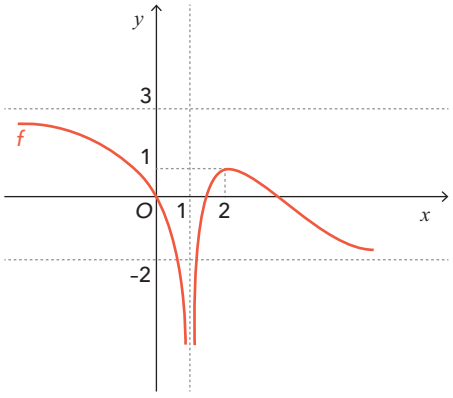
$4 \notin D_f$

- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 5$
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 5$

Como $4 \notin D_f$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, então existe limite no ponto de abcissa 4.

**41.** Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, então a reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Uma vez que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$, então as retas de equações $y = 3$ e $y = -2$ são assíntotas horizontais ao gráfico de $f$.




**42.**

**a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty + 0 = +\infty$

**b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -2 \times 3 = -6$

**c)** $\lim\limits_{x\to 4^-} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 4^-} g(x)} = \frac{2}{+\infty} = 0$

**43.**

**a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3}{x^2+1} = \frac{-3}{(+\infty)^2+1} = \frac{-3}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^3 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)^3 - \frac{2}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\dfrac{0}{+\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=\dfrac{+\infty}{0^-}=-\infty$

**44.**

**a)** $\lim\limits_{x\to-1}(4x^3+x^2+5x-2)=$

$=4\times(-1)^3+(-1)^2+5\times(-1)-2=$

$=-4+1-5-2=$

$=-10$

**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3)=(-\infty)^2-3=+\infty-3=+\infty$

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3}{-2}=\dfrac{(-\infty)^3+3}{-2}=\dfrac{-\infty}{-2}=+\infty$

**d)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{7-x}=\dfrac{0}{7-0}=0$

**e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+3}{x^4}=\dfrac{\frac{1}{+\infty}+3}{(+\infty)^4}=\dfrac{0+3}{+\infty}=0$

**f)** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x}{3-\sqrt{9-x}}=\dfrac{2\times5}{3-\sqrt{9-5}}=\dfrac{10}{3-2}=10$

**g)** $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

**h)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

**i)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{0}$

Cálculos dos limites laterais:

- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-1^+}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-1^-}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

Como os limites laterais são diferentes, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}$.

**j)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{4-x^2}=\dfrac{2}{0}$

Cálculos dos limites laterais:

- $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2}{4-x^2}=\dfrac{2}{4-4^+}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2}{4-x^2}=\dfrac{2}{4-4^-}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

Como os limites laterais são diferentes, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{4-x^2}$.

**45.**

**a)** $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}(x^3-x)=-8+2=-6$

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x+1)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^4\left(1-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)\right]=+\infty\times(1-0+0)=+\infty$

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x(x^2-1))=$

$=-\infty\times(+\infty)=-\infty$

**d)** $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^4-3x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^3-x)=0$

Como $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

**46.**

**a)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5^x-2^x}{x^2+2x+3}=\dfrac{5-2}{1+2+3}=\dfrac{1}{2}$

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{4^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^x=+\infty$

**c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8^x}{9^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^x=0$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{20}{10^x+5}=\dfrac{20}{5}=4$

**e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{5^{-x}+1}=\dfrac{2}{+\infty}=0$

**f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{8^{-x}-3}=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

**g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}[(3-4x)\times2^x]=-\infty\times(+\infty)=-\infty$

**h)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{x^2-3x+5})=\lim\limits_{x\to+\infty}2^{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=2^{+\infty}=+\infty$

**47.**

**a)** $\lim\limits_{x\to8}(2-3\log_2 x)=2-3\log_2 8=2-3\times3=-7$

**b)** $\lim\limits_{x\to0^+}(\log_3 x)^2=(-\infty)^2=+\infty$

**c)** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\log x}{x^2-x}=\dfrac{-\infty}{0^-}=+\infty$

**d)** $\lim\limits_{x\to-3^+}\ln(9-x^2)=\ln(0^+)=-\infty$

**e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(3x-1)-\ln(2x+4))=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x-1}{2x+4}\right)=$

$=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

**f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x+1)-x\ln x+4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=$

$=\ln1+0=0$

**g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x+1)-x\ln(x^2+3)+4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x+\frac{3}{x}}\right)+0=$

$=\ln(0^+)=-\infty$

**h)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\ln x}{3\ln x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{\ln x}-1}{3+\frac{1}{\ln x}}=-\dfrac{1}{3}$

**48.**

**a)** **i.** $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\mathbf{-1}$ $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\mathbf{1}$

$f(-1)=\mathbf{1}$

**ii.** $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\mathbf{-2}$ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\mathbf{-2}$

$f(1)=\mathbf{-1}$

**iii.** $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\mathbf{0}$

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\mathbf{0}$

$f(2)=\mathbf{0}$

**b)** **i.** A função $f$ não é contínua em $x=-1$, pois não existe $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, já que $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$.

**ii.** A função $f$ não é contínua em $x=1$, pois, apesar de existir $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$.

**iii.** A função $f$ é contínua em $x=2$, pois existe $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

**49.** $a\notin D_f$, logo não faz sentido falar de continuidade de $f$ em $a$.

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=b=g(a)$, logo a função $g$ é contínua em $a$.

A função $h$ não tem limite quando $x\longrightarrow a$, logo não é contínua em $a$.

A função $i$ não tem limite quando $x\longrightarrow a$, logo não é contínua em $a$.

$\lim\limits_{x\to a}j(x)=b=j(a)$, logo a função $j$ é contínua em $a$.

A função $k$ não tem limite quando $x\longrightarrow a$, logo não é contínua em $a$.

As representações gráficas que dizem respeito a funções contínuas em $a$ são a $g$ e a $j$.

**50.** $\lim\limits_{x\to1^-}e^{x-1}=e^0=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}e^{x-1}=e^0=1$

$f(1)=e$

Em $x=1$, a função $f$ não é contínua, visto que, apesar de $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, isto é, existir $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ e ser igual a 1, tem-se que $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$.

**51.** $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x+2)=e^0+2=3$

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\log\left(\sqrt{x+10^6}\right)=\log\left(\sqrt{0+10^6}\right)=$

$=\log(10^3)=3$

Como $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$, existe $\lim\limits_{x\to0}h(x)$ e é 3.

$h(0)=\log\left(\sqrt{0+10^6}\right)=3$

Como $\lim\limits_{x\to0}h(x)=h(0)$, conclui-se que a função $h$ é contínua em $x=0$.

**52.** Para que $f$ seja contínua em $x=1$, tem de existir $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$.

$\lim\limits_{x\to1^-}(4k-\operatorname{sen}(x-1))=4k-\operatorname{sen}0=4k-0=4k=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}(2x+\ln x)=2+\ln1=2+0=2$

Assim, $4k=2$, ou seja, $k=\dfrac{1}{2}$.

**53.**

- Em $]-\infty,1[$, a função $f$ é contínua, uma vez que, neste ramo, está definida por uma função polinomial.
- Em $]1,+\infty[$, a função $f$ é contínua, uma vez que, neste ramo, está definida pelo quociente de funções continuas, cujo denominador não se anula no intervalo considerado.
- Estudemos em $x=1$:

$\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+4x-5)=1+4-5=0=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{x-1}-1}{x}=\dfrac{e^{1-1}-1}{1}=1-1=0$

A função $f$ é contínua em $x=1$, visto $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$.

Conclui-se, assim, que $f$ é contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}$.

**54.**

**a)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{4x-12}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{4(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{4x-12}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

**b)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-\frac{5}{2}x+1}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{-1}{\frac{3}{2}}=-\dfrac{2}{3}$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-\frac{5}{2}x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-5}{2x-\frac{5}{2}}=\dfrac{-1}{\frac{3}{2}}=-\dfrac{2}{3}$

**c)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to2}(x-3)=-1$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-5}{1}=\dfrac{-1}{1}=-1$

**d)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^3}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{(x-2)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{3(x-2)^2\times 1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

**e)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-2}$

**Limites laterais**

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

Como $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}\neq\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}$, então não existe $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}$.

**f)** $\lim_{x\to 1}\left[(x^3-1)\times\frac{1}{1-x}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)}=$

$=\lim_{x\to 1}(-x^2-x-1)=-3$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to 1}\left((x^3-1)\times\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{1-x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^2}{-1}\right)=-3$$

**55.**

**a)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-9}{4-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{9}{x}}{\frac{4}{x}-1}=\frac{8}{-1}=-8$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-9}{4-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{-1}=-8$$

**b)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+1}{x^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-7}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2}=2$$

**c)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x+1}{3-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-1}=$

$$=\frac{-\infty+0+0}{0-1}=+\infty$$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x+1}{3-x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+5}{-2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2}=$$

$$=\frac{-\infty}{-2}=+\infty$$

**d)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3-1}=\lim_{x\to+\infty}=\frac{1}{x-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{+\infty-0}=0$

**Outro processo**

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{6x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

**56.**

**a)** $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x+1}-e^3}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{e^{x+1}}{1}=e^3$

**b)** $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\times\ln a}{1}=\ln a$

**c)** $\lim_{x\to 3}\frac{2^x-1}{x}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$ (não é uma indeterminação)

**57.**

**a)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3}=\frac{e^0}{3}=\frac{1}{3}$$

**b)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(e^x-1)}{x}=-\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}=-1$

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{1}=-1$$

**c)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\,e^{3x}}{1}=3\,e^0=3$

**d)** $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}4\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=4\times\frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}}=$

$=4\times\frac{1}{1}=4$

Utilizando a Regra de L'Hôpital, no levantamento da indeterminação, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4}{e^x}=\frac{4}{e^0}=\frac{4}{1}=4$$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x-e^5}{x-5}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x}{1}=e^5$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=1$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(x+2)}{x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\frac{1}{x+2}}{1}=1$

**58.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\times 5^x}{3\times 10^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3\times 2^x+\frac{1}{5^x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{+\infty+0}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7^x-3^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7^x\left(1-\left(\frac{3}{7}\right)^x\right)\right)=$

$=+\infty(1-0)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{5^x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x\times\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\right]=$

$=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x=0+0=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{2013}}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^{2013}}=\dfrac{0}{-\infty}=0$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2013}}{e^x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}\times x^7)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7}{e^x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-2^x}{x^5}=3-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^5}=3-(+\infty)=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)=$

$=+\infty\times(1-0)=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-5^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right)}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{x^2}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right)=$

$=+\infty\times(0-1)=-\infty$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+x+10}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+10}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=$

$=\dfrac{0+10}{+\infty}+\dfrac{1}{-\infty}=$

$=0+0=0$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x+10}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{x^2}=$

$=+\infty+0+0=+\infty$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x x^4)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{12x^2}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{24x}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{24}{e^{-x}}=$

$=\dfrac{24}{+\infty}=0$

o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=e^{0^+}=e^{+\infty}=+\infty$

p) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x x^{-2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}=+\infty$

q) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{4x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{12x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{24x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{24}=\dfrac{e^{+\infty}}{24}=+\infty$

**59.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-1+\ln x}{-x}=-5+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$

$=-5+0+0=-5$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2+4x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\dfrac{0}{1+0+0}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3)}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{3}{2}\times 0=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(4x^3)}{5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 4+\ln(x^3)}{5x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 4}{5x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{5x}=$

$=0+\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{3}{5}\times 0=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=$

$=0\times\dfrac{1}{+\infty}=0\times 0=0$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

**60.** Opção (C)

Uma vez que a reta de equação $x=2$ é uma assíntota ao gráfico de $f$, que $f$ é positiva em todo o seu

domínio e que $D_f = ]-\infty, 2[$, tem-se que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

**61.**

**a)** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$

A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$, pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Apenas as retas de equações $x = -3$ e $x = 3$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de $f$.

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x^2 - x - 6)}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

A reta de equação $x = 3$ não é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

**b)** $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

A função $g$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ , pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Apenas as retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de $g$.

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $g$.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $g$.

**c)** $D_h = \mathbb{R}$

A função $h$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois é o quociente entre duas funções contínuas (ambas polinomiais).

Logo, não há assíntotas verticais ao gráfico de $h$.

**62.**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x - 2}{2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{2} = 2$

Cálculo idêntico quando $x \longrightarrow -\infty$.

Conclui-se, assim, que a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$ e quando $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 - x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-2x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{1 - x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-2x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Conclui-se, assim, que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ quando $x \longrightarrow +\infty$ e quando $x \longrightarrow -\infty$.

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x + 1}{3x^2 + 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 + 1}{6x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x}{6} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + x + 1}{3x^2 + 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x^2 + 1}{6x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{12x}{6} = -\infty$

Conclui-se, assim, que o gráfico de $h$ não tem assíntotas horizontais.

**63.** Opção (B)

Como a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de $f$ e $D_f = \mathbb{R}^+$, então

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$.

**64.** Opção (D)

Como a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota ao gráfico de $f$, e $D_f = \mathbb{R}^+$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{2}$.

**65.** Opção (C)

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x + 4) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x - 4)) = 0$, tem-se que a reta de equação $y = x - 4$ é assíntota não vertical (oblíqua) ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow -\infty$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 4) = -\infty$.

Tem-se também que $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ e

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = -4$.

**66.** Opção (C)

Uma vez que $D_g = \mathbb{R}^+$, e que a reta de equação $y = 2x + 4$ é uma assíntota ao gráfico de $g$, tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = 4$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x)\right] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} \times \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 4 = 8$.

**67.** Opção (B)

Como a reta de equação $y = -2x + 3$ é assíntota não vertical ao gráfico de $f$ e $D_f = \mathbb{R}+$, tem-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 3) = -\infty$
- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$
- $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-2x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + 2x)) = 3$

Assim:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(f(x) + 2x) + 1}{f(x)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{f(x)} \times (f(x) + 2x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)} \times \lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x) + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} =$$

($\frac{1}{m}$, $b$)

$$= -\frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{-\infty} =$$

$$= -\frac{3}{2} + 0 =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

**68.** $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

**Assíntotas verticais**

A função $f$ é contínua, por se tratar do quociente de funções contínuas. Portanto, só a reta de equação $x = 1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de $f$.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Assim, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de $f$.

**Assíntotas não verticais**

$x \longrightarrow +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2} = 2$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x-1} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1} = 1$$

Concluímos, assim, que a reta de equação $y = 2x + 1$ é assintota oblíqua ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$. Como os cálculos são idênticos quando $x \longrightarrow -\infty$, tem-se que a reta de equação $y = 2x + 1$ também é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**69.**

**a)** $D = \{x \in \mathbb{R}: 1 - e^x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Como a função $f$ é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

**Assíntotas horizontais**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1-e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-\frac{e^x}{e^x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^x}-1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty}-1} =$$

$$= \frac{1}{0-1} = -1$$

e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1-e^x} = \frac{0}{1-0} = 0$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$ e a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \ln x + 1 \neq 0\} =$
$= ]0, +\infty[\setminus\{e^{-1}\}$

**Cálculo auxiliar**

$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x^3)+4}{\ln x+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3\ln x}{\ln x}+\frac{4}{\ln x}}{\frac{\ln x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{3+\frac{4}{\ln x}}{1+\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \frac{3+\frac{4}{-\infty}}{1+\frac{1}{-\infty}} = \frac{3+0}{1+0} = 3$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} g(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}\frac{\ln(x^3)+4}{\ln x+1} = \frac{\ln(e^{-1})^3+4}{-1^++1} =$$

$$= \frac{-3+4}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} g(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-}\frac{\ln(x^3)+4}{\ln x+1} = \frac{\ln(e^{-1})^3+4}{-1^-+1} =$$

$$= \frac{-3+4}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = \frac{1}{e}$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Como a função $g$ é contínua no seu domínio, $]0, +\infty[\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

**Assíntotas horizontais**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3)+4}{\ln x+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3\ln x}{\ln x}+\frac{4}{\ln x}}{\frac{\ln x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{\ln x}}{1+\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \frac{3+\frac{4}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}} = \frac{3+0}{1+0} = 3$$

A reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico da função $g$ para $x \longrightarrow +\infty$.

Dado que o domínio da função é limitado inferiormente, o seu gráfico não admite assíntota horizontal.

**c)** $D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}+1} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}+1} = e^{+\infty} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $h$.

Como a função $h$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

**Assíntotas horizontais**

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}+1} = e^{0+1} = e$$

A reta de equação $y = e$ é assíntota horizontal ao gráfico da função $h$ para $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}+1} = e^{0+1} = e$$

A reta de equação $y = e$ é assíntota horizontal ao gráfico da função $h$ para $x \longrightarrow +\infty$.

**70.**

**a)** $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right) = 0 + e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right) = 0 + e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Como a função é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de $f$.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) =$$

$$= 1 + \frac{e^0}{+\infty} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1\times x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + e^{\frac{1}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Os cálculos para $x \longrightarrow -\infty$ são idênticos e obtêm-se do mesmo modo $m = 1$ e $b = 1$.

Assim, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ para $x \longrightarrow +\infty$ e para $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \log x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R}^+\setminus\{100\}$

**Cálculo auxiliar**

$\log x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\log x - 2} = \frac{0}{-\infty - 2} = 0$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

$$\lim_{x\to100^+} g(x) = \lim_{x\to100^+} \frac{x}{\log x - 2} = \frac{100}{2^+ - 2} = \frac{100}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to100^-} g(x) = \lim_{x\to100^-} \frac{x}{\log x - 2} = \frac{100}{2^- - 2} = \frac{100}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 100$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de $g$, visto a função ser contínua no seu domínio.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\log x - 2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x - 2} = \frac{1}{+\infty - 2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - 0x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x - 2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x - 2}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x} - \frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico da função $g$ não admite assíntotas não verticais para $x \longrightarrow +\infty$.

Dado que o domínio da função $g$ é limitado inferiormente, não faz sentido averiguar a existência de assíntotas não verticais para $x \longrightarrow -\infty$.

**c)** $D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x} > 0 \wedge x \neq 0\right\} = ]0, +\infty[$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to0^+} 3x \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} + 0 =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico da função $h$.

Não há assíntotas verticais, visto a função ser contínua no seu domínio ($\mathbb{R}^+$).

**Assíntotas não verticais**

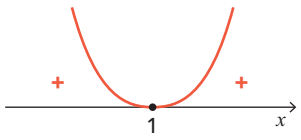
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln\left(\frac{1}{x}\right) + 3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 3\right) = \ln(0^+) + 3 = -\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico da função $h$ não admite assíntotas não verticais para $x \longrightarrow +\infty$.

Dado que o domínio da função $h$ é limitado inferiormente, não faz sentido averiguar a existência de assíntotas não verticais para $x \longrightarrow -\infty$.

**d)** $D_i = \{x \in \mathbb{R}: (x-1)^2 > 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

**Cálculo auxiliar**




**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x \to 1} i(x) = \lim_{x \to 1} \ln(x-1)^2 = \ln(0^+) = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de $i$. Não existem mais assíntotas verticais, visto a função ser contínua no seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x-1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (i(x) - 0x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x-1)^2 = +\infty$$

Não existem assíntotas não verticais ao gráfico de $i$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(x-1)^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\ln|x-1|}{x} = 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x+1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{1}{x-1}}{1} = \frac{-2}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (i(x) - 0x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(x-1)^2 = +\infty$$

Também não existem assíntotas não verticais ao gráfico de $i$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**71.**

**a)** $D_f = \mathbb{R}$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de $f$, pois a função é contínua nos restantes pontos do seu domínio, isto é, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, verifica-se que não existem assíntotas não verticais ao gráfico de $f$ para $x \longrightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$ para $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** $D_g = \mathbb{R}$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = g(0) = 0$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de $g$, pois a função é contínua nos restantes pontos do seu domínio, isto é, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 0 \times x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ para $x \longrightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - 1\times x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{x-2}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

A reta de equação $y = x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$ para $x \longrightarrow -\infty$.

**72.**

**a)** **Assíntotas verticais**

A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}^-$, por se tratar do produto de funções contínuas, logo o único candidato a assíntota vertical ao seu gráfico é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to0^-} \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-1} =$$

$$= \frac{e^{+\infty}}{-1} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-1}\right) = \frac{e^0}{-1} = -1$$

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** Se $x \geq 0$, então:

$f'(x) = (\ln(x+1) - \ln(x+2))' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

$f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$f(1) = \ln 2 - \ln 3 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6}$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1 é $y = \frac{1}{6}x + \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6}$.

**c)** $m = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Se $x < 0$, então:

$$f'(x) = \left(x\, e^{-\frac{1}{x}}\right)' =$$

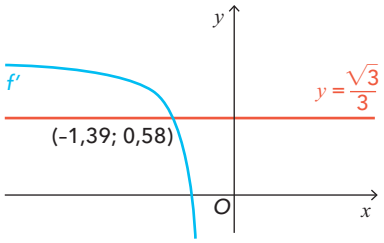
$$= x'\, e^{-\frac{1}{x}} + x\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

Pretende-se resolver a equação $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ em $\mathbb{R}^-$.




A abcissa do ponto é –1,39.

**73.** Tem-se que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$. Logo, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$.

Assim, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + e^x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$= 1 + (+\infty) = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de $g$ não tem assíntotas oblíquas quando $x \longrightarrow +\infty$.

Dado que o domínio de $g$ é limitado inferiormente, não faz sentido averiguar a existência de assíntotas não oblíquas para $x \longrightarrow -\infty$.

**74.** Uma vez que $\lim_{x\to-1} g(x) = -\infty$, então a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de $g$.

A função $g$ é contínua no seu domínio, que é $]-\infty, -1[$, logo não há outras assíntotas ao gráfico de $g$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x) - 2x}{4x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{4x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 4$$

Por outro lado:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-mx+1)=3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-mx)+1=3$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-mx)=2, m\in\mathbb{R}$

Logo, a reta de equação $y=4x+2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $g$.

**75.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

- $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2=0 \wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow x=0 \wedge x\in D_f$

$f$ tem um único zero: $x=0$

- **Assíntotas**

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

A reta de equação $x=1$ é assíntota vertical do gráfico de $f$.

Como $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$, pode concluir-se que a reta de equação $x=-1$ é também assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Não há mais assíntotas verticais, pois verifica-se que a função é contínua no seu domínio.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=1$, conclui-se que a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$, para $x\longrightarrow+\infty$, e, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, conclui-se que, para $x\longrightarrow-\infty$, a assíntota é a mesma.

- $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'=\dfrac{(x^2)'\times(x^2-1)-x^2\times(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=$

$=\dfrac{2x\times(x^2-1)-x^2\times 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow -2x=0 \wedge x\in D_{f'}$

$\Leftrightarrow x=0$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f'$ | + | n.d. | + | 0 | − | n.d. | − |
| Variação de $f$ | ↗ | n.d. | ↗ | Máx. | ↘ | n.d. | ↘ |

**Cálculo auxiliar**

$f(0)=\dfrac{0^2}{0^2-1}=0$

$f$ é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]-1,0[$ e é estritamente decrescente em $]0,1[$ e em $]1,+\infty[$; 0 é máximo relativo para $x=0$.

- $f''(x)=\left(\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}\right)'=$

$=\dfrac{(-2x)'\times(x^2-1)^2-(-2x)\times((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4}=$

$=\dfrac{-2(x^2-1)^2+2x\times 2(x^2-1)\times 2x}{(x^2-1)^4}=$

$=\dfrac{(x^2-1)[-2(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^4}=$

$=\dfrac{(-2x^2+2+8x^2)}{(x^2-1)^3}=$

$=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

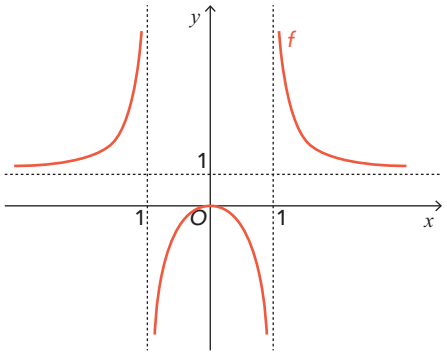
$f''(x)=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{6x^2+2=0}_{\text{Equação impossível em }\mathbb{R}} \wedge x\in D_{f''}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $6x^2+2$ | + | n.d. | + | n.d. | + |
| $(x^2-1)^3$ | + | n.d. | − | n.d. | + |
| Sinal de $f''$ | + | n.d. | − | n.d. | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | ∪ | n.d. | ∩ | n.d. | ∪ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e voltada para baixo em $]-1,1[$.

- **Representação gráfica**




**76.**

**a)** $g(x)=e^x-e^{-x}$

- $D_g=\mathbb{R}$
- **Zeros:** $g(x)=0 \Leftrightarrow e^x=e^{-x} \Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow x=0$
- **Assíntotas**

A função é contínua em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da diferença de funções contínuas, logo o seu gráfico não tem assíntotas verticais.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}\right)=$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}}_{\text{Limite notável}}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}$

$=+\infty-\dfrac{0}{+\infty}=+\infty$

Como $m\notin\mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de $g$ não apresenta assíntotas não verticais para $x\longrightarrow+\infty$, o mesmo se pode concluir para $x\longrightarrow-\infty$, pois:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\dfrac{0}{-\infty}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(e^{-x})'}{x'}=$

$= 0 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-e^{-x}}{1} =$

$= 0 - (-\infty) =$

$= +\infty \notin \mathbb{R}$

- $g'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x}$ $\qquad D_{g'} = \mathbb{R}$

Como $g'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, conclui-se que $g'$ é estritamente crescente em todo o seu domínio.

- $g''(x) = (e^x + e^{-x})'$ $\qquad D_{g''} = \mathbb{R}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow e^x = e^{-x}$

$\Leftrightarrow x = -x$

$\Leftrightarrow x = 0$

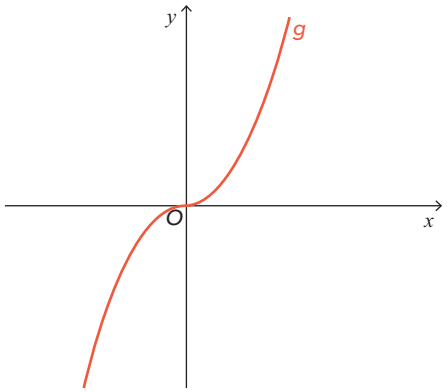
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Sinal de $g''$ | − | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $g$ | ∩ | P.I. | ∪ |

**Cálculo auxiliar**

$g(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas $(0, 0)$.

- **Representação gráfica**




**b)** $h(x) = \ln(e^x - 1)$

- $D_h = \{x \in \mathbb{R}: e^x - 1 > 0\} = \mathbb{R}^+$

**Cálculo auxiliar**

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

- $h(x) = 0 \ \wedge \ x \in D_h$

$\Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

$h$ tem um único zero: $x = \ln 2$

- **Assíntotas**

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(e^x - 1) = \ln(1^+ - 1) = \ln 0^+ = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $h$.

Este não apresenta mais assíntotas verticais já que a função $h$ é contínua no seu domínio.

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(e^x - 1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(e^x - 1))'}{x'} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1}}{1} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - 1 \times x) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(e^x - 1) - x) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(e^x \times \left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)\right) - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln e^x + \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) =$

$= \ln\left(1 - \dfrac{1}{+\infty}\right) = \ln 1 = 0$

Assim, conclui-se que a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua do gráfico de $h$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

- $h'(x) = (\ln(e^x - 1))' = \dfrac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ $\qquad D_{h'} = \mathbb{R}^+$

Como $h'(x) > 0$, $\forall\, x \in D_h$, então verifica-se que $h$ é estritamente crescente em todo o seu domínio.

- $h''(x) = \left(\dfrac{e^x}{e^x - 1}\right)' =$

$= \dfrac{(e^x)' \times (e^x - 1) - e^x \times (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} =$

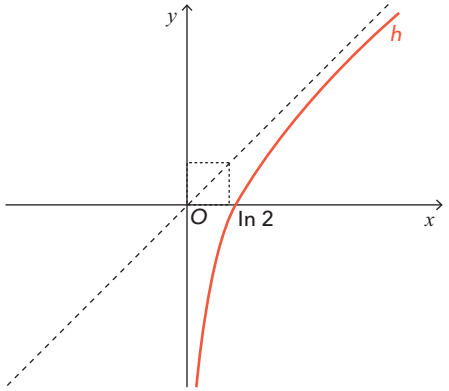
$= \dfrac{e^x(e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} =$

$= \dfrac{e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2} =$

$= \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

Como $h''(x) < 0$, $\forall\, x \in D_h$, verifica-se que o gráfico de $h$ tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

- **Representação gráfica**




**c)** $i(x) = 2x + 1 + e^{-\frac{\pi}{2}}$

- $D_i = \mathbb{R}$
- **Zeros:** $i(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow x \approx -3{,}73 \vee x \approx -1{,}63$
- O gráfico de $i$ não possui assíntotas verticais, visto tratar-se de uma função contínua (soma de funções contínuas) em $\mathbb{R}$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1+e^{-\frac{x}{2}}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} =$$
$$= 2 + 0 = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(i(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+e^{-\frac{x}{2}}-2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right) =$$
$$= 1 + e^{-\infty} = 1 + 0 = 1$$

A reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico $i$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)'}{x'} + \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'}{x'} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1} + \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}{1} =$$
$$= 2 - \frac{1}{2}\times(+\infty) = -\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não existe assíntota não vertical ao gráfico de $i$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

• $i'(x) = \left(2x+1+e^{-\frac{x}{2}}\right)' =$

$$= 2 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \qquad D_{i'} = \mathbb{R}$$

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = 4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \ln 4 \Leftrightarrow x = -2\ln 4$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2\ln 4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Sinal de $i'$ | − | 0 | + |
| Variação de $i$ | ↘ | mín. | ↗ |

**Cálculo auxiliar**

$$i(-2\ln 4) = -2\times(-2\ln 4) + 1 + e^{\frac{(-2\ln 4)}{2}} =$$
$$= -4\ln 4 + 1 + e^{\ln 4} =$$
$$= -4\ln 4 + 1 + 4 =$$
$$= 5 - 4\ln 4$$

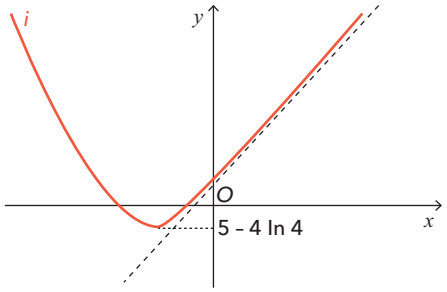
$i$ é estritamente decrescente em $]-\infty, -2\ln 4[$ e estritamente crescente em $]-2\ln 4, +\infty[$; $5 - 4\ln 4$ é mínimo absoluto para $x = -2\ln 4$.

• $i''(x) = \left(2 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = 0 - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} =$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} \qquad D_{i''} = \mathbb{R}$$

$i''(x) > 0$, $\forall x \in D_{i'}$, logo o gráfico de $i$ tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

• **Representação gráfica**




## Aprende fazendo 6 – páginas 152 a 157

**77.** Opção (D)

$\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to2^+} f(x) = -2 = f(2)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, logo

$\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**78.**

**a)** $\lim_{x\to2^-} f(x) = 2$

**b)** $\lim_{x\to2^+} [f(x)]^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

**c)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

**d)** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

**e)** $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

**79.**

**a)** $\lim_{x\to0}[3^x(5x-2)+8] = 3^0(0-2)+8 = 6$

**b)** $\lim_{x\to3}(2^{x^2-5}) = 2^{9-5} = 16$

**c)** $\lim_{x\to1}\frac{4^x-4}{2^x-2} = \lim_{x\to1}\frac{(2^x-2)(2^x+2)}{2^x-2} = \lim_{x\to1}(2^x+2) = 4$

**d)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{3} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$

**e)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+5}{x} = \frac{5}{-\infty} = 0$

**f)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{7^x-15} = \frac{1}{+\infty} = 0$

**g)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{6+3^x}{4^x-2} = \frac{6}{-2} = -3$

**h)** $\lim_{x\to-\infty}(3^{-x^2+x+2}) = \lim_{x\to-\infty}3^{-x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = 3^{-\infty} = 0$

**i)** $\lim_{x\to1}\frac{1+\ln x}{x+2} = \frac{1+0}{1+2} = \frac{1}{3}$

**j)** $\lim_{x\to0^+}[(x-1)\ln x] = -1\times(-\infty) = +\infty$

**k)** $\lim_{x\to+\infty}[(1-x)\ln x] = -\infty\times(+\infty) = -\infty$

**l)** $\lim\limits_{x \to 1} (\log_2(3x+1)) = \log_2 4 = 2$

**m)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \log(1 - e^x) = \log 1 = 0$

**n)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(5^x - 7^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(5^x \left(1 - \left(\frac{7}{5}\right)^x\right)\right) = \ln(0^+) = -\infty$

**o)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \log(1 - \log_2 x) = \log(1 - (-\infty)) = +\infty$

**p)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6 + \log_4 x}{\log_2 x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6 + \frac{\log_2 x}{\log_2 4}}{\log_2 x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6}{\log_2 x} + \frac{1}{2}\right) =$

$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**80.** Opção (C)

Em todas as opções encontram-se representadas funções contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, tais que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -3$, que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ e que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Apenas na função cuja representação gráfica é a da opção (C) se tem que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 1$, ou seja, que a reta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

**81.** Opção (B)

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^x}{f(x)} = \frac{e}{+\infty} = 0$

**82.** Opção (B)

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} \frac{x-5}{(5-x)^4} = \lim\limits_{x \to 5^-} \frac{-1}{(5-x)^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

**83.** Opção (B)

**a)** $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2}{g(x)} = \frac{2}{+\infty} = 0$

**b)** Opção (D)

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{h(x)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

**c)** Opção (B)

$\lim\limits_{x \to -\infty} (g \times h)(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (g \times h)(x) = -1 \times (+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

**84.** Opção (B)

Para que a função $f$ tenha limite no ponto de abcissa 3, terá que se verificar $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left(\frac{kx}{3} - \frac{k}{2}\right) = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left(\frac{\sqrt{3x} - x}{x-3}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \left(\frac{\sqrt{3x} - x}{x-3} \times \frac{\sqrt{3x} + x}{\sqrt{3x} + x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{3x - x^2}{(x-3)(\sqrt{3x} + x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-x(x-3)}{(x-3)(\sqrt{3x} + x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{-x}{\sqrt{3x} + x} =$

$= \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

Assim, $\frac{k}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -1$

**85.**

**a)** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4}$

**Cálculo auxiliar**

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Assim, $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$.

**b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{3x - x^3} - \frac{5}{x}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)} - \frac{5}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x^2} - 1} - \frac{5}{x}\right) = -1 - 0 = -1$

**c)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^3} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

**Cálculo auxiliar**

| | 1 | −6 | 12 | −8 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | −8 | 8 |
| | 1 | −4 | 4 | 0 |

Assim:

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x^2 - 4x + 4) =$

$= (x-2)(x-2)^2 =$

$= (x-2)^3$

**d)** $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{(x-1)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

**Cálculo auxiliar**

| | 1 | 0 | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

Assim, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

**e)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x^3}+\frac{x^3-1}{x-x^3}\right)=1-0+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x-x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}=$

$=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-1}=$

$=1-1=0$

**f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(x-4)}}{x-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}}{x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{1-\frac{4}{x}}=-1$

**g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+3)(2x+5)(3x-7)}{2x^3+x^2+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^3+19x^2-32x-105}{2x^3+x^2+1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(6+\frac{19}{x}-\frac{32}{x^2}-\frac{105}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{19}{x}-\frac{32}{x^2}-\frac{105}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{6}{2}=3$

**h)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2-4}{(2-x)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(2-x)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{-1}{\sqrt{x+2}+2}=-\frac{1}{4}$

**86.**

**a)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^x-3}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3(e^x-1)}{2x}=$

$=\frac{3}{2}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}=$

$=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$

**b)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4+x}-e^4}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^4(e^x-1)}{3x}=$

$=\frac{e^4}{3}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}=$

$=\frac{e^4}{3}\times1=\frac{e^4}{3}$

**c)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x^2}\right)=$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$

**d)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x}\right)=$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Limite notável}}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=$

$=1\times\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}}$

Não existe, pois $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

Assim, não existe $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^2}$.

**e)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\frac{e^4-1}{e^2-1}=\frac{(e^2-1)(e^2+1)}{e^2-1}=e^2+1$

**f)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln(x^2)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

**Mudança de variável**

$\ln(x^2)=y\Leftrightarrow x^2=e^y$

Se $x\longrightarrow1$, então $y\longrightarrow0$.

$=\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$

**g)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{3x}=$

**Mudança de variável**

$y=\ln(x+1)\Leftrightarrow e^y=x+1\Leftrightarrow x=e^y-1$

Se $x\longrightarrow0$, então $y\longrightarrow0$.

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{e^y-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$

**h)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)^3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\ln(x+1)}{x}=$

**Mudança de variável**

$y=\ln(x+1)\Leftrightarrow e^y=x+1\Leftrightarrow x=e^y-1$

Se $x\longrightarrow0$, então $y\longrightarrow0$.

$=3\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{e^y-1}=3\times\frac{1}{1}=3$

**i)** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln(x+3)}{x+2}=$

**Mudança de variável**

$y=\ln(x+3)\Leftrightarrow e^y=x+3\Leftrightarrow x=e^y-3$

Se $x\longrightarrow-2$, então $y\longrightarrow0$.

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

**j)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{\ln x} \right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}}_{\text{Limite notável}} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} =$

$= (+\infty) \times \dfrac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}}} =$

$= +\infty \times \dfrac{1}{0^+} = +\infty \times (+\infty) = +\infty$

**k)** $\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^4}}_{\text{Limite notável}} = +\infty$

**l)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^3} \right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} =$

$= 0 \times 0 = 0$

**87.**

**a)** • $g(0) = \dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left( \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left( \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{x}{e^{2x} - 1} \right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x}}_{\text{Limite notável}} \times \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{e^{2x} - 1} =$

$= 1 \times \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}} =$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{2x \to 0^-} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}} = \dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{1}{\log x} + \dfrac{1}{2} \right) = \dfrac{1}{\log(0^+)} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{-\infty} + \dfrac{1}{2} =$

$= 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$, a função $g$ é contínua em $x = 0$.

**b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{e^{x-2} - 1}{-4x^3 - 9x^2 + 6x + 64} =$

$= \dfrac{e^0 - 1}{8} = \dfrac{0}{8} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x - 3} = \dfrac{\ln(0^+)}{-1} = \dfrac{-\infty}{-1} = +\infty$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$, não existe $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ e, portanto, a função $h$ não é contínua em $x = 2$.

**88.** Opção (D)

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -4$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$, então as retas de equações $y = -4$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais ao gráfico de $g$. Logo, o gráfico de $g$ não tem assíntotas oblíquas, já que tem duas assíntotas horizontais.

Não há dados suficientes para concluir que o gráfico de $g$ não tem assíntotas verticais; o gráfico de g pode ter assíntotas verticais.

**89.**

**a)** Opção (C)

A assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ contém os pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(0, -3)$, pelo que a sua equação é $y = -x - 3$.

Assim, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-x - 3)) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x + 3) = 0.$

**b)** Opção (D)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \dfrac{x}{f(x)} - 1 \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\frac{f(x)}{x}} - 1 = \dfrac{1}{-1} - 1 = -2$

A reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f$.

**90.**

**a)** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

**Assíntotas verticais**

A função $f$ é contínua, por se tratar do quociente de funções contínuas. Portanto, só a reta de equação $x = 3$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de $f$.

• $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \dfrac{-9}{0^+} = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \dfrac{-9}{0^-} = +\infty$

A reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$ e é a única assíntota vertical.

**Assíntotas não verticais**

$x \longrightarrow +\infty$

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\frac{x^2 - 5x - 3}{x - 3}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x - 3}{x^2 - 3x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{2x - 3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{2} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{x^2 - 5x - 3}{x - 3} - 1x \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x - 3 - x^2 + 3x}{x - 3} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x - 3}{x - 3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{1} = -2$

Concluímos assim que a reta de equação $y = x - 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$. Como os cálculos são idênticos quando $x \longrightarrow -\infty$, tem-se que a reta de equação $y = x - 2$ também é assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** $D_g = \mathbb{R}$

**Assíntotas verticais**

O gráfico de $g$ não tem assíntotas verticais, visto tratar-se de uma função contínua em $\mathbb{R}$ (quociente entre funções contínuas).

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2+e^x}{e^x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^x}{xe^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{xe^x}+\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{+\infty}+\frac{1}{+\infty} = 0+0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(g(x)-0\times x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+e^x}{e^x}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}+\lim_{x\to+\infty}1 =$$

$$= \frac{2}{+\infty}+1 = 0+1 = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $g$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^x}{xe^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{xe^x}+\frac{1}{x}\right) \overset{(0\times\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^x}+0 =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x} =$$

**Mudança de variável**

$-x = y \Leftrightarrow x = -y$

Se $x \longrightarrow -\infty$, então $y \longrightarrow +\infty$.

$$= 2\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{-y} = -2\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y} =$$

Limite notável

$$= -2\times(+\infty) = -\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de $g$ não tem assíntotas não verticais quando $x \longrightarrow -\infty$.

**c)** $D_h = \mathbb{R}^+$

**Assíntotas verticais**

$$\lim_{x\to0^+}h(x) = \lim_{x\to0^+}(\ln x + e^{1-x}) = \ln(0^+)+e^1 =$$

$$= -\infty + e = -\infty$$

A reta da equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de $h$. Não existem mais assíntotas verticais, já que a função é contínua no seu domínio.

**Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + e^{1-x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1-x}}{x} = 0+\frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Limite notável

$$b = \lim_{x\to+\infty}(h(x)-0\times x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x + e^{1-x}) =$$

$$= +\infty + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não há assíntotas não verticais ao gráfico de $h$ quando $x \longrightarrow +\infty$. Dado o domínio de $h$ ser $\mathbb{R}^+$, não faz sentido averiguar a existência de assíntota não vertical ao gráfico quando $x \longrightarrow -\infty$.

**91.** Opção (B)

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-ax^2}{ax+2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-a}{\frac{a}{x}+2} = -\frac{a}{2}$$

Quando $x \longrightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e obtém-se o mesmo valor.

Para que a assíntota oblíqua ao gráfico de $f$ seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares:

$$m = 1 \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = -2$$

**92.** Opção (B)

**Cálculo auxiliar**

$r$ é perpendicular à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x+1$, logo é do tipo $y = 2x+b$, $b \in \mathbb{R}$.

Como $r$ é assíntota não vertical ao gráfico de $g$, então $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{x}+2 = 0+2 = 2$$

**93.** Se o gráfico de $f$ admite uma assíntota de equação $y = 2x+b$, então $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$.

Assim:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^5+3x^4+8x}{3x^5+4x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(a+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^4}\right)}{x^5\left(3+\frac{4}{x^4}\right)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{a+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^4}}{3+\frac{4}{x^4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{3} = 2$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

Logo, $f(x) = \frac{6x^5+3x^4+8x}{3x^4+4}$.

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^5+3x^4+8x}{3x^4+4}-2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+3x^4+8x-6x^5-8x}{3x^4+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{3x^4+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{x^4\left(3+\frac{4}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{3+\frac{4}{x^4}} = \frac{3}{3} = 1$$

**94.** $\lim_{x\to0^+}g(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x} = \frac{-\infty-1}{0^+} = -\infty$

Logo, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $g$.

Tem-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x))+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x)+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x-1)) = 0$$

Logo, a reta de equação $y = -2x-1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f$.

Assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$.

Então:

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = -2 - 0 = -2$

Logo, a reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $g$.

## Capítulo 7 – Resolução aproximada de equações

### Tarefa – Adivinha o número – página 158

**a)** A melhor estratégia é escolher sempre o número que fica no meio do intervalo de valores possíveis, pois permite reduzir o número de possibilidades o mais rapidamente possível.

**b)** Em cada tentativa, o intervalo de valores possíveis é, aproximadamente, reduzido para metade.

**c)** **i.** No início do jogo existem 100 números possíveis (de 1 a 100).

**ii.** Assumindo que se escolhe sempre o número do meio do intervalo, o número de valores possíveis evolui aproximadamente da seguinte forma:

| Tentativas | Valores possíveis |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 1 | 50 |
| 2 | 25 |
| 3 | 13 |
| 4 | 7 |
| 5 | 4 |
| 6 | 2 |
| 7 | 1 |

**iii.** Procuramos o menor número natural $n$ tal que $2^n \geq 100$.

$2^6 = 64 < 100$

$2^7 = 128 \geq 100$

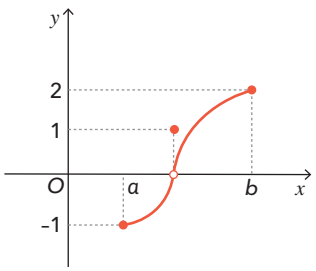
Logo, $n = 7$.

**iv.** Bastam 7 tentativas para garantir que se acerta no número, usando a melhor estratégia possível. Isto acontece porque, a cada tentativa, o número de possibilidades é reduzido para cerca de metade.

### Exercícios de margem – páginas 159 a 177

**95.** A função $g$ não é contínua em $[a, b]$.

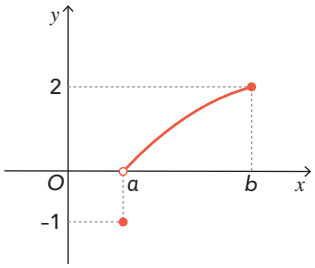
Por exemplo:




$a < b$
$g(a) = -1$
$g(b) = 2$
$g(a) \times g(b) < 0$

e não existe nenhum número real $x$ tal que $a < x < b$ e $g(x) = 0$.

Ou, por exemplo:




$a < b$
$g(a) = -1$
$g(b) = 2$
$g(a) \times g(b) < 0$

e não existe nenhum número real $x$ tal que $a < x < b$ e $g(x) = 0$.

**96.** • $h$ é contínua em $[1, 2]$, visto tratar-se de uma função polinomial.

• $h(1) = -1^3 + 1^2 - 1 + 4 = 3 > 0$

$h(2) = -2^3 + 2^2 - 2 + 4 = -2 < 0$

$h(2) < e < h(1)$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que a equação $h(x) = e$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 2[$.

**97.** Às 10 horas de um determinado dia corresponde $t = 0$, logo às 11 horas e às 11 horas e 30 minutos do referido dia correspondem $t = 1$ e $t = 1{,}5$, respetivamente.

Sabe-se também que $P$ está expresso em milhões de bactérias.

Assim, pretende-se provar que $\exists\, t \in ]1; 1{,}5[ : P(t) = 0{,}5$.

A função $P$ é contínua em $[1; 1{,}5]$, visto tratar-se de uma função racional.

$P(1) = \frac{5 \times 1^2}{2 \times 1^3 + 10} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$

$P(1{,}5) = \frac{5 \times (1{,}5)^2}{2 \times (1{,}5)^3 + 10} = \frac{45}{67} \approx 0{,}672$

Logo, $P(1) < 0{,}5 < P(1{,}5)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe, pelo menos, um instante $t \in ]1; 1{,}5[$ tal que $P(t) = 0{,}5$.

**98.** Às dez horas de um determinado dia corresponde $t = 0$, logo às onze horas e ao meio-dia do referido dia corresponde $t = 1$ e $t = 2$, respetivamente.

Sabe-se também que $P$ está expresso em milhões de bactérias.

Assim, pretende-se provar que:

$\exists\, t \in ]1, 2[ : P(t) = 0{,}5$

• A função $P$ é contínua em $[1, 2]$, visto tratar-se do produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ ($t \longmapsto t^2$ e $t \longmapsto e^{-t}$), logo contínuas em $[1, 2]$.

• $P(1) = 1^2 \times e^{-1} \approx 0{,}368$

$P(2) = 2^2 \times e^{-2} \approx 0{,}541$

ou seja, $P(1) < 0{,}5 < P(2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que existe, pelo menos, um instante $t \in ]1, 2[$ tal que $P(t) = 0{,}5$.

**99.** • $h$ é contínua em $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, visto tratar-se da soma de duas funções contínuas (a função identidade e a função logarítmica de base $e$).

• $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \ln(e^{-1}) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$

$h(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0$

$h\left(\frac{1}{e}\right) \times h(1) < 0$

Assim, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que a função $h$ tem, pelo menos, um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

**100.**

**a)** Seja $f$ a função definida por $f(x) = e^x - x - 2$.

Provar que a equação $e^x = x + 2$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]-2, -1[$ é equivalente a provar que a função $f$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-2, -1[$.

Assim:

• $f$ é contínua em $[-2, -1]$, visto tratar-se da diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ ($x \longmapsto e^x$ e $x \longmapsto x + 2$), logo contínuas no intervalo $[-2, -1]$.

• $f(-2) = e^{-2} + 2 - 2 \approx 0{,}135$

$f(-1) = e^{-1} + 1 - 2 \approx -0{,}632$

ou seja, $f(-1) \times f(-2) < 0$.

Pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que a função $f$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-2, -1[$, isto é:

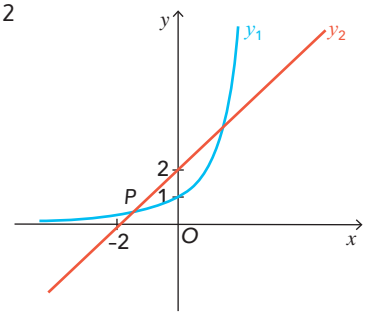
$\exists\, c \in ]-2, -1[ : f(c) = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]-2, -1[ : e^c - c - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]-2, -1[ : e^c = c + 2$

**b)** $y_1 = e^x$

$y_2 = x + 2$




O ponto $P$, interseção do gráfico da função $x \longmapsto e^x$ com o gráfico da função $x \longmapsto x + 2$, no intervalo $]-2, -1[$, tem coordenadas $P(-1{,}841;\ 0{,}159)$ (com aproximação às milésimas).

Assim, $x \approx -1{,}841$.

**101.** A função $g$ é contínua em $[0, 1]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas (uma que é o produto de uma constante pela função $f$ e outra constante).

$g(0) = 2f(0) - f(1) = 2f(0) - 3f(0) = -f(0) > 0$

$g(1) = 2f(1) - f(1) = f(1) = 3f(0) < 0$

Logo, $g(0)$ e $g(1)$ têm sinais contrários. Então, 0 é um valor intermédio.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists\, c \in ]0, 1[ : g(c) = 0$.

**102.** $h(x) = \frac{1}{g(x)}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$

Se o domínio de $h$ fosse o intervalo $[a, b]$, significaria que não existia nenhum valor $c$ no intervalo $]a, b[$ tal que $g(c) = 0$.

No entanto, como $g$ é contínua no intervalo $[a, b]$, $g(a) = 4$ e $g(b) = -2$, ou seja, $g(a) \times g(b) < 0$, pode concluir-se, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um número real $c \in ]a, b[$ tal que $g(c) = 0$.

Logo, $h$ não pode ter como domínio o intervalo $[a, b]$.

**103.** Seja $g$: $[1, \pi] \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x - 1) - f(\pi - x)$.

A função $g$ é contínua em $[1, \pi]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas (ambas são a composta de $f$ com uma função afim).

$g(1) = f(0) - f(\pi - 1) \neq 0$

$g(\pi) = f(\pi - 1) - f(0) \neq 0$

Logo, $g(1)$ e $g(\pi)$ têm sinais contrários. Então, 0 é um valor intermédio.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists\, c \in ]1, \pi[ : g(c) = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]1, \pi[ : f(c - 1) - f(\pi - c) = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]1, \pi[ : f(c - 1) = f(\pi - c)$

**104.** Observe-se que, provar que existe $c \in ]0, 2[$ tal que $f(c) = c$ é equivalente a provar que existe $c \in ]0, 2[$ tal que $f(c) - c = 0$.

Consideremos a função $g$ definida, em $[0, 2]$, por $g(x) = f(x) - x$.

• $g$ é contínua em $[0, 2]$, por se tratar da diferença de duas funções contínuas em $[0, 2]$ (a função $f$ e a função identidade).

• $g(0) = f(0) - 0 = 2 - 0 = 2$

$g(2) = f(2) - 2 = 0 - 2 = -2$

$g(2) < 0 < g(0)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists\, c \in ]0, 2[ : g(c) = 0$, ou seja, $\exists\, c \in ]0, 2[ : f(c) - c = 0$, isto é, $\exists\, c \in ]0, 2[ : f(c) = c$.

**105.** Observe-se que, provar que existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$ é equivalente a provar que existe $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) - g(c) = 0$.

Consideremos a função $h$ definida, em $[a, b]$, por $h(x) = f(x) - g(x)$.

• $h$ é contínua em $[a, b]$, por se tratar da diferença de duas funções contínuas em $[a, b]$.

• $h(a) = f(a) - g(a) < 0$, pois $g(a) > f(a)$.

$h(b) = f(b) - g(b) > 0$, pois $f(b) > g(b)$.

$h(a) \times h(b) < 0$

Logo, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists\, c \in ]a, b[ : h(c) = 0$, ou seja, $\exists\, c \in ]a, b[ : f(c) - g(c) = 0$, isto é, $\exists\, c \in ]a, b[ : f(c) = g(c)$.

**106.**

| Iteração | Intervalo | $a$ | $b$ | $m = \frac{a+b}{2}$ | Sinal de $f(m)$ | Erro = $\frac{b-a}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | [3; 4] | 3 | 4 | 3,5 | – | 0,5 |
| 1 | [3; 3,5] | 3 | 3,5 | 3,25 | – | 0,25 |
| 2 | [3; 3,25] | 3 | 3,25 | 3,125 | + | 0,125 |
| 3 | [3,125; 3,25] | 3,125 | 3,25 | 3,1875 | – | 0,0625 |
| 4 | [3,125; 3,1875] | 3,125 | 3,1875 | 3,15625 | | 0,03125 < 0,05 |

Como o erro máximo é inferior a 0,05, pode-se tomar como aproximação de $\pi$ o ponto médio do último intervalo: $\pi \approx 3{,}15625$

**107.**

**a)** O programa implementa o método da bisseção para encontrar um zero (raiz) da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$, no intervalo [0, 5], com erro absoluto máximo inferior a 0,000 001.

Como $f(0) = -3$ e $f(5) = 7$, há mudança de sinal, logo existe uma raiz real nesse intervalo. Portanto, o programa deve devolver uma aproximação dessa raiz.

**b)**

```
def bissecao (f,a,b,erro):
  if f(a)*f(b) > 0:
      print( "A função tem imagens com o mesmo sinal nos extremos deste intervalo" )
      exit (0)
  while b-a > 2*erro:
    c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
      b=c
    elif f(a)*f(c)>0:
      a=c
    else:
      return c
  return c
def f(x):
  return x**3-5*x**2+2*x-3
print (bissecao (f,0,5,0.000001))
```

```
4.710623025894165
```

**c)**

```
def bissecao (f,a,b,erro):
  if f(a)*f(b) > 0:
      print( "A função tem imagens com o mesmo sinal nos extremos deste intervalo" )
      exit (0)
  while b-a > 2*erro:
    c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
      b=c
    elif f(a)*f(c)>0:
      a=c
    else:
      return c
  return c
def f(x):
  return x**2-2
print (bissecao (f,1,2,0.0001))
```

```
1.4141845703125
```

**108.** O método de Newton-Raphson para $f(x) = \text{sen } x$ é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\text{sen } x_n}{\cos x_n} = x_n - \text{tg } x_n$$

Estimativa inicial: $x_1 = 3{,}1400$

Tabela das iterações:

Supondo $x_1 = 3{,}14$:

| Iteração | $x_n$ | $\text{tg}(x_n)$ | $x_{n+1} = x_n - \text{tg}(x_n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3,140 000 | –0,001 593 | 3,141 593 |
| 2 | 3,141 593 | 0,000 000 | 3,141 593 |

Após duas iterações, a aproximação da raiz é $\pi \approx 3{,}141593$.

## Aprende fazendo (7) – páginas 172 e 173

**109.** Opção (B)

Como a função $g$ é contínua nos intervalos [0, 1], [1, 2], [2, 3] e [–1, 0], basta averiguar em qual destes intervalos as imagens dos extremos são uma inferior a 9 e a outra superior a 9.

- $g(0) = 2^0 + 3^0 = 2$
- $g(1) = 2^1 + 3^1 = 5$
- $g(2) = 2^2 + 3^2 = 13$
- $g(3) = 2^3 + 3^3 = 35$
- $g(-1) = 2^{-1} + 3^{-1} = \frac{5}{6}$

Como $g(1) = 5 < 9$ e $g(2) = 13 > 9$, então, conclui-se que no intervalo ]1, 2[ a equação $g(x) = 9$ tem, pelo menos, uma solução.

**110.**

**a)** Se $x \leq 3$, então:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow x = 6 \notin ]-\infty, 3]$$

Se $x > 3$, então:

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \notin ]3, +\infty[$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 2$. Em particular, $\forall x \in [0, 4], f(x) \neq 2$.

**b)** $f(0) = \frac{0}{3} = 0$

$f(4) = 4 + 2 = 6$

Logo, $f(0) < 2 < f(4)$.

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x}{3} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x + 2) = 5$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ e $3 \in D_f$, então $f$ não é contínua em $x = 3$.

Assim, como a função não é contínua em [0, 4], não é garantido que exista $x \in [0, 4]$ tal que $f(x) = 2$, apesar de $f(0) < 2 < f(4)$. Logo, a veracidade da proposição da alínea anterior não contradiz o teorema de Bolzano-Cauchy.

**111.**

**a)** Seja $f$ a função definida por $f(x) = x^3 - 2$.

| Iteração | Intervalo $[a, b]$ | $a$ | $b$ | $m = \frac{a+b}{2}$ | $f(m)$ | Erro = $\frac{b-a}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [1; 2] | 1 | 2 | 1,5 | 1,375 | 0,5 |
| 2 | [1; 1,5] | 1 | 1,5 | 1,25 | –0,0469 | 0,25 |
| 3 | [1,25; 1,5] | 1,25 | 1,5 | 1,375 | 0,5996 | 0,125 |
| 4 | [1,25; 1,375] | 1,25 | 1,375 | 1,3125 | 0,26099 | 0,0625 |

Como o erro máximo de 0,0625 é inferior a 0,1, pode tomar-se como aproximação de $\sqrt[3]{2}$ o ponto médio do último intervalo:

$$\frac{1{,}25 + 1{,}375}{2} = 1{,}3125$$

**b)** Função e derivada:

$f(x) = x^3 - 2$

$f'(x) = 3x^2$

Recorrência:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**Cálculos**

- $x_0 = 1{,}5$

  $f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 2 = 1{,}375$

  $f'(1{,}5) = 3 \times 1{,}5^2 = 6{,}75$

- **1ª iteração**

  $x_1 = 1{,}5 - \dfrac{1{,}375}{6{,}75} = 1{,}2962962962962963$

  $f(x_1) \approx 0{,}17827566935934547$

- **2ª iteração**

  $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} =$

  $= 1{,}2962962962962963 - \dfrac{0{,}17827566935934547}{3 \times (1{,}2962962962962963)^2} \approx$

  $\approx 1{,}2609322247417485$

  $f(x_2) \approx 0{,}004819285792566408$

Aproximação após duas iterações é:

$\tilde{x}_{\text{Newt}} = x_2 \approx 1{,}260\,932\,224\,741\,748\,5$

Erro absoluto à raiz verdadeira:

$|\tilde{x}_{\text{Newt}} - \sqrt[3]{2}| \approx 0{,}001\,011\,174\,846\,875\,3$

**112.** Opção (B)

- A opção (A) é falsa.

  Contraexemplo: $f(x) = x^2 + 1$

- A opção (B) é verdadeira.

  Seja $f$ uma função polinomial de grau ímpar definida por $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1x + a^0$, com $a_{2n+1} > 0$.

  Então, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

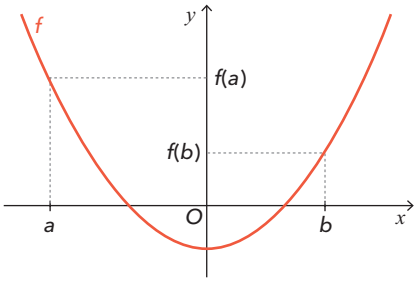
  A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial. Em particular, $f$ é contínua em qualquer intervalo fechado de números reais $[a, b]$ tais que $f(a) < 0 < f(b)$.

  Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in ]a, b[: f(c) = 0$.

  A demonstração para o caso em que $a_{2n+1} < 0$ é análoga.

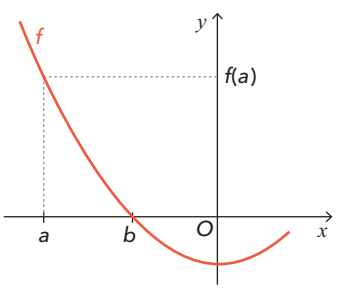
- A opção (C) é falsa.

  Contraexemplo:




- A opção (D) é falsa.

  Contraexemplo:




**113.** A função $g$ é contínua em $[-3, 0]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas.

$g(-3) = f(-3) - 3 < 0$, pois $1 \leq f(-3) \leq 2$

$\Leftrightarrow -2 \leq f(-3) - 3 \leq -1$.

$g(0) = f(0) > 0$, pois $1 \leq f(0) \leq 2$.

Logo, $g(-3) < 0 < g(0)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in ]-3, 0[: g(c) = 0$.

**114.** A função $h$ é contínua em $[-1, 1]$, por se tratar de uma função polinomial.

$h(-1) = a + 1$

$h(1) = a - 1$

Logo, $h(1) < a < h(-1)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in ]-1, 1[: h(c) = a$, ou seja, o gráfico de $h$ interseta a reta de equação $y = a$.

**115.**

**a)** Justificar que a reta $r$ interseta a curva $c$ em, pelo menos, um ponto, no intervalo $[0, 1]$, é equivalente a provar que a equação $f(x) = 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $[0, 1]$:

- $f$ é contínua em $[0, 1]$, por se tratar da soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínuas em $[0, 1]$.
- $f(0) = 5^0 + 5 \times 0 = 1$

  $f(1) = 5^1 + 5 \times 1 = 10$

Ou seja, $f(0) < 5 < f(1)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que existe, pelo menos, um número $c \in ]0, 1[$ tal que $f(c) = 5$, isto é, $f(x) = 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, 1[$.

**b)** Provar que o ponto de interseção, referido na alínea anterior, é único, é equivalente a provar que $f(x) = 5$ tem uma única solução no intervalo $[0, 1]$ ou, de forma equivalente, que a função $g$ definida por $g(x) = f(x) - 5$ tem um único zero nesse intervalo.

Observe-se que:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Ficou provado na alínea anterior, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que existia, pelo menos, uma solução. Esta é única, visto a função $g$ ser estritamente crescente em todo o seu domínio $[0, 1]$.

$g(x) = 5^x + 5x - 5$

$g'(x) = (5^x + 5x - 5)' =$

$= 5^x \ln 5 + 5 > 0,\ \forall\, x \in [0, 1]$

**c)** **i.** Intervalo inicial: $[0, 1]$

Valores iniciais

$g(0) = -4 < 0$

$g(1) = 5 > 0$

| Iteração | Intervalo | $a$ | $b$ | Ponto médio $m$ | Sinal de $g(m)$ | Erro $= \frac{b-a}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [0; 1] | 0 | 1 | 0,5 | – | 0,5 |
| 2 | [0,5; 1] | 0,5 | 1 | 0,75 | + | 0,25 |
| 3 | [0,5; 0,75] | 0,5 | 0,75 | 0,625 | + | 0,125 |
| 4 | [0,5; 0,625] | 0,5 | 0,625 | 0,5625 | + | 0,0625 |
| 5 | [0,5; 0,5625] | 0,5 | 0,5625 | 0,53125 | + | 0,03125 |
| 6 | [0,5; 0,53125] | 0,5 | 0,53125 | 0,515625 | – | 0,015625 |
| 7 | [0,515625; 0,53125] | 0,515625 | 0,53125 | 0,5234375 | | 0,0078125 < 0,01 |

Como o erro máximo de 0,0078125 é inferior a 0,01, pode tomar-se como aproximação do valor pretendido o ponto médio do último intervalo:
$x \approx 0{,}523\,437\,5$

**ii.** Estimativa inicial: $x_0 = 0{,}5$
$g'(x) = 5^x \ln 5 + 5$
Cálculo de $g(0{,}5)$: $g(0{,}5) = -0{,}2639320225$
Cálculo de $g'(0{,}5)$: $g'(0{,}5) = 8{,}5988125778$

$$x_1 = 0{,}5 - \frac{-0{,}2639320225}{8{,}5988125778}$$

Quociente: $\frac{0{,}2639320225}{8{,}5988125778} = 0{,}5306940081$
Então, $x_1 = 0{,}5306940081$.
$x \approx 0{,}530\,694\,008\,1$

**d)**
- Método da bisseção:
  Foram necessárias sete iterações para garantir um erro absoluto inferior a 0,01.
- Método de Newton–Raphson:
  Foi necessária apenas uma iteração para obter uma aproximação com precisão comparável.

**116.** $f(x) = f(x+1) \Leftrightarrow f(x) - f(x+1) = 0$
Seja $g(x) = f(x) - f(x+1)$.
A função $g$ é contínua em $[a, a+1]$, por ser a diferença entre duas funções contínuas.
$g(a) = f(a) - f(a+1) = -f(a+1) < 0$
$g(a+1) = f(a+1) - f(a+2) = f(a+1) > 0$
Logo, $g(a) < 0 < g(a+1)$.
Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que:
$\exists\, c \in ]a, a+1[ : g(c) = 0$
$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]a, a+1[ : f(c) - f(c+1) = 0$
$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]a, a+1[ : f(c) = f(c+1)$

**117.** A função $f''$ é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[a, b]$.
Como as retas tangentes ao gráfico de $f'$, nos pontos de abcissas $a$ e $b$, são perpendiculares, então tem-se que $f''(a) \times f''(b) = -1$, ou seja, $f''(a)$ e $f''(b)$ têm sinais contrários, pelo que 0 é um valor intermédio entre $f''(a)$ e $f''(b)$.
Conclui-se, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que $f''$ tem, pelo menos, um zero em $]a, b[$.

## Aprende Fazendo Global – páginas 188 a 196

**1.** Opção (A)

| $x$ | 0 | | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f'$ | 0 | – | 0 | + |
| Variação de $f$ | | ↘ | mín. | ↗ |

| $x$ | 0 | | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | – | – | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | | ∩ | P.I. | ∪ |

**2.** Opção (A)

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Sinal de $h''$ | – | |
| Sentido das concavidades do gráfico de $h$ | ∩ | |

**3.** Opção (C)

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} (k + \ln(e + x)) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow k + \ln(e + 0) = \lim_{2x \to 0^-} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2\right)$$
$$\Leftrightarrow k + 1 = \underbrace{\lim_{2x \to 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\text{Limite notável}} \times 2$$
$$\Leftrightarrow k + 1 = 1 \times 2$$
$$\Leftrightarrow k = 1$$

**4.** Opção (C)

| $x$ | –6 | | –1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Variação de $h$ | –2 | ↗ | 4 | ↘ | –3 |

Nestas condições, e sendo a função contínua em todo o seu domínio, pode concluir-se que $h(x) = 1$ tem duas soluções: uma no intervalo $]-6, -1[$ e outra no intervalo $]-1, 3[$.

**5.** Opção (C)
$P$ é o ponto do gráfico de $f$ de abcissa $a$, logo $P(a, f(a))$.
Como $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$, conclui-se que $f'(a) = 0$.
Como $\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = -1$, conclui-se que $f''(a) = -1$.
Como $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, podemos concluir que $f(a)$ é um máximo relativo da função $f$.

**6.** $f'(0) = 0$, pois, em $x = 0$, a função $f$ é diferenciável e apresenta um máximo.
Assim, $g(0) \times f'(0) = 0$, pelo que a afirmação I é falsa.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{f(x)} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Logo, o gráfico da função $g$ não admite uma assíntota horizontal quando $x \longrightarrow +\infty$ e a afirmação II é falsa.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{f(x)} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo, o gráfico da função $g$ não admite uma assíntota horizontal quando $x \longrightarrow -\infty$ e a afirmação III é falsa.

A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}$ e não tem zeros, logo a função $g$ é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, cujo denominador não se anula. Assim, o gráfico da função $g$ não admite assíntotas verticais e a afirmação IV é a afirmação verdadeira.

**7.**

**a)** $f'(x) = \frac{1}{2}(xe^x)' = \frac{1}{2}(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{2}(1+x)$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

- $f'$ é uma função contínua, por se tratar do produto de duas funções contínuas. Em particular, $f'$ é contínua em $[0, 1]$.
- $f'(0) = \frac{e^0}{2}(1+0) = \frac{1}{2} < 1$

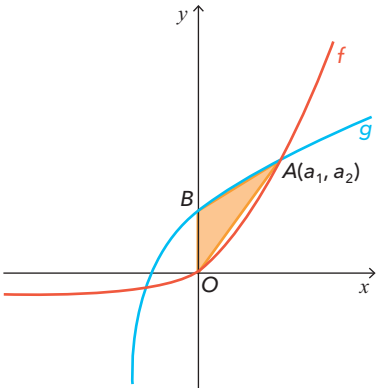
$f'(1) = \frac{e^1}{2}(1+1) = e > 1$

$f'(0) < 1 < f'(1)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists\, c \in ]0, 1[ : f'(c) = 1$, isto é, existe, pelo menos, um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 1[$, no qual a reta tangente ao gráfico da função $f$ nesse ponto tem declive igual a 1, ou seja, é perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$).

**b)** $f(x) = \frac{xe^x}{2}$ $\qquad$ $g(x) = \ln(x+2) + 4$

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D_g = ]-2, +\infty[$




$B(0, b)$

$b \approx 4{,}69$

$A(a_1, a_2)$

$a_1 \approx 1{,}79$

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times \text{abcissa de } A}{2} \approx \frac{4{,}69 \times 1{,}79}{2} \approx 4{,}2 \text{ u.a.}$$

**8.** Equação: $x^3 - 3 = 0$

Função: $f(x) = x^3 - 3$

Intervalo inicial: $[1, 2]$

$f(1) = 1^3 - 3 = -2 < 0$

$f(2) = 2^3 - 3 = 5 > 0$

Como $f(1) \times f(2) < 0$, existe, pelo menos, uma raiz no intervalo $[1, 2]$.

| Iteração | Intervalo | $a$ | $b$ | Ponto médio $m$ | Sinal de $f(m)$ | Erro $= \frac{b-a}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [1; 2] | 1 | 2 | 1,5 | + | 0,5 |
| 2 | [1; 1,5] | 1 | 1,5 | 1,25 | – | 0,25 |
| 3 | [1,25; 1,5] | 1,25 | 1,5 | 1,375 | – | 0,125 |
| 4 | [1,375; 1,5] | 1,375 | 1,5 | 1,4375 | – | 0,0625 |
| 5 | [1,4375; 1,5] | 1,4375 | 1,5 | 1,46875 | + | 0,03125 |
| 6 | [1,4375; 1,46875] | 1,4375 | 1,46875 | 1,453125 | + | 0,015625 |
| 7 | [1,4375; 1,453125] | 1,4375 | 1,453125 | 1,4453125 | | 0,0078125 < 0,01 |

Erro absoluto: $\frac{1{,}453125 - 1{,}4375}{2} = 0{,}0078125 < 0{,}01$

Uma aproximação da solução de $x^3 - 3 = 0$, com erro absoluto inferior a 0,01, é $x \approx 1{,}445\,312\,5$.

**9.** Opção (B)

$\text{t.m.v.}_{[0,4]} = \ln(\sqrt[4]{3})$

$\Leftrightarrow \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \ln(\sqrt[4]{3})$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(8+k) - \ln k}{4} = \ln(\sqrt[4]{3})$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{8+k}{k}\right) = 4\ln(\sqrt[4]{3})$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{8+k}{k}\right) = \ln(\sqrt[4]{3})^4$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{8+k}{k}\right) = \ln 3$

$\Leftrightarrow \frac{8+k}{k} = 3$

$\Leftrightarrow 8 + k = 3k$

$\Leftrightarrow k = 4$

**10.** Opção (B)

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1)(x - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \vee x^2 + 1 = 0 \vee (x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \vee x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 2$

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x^2 - 3)$ | + | 0 | – | 0 | + | + | + |
| $(x^2 + 1)$ | + | + | + | + | + | + | + |
| $(x - 2)^2$ | + | + | + | + | + | 0 | + |
| Sinal de $f''$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | ∪ | P.I. | ∩ | P.I. | ∪ | | ∪ |

O gráfico de $f$ tem dois pontos de inflexão.

**11.** Opção (A)

$h(x) = -\frac{1}{2}g(x) + \frac{x^2}{2}$

$h'(x) = \left(-\frac{1}{2}g(x) + \frac{x^2}{2}\right)' = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{2x}{2} =$

$= -\frac{1}{2}g'(x) + x$

$h''(x) = \left(-\frac{1}{2}g'(x) + x\right)' = -\frac{1}{2}g''(x) + 1$

O gráfico da função $h''$ obtém-se do gráfico da função $g''$ por uma contração vertical segundo fator $\frac{1}{2}$, seguida de uma simetria em relação ao eixo $Ox$ e posteriormente de uma translação associada ao vetor $\vec{u}(0, 1)$.

**12.** Opção (D)

$f'$ é estritamente decrescente em $]0, 5[$, logo $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in [0, 5]$. Assim, o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 5[$.

**13.** Opção (B)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x - x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}}{x - x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-x(-1 + x)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-x(-1 + x)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{-1 + x} =$

$= \frac{0}{-\infty} = 0$

Logo, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x^2 + 1 - 3x}{x^2 - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{1}{2} = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x - x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x - x^2} \times \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1 - x}{x\,(1 - x)\sqrt{1-x}}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

**14.** A função $f$ é contínua em $]-\infty, 4[$, por se tratar de uma função racional.

Para que a função $f$ seja contínua em $x = 4$, terá de se verificar $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$.

- $f(4) = \frac{k^2 - 4}{8 - 4} = \frac{k^2 - 4}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \frac{k^2 - x}{8 - x} = \frac{k^2 - 4}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} =$

$= \lim\limits_{x \to 4^+} \left(\frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} \times \frac{\sqrt{2x + 1} + 3}{\sqrt{2x + 1} + 3}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{(x - 4)\left(\sqrt{2x + 1} + 3\right)}{2x + 1 - 9} =$

$= \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{(x - 4)\left(\sqrt{2x + 1} + 3\right)}{2(x - 4)} =$

$= \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{2x + 1} + 3}{2} = 3$

Logo:

$\frac{k^2 - 4}{4} = 3 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 12$

$\Leftrightarrow k^2 = 16$

$\Leftrightarrow k = 4 \vee k = -4$

Como se pede o valor de $k$ positivo, então $k = 4$.

**15.** Opção (D)

A afirmação (A) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

A afirmação (B) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

A afirmação (C) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

A afirmação (D) é verdadeira.

Por exemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**16.** Opção (A)

Sendo $f$ uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e $y = -5$ a equação da assíntota ao gráfico de $f$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$.

Assim:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)} = \frac{\ln(0^+)}{-5} = \frac{-\infty}{-5} = +\infty$

**17.** Opção (B)

A afirmação (A) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A afirmação (B) é verdadeira.

Por exemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A afirmação (C) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A afirmação (D) é falsa.

Contraexemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

**18.**

**a)** Opção (B)

$1 \notin D_f$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{f(x)} = 0$.

**b)** Opção (C)

O gráfico de $f^{-1}$ é simétrico do gráfico de $f$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Logo, se as assíntotas ao gráfico de $f$ são as retas de equações $x = 1$ e $y = -2$, então as assíntotas ao gráfico de $f^{-1}$ são as retas de equações $x = -2$ e $y = 1$.

**19.**

**a)** **Assíntotas verticais**

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3x}{\ln x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de $f$.

Como a função $f$ é contínua em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, o seu gráfico não admite mais assíntotas verticais.

**Assíntotas não verticais**

$y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R} \quad (x \longrightarrow +\infty)$

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^{x-3}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-3}} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 0x] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-3}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^{-3}} \right) =$

$= e^3 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} =$

$= e^3 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} =$

$= e^3 \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}} =$

$= e^3 \times \frac{1}{+\infty} = e^3 \times 0 = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

**b)** $f$ é contínua em $]1, +\infty[$, pois, neste intervalo, é definida pelo quociente de duas funções contínuas: uma que é uma função afim e a outra que é a composta de uma função exponencial com uma função afim; em particular, $f$ é contínua em $[4, 5]$.

$f(4) = \frac{4}{e} \approx 1{,}472$

$f(5) = \frac{5}{e^2} \approx 0{,}677$

$-f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{\frac{3}{e}}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = -\frac{\frac{3}{e}}{-1} = \frac{3}{e} \approx 1{,}104$

$f(5) < -f\left(\frac{1}{e}\right) < f(4)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists\, c \in ]4, 5[ : f(c) = -f\left(\frac{1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]4, 5[ : f(c) + f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

**c)** Em $]0, 1[$, $f(x) = \frac{3x}{\ln x}$

$f'(x) = \frac{(3x)' \ln x - 3x (\ln x)'}{(\ln x)^2} =$

$= \frac{3 \times \ln x - 3x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} =$

$= \frac{3(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

Como $(\ln x)^2 > 0,\ \forall x \in ]0, 1[$ e $3 > 0,\ \forall x \in ]0, 1[$, o sinal de $f'$ depende apenas do sinal de $(\ln x - 1)$.

$\ln x - 1 < 0,\ \forall x \in ]0, 1[$, isto é, $f'(x) < 0,\ \forall x \in ]0, 1[$.

Logo, $f$ é estritamente decrescente em $]0, 1[$.

**d)** Em $[1, +\infty[$, $f(x) = xe^{3-x}$

$f'(x) = x'e^{3-x} + x(e^{3-x})' =$

$= e^{3-x} + x \times (-1) \times e^{3-x} =$

$= e^{3-x}(1 - x)$

$f''(x) = (e^{3-x})' \times (1 - x) + (e^{3-x}) \times (1 - x)' =$

$= -e^{3-x} \times (1 - x) + (e^{3-x}) \times (-1) =$

$= -e^{3-x}(1 - x + 1) =$

$= -e^{3-x} \times (2 - x)$

$f''(x) = 0 \ \wedge\ x \geq 1$

$\Leftrightarrow -e^{3-x}(2 - x) = 0 \ \wedge\ x \geq 1$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-e^{3-x} = 0}_{\text{condição impossível}} \ \vee\ 2 - x = 0) \ \wedge\ x \geq 1$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \wedge\ x \geq 1$

| $x$ | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-e^{3-x}$ | – | – | – | – |
| $2 - x$ | + | + | 0 | – |
| Sinal de $f''$ | – | – | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | | ∩ | P.I. | ∪ |

$f(2) = 2e^{3-2} = 2e$

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$; $(2, 2e)$ é ponto de inflexão.

**e)** Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa 3.

$m = f'(3) = e^{3-3}(1-3) = -2 \times e^0 = -2$

$y = -2x + b$

O ponto $(3, f(3)) = (3, 3)$ pertence à reta, logo:

$3 = -2 \times 3 + b \Leftrightarrow 3 = -6 + b \Leftrightarrow 9 = b$

Assim, $y = -2x + 9$ é uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa 3.

**20.** $f(x) = 2^x + 4x - 7$

$f'(x) = 2^x \ln 2 + 4$

Aplicando o método de Newton–Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**1ª iteração**

$x_0 = 1$

$f(1) = 2^1 + 4 \times 1 - 7 = -1{,}0000$

$f'(1) = 2 \ln 2 + 4 \approx 5{,}3863$

$$x_1 = 1 - \frac{-1{,}0000}{5{,}3863} \approx 1{,}1857$$

**2ª iteração**

$x_1 = 1{,}1857$

$f(1{,}1857) \approx 0{,}0175$

$f'(1{,}1857) \approx 5{,}5767$

$$x_2 = 1{,}1857 - \frac{0{,}0175}{5{,}5767}$$

$x_2 \approx 1{,}1826$

**3ª iteração**

$x_2 = 1{,}1826$

$f(1{,}1826) \approx 0{,}0003$

$f'(1{,}1826) \approx 5{,}5733$

$$x_3 = 1{,}1826 - \frac{0{,}0003}{5{,}5733}$$

$x_3 \approx 1{,}1826$

Após três iterações do método de Newton–Raphson, obtém-se $x \approx 1{,}1826$.

**21.** Opção (C)

Sejam $f$ e $g$ as funções seno e cosseno, respetivamente.

$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Um vetor diretor da reta $r$, tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$, pode ser $\vec{r}(2, 1)$.

$g'(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Um vetor diretor da reta $s$, tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$, pode ser $\vec{s}(-2, \sqrt{3})$.

$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$

$\vec{r} \cdot \vec{s} = -4 + \sqrt{3}$

Seja $\alpha$ o ângulo formado pelas retas $r$ e $s$.

$$\cos\alpha = \frac{|-4 + \sqrt{3}|}{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}$$

Logo, $\alpha \approx 67°$.

**22.** Opção (B)

Determinar o número de tangentes ao gráfico de $f$ que são paralelas ao eixo $Ox$ é o mesmo que determinar o número de zeros da função $f'$, derivada de $f$.

$f'(x) = (x + \operatorname{sen} x)' = 1 + \cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

A equação $f'(x) = 0$ tem uma solução em cada um dos intervalos $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ..., $[98\pi, 100\pi]$. Então, a equação $f'(x) = 0$ tem 50 soluções.

**23.** Opção (D)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-a\}$

**Assíntotas verticais**

A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-a\}$, por se tratar de uma função racional.

Só a reta de equação $x = -a$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de $f$.

$$\lim_{x \to -a^-} f(x) = \lim_{x \to -a^-} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \to -a^-} \frac{(x-a)(x+a)}{x + a} =$$

$$= \lim_{x \to -a^-} (x - a) = -2a$$

Quando $x \longrightarrow -a^+$, os cálculos são idênticos e obtém-se o mesmo valor.

A reta de equação $x = -a$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de $f$.

**Assíntotas horizontais**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \frac{a^2}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = +\infty$$

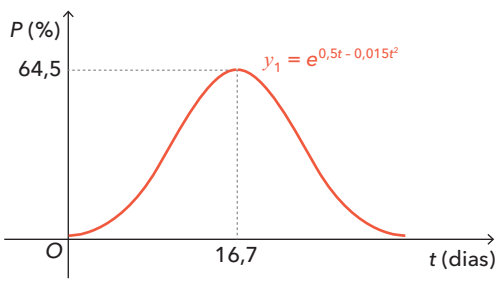
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - a^2}{x + a} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \frac{a^2}{x}}{1 + \frac{a}{x}} = -\infty$$

O gráfico de $f$ não tem assíntotas horizontais.

**24.**

**a)** $P(0) = e^{0{,}5 \times 0 - 0{,}015 \times 0} = 1\%$

**b)**




O pior momento da epidemia ocorreu aos 16,7 dias (aproximadamente) e a percentagem de doentes era 64,5% (aproximadamente).

**c)** $P(t) < 1 \Leftrightarrow e^{0,5t - 0,015t^2} < 1 \wedge t > 0$

$\Leftrightarrow e^{0,5t - 0,015t^2} < e^0 \wedge t \geq 0$

$\Leftrightarrow 0,5t - 0,015t^2 < 0 \wedge t \geq 0$

$\Leftrightarrow -0,015t^2 + 0,5t < 0 \wedge t \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(t < 0 \vee t > \frac{100}{3}\right) \wedge t \geq 0$

$\Leftrightarrow t > \frac{100}{3}$

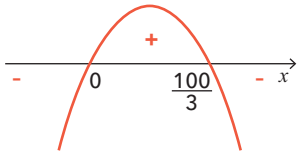
**Cálculo auxiliar**

$-0,015t^2 + 0,5t = 0 \Leftrightarrow t(-0,015t + 0,5) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee -0,015t = -0,5$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{0,5}{0,015}$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{100}{3}$




$\frac{100}{3}$ dias = 33 dias + $\frac{1}{3}$ dia

$\frac{1}{3} \times 24 = 8$ horas

A epidemia encontra-se erradicada 33 dias e 8 horas após o início do estudo da epidemia.

**d)** $P(10) = e^{0,5 \times 10 - 0,015 \times 100} = e^{5 - 1,5} = e^{3,5} \approx 33\%$

**25.**

**a)** $A_{[MNOP]} = \frac{\overline{MO} + \overline{PN}}{2} \times \overline{ON}$

$g'(x) = -e^{1-x}$

$g'(a) = -e^{1-a}$ é o declive da reta $r$.

$y = -e^{1-a}x + b$

Como $(a, g(a)) = (a, e^{1-a})$ pertence à reta $r$, vem que:

$e^{1-a} = -e^{1-a} \times a + b \Leftrightarrow e^{1-a} + e^{1-a} \times a = b$

$\Leftrightarrow e^{1-a}(1 + a) = b$

Assim, $r: y = -e^{1-e}x + e^{1-a}(1 + a)$.

Logo, $M(0, e^{1-a}(1 + a))$.

Sabemos então que:

$\overline{MO} = e^{1-a}(1 + a)$

$\overline{PN} = e^{1-a}$

$\overline{ON} = a$

Logo:

$A(a) = \frac{e^{1-a}(1 + a) + e^{1-a}}{2} \times a$

$\Leftrightarrow A(a) = \frac{e^{1-a}(1 + a + 1)}{2} \times a$

$\Leftrightarrow A(a) = \frac{e^{1-a}(a + 2)a}{2}$

$\Leftrightarrow A(a) = \frac{e^{1-a}(a^2 + 2a)}{2}$

**b)** $A'(a) = \frac{1}{2} \times [(e^{1-a})'(a^2 + 2a) + e^{1-a}(a^2 + 2a)'] =$

$= \frac{1}{2} \times [-e^{1-a}(a^2 + 2a) + e^{1-a}(2a + 2)] =$

$= \frac{1}{2}e^{1-a}(-a^2 - 2a + 2a + 2) =$

$= \frac{1}{2}e^{1-a}(-a^2 + 2)$

$\frac{1}{2}e^{1-a} > 0, \forall a \in \mathbb{R}^+$, logo, o sinal de $A'$ depende apenas do sinal de $-a^2 + 2$.

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{1-a}(-a^2 + 2) = 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow -a^2 + 2 = 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow a^2 = 2 \wedge a \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (a = \pm\sqrt{2}) \wedge a \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}$

| $x$ | 0 | | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Sinal de $A'$ | n.d. | + | 0 | – |
| Variação de $A$ | n.d. | ↗ | Máx. $\sqrt{2}$ | ↘ |

$A(\sqrt{2}) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(2 + 2\sqrt{2})}{2} = e^{1-\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})$

$A$ é estritamente crescente em $]0, \sqrt{2}[$ e é estritamente decrescente em $]\sqrt{2}, +\infty[$.

$e^{1-\sqrt{2}}(2 + 2\sqrt{2})$ é o valor máximo que a área do trapézio $[MONP]$ pode assumir.

**26.** Opção (C)

Das opções apresentadas, $f(1)$ é máximo relativo de $f$ apenas nas opções (A) e (C); destas, é apenas em (C) que se verifica $f'(x)$ constante se $-2 < x < 1$.

**27.**

**a)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \times x}\right) =$

$= 1 + \underbrace{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\cos x} =$

$= 1 + 1 \times \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} [(x + 1)e^{-x}] = (0 + 1)e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, ou seja, não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$f$ não é contínua em $x = 0$.

**b)** Em $\mathbb{R}^+$, $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

Assim:

$f'(x) = (x + 1)'e^{-x} + (x + 1)(e^{-x})' =$

$= e^{-x} + (x + 1) \times (-1) \times (e^{-x}) =$

$= e^{-x}(1 - x - 1) =$

$= -xe^{-x}$

Como $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $-x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, então $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, logo $f$ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.

**c)** Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta pretendida.

$m = f'(-\pi)$

Em $\mathbb{R}^-$, $f'(x) = \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \times x - (x + \operatorname{tg} x) \times x'}{x^2} =$

$= \frac{\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \times x - x - \operatorname{tg} x}{x^2} =$

$= \frac{\cancel{x} + \frac{x}{\cos^2 x} - \cancel{x} - \operatorname{tg} x}{x^2} =$

$$= \frac{1}{x \times \cos^2 x} - \frac{\text{tg}\, x}{x^2} =$$

$$f'(-\pi) = \frac{1}{-\pi \times (-1)^2} - \frac{0}{(-\pi)^2} = -\frac{1}{\pi}$$

Assim, $y = -\frac{1}{\pi}x + b$.

• Cálculo de $b$:

$$f(-\pi) = \frac{-\pi + g(-\pi)}{-\pi} = 1$$

Como $(-\pi, 1)$ pertence à reta tangente, vem que:

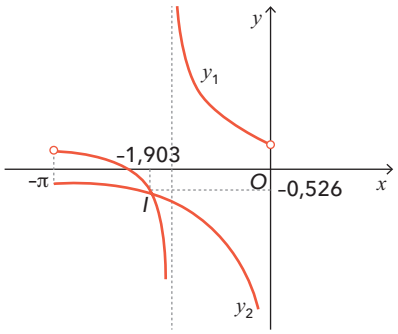
$$1 = -\frac{1}{\pi} \times (-\pi) + b \Leftrightarrow 1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Assim, $y = -\frac{1}{\pi}x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $-\pi$.

**d)** Em $]-\pi, 0[$, $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x + \text{tg}\, x}{x} = \frac{1}{x}$

$y_1 = \frac{x + \text{tg}\, x}{x}$

$y_2 = \frac{1}{x}$




As coordenadas do ponto $I$, com aproximação às milésimas, são $(-1{,}903; -0{,}526)$.

**28.** A reta $s$ é tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $a$. Logo, a sua equação reduzida é do tipo $y = g'(a)x + b$.

Como $(a, g(a))$ é um ponto da reta $s$, então:

$g(a) = g'(a) \times a + b \Leftrightarrow b = g(a) - ag'(a)$

Logo, $s: y = g'(a)x + g(a) - ag'(a)$.

A reta $r$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $a$. Logo, a sua equação reduzida é do tipo $y = f'(a)x + b$.

Como $f'(x) = (g(x) + x + 1)' = g'(x) + 1$, então

$f'(a) = g'(a) + 1$ e $r: y = (g'(a) + 1)x + b$.

Como $(a, f(a)) = (a, g(a) + a + 1)$ é um ponto da reta $r$, então:

$g(a) + a + 1 = (g'(a) + 1) \times a + b$

$\Leftrightarrow b = g(a) - ag'(a) + 1$

Logo, $r: y = (g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1$.

Então:

$g'(a)x + g(a) - ag'(a) = (g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1$

$\Leftrightarrow g'(a)x = (g'(a) + 1)x + 1$

$\Leftrightarrow g'(a)x = g'(a)x + x + 1$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

Conclui-se assim que as retas $r$ e $s$ se intersetam num ponto de abcissa $-1$.

**29.**

**a)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{2x} - 1 + x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(e^{2x} - 1 + x)'}{x'} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2e^{2x} - 0 + 1}{1} = 2\,e^0 + 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x - 2 \ln x) = 0 - 2 \ln 0 = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função $f$.

Não existem mais assíntotas verticais, visto a função ser contínua no seu domínio, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

• **Assíntotas não verticais**

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 2 \ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{2 \ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 3 - 2 \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 3 - 2 \times 0 = 3$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 2 \ln x - 3x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2 \ln x) = -\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1 + x}{x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x^2} + \frac{x}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x^2}\right) + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{0 - 1}{+\infty} + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1 + x}{x}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} =$$

$$= \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} + \lim_{x \to -\infty} 1 =$$

$$= \frac{-1}{-\infty} = 0 + 1 = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**b)** Seja $g$ a função definida por $g(x) = f(x) + x$.

• A função $g$ é contínua em $[-2, -1]$, visto ser a soma de funções contínuas: $f$ no intervalo $[-2, -1]$ encontra-se definida pelo quociente entre funções contínuas $\left(x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1 + x}{x}\right)$ e $x \longmapsto x$ é a função identidade e, portanto, também contínua.

• $g(-2) = f(-2) + (-2) = \frac{e^{-4} - 1 - 2}{-2} - 2 \approx -0{,}509$

$g(-1) = f(-1) + (-1) = \frac{e^{-2} - 1 - 1}{-1} - 1 \approx 0{,}865$

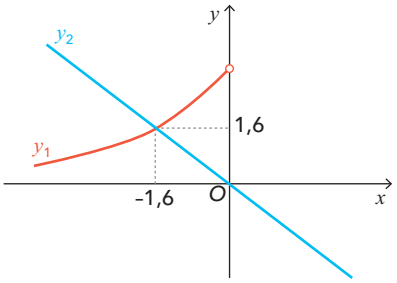
Isto é, $g(-2) \times g(-1) < 0$.

Pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$\exists\, c \in ]-2, -1[ : g(c) = 0$
$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]-2, -1[ [ : f(c) + c = 0$
$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]-2, -1[ [ : f(c) = -c$

**c)** $y_1 = \dfrac{e^{2x} - 1 + x}{x}$ se $x < 0$

$y_2 = -x$




Assim, $x \approx -1{,}6$.

**30.** $g(x) = x - 1 \Leftrightarrow g(x) - x + 1 = 0$
Seja $h(x) = g(x) - x + 1$.
A função $h$ é contínua em $[g^{-1}(a), a]$, por ser a soma de duas funções contínuas.
$h(g^{-1}(a)) = g(g^{-1}(a)) - g^{-1}(a) + 1 =$
$= a - g^{-1}(a) + 1 =$
$= -g(a) + a + 1$
$h(a) = g(a) - a + 1$
Como $g(a) < a - 1$, vem que:
$-g(a) > -a + 1$
$-g(a) + a > 1$
$\underbrace{-g(a) + a + 1}_{h(g^{-1}(a))} > 2$
e, portanto, $h(g^{-1}(a)) > 0$.
Logo, $h(a) < h(g^{-1}(a))$.
Assim, pelo teorema Bolzano-Cauchy, pode concluir-se que:
$\exists\, c \in ]g^{-1}(a), a[ : h(c) = 0$
$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]g^{-1}(a), a[ : g(c) - c + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \exists\, c \in ]g^{-1}(a), a[ : g(c) = c - 1$

## Exercícios–Tipo Exame – páginas 197 a 200

**1.** $N(t_1) = 60 \Leftrightarrow 40 \ln(kt_1 + 1) = 60 \Leftrightarrow \ln(kt_1 + 1) = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow kt_1 + 1 = e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow kt_1 = e^{\frac{3}{2}} - 1$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{e^{\frac{3}{2}} - 1}{t_1}$

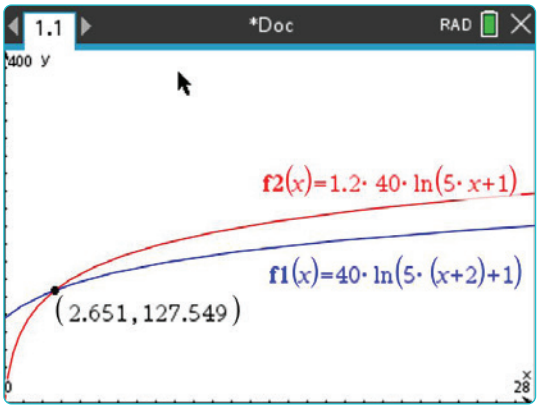
Durante a venda, houve um instante $t_1$ em que o número de bilhetes vendidos foi igual a 6000 unidades. O valor de $k$ é igual a $\dfrac{e^{\frac{3}{2}} - 1}{t_1}$.

Como $k = 5$, então $N(t) = 40 \ln(5t + 1)$.
$N(t_2 + 2) = 1{,}2 \times N(t_2)$

Utilizando $x$ como variável independente:
$N(x + 2) = 1{,}2 \times N(x)$, $0 \leq x \leq 28$

**Cálculo auxiliar**
$0 \leq x + 2 \leq 30 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 30$
$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 28 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 30$
$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 28$

$f_1(x) = 40 \ln(5(x + 2) + 1)$
$f_2(x) = 1{,}2 \times 40 \ln(5x + 1)$




2,651 minutos = 2 minutos + 0,651 minutos
0,651 × 60 ≈ 39 segundos
$t_2$ corresponde aos 2 minutos e 39 segundos após as 10 h da manhã.
Existe um instante $t_2$, a partir do qual, passados dois minutos, o número de bilhetes vendidos aumentou 20%. O valor desse instante $t_2$ é igual a **2** minutos e **39** segundos, com os segundos arredondados às unidades.

$N'(t) = 40 \times \dfrac{5}{5t + 1} = \dfrac{200}{5t + 1}$

$N'\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{200}{\frac{5}{5} + 1} = \dfrac{200}{2} = 100$ centenas de bilhetes por minuto.

Aos 12 segundos, o número de bilhetes vendidos está a aumentar a uma taxa de **10 000** bilhetes por minuto.

A resposta correta é: I – a); II – c); III – a); IV – c)

**2.** Em $]2, +\infty[$:

$g(x) = \dfrac{1}{2}\log_2(2x - 4) + \dfrac{1}{2}\log_2(2x + 4) - e^{\ln 1} =$
$= \log_2\left(\sqrt{2x - 4}\right) + \log_2\left(\sqrt{2x + 4}\right) - 1 =$
$= \log_2\left(\sqrt{2x - 4} \times \sqrt{2x + 4}\right) - \log_2 2 =$
$= \log_2\left(\sqrt{4x^2 - 16}\right) - \log_2 2 =$
$= \log_2\left(\dfrac{\sqrt{4x^2 - 16}}{2}\right) =$
$= \log_2\left(\dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) =$
$= \log_2\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)$, como queríamos mostrar.

**3.** Opção (A)
$\log_a(a \times b) = 8 \Leftrightarrow \log_a a + \log_a b = 8$
$\Leftrightarrow 1 + \log_a b = 8$
$\Leftrightarrow \log_a b = 7$

$$\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^3\,b}}\right) = \log_a 1 - \log_a\left(\sqrt[5]{a^3\,b}\right) =$$
$$= 0 - \log_a\left(\sqrt[5]{a^3\,b}\right) =$$
$$= -\log_a\left(a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{1}{5}}\right) =$$
$$= -\left(\log_a a^{\frac{3}{5}} + \log_a b^{\frac{1}{5}}\right) =$$
$$= -\log_a\left(a^{\frac{3}{5}}\right) - \log_a\left(b^{\frac{1}{5}}\right) =$$
$$= -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\log_a b =$$
$$= -\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \times 7 =$$
$$= -\frac{3}{5} - \frac{7}{5} =$$
$$= -\frac{10}{5} =$$
$$= -2$$

**4.** Opção (D)

$(f^{-1} \circ h')(1) = f^{-1}(h'(1)) = f^{-1}(0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 2$

Logo, $(f^{-1} \circ h')(1) = 2$.

**5.**

**5.1** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe se $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{e^{x+2} - e^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{k\cos(kx)}{e^{x+2}} =$$
$$= \frac{k \times 1}{e^2} =$$
$$= \frac{k}{e^2}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x^{-2}} + 1\right) =$
$$= 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$
$$= 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} =$$
$$= 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} =$$
$$= 1 - \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{2x} =$$
$$= 1 - \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2} =$$
$$= 1 - 0 =$$
$$= 1$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe se $\frac{k}{e^2} = 1$, ou seja, $k = e^2$.

**5.2** Em $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^{-2}} + 1\right)' = (x^2 \ln x + 1)' =$$
$$= (x^2 \ln x)' + 1' =$$
$$= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} =$$
$$= 2x \ln x + x =$$
$$= x(2 \ln x + 1)$$

$f'(x) = 0$

$x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2 \ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin \mathbb{R}^+} \vee \ln x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

| $x$ | 0 | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | + | + | + |
| $2 \ln x + 1$ | | − | 0 | + |
| Sinal de $f'$ | | − | 0 | + |
| Variação de $f$ | | ↘ | $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ mín. | ↗ |

**Cálculo auxiliar**

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \times \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + 1 =$$
$$= \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$
$$= -\frac{1}{2e} + 1$$

$f$ é estritamente decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$ e é estritamente crescente em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$; $1 - \frac{1}{2e}$ é mínimo relativo em $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

**6.** Opção (A)

$f$ é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} (2 \operatorname{sen} x \cos x) = 2 \operatorname{sen} 0 \cos 0 = 0 = f(0)$

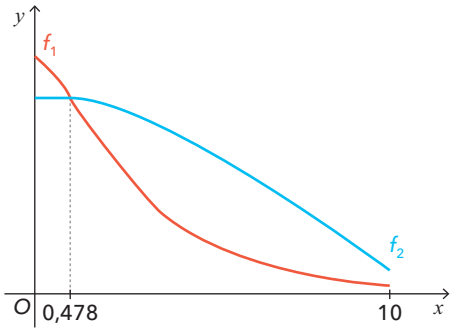
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + k\right) =$
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} + k \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{6x\cos(3x^2)}{2\operatorname{sen} x \cos x}\right) + k =$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{3x\cos(3x^2)}{\operatorname{sen} x \cos x}\right) + k \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{3\cos(3x^2) - 3x \times 6x\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos x \times \cos x - \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x}\right) + k =$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{3\cos(3x^2) - 3x \times 6x\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\right) + k =$$
$$= \frac{3 - 0}{1} + k =$$
$$= 3 + k$$

Como $3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -3$, conclui-se que o valor de $k$ para o qual $f$ é contínua em $x = 0$ é $-3$.

**7.** Pretende-se determinar a amplitude do intervalo $[a, 4a]$, isto é, $4a - a = 3a$.
Sabemos que $a$ é tal que $B(4a) = B(a) - 10$.
Usando $x$ como variável independente, e recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se, no intervalo $[0, 10]$:

$f_1(x) = \dfrac{100}{1 + 0{,}25\, e^{0{,}35 \times 4x}}$

$f_2(x) = \dfrac{100}{1 + 0{,}25\, e^{0{,}35x}} - 10$




Assim, $a \approx 0{,}478$ e $3a \approx 1{,}434$, isto é, 1 minuto e 26 segundos ($0{,}434 \times 60 \approx 26$).

**8.** $f'(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)' = -\operatorname{sen} x + \cos x$
$g'(x) = (x^2)' = 2x$
Consideremos a função $h$, definida em $\mathbb{R}$, por $h(x) = f'(x) - g'(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x - 2x$.
$h$ é contínua, por se tratar da soma de funções contínuas.
Em particular, $h$ é contínua em $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$h(0) = -\operatorname{sen} 0 + \cos 0 - 2 \times 0 = 1$

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 2 \times \dfrac{\pi}{2} = -1 - \pi$

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0 < h(0)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists\, c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ : h(c) = 0$, ou seja:

$\exists\, c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ : f'(c) - g'(c) = 0$, isto é:

$\exists\, c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ : f'(c) = g'(c)$

Provámos, assim, que existe, pelo menos, um $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que a reta tangente ao gráfico de $f$ em $c$ é paralela à reta tangente ao gráfico de $g$ em $c$.

**9.** A afirmação I é falsa, pois o domínio da função $f \circ g$ é o conjunto dos valores reais de $x$ tais que $x \in D_g \wedge g(x) \in D_f$, ou seja, $x \in \mathbb{R} \wedge g(x) \in \mathbb{R}^+$.
Por observação do gráfico de $g$, sabemos que a função $g$ é positiva em $]-1, 0[ \cup ]2, +\infty[$, ou seja, é este o domínio da função $f \circ g$ e não $\mathbb{R}^+$.

A afirmação II é falsa, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(0^+)}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$, que sabemos ser um número real negativo, pois o declive da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $x = 0$ é negativo.
Assim, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$ e não $-\infty$.

A afirmação III é verdadeira, pois a função $f \times g$ é contínua em $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, visto tratar-se do produto de funções contínuas neste intervalo, e também se verifica que $(f \times g)\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0 < (f \times g)\left(\dfrac{1}{2}\right)$, pois:

$(f \times g)\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \times g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}_{<0} \times \underbrace{g\left(\dfrac{1}{2}\right)}_{<0} > 0$

$(f \times g)\left(\dfrac{3}{2}\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \times g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \underbrace{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}_{>0} \times \underbrace{g\left(\dfrac{3}{2}\right)}_{<0} < 0$

Assim, ficam reunidas as condições de aplicabilidade do teorema de Bolzano-Cauchy, que permite concluir que a função $f \times g$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$.

**10.** **Assíntotas horizontais**
Como o domínio da função $h$ é $\mathbb{R}^-$, calculemos o limite quando $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{x} - \frac{x}{x} + \frac{e^x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} - 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} - 1 + \frac{e^{-\infty}}{-\infty} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} - 1 + \frac{0}{-\infty} =$$
$$= 0 - 1 + 0 =$$
$$= -1$$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de $h$ quando $x \longrightarrow -\infty$.

**Assíntotas verticais**
Como a função $h$ é contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}^-$, apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função $h$.

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x} =$$
$$= \frac{\ln(0^+) - 0 + e^0}{0^-} =$$
$$= \frac{-\infty - 0 + 1}{0^-} =$$
$$= \frac{-\infty}{0^-} =$$
$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de $h$.

**11.** Seja $m$ o declive da reta secante ao gráfico de $g$ nos pontos de abcissas $a$ e $-a$.

$$m = \frac{g(a) - g(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right) - \ln\left(\frac{-a-k}{-a+k}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{\frac{a-k}{a+k}}{\frac{-a-k}{-a+k}}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{(a-k)\times(-a+k)}{(a+k)\times(-a-k)}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{-(a-k)\times(a-k)}{-(a+k)\times(a+k)}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{(a-k)^2}{(a+k)^2}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right)^2}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-k}{a+k}\right)}{a} = \frac{g(a)}{a}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

**12.** $D = \{x \in \mathbb{R}: 12e^x - 16 > 0\} = \left]\ln\left(\frac{4}{3}\right), +\infty\right[$

**Cálculo auxiliar**

$12e^x - 16 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{4}{3} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Em $\left]\ln\left(\frac{4}{3}\right), +\infty\right[$:

$\ln(12e^x - 16) = 2x + \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(12e^x - 16) = \ln(e^{2x}) + \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(12e^x - 16) = \ln(2 \times e^{2x})$

$\Leftrightarrow 12e^x - 16 = 2 \times e^{2x}$

$\Leftrightarrow -2e^{2x} + 12e^x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 8}}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{6 \pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = 4 \vee e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 4 \vee x = \ln 2$

**Cálculo auxiliar**

$\frac{4}{3} < 2$

$\ln\left(\frac{4}{3}\right) < \ln 2$

C.S. = {ln 2, ln 4}

**13.** A primeira proposição é falsa, pois, para que a reta de equação $y = 4$ fosse assíntota ao gráfico de $f$ quando $x \longrightarrow +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ teria de ser igual a 4. Tal é contrariado pela informação dada no enunciado, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x) = 4$.

De $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x) = 4$, podemos concluir que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x)) - 4 = 0$, isto é, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x + 4)) = 0$ e, portanto, o gráfico de $f$ admite assíntota oblíqua, quando $x \longrightarrow +\infty$, cuja equação é $y = -x + 4$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

$$\lim_{x \to -2} \frac{(f(x))^2 + 4f(x)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -2} \frac{f(x) \times (f(x) + 4)}{(x-2)(x+2)} \times (-1) = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x-2} \times \lim_{x \to -2} \frac{f(x) + 4}{x + 2} = 2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(-2)}{-2-2} \times \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - (-4)}{x - (-2)} = 2$$

(1) Como $f$ é contínua em $-2$, logo $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$.

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{-4}{-4} \times f'(-2) = 2$$

(2) Como $f$ é diferenciável em $-2$, então

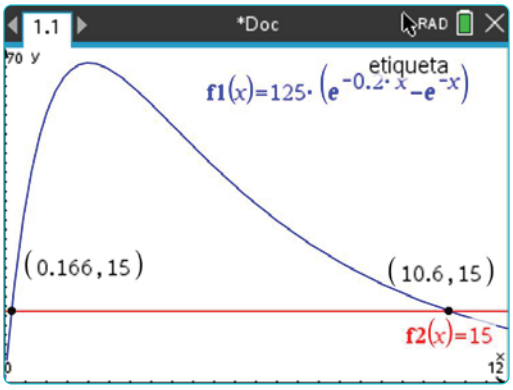
$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - (-4)}{x - (-2)} = f'(-2) \Leftrightarrow f'(-2) = 2$$

$f'(-2) = 2$, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico da função em $x = -2$ é 2.

A proposição II é falsa, pois a reta de equação $y = -2x - 8$ tem declive $-2$ e, pelo exposto, não pode ser tangente ao gráfico de $f$ em $x = -2$ .

## Teste Final – páginas 201 a 204

**1.** Comecemos por representar graficamente a função $C$, definida por $y = 15$ e determinar a solução da condição $C(t) > 15$.




10,6 – 0,166 = 10,434

0,434 × 60 ≈ 26

Após a administração da referida dose terapêutica, o paracetamol produz efeito terapêutico significativo, durante **10** horas e **26** minutos, com os minutos arredondados às unidades e considerando a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s) arredondada(s) às milésimas.

$C'(t) = 125(-0{,}2e^{-0{,}2t} + e^{-t})$

$C'(1) = 125(-0{,}2e^{-0{,}2} + e^{-1}) \approx 26$

Uma hora após a administração dessa determinada dose terapêutica de paracetamol, a taxa de variação instantânea da função $C$, aproximada às unidades, é **26** mg/ℓ/h.

$\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} (125(e^{-0{,}2t} - e^{-t})) = 125(0 - 0) = 0$

Com o passar do tempo, a concentração de paracetamol, em miligramas por litro de sangue dessa

determinada dose terapêutica de paracetamol, tende para **0** mg/ℓ.
A resposta correta é: I – b); II – c); III – c); IV – a)

**2.**

**2.1** Para que $f$ seja contínua em $x = 1$, é necessário que $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4 - 4x}{xe^x - e} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-4}{e^x + x\,e^x} = \dfrac{-4}{2e} = -\dfrac{2}{e}$

• $f(1) = 2 \times 1^2 \times e^{-1} = \dfrac{2}{e}$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$, $f$ não é contínua em $x = 1$.

**2.2** Em $]1, +\infty[$:

$f'(x) = (2x^2\,e^{-x})' = (2x^2)'\,e^{-x} + 2x^2\,(e^{-x})' =$
$= 4xe^{-x} - 2x^2\,e^{-x} =$
$= e^{-x}\,(4x - 2x^2)$

$f''(x) = (e^{-x}\,(4x - 2x^2))' =$
$= (e^{-x})'\,(4x - 2x^2) + e^{-x}\,(4x - 2x^2)' =$
$= -e^{-x}\,(4x - 2x^2) + e^{-x}\,(4 - 4x) =$
$= e^{-x}\,(-4x + 2x^2 + 4 - 4x) =$
$= e^{-x}\,(2x^2 - 8x + 4)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\,(2x^2 - 8x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \vee\ 2x^2 - 8x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \vee x = 2 - \sqrt{2}$

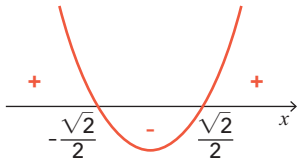
$x \in ]1, +\infty[$, logo, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$

| $x$ | 1 | | $2 + \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | | + | + | + |
| $2x^2 - 8x + 4$ | | – | 0 | + |
| Sinal de $f''$ | | – | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | | ∩ | P.I. | ∪ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]1, 2 + \sqrt{2}[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]2 + \sqrt{2}, +\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de abcissa $2 + \sqrt{2}$.

**3.** $f'(x) = (-6xe^{4-x^2})' = (-6x)' \times e^{4-x^2} + (-6x) \times (e^{4-x^2})' =$
$= -6 \times e^{4-x^2} + (-6x) \times (4 - x^2)' \times e^{4-x^2} =$
$= -6 \times e^{4-x^2} + (-6x) \times (-2x) \times e^{4-x^2} =$
$= -6 \times e^{4-x^2} + 12x^2 \times e^{4-x^2} =$
$= e^{4-x^2} \times (12x^2 - 6)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{4-x^2} \times (12x^2 - 6) = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{e^{4-x^2} = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \vee\ 12x^2 - 6 = 0$
$\Leftrightarrow 12x^2 = 6$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$




| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{4-x^2}$ | + | + | + | + | + |
| $12x^2 - 6$ | + | 0 | – | 0 | + |
| Sinal de $f'$ | + | 0 | – | 0 | + |
| Variação de $f$ | ↗ | Máx. | ↘ | mín. | ↗ |

$f$ é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e em $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ e é estritamente decrescente em $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$; apresenta máximo relativo em $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e mínimo relativo em $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**4.** Opção (C)

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | + |
| Variação de $f'$ | ↗ | Máx. | ↘ | mín. | ↗ | | ↗ |

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f''$ | + | 0 | – | 0 | + | 0 | + |
| Sentido das concavidades do gráfico de $f$ | ∪ | P.I. | ∩ | P.I. | ∪ | | ∪ |

Desta forma, a opção (A) está errada, pois o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, -1[$, logo, não é possível o gráfico de $f$ ter a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$.
A opção (B) também está errada, pois $f'$ é crescente em $]-\infty, -2[$.
A opção (C) está correta, pois, em $]3, +\infty[$, $f'$ é crescente.
A opção (D) está errada, pois, em $]-1, 3[$, o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima.

**5.**

**5.1** Em $]1, +\infty[$: $g(x) = 4x - 2\ln(x - 1)$
$g$ é contínua em $]1, +\infty[$, logo, a reta de equação $x = 1$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de $g$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - 2\ln(x-1)) = 4 - 2\ln(0^+) =$

$= 4 - 2 \times (-\infty) = +\infty$

A reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de $g$.

• $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x - 2\ln(x-1)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 - 2\frac{\ln(x-1)}{x}\right) =$

$= 4 - 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= 4 - 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} =$

$= 4 - 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} =$

$= 4 - 2 \times \frac{1}{+\infty} =$

$= 4 - 2 \times 0 =$

$= 4$

• $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 4x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (4x - 2\ln(x-1) - 4x) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (-2\ln(x-1)) =$

$= -2\ln(+\infty) =$

$= -\infty$

Como o valor obtido não é um número real, concluímos que o gráfico de $g$ não admite assíntota não vertical quando $x \longrightarrow +\infty$.

**5.2** Em $]-\infty, 1[$: $g(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - e^x$

$g'(x) = \frac{1}{4} \times 2e^{2x} - e^x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$

$g''(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x} - e^x = e^{2x} - e^x$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \vee e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | + | + | + | |
| $e^x - 1$ | − | 0 | + | |
| Sinal de $g''$ | − | 0 | + | |
| Sentido das concavidades do gráfico de $g$ | ∩ | P.I. | ∪ | |

**Cálculo auxiliar**

$g(0) = \frac{1}{4}e^0 - e^0 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]0, 1[$.

$\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de $g$.

**6.** Uma equação que permite resolver o problema é $V(2m) = 0{,}96\,V(m)$, $0 \leq m \leq 2$.

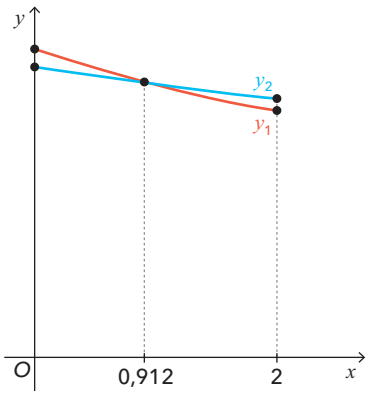
Utilizando $x$ como variável independente:

$\frac{2158}{1 - 0{,}24e^{-0{,}2 \times 2x}} = 0{,}96 \times \frac{2158}{1 - 0{,}24e^{-0{,}2x}}$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = \frac{2158}{1 - 0{,}24e^{-0{,}2 \times 2x}}$, $0 \leq x \leq 2$

$y_2 = 0{,}96 \times \frac{2158}{1 - 0{,}24e^{-0{,}2x}}$, $0 \leq x \leq 2$




Assim, o instante em que, com três casas decimais, $V(2m) = 0{,}96\,V(m)$, é 0,912.

Desta forma, a amplitude do intervalo é:

$2 \times 0{,}912 - 0{,}912 = 0{,}912$ minutos

Tem-se que $0{,}912 \times 60 \approx 55$, pelo que a amplitude do intervalo é 55 segundos.

**7.** Para que exista $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, é necessário que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

• $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{5x - 4}{1 - e^{-x}} = \frac{5 \times 1 - 4}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} =$

$= \frac{1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{e-1}$

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{1 - e^{2x-2}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x}{-2e^{2x-2}} =$

$= \frac{2}{-2e^0} = -1$

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, pode concluir-se que não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

**8.** A proposição I é falsa, pois, como o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima, então $f''(x) \geq 0$. Em particular, $f''(0) \geq 0$.

A proposição II é falsa, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = -1$.

Note-se que $m_p = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e

$m_t = f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Como as retas $t$ e $p$ são perpendiculares, então $m_p \times m_t = -1$.

**9.** Opção (A)

Sejam $a$ e $b$ ($a < b$) as abcissas dos pontos de interseção do gráfico de $f''$ com o eixo $Ox$.

Por observação do gráfico de $f''$, podemos concluir acerca do sinal de $f''$ e, consequente, variação da função $f'$.

Desta forma, temos que:

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sinal de $f''$** | + | 0 | – | 0 | + |
| **Variação de $f'$** | ↗ | Máximo relativo | ↘ | mínimo relativo | ↗ |

Sendo $a$ e $b$ valores positivos, o único gráfico que está de acordo com a tabela é o que se apresenta na opção (A).

**10.** $f(x) = x^4 - 2$

$f'(x) = 4x^3$

$x_1 = 1$

**1ª iteração** $\longrightarrow x_2$:

$x_2 = \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{2 \times 1^3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

**2ª iteração** $\longrightarrow x_3$:

$x_3 = \frac{3}{4} \times 1{,}25 + \frac{1}{2 \times (1{,}25)^3} \approx 0{,}9375 + 0{,}256 \approx 1{,}1935$

**3ª iteração** $\longrightarrow x_4$:

$x_4 = \frac{3}{4} \times 1{,}1935 + \frac{1}{2 \times (1{,}1935)^3} \approx 0{,}8951 + 0{,}2941 \approx$

$\approx 1{,}18923$

**4ª iteração** $\longrightarrow x_5$:

$x_5 = \frac{3}{4} \times 1{,}18923 + \frac{1}{2 \times (1{,}18923)^3} \approx 0{,}8919 + 0{,}2973 \approx$

$\approx 1{,}18921$

Portanto, após **4 iterações** (a partir de $x_1 = 1$), obtemos, aproximadamente, $x \approx 1{,}18921$.