5. Primitivas imediatas e integrais definidos

Recorda – página 60

1.

a) $f'(x) = (x^5 + x^3 - 2x^2 + 4x - 1)' =$
$= 5x^4 + 3x^2 - 4x + 4$

b) $g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

c) $h'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' =$
$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} =$
$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $i'(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x)' = (\operatorname{sen} x)' - (\cos x)' =$
$= \cos x - (-\operatorname{sen} x) =$
$= \cos x + \operatorname{sen} x$

e) $j'(x) = (\cos(3x))' = -\operatorname{sen}(3x) \times (3x)' = -3\operatorname{sen}(3x)$

f) $k'(x) = ((x^2 - 1)e^x)' = (x^2 - 1)' \times e^x + (x^2 - 1) \times (e^x)' =$
$= 2x \times e^x + (x^2 - 1) \times e^x =$
$= e^x(x^2 + 2x - 1)$

g) $m'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} =$
$= \frac{x - 2x\ln x}{x^4} =$
$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

h) $n'(x) = (\operatorname{sen}(2x^3))' = \cos(2x^3) \times (2x^3)' =$
$= \cos(2x^3) \times 6x^2 =$
$= 6x^2\cos(2x^3)$

Capítulo 1 – Primitivas imediatas e integrais definidos

Tarefa – O Spotify® – página 61

a) **i.** 12 minutos **ii.** 12 minutos
iii. 12 minutos **iv.** 12 minutos

b) $M(t) = 12t$

c) $M'(t) = 12$. A Joana ouviu música a uma taxa constante de 12 minutos por hora, ao longo da tarde.

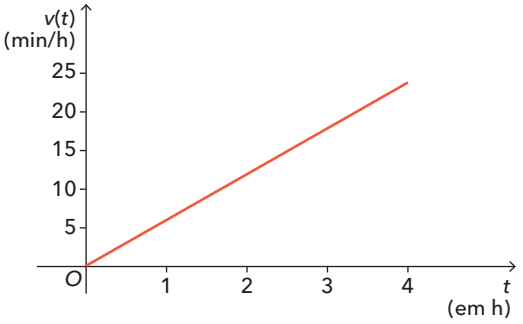
d)

Tempo (em horas)	0	1	2	3	4
Taxa de audição $v(t)$ (min/h)	0	6	12	18	24

e) O valor $v(2) = 12$ significa que, ao fim de 2 horas, o João ouvia música a uma taxa de 12 minutos, por hora, e, ao fim de 3 horas, ouvia música a uma taxa de 18 minutos por hora.

f) A Joana ouviu música sempre à mesma taxa (12 min/h). O João começou por ouvir menos música e foi aumentando a taxa de audição ao longo do tempo.

g)



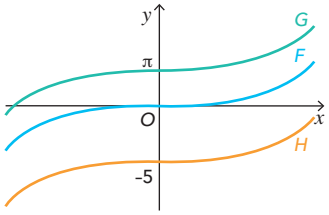
h) Para que $j'(t) = 6t$, a função j tem de ser da forma $j(t) = 3t^2 + k$, com k constante, pois $j'(t) = (3t^2 + k)' = 6t + 0$.
Como sabemos que $j(0) = 0$, então $0 = 3 \times 0^2 + k$. Assim, $k = 0$.
Logo, $j(t) = 3t^2$.

Exercícios de margem – páginas 62 a 72

1. $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = x^3$, pois $F'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3 = f(x)$.
$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = x^3$, pois $G'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$.

2. Se $F - G = 7$, então $F' - G' = 0$.
Então:
$F'(x) - G'(x) = 0 \Leftrightarrow G'(x) = F'(x) \Leftrightarrow G'(x) = x^3$

3. $F(x) = x^3$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = 3x^2$, pois $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
$G(x) = x^3 + \pi$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = 3x^2$, pois $G'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$.
$H(x) = x^3 - 5$ é uma primitiva da função definida por $f(x) = 3x^2$, pois $H'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$.



4.

a) $\int (3x^2 + 1)dx = 3\int x^2\,dx + \int 1\,dx =$
$= 3 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + x + c =$
$= \frac{3x^3}{3} + x + c =$
$= x^3 + x + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $F(2) = 7 \Leftrightarrow 2^3 + 2 + c = 7$
$\Leftrightarrow 10 + c = 7$
$\Leftrightarrow c = -3$
Logo, $F(x) = x^3 + x - 3$.

5.

a) $\int 2dx = 2x + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7} + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx = 4\,\frac{x^4}{4} + c = x^4 + c,\ c \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

e) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c,\ c \in \mathbb{R}$

f) $\int (x^2 + x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

g) $\int (3e^x + 1)\,dx = 3\,e^x + x + c,\ c \in \mathbb{R}$

h) $\int (2\cos x + 5)\,dx = 2\,\text{sen}\,x + 5x + c,\ c \in \mathbb{R}$

i) $\int \left(\frac{1}{x} - 4x^{11} + \text{sen}\,x\right)dx = \ln(|x|) - 4\,\frac{x^{12}}{12} - \cos x + c =$

$= \ln(|x|) - \frac{x^{12}}{3} - \cos x + c,\ c \in \mathbb{R}$

j) $\int (x+3)^2\,dx = \int (x^2 + 6x + 9)\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} + 6\,\frac{x^2}{2} + 9x + c =$

$= \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + c,\ c \in \mathbb{R}$

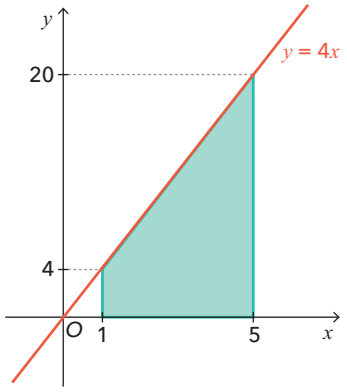
k) $\int \left(\frac{4}{x} + \frac{e^x}{2} - 3\right)dx = 4\ln(|x|) + \frac{e^x}{2} - 3x + c,\ c \in \mathbb{R}$

l) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

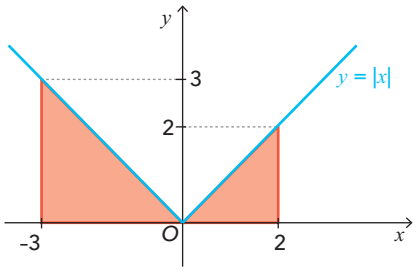
m) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c,\ c \in \mathbb{R}$

6.

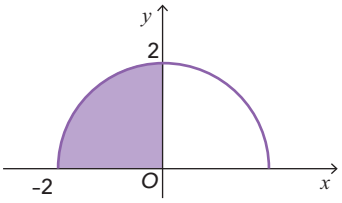
a) $\int_1^5 4x\,dx = \frac{20+4}{2} \times 4 = 12 \times 4 = 48$



b) $\int_{-3}^{2} |x|\,dx = \frac{3\times 3}{2} + \frac{2\times 2}{2} = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$



c) $\int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$



7.

a) $\int_{-2}^{5} (3f(x) + 2g(x))\,dx = 3\int_{-2}^{5} f(x)\,dx + 2\int_{-2}^{5} g(x)\,dx =$

$= 3 \times 2 + 2 \times 10 = 26$

b) $\int_{-2}^{5} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{5} g(x)\,dx =$

$= 2 - 10 = -8$

c) Com base nos dados do enunciado, não é possível determinar o valor de $\int_4^5 f(x)\,dx$.

8.

a) $[x^2 - 3]_1^5 = (5^2 - 3) - (1^2 - 3) = 22 - (-2) = 24$

b) $[e^x + 4x]_{\ln 2}^{\ln 6} = (e^{\ln 6} + 4\ln 6) - (e^{\ln 2} + 4\ln 2) =$

$= 6 + 4\ln 6 - 2 - 4\ln 2 =$

$= 4 + 4(\ln 6 - \ln 2) =$

$= 4 + 4\ln 3$

9. $\left[\frac{\ln x}{kx - 1}\right]_1^e = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln e}{ek - 1} - \frac{\ln 1}{k - 1} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{ek - 1} = 1$

$\Leftrightarrow ek - 1 = 1$

$\Leftrightarrow ek = 2$

$\Leftrightarrow k = \frac{2}{e}$

10.

a) $\int_0^3 (x^2 + 5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 5x\right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 5 \times 3\right) - (0 + 0) =$

$= (9 + 15) = 24$

b) $\int_1^4 (3x + 2)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^4 =$

$= \left(\frac{3 \times 16}{2} + 8\right) - \left(\frac{3 \times 1}{2} + 2\right) =$

$= (24 + 8) - \left(\frac{3}{2} + 2\right) =$

$= 32 - \frac{7}{2} =$

$= \frac{57}{2}$

c) $\int_0^{\ln 2} (e^x + 3)\,dx = [e^x + 3x]_0^{\ln 2} =$

$= (e^{\ln 2} + 3\ln 2) - (e^0 + 0) =$

$= (2 + 3\ln 2) - 1 =$

$= 1 + 3\ln 2$

d) $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + 3\right)dx = [\ln x + 3x]_1^e =$

$= (\ln e + 3e) - (\ln 1 + 3) =$

$= (1 + 3e) - (0 + 3) =$

$= 3e - 2$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + 3)\,dx = [-\cos x + 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos 0 + 0) =$

$= \left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1) =$

$= \frac{3\pi}{2} + 1$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 4)\,dx = [\operatorname{sen} x + 4x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\right) - (0 + 0) =$

$= 1 + 2\pi$

g) $\int_0^2 (5x^2 + 3)\,dx = \left[\frac{5x^3}{3} + 3x\right]_0^2 =$

$= \left(\frac{5 \times 8}{3} + 6\right) - 0 =$

$= \frac{40}{3} + 6 =$

$= \frac{58}{3}$

h) $\int_0^1 (x^3 + 4)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + 4x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + 4\right) - 0 = \frac{17}{4}$

11. Calcular a área da região do plano formada pelos pontos $P(x, y)$ do plano tais que

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \wedge 0 \leq y \leq 4x + \cos x$$

corresponde a determinar $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4x + \cos x)\,dx$.

Assim:

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4x + \cos x)\,dx =$

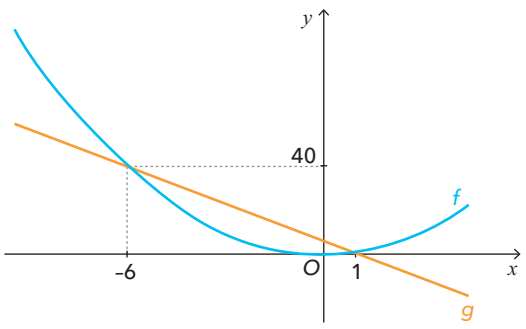
$= [2x^2 + \operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \left(2\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - (2 \times 0^2 + \operatorname{sen} 0) =$

$= \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 0 =$

$= \left(\frac{2\pi^2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ u.a.

12. Calcular a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -5x + 6$ corresponde a determinar $\int_a^b ((-5x + 6) - x^2)\,dx$, sendo os limites de integração, a e b, as abcissas dos pontos de interseção da parábola com a reta. A função a integrar é a função $g - f$, pois, neste intervalo $[a, b]$, a reta encontra-se acima da parábola.



Interseção de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -5x + 6$:

$x^2 = -5x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = -6 \vee x = 1$

Assim, determinemos $\int_{-6}^1 ((-5x + 6) - x^2)\,dx$:

$\int_{-6}^1 ((-5x + 6) - x^2))\,dx =$

$= \int_{-6}^1 (-x^2 - 5x + 6)\,dx =$

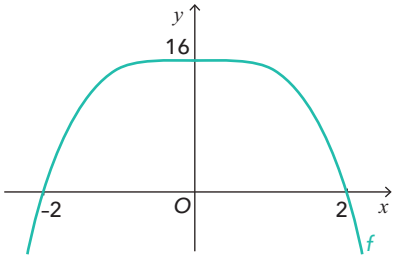
$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-6}^1 =$

$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{5 \times 1^2}{2} + 6 \times 1\right) - \left(-\frac{(-6)^3}{3} - \frac{5 \times (-6)^2}{2} + 6 \times (-6)\right) =$

$= \frac{19}{6} - (-54) =$

$= \frac{343}{6}$ u.a.

13.



Calcular a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = -x^4 + 16$ e pelo eixo das abcissas corresponde a determinar $\int_a^b (-x^4 + 16)\,dx$, sendo os limites de integração, a e b, as abcissas dos pontos de interseção da curva $y = -x^4 + 16$ com o eixo das abcissas.

$-x^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$\int_{-2}^2 (-x^4 + 16)\,dx =$

$= \left[-\frac{x^5}{5} + 16x\right]_{-2}^2 =$

$= \left(-\frac{2^5}{5} + 16 \times 2\right) - \left(-\frac{(-2)^5}{5} + 16 \times (-2)\right) =$

$= \frac{128}{5} - \left(-\frac{128}{5}\right) =$

$= \frac{256}{5}$ u.a.

14. $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{7}{2} - \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{2}\right)\right) dx =$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 2\,dx =$

$= [2x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} =$

$= \frac{8\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} =$

$= 2\pi$ u.a.

Aprende Fazendo Global – páginas 78 e 79

1. Opção (D)

$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$

2.

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx = x^3 - x^2 + x + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\int (\operatorname{sen} x + \cos x + 2027)\,dx =$
$= -\cos x + \operatorname{sen} x + 2027x + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $\int \left(\frac{e^x}{3} - 5x\right) dx = \frac{e^x}{3} - \frac{5x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

d) $\int \left(\frac{1}{x} + x^{13}\right) dx = \ln(|x|) + \frac{x^{14}}{14} + c,\ c \in \mathbb{R}$

3.

a) $\int f(x)\,dx = \int 5x^2\,dx = \frac{5x^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$F(1) = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{3} + c = 4$

$\Leftrightarrow c = 4 - \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow c = \frac{7}{3}$

Logo, $F(x) = \frac{5x^3}{3} + \frac{7}{3}$.

b) $\int 2\cos x\,dx = 2\operatorname{sen} x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Como $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, vem que:

$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c = 1 \Leftrightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2} + c = 1$

$\Leftrightarrow c = 1 - \sqrt{2}$

Assim, $F(x) = 2\operatorname{sen} x + 1 - \sqrt{2}$.

c) $\int f(x)\,dx = \int (3x^2 + 3x)\,dx =$

$= x^3 + \frac{3x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$F(-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + \frac{3}{2} + c = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow c = 0$

Logo, $F(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2}$.

4. Opção (C)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} 0 =$

$= 1 - 0 =$

$= 1$

5. Opção (B)

$f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

$F_0(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$F_0'(x) = f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

6. $M(t) = \int M'(t)\,dt =$

$= \int (0{,}4t - 0{,}005t^2)\,dt =$

$= 0{,}4\frac{t^2}{2} - 0{,}005\frac{t^3}{3} + c =$

$= 0{,}2t^2 - \frac{0{,}005}{3}t^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

$M(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

$M(10) = 0{,}2 \times 10^2 - \frac{0{,}005}{3} \times 10^3 \approx 18$ itens

7. Opção (B)

$\int_{-2}^4 g(x)\,dx = \int_{-2}^4 (f(x) + 1)\,dx =$

$= \int_{-2}^4 f(x)\,dx + \int_{-2}^4 1\,dx =$

$= 3 + [x]_{-2}^4 =$

$= 3 + 4 - (-2) =$

$= 9$

8. Calcular a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ e pelo eixo das abcissas corresponde a determinar $\int_a^b (-x^2 + 4x)\,dx$, sendo os limites de integração, a e b, as abcissas dos pontos de interseção da curva $y = -x^2 + 4x$ com o eixo das abcissas.

$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

$\int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 =$

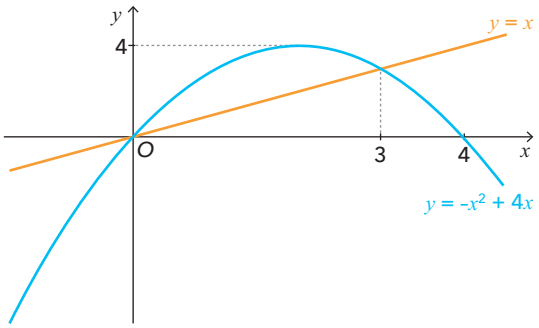
$= \left(-\frac{4^3}{3} + 2 \times 4^2\right) - (-0 + 2 \times 0) =$

$= -\frac{64}{3} + 32 =$

$= \frac{-64 + 96}{3} =$

$= \frac{32}{3}$ u.a.

9. Calcular a área da região do plano delimitada pela parábola de equação $y = -x^2 + 4x$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$) corresponde a determinar $\int_a^b (-x^2 + 4x - x)\,dx$, sendo os limites de integração, a e b, as abcissas dos pontos de interseção da parábola com a bissetriz dos quadrantes ímpares. A função a integrar é a função definida por $y = -x^2 + 4x - x$, pois, neste intervalo $[a, b]$, a parábola encontra-se acima da reta.

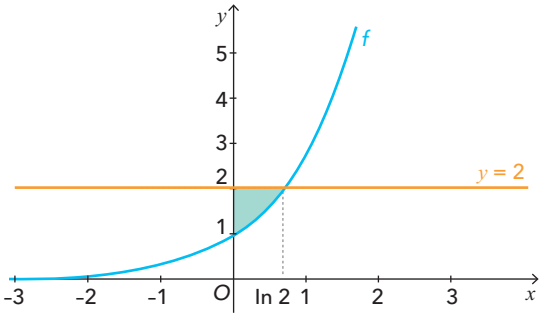


$-x^2 + 4x = x \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0$
$\Leftrightarrow x(-x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Assim, determinemos $\int_0^3 (-x^2 + 4x - x)\,dx$.

$\int_0^3 (-x^2 + 4x - x)\,dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx =$
$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$
$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \times 3^2}{2}\right) - (-0 + 0) =$
$= -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} =$
$= \frac{9}{2}$ u.a.

10. Calcular a área da região do plano a sombreado corresponde a determinar $\int_0^b (2 - e^x)\,dx$, sendo b a abcissa do pontos de interseção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 2$. A função a integrar é a função definida por $y = 2 - e^x$, pois, neste intervalo $[0, b]$, a reta encontra-se acima do gráfico de f.



$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Assim, determinemos $\int_0^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx$.

$\int_0^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx = [2x - e^x]_0^{\ln 2} =$
$= (2 \ln 2 - e^{\ln 2}) - (0 - e^0) =$
$= 2 \ln 2 - 2 - (-1) =$
$= 2 \ln 2 - 1 =$
$= \ln 2^2 - \ln e =$
$= \ln\left(\frac{4}{e}\right)$

11. Zeros de f:

$f(x) = -x^2 - 2x + 3$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2}$
$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

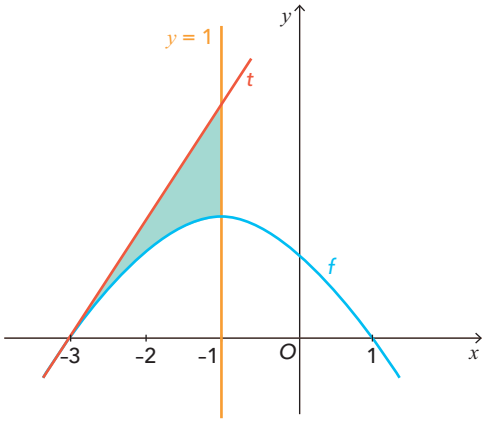
Abcissa do vértice da parábola definida por $y = -x^2 - 2x + 3$: $\frac{-3 + 1}{2} = -1$

Eixo de simetria: $x = -1$

Equação da reta tangente no ponto de abcissa -3:

$f'(x) = -2x - 2$
$f'(-3) = 6 - 2 = 4$
$t: y = 4x + b$
$0 = 4 \times (-3) + b = 0 \Leftrightarrow b = 12$

$t: y = 4x + 12$



Assim, pretende-se determinar:

$\int_{-3}^{-1} ((4x + 12) - (-x^2 - 2x + 3))\,dx$

$\int_{-3}^{-1} ((4x + 12) - (-x^2 - 2x + 3))\,dx =$
$= \int_{-3}^{-1} (x^2 + 6x + 9)\,dx =$
$= \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x\right]_{-3}^{-1} =$
$= \left(\frac{(-1)^3}{3} + 3 \times (-1)^2 + 9 \times (-1)\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + 3 \times (-3)^2 + 9 \times (-3)\right) =$
$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 9\right) - \left(-\frac{27}{3} + 27 - 27\right) =$
$= \frac{8}{3}$ u.a.

Exercícios–Tipo Exame – páginas 80 e 81

1. Opção (B)

$\int_{-1}^{3} \sqrt{4 - (x - 1)^2}\,dx$

A função definida por $y = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$ representa uma semicircunferência da circunferência definida por $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, ou seja, a circunferência de raio 2 e centro em (1, 0).

Os limites do integral correspondem aos extremos do segmento $[-1, 3]$, que é um diâmetro da circunferência. Logo, o integral pedido corresponde à área de um semicírculo de raio 2:

$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi$

2. Opção (D)

Dado $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 6$, e sendo $g(x) = 3f(x) + 1$, então:

$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx = \int_{-3}^{2} (3f(x) + 1)\,dx =$
$= 3\int_{-3}^{2} f(x)\,dx + \int_{-3}^{2} 1\,dx =$
$= 3 \times 6 + [x]_{-3}^{2}$
$= 18 + (2 - (-3)) =$
$= 18 + 5 =$
$= 23$

3.

3.1 Uma primitiva é $F(x) = \int (e^x - x^2)\,dx = e^x - \frac{x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$.

"Contém a origem", ou seja, $F(0) = 0$:

$F(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 - \frac{0}{3} + c = 0 \Leftrightarrow 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$

$F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - 1$

3.2 $\int \left(-8x^4 + 6x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx =$

$= \int (-8x^4)\,dx + \int (6x^3)\,dx + \int (x^{-3})\,dx =$

$= -8 \times \frac{x^5}{5} + 6 \times \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{-2} + c, c \in \mathbb{R}$

$= -\frac{8}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

4. Opção (A)

Parábola: $y = 2x^2 + 2$

Reta: $y = 2x + 6$

Pontos de interseção da parábola com a reta:

$2x^2 + 2 = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$

$x = -1$ e $x = 2$

A função a integrar é a função definida por $y = (2x + 6) - (2x^2 + 2)$, pois, neste intervalo, $[-1, 2]$ a reta encontra-se acima da parábola.

Área

$A = \int_{-1}^{2} [(2x + 6) - (2x^2 + 2)]\,dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx =$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$

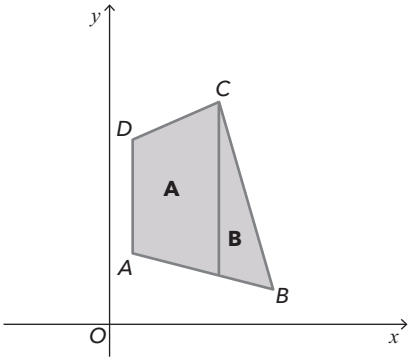
$= \left(-\frac{2}{3} \times 8 + 4 + 8 - \left(\left(-\frac{2}{3}\right) \times (-1) + 1 - 4\right)\right) =$

$= \left(\frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)\right) =$

$= \frac{27}{3} =$

$= 9$ u.a

5. Consideremos a decomposição de quadrilátero $[ABCD]$, como assinalada na figura abaixo:



Assim, a área pedida é igual à soma da área A com a área B.

Comecemos por determinar a equação reduzida da reta AB.

$m_{AB} = \frac{1 - 2}{6 - 1} = -\frac{1}{5}$

$y = -\frac{1}{5}x + b$

Como o ponto $A(1, 2)$ pertence à reta: $2 = -\frac{1}{5} + b$

$\Leftrightarrow \frac{11}{5} = b$

AB: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$

Agora vamos determinar a equação reduzida da reta CD:

$m_{CD} = \frac{5 - 6}{1 - 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + b$

Como o ponto $D(1, 5)$ pertence à reta: $5 = \frac{1}{3} + b$

$\Leftrightarrow \frac{14}{3} = b$

CD: $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

Assim, a medida da área de A é dada por:

$\int_1^4 \left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}\right) - \left(-\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}\right)\right] dx =$

$= \int_1^4 \left(\frac{8}{15}x + \frac{37}{15}\right) dx = \left[\frac{4}{15}x^2 + \frac{37}{15}x\right]_1^4 =$

$= \left(\left(\frac{4}{15} \times 4^2 + \frac{37}{15} \times 4\right) - \left(\frac{4}{15} + \frac{37}{15}\right)\right) =$

$= \frac{212}{15} - \frac{41}{15} = \frac{171}{15}$

Determinemos a equação reduzida de reta BC:

$m_{BC} = \frac{6 - 1}{4 - 6} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$

$y = -\frac{5}{2}x + b$

Como o ponto $B(6, 1)$ pertence à reta: $1 = -\frac{5}{2} \times 6 + b$

$\Leftrightarrow 1 + 15 = b \Leftrightarrow b = 16$

BC: $y = -\frac{5}{2}x + 16$

Procedendo de forma análoga, obtemos a medida da área de B:

$\int_4^6 \left[\left(-\frac{5}{2}x + 16\right) - \left(-\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}\right)\right] dx =$

$= \int_4^6 \left(-\frac{23}{10}x + \frac{69}{5}\right) dx = \left[-\frac{23}{20}x^2 + \frac{69}{5}x\right]_4^6 =$

$= \left(\left(-\frac{23}{20} \times 6^2 + \frac{69}{5} \times 6\right) - \left(-\frac{23}{20} \times 4^2 + \frac{69}{5} \times 4\right)\right) =$

$= \frac{207}{5} - \frac{184}{5} = \frac{23}{5}$

Desta forma, a área da figura é igual a

$\frac{171}{15} + \frac{23}{5} = 16$ u.a.

6. Comecemos por determinar, no intervalo $[0, 2\pi]$, os pontos de interseção do dois gráficos.

$1 + \cos x = 1 + \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x$

Em $[0, 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

Assim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1+\cos x)-(1+\operatorname{sen} x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} ((1+\operatorname{sen} x)-(1+\cos x))\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} ((1+\cos x)-(1+\operatorname{sen} x))\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx =$$

$$= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [\operatorname{sen} x + \cos x]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} =$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ u.a.}$$

7. Sabemos que:

- $f(0) = 5$ e $f''(0) = 0$
- $f'(0) = -3$
- $f'''(x) = 24x - 12$
- Comecemos por determinar uma expressão analítica de f'':

  $f''(x) = \int (24x - 12)\,dx = \frac{24x^2}{2} - 12x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

  Como $f''(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

  Logo, $f''(x) = 12x^2 - 12x$.
- Determinemos uma expressão analítica de f':

  $f'(x) = \int (12x^2 - 12x)\,dx = \frac{12x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$

  Como $f'(0) = -3 \Leftrightarrow c_2 = -3$

  Logo, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 3$.
- Determinemos uma expressão analítica de f:

  $f(x) = \int (4x^3 - 6x^2 - 3)\,dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} - 3x + c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}$

  Como $f(0) = 5 \Leftrightarrow c_3 = 5$.

  Logo, $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x + 5$.

Teste Final – páginas 82 e 83

1. Opção (B)

$$\int 5\cos x\,dx = 5\int \cos x\,dx = 5\operatorname{sen} x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

2. Opção (B)

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

A função $y = \sqrt{4-x^2}$ representa uma semicircunferência de raio 2.

Logo, o integral é a área do semicírculo delimitado por essa semicircunferência:

$$\frac{1}{2}\pi \times r^2 = \frac{1}{2}\pi \times 2^2 = 2\pi$$

3. Opção (D)

($b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq -1$)

$$\int (3e^x + 2x^b)\,dx = \int 3e^x\,dx + \int 2x^b\,dx =$$

$$= 3\int e^x\,dx + 2\int x^b\,dx =$$

$$= 3e^x + 2 \times \frac{x^{b+1}}{b+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

4.

4.1 $\int_0^4 (2f(x) + 3g(x))\,dx = 2\int_0^4 f(x)\,dx + 3\int_0^4 g(x)\,dx =$

$= 2 \times 6 + 3 \times 2 = 18$

4.2 $\int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^4 g(x)\,dx =$

$= 6 - 2 = 4$

5. Opção (B)

Como $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 5$ e $g(x) = 2f(x) - 1$, então:

$$\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (2f(x) - 1)\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int_{-1}^{3} 1\,dx =$$

$$= 2 \times 5 - [x]_{-1}^{3} =$$

$$= 10 - (3 - (-1)) =$$

$$= 10 - 4 = 6$$

6.

6.1 $F(x) = \int (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + c,\ c \in \mathbb{R}$

O gráfico contém a origem, ou seja, $F(0) = 0$:

$F(0) = 0 \Leftrightarrow -1 + 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$

$F(x) = \operatorname{sen} x - \cos x + 1$

6.2 $\int g(x)\,dx = \int x^3\,dx + \int 6x^2\,dx + \int x^{-2}\,dx$

$$= \frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

7. Opção (C)

Pontos de interseção

$x^2 + 6 = 3x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

No intervalo [0, 3], a reta está acima da parábola, logo:

$$A = \int_0^3 [(3x+6) - (x^2+6)]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 =$$

$$= \left(\frac{27}{2} - 9\right) - 0 =$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

8. **Equações das retas**

Reta *AB*: declive $\frac{1-2}{4-0} = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{x}{4} + 2$

Reta *BC*: declive $\frac{6-1}{6-4} = \frac{5}{2}$

$y = \frac{5}{2}x - 9$

Reta *CD*: declive $\frac{6-5}{6-0}=\frac{1}{6}$

$y=\frac{x}{6}+5$

Área por integrais (topo menos base), em duas partes:

$$A=\int_0^4\left(\frac{x}{6}+5-\left(-\frac{x}{4}+2\right)\right)dx+\int_4^6\left(\frac{x}{6}+5-\left(\frac{5}{2}x-9\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^4\left(\frac{x}{6}+5+\frac{x}{4}-2\right)dx+\int_4^6\left(\frac{x}{6}+5-\left(\frac{5}{2}x-9\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^4\left(\frac{5}{12}x+3\right)dx+\int_4^6\left(-\frac{7}{3}x+14\right)dx=$$

$$=\left[\frac{5}{24}x^2+3x\right]_0^4+\left[-\frac{7}{6}x^2+14x\right]_4^6=$$

$$=\left(\frac{46}{3}-0\right)+\left(42-\frac{112}{3}\right)=$$

$$=\frac{46}{3}+\frac{14}{3}=$$

$$=\frac{60}{3}=$$

$= 20$ u.a.

9. $x^2+1=9-x^2 \Leftrightarrow 2x^2=8$

$\Leftrightarrow x^2=4$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

$$A=\int_0^2(9-x^2-(x^2+1))\,dx+\int_2^3(x^2+1-(9-x^2))\,dx=$$

$$=\int_0^2(-2x^2+8)\,dx+\int_2^3(2x^2-8)\,dx=$$

$$=\left[-\frac{2x^3}{3}+8x\right]_0^2+\left[\frac{2x^3}{3}-8x\right]_2^3=$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+16-0\right)+\left(18-24-\frac{16}{3}+16\right)=$$

$=\frac{46}{3}$ u.a.