6. Matrizes

Recorda – páginas 86 a 89

1. C é a imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude -120°.
B é a imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude -60°.
E é a imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude 120°.
D é a imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude 180°.
B é a imagem do ponto A pela rotação de centro O e amplitude 300°.

2. Por exemplo:

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{FE}$ **b)** Não é possível.

c) $\overrightarrow{AC}$ **d)** $\overrightarrow{HJ}$

3.

a) J é a imagem do ponto F pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.

b) E é a imagem do ponto B pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.
F é a imagem do ponto C pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.
I é a imagem do ponto E pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.
Logo, $[EFI]$ é a imagem do triângulo $[BCE]$ pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.

c) I é a imagem do ponto F pela translação associada ao vetor $\vec{v}$.

d) D é a imagem do ponto B pela translação associada ao vetor $\vec{v}$.
G é a imagem do ponto D pela translação associada ao vetor $\vec{v}$.
H é a imagem do ponto E pela translação associada ao vetor $\vec{v}$.
E é a imagem do ponto C pela translação associada ao vetor $\vec{v}$.
Logo, $[DGHE]$ é a imagem do paralelogramo $[BDEC]$ pela translação associada ao vetor $\vec{v}$.

4. $\vec{a}(2, 2)$, $\vec{b}(2, -2)$, $\vec{c}(2, 0)$, $\vec{d}(-2, 0)$, $\vec{f}(-3, -3)$ e $\vec{g}(0, 4)$

5. $\overrightarrow{OB}(3, 4, 0)$, $\overrightarrow{OG}(3, 4, 2)$, $\overrightarrow{EF}(3, 0, 0)$, $\overrightarrow{ED}(0, 4, 0)$ e $\overrightarrow{FD}(-3, 4, 0)$.

Capítulo 1 – Matrizes

Tarefa – A cantina – páginas 90 e 91

a) **i.** Cada linha da matriz representa o tipo de refeição.

ii. Cada coluna da matriz representa o tipo de ingrediente.

iii. O elemento colocado na primeira linha e na segunda coluna representa o número de porções de carne de uma refeição de arroz com frango.

b) **i.** A refeição que usa mais carne é a massa à bolonhesa – maior elemento da segunda coluna.

ii. A refeição que não usa nenhum dos ingredientes considerados é a salada de atum – linha e coluna preenchidas com zeros.

c) A matriz tem uma nova linha com os elementos 2 e 0:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} 0{,}40 \\ 1{,}20 \end{bmatrix}$

e) **i.** Arroz com frango
- 2 porções de arroz $\longrightarrow 2 \times 0{,}40 = 0{,}80$ €
- 1 porção de carne $\longrightarrow 1 \times 1{,}20 = 1{,}20$ €

Custo total: $2 \times 0{,}40 + 1 \times 1{,}20 = 0{,}80 + 1{,}20 = 2$ €

ii. Massa à bolonhesa
- 0 porções de arroz $\longrightarrow 0 \times 0{,}40 = 0$ €
- 2 porções de carne $\longrightarrow 2 \times 1{,}20 = 2{,}40$ €

Custo total: $0 \times 0{,}40 + 2 \times 1{,}20 = 0 + 2{,}40 = 2{,}40$ €

iii. Salada de atum
- 0 porções de arroz $\longrightarrow 0 \times 0{,}40 = 0$ €
- 0 porções de carne $\longrightarrow 0 \times 1{,}20 = 0$ €

Custo total: $0 \times 0{,}40 + 0 \times 1{,}20 = 0 + 0 = 0$ €

iv. Arroz com legumes
- 2 porções de arroz $\longrightarrow 2 \times 0{,}40 = 0{,}80$ €
- 0 porções de carne $\longrightarrow 0 \times 1{,}20 = 0$ €

Custo total: $2 \times 0{,}40 + 0 \times 1{,}20 = 0{,}80$ €

Exercícios de margem – páginas 93 a 111

1.

a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

b) A matriz obtida é do tipo 2×3.

c) **i.** $a_{13} = 5$: número de alunos do 10º ano no Clube de Desporto.

ii. $a_{21} = 3$: número de alunos do 11º ano no Clube de Ciência.

d) **i.** Número total de alunos do 10º ano: $a_{11} + a_{12} + a_{13}$

ii. Número total de alunos no Clube de Artes: $a_{12} + a_{22}$

2.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 0 \\ p^2 & -5 \end{bmatrix}$, $k, p \in \mathbb{R}$

As matrizes A e B (que são do mesmo tipo) são iguais se todos os elementos correspondentes são iguais; neste caso, todos os elementos correspondentes são iguais se $k = 1$ e $p^2 = 4$, ou seja, se $k = 1$ e $p = 2$ ou $p = -2$.

b) As matrizes A e D não são iguais, pois não são do mesmo tipo (A é do tipo 3×2 e D é do tipo 1×6).

c) $B = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 0 \\ p^2 & -5 \end{bmatrix}$, $k, p \in \mathbb{R}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$

As matrizes B e C (que são do mesmo tipo) são iguais se todos os elementos correspondentes são iguais;

neste caso, todos os elementos correspondentes são iguais se $k = 1$ e $p^2 = -4$. Como esta última condição é impossível em $\mathbb{R}$, tem-se que não existem valores reais para k e p tais que as matrizes B e C sejam iguais.

3. **A.** A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ tem 2 linhas e 2 colunas, logo é uma matriz quadrada de ordem 2. A afirmação é verdadeira.

B. A matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz retangular, com 2 linhas e 3 colunas, logo do tipo 2×3. A afirmação é falsa.

C. A matriz $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ tem 4 linhas e 1 coluna, logo é uma matriz coluna do tipo 4×1. A afirmação é verdadeira.

D. A matriz $D = [2\ 3\ 5\ 7\ 11]$ é uma matriz linha, com 1 linha e 5 colunas, logo do tipo 1×5. A afirmação é falsa.

E. Afirmação verdadeira.

F. Afirmação verdadeira.

4. 1 – D; 2 – B; 3 – C

5.

a) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + (-2) & 0 + 3 \\ 0 + 4 & 4 + 8 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}A + D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 + 1 & 0 - 3 \\ 0 + 5 & 2 + 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A + B + 3D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 15 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 19 & 21 \end{bmatrix}$

d) $-2D + I_2 = -2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$

e) $C + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Não é possível somar as matrizes C e D, pois apresentam dimensões diferentes.

6.

a) $AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} =$

$= \left[-1 \times 2 + 3 \times (-4) + \sqrt{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 6 \right] =$

$= [-2 - 12 + 0 + 2] = [-12]$

b) $(2A)B = 2\begin{bmatrix} -1 & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2\sqrt{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} =$

$= [-4 - 24 + 0 + 4] = [-24]$

Observa que $(2A)B = 2(AB)$, logo, podíamos ter utilizado a alínea **a)** e concluir que $(2A)B = 2 \times (-12) = -24$.

c) $A(-B) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \sqrt{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = [2 + 12 + 0 - 2] = [12]$

Observa que $A(-B) = -(AB)$, logo, podíamos ter utilizado a alínea **a)** e concluir que $A(-B) = [-1 \times (-12)] = [12]$.

7. Os dados podem ser organizados da seguinte forma:

- Matriz linha com os quilos de uvas recebidos:

$$Q = [800\ \ 650\ \ 500\ \ 450]$$

- Matriz coluna com as percentagens (em forma decimal) de uvas *premium*:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}45 \\ 0{,}20 \\ 0{,}40 \end{bmatrix}$$

O número total de quilos de uvas de qualidade *premium* é dado pelo produto QP.

$$QP = [800\ \ 650\ \ 500\ \ 450] \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}45 \\ 0{,}20 \\ 0{,}40 \end{bmatrix} =$$

$= [800(0{,}30) + 650(0{,}45) + 500(0{,}20) + 450(0{,}40)] =$

$= [240 + 292{,}5 + 100 + 180] =$

$= [812{,}5]$

Chegaram à adega 812,5 kg de uvas de qualidade *premium*.

8.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + (-1) \times (-2) \\ 0 \times 4 + 3 \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$

b) Não é possível efetuar esta multiplicação.
Como a primeira matriz é do tipo 2×1, e a segunda matriz é do tipo 2×2, não é possível efetuar a multiplicação destas duas matrizes. Para ser possível multiplicar matrizes, o número de colunas da primeira matriz tem de ser igual ao número de linhas da segunda matriz, o que não se verifica, já que a primeira matriz tem 1 coluna e a segunda matriz tem 2 linhas.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -13 & 14 \\ 21 & 2 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares

Fila 1 da primeira matriz por colunas da segunda matriz
- $c_{11} = 1 \times 5 + 0 \times (-1) = 5 + 0 = 5$
- $c_{12} = 1 \times 2 + 0 \times 6 = 2 + 0 = 2$

Fila 2 da primeira matriz por colunas da segunda matriz
- $c_{21} = -2 \times 5 + 3 \times (-1) = -10 - 3 = -13$
- $c_{22} = -2 \times 2 + 3 \times 6 = -4 + 18 = 14$

Fila 3 da primeira matriz por colunas da segunda matriz
- $c_{31} = 4 \times 5 + (-1 \times (-1)) = 20 + 1 = 21$
- $c_{32} = 4 \times 2 + (-1 \times 6) = 8 - 6 = 2$

d) Não é possível efetuar esta multiplicação.
Como a primeira matriz é do tipo 2 × 2, e a segunda matriz é do tipo 3 × 2, não é possível efetuar a multiplicação destas duas matrizes. Para ser possível multiplicar matrizes, o número de colunas da primeira matriz tem de ser igual ao número de linhas da segunda matriz, o que não se verifica, já que a primeira matriz tem 2 colunas e a segunda matriz tem 3 linhas.

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ -1 & 11 & -9 \\ 3 & -9 & 15 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares

Fila 1 da primeira matriz por colunas da segunda matriz
- $e_{11} = 2 \times 1 + 1 \times 0 = 2 + 0 = 2$
- $e_{12} = 2 \times (-3) + 1 \times 2 = -6 + 2 = -4$
- $e_{13} = 2 \times 5 + 1 \times (-1) = 10 - 1 = 9$

Fila 2 da primeira matriz por colunas da segunda matriz
- $e_{21} = -1 \times 1 + 4 \times 0 = -1 + 0 = -1$
- $e_{22} = (-1) \times (-3) + 4 \times 2 = 3 + 8 = 11$
- $e_{23} = -1 \times 5 + 4 \times (-1) = -5 - 4 = -9$

Fila 3 da primeira matriz por colunas da segunda matriz
- $e_{31} = 3 \times 1 + 0 \times 0 = 3 + 0 = 3$
- $e_{32} = 3 \times (-3) + 0 \times 2 = -9 + 0 = -9$
- $e_{33} = 3 \times 5 + 0 \times (-1) = 15 + 0 = 15$

9.

a) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares
- $1 \times 5 + 2 \times 7 = 5 + 14 = 19$
- $1 \times 6 + 2 \times 8 = 6 + 16 = 22$
- $3 \times 5 + 4 \times 7 = 15 + 28 = 43$
- $3 \times 6 + 4 \times 8 = 18 + 32 = 50$

b) $BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares
- $5 \times 1 + 6 \times 3 = 5 + 18 = 23$
- $5 \times 2 + 6 \times 4 = 10 + 24 = 34$
- $7 \times 1 + 8 \times 3 = 7 + 24 = 31$
- $7 \times 2 + 8 \times 4 = 14 + 32 = 46$

10.

a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-3) & -2 + 5 & 3 + 1 \\ 4 + 2 & 0 + (-1) & -1 + 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A + B$ é do tipo 2 × 3.

b) $A - B = \begin{bmatrix} 1 - (-3) & -2 - 5 & 3 - 1 \\ 4 - 2 & 0 - (-1) & -1 - 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

$A - B$ é do tipo 2 × 3.

c) $A + C$ não é possível efetuar, pois não se podem somar matrizes de tipos diferentes.
A é do tipo 2 × 3 e C é do tipo 3 × 4.

d) $2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$3B = \begin{bmatrix} -9 & 15 & 3 \\ 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$

$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 - (-9) & -4 - 15 & 6 - 3 \\ 8 - 6 & 0 - (-3) & -2 - 12 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 11 & -19 & 3 \\ 2 & 3 & -14 \end{bmatrix}$

$2A - 3B$ é do tipo 2 × 3.

e) A é do tipo 2 × 3, C é do tipo 3 × 4, logo o produto é possível e o resultado é do tipo 2 × 4.

$AC = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares

1ª linha
- $1 \times 2 + (-2) \times (-3) + 3 \times 1 = 2 + 6 + 3 = 11$
- $1 \times 1 + (-2) \times 4 + 3 \times (-2) = 1 - 8 - 6 = -13$
- $1 \times 0 + (-2) \times 2 + 3 \times 3 = 0 - 4 + 9 = 5$
- $1 \times (-1) + (-2) \times 5 + 3 \times 0 = -1 - 10 + 0 = -11$

2ª linha
- $4 \times 2 + 0 \times (-3) + (-1) \times 1 = 8 + 0 - 1 = 7$
- $4 \times 1 + 0 \times 4 + (-1) \times (-2) = 4 + 0 + 2 = 6$
- $4 \times 0 + 0 \times 2 + (-1) \times 3 = 0 + 0 - 3 = -3$
- $4 \times (-1) + 0 \times 5 + (-1) \times 0 = -4 + 0 + 0 = -4$

$AC = \begin{bmatrix} 11 & -13 & 5 & -11 \\ 7 & 6 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

AC é do tipo 2 × 4.

f) C é do tipo 3 × 4, A é do tipo 2 × 3, logo não é possível efetuar a multiplicação, uma vez que o número de colunas de C é diferente do número de linhas de A.

g) B é do tipo 2 × 3, C é do tipo 3 × 4, logo o produto é possível e o resultado é do tipo 2 × 4.

$BC = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares

1ª linha
- $-3 \times 2 + 5 \times (-3) + 1 \times 1 = -6 - 15 + 1 = -20$
- $-3 \times 1 + 5 \times 4 + 1 \times (-2) = -3 + 20 - 2 = 15$
- $-3 \times 0 + 5 \times 2 + 1 \times 3 = 0 + 10 + 3 = 13$
- $-3 \times (-1) + 5 \times 5 + 1 \times 0 = 3 + 25 + 0 = 28$

2ª linha
- $2 \times 2 + (-1) \times (-3) + 4 \times 1 = 4 + 3 + 4 = 11$
- $2 \times 1 + (-1) \times 4 + 4 \times (-2) = 2 - 4 - 8 = -10$
- $2 \times 0 + (-1) \times 2 + 4 \times 3 = 0 - 2 + 12 = 10$
- $2 \times (-1) + (-1) \times 5 + 4 \times 0 = -2 - 5 + 0 = -7$

$BC = \begin{bmatrix} -20 & 15 & 13 & 28 \\ 11 & -10 & 10 & -7 \end{bmatrix}$

BC é do tipo 2 × 4.

11.

a) $AB = [1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6] =$

$= [4 + 10 + 18] = [32]$

b) $BA = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}[1\ \ 2\ \ 3] = \begin{bmatrix} 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times 3 \\ 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 3 \\ 6 \times 1 & 6 \times 2 & 6 \times 3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

12.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & y \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \times 3 + (-1) \times (-2) & 1 \times y + (-1) \times 0 \\ x \times 3 + 4 \times (-2) & xy + 4 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & y \\ 3x - 8 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

Para as matrizes serem iguais, tem de se verificar $\begin{cases} y = 5 \\ 3x - 8 = -2 \\ xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 2 \\ xy = 10 \end{cases}$.

Assim, $x = 2$ e $y = 5$.

13.

a) **i.** • A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo a translação associada ao vetor $\vec{u}(5, 1)$ é o ponto A' cujas coordenadas são (5, 1):

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

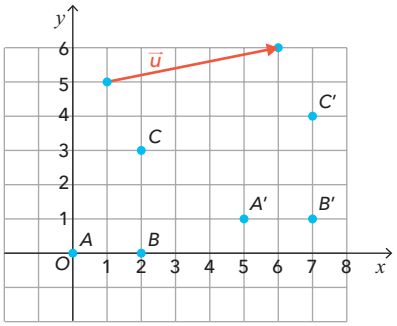
• A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo a translação associada ao vetor $\vec{u}(5, 1)$ é o ponto B' cujas coordenadas são (7, 1):

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

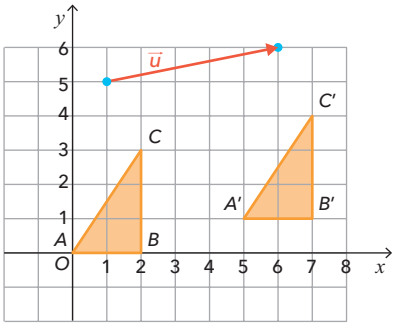
• A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo a translação associada ao vetor $\vec{u}(5, 1)$ é o ponto C' cujas coordenadas são (7, 4):

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

ii.



b)



14.

a) **i.** • A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo uma variação de tamanho de razão 2 (ampliação) é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo uma variação de tamanho de razão 2 (ampliação) é o ponto B' cujas coordenadas são (4, 0):

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

• A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo uma variação de tamanho de razão 2 (ampliação) é o ponto C' cujas coordenadas são (4, 6):

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

ii. • A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo uma variação de tamanho de razão $\frac{1}{2}$ (redução) é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

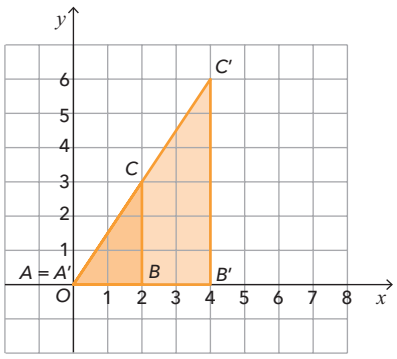
• A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo uma variação de tamanho de razão $\frac{1}{2}$ (redução) é o ponto B' cujas coordenadas são (1, 0):

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

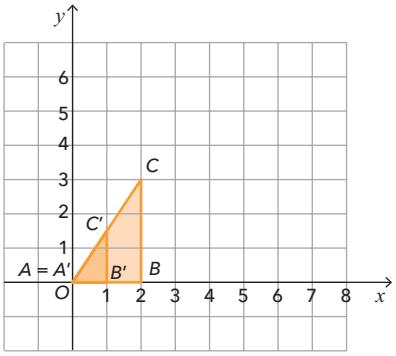
• A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo uma variação de tamanho de razão $\frac{1}{2}$ (redução) é o ponto C' cujas coordenadas são $\left(1, \frac{3}{2}\right)$:

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $k = 2$



$k = \frac{1}{2}$



15.

a) A matriz de um cisalhamento horizontal de fator k é:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i. Cisalhamento horizontal com $k = 2$

Matriz da transformação $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo um cisalhamento horizontal de fator 2 é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo um cisalhamento horizontal de fator 2 é o ponto $B' = B$ cujas coordenadas são (2, 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo um cisalhamento horizontal de fator 2 é o ponto C' cujas coordenadas são (8, 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ii. Cisalhamento horizontal com $k = \frac{1}{2}$

Matriz da transformação $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo um cisalhamento horizontal de fator $\frac{1}{2}$ é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

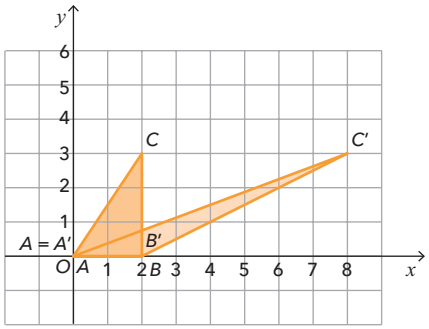
- A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo um cisalhamento horizontal de fator $\frac{1}{2}$ é o ponto $B' = B$ cujas coordenadas são (2, 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

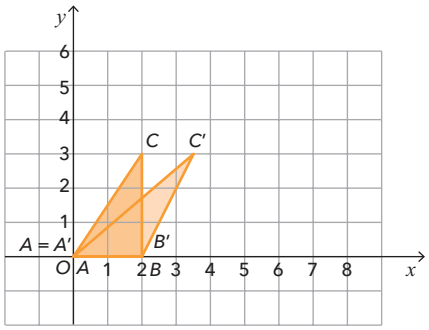
- A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo um cisalhamento horizontal de fator $\frac{1}{2}$ é o ponto C' cujas coordenadas são $\left(\frac{7}{2}, 3\right)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) $k = 2$



$k = \frac{1}{2}$



c)
- Num cisalhamento horizontal, a ordenada do ponto não se altera.
- A abcissa aumenta (ou diminui) em função da ordenada e do fator k.
- Os pontos com $y = 0$ (como A e B) não se deslocam.
- Quanto maior for o valor de k, maior é o deslocamento horizontal.

Assim:
- com $k = 2$, o ponto C sofre um deslocamento horizontal maior;
- com $k = \frac{1}{2}$, o deslocamento é mais pequeno.

O cisalhamento "inclina" a figura para a direita, mantendo as alturas.

16.

a) A matriz de um cisalhamento vertical de fator k é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

i. Cisalhamento vertical com $k = 2$

Matriz da transformação $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo um cisalhamento vertical de fator 2 é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo um cisalhamento vertical de fator 2 é o ponto B' cujas coordenadas são (2, 4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo um cisalhamento vertical de fator 2 é o ponto C' cujas coordenadas são (2, 7):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ii. Cisalhamento vertical com $k = \frac{1}{2}$

Matriz da transformação $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

- A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo um cisalhamento vertical de fator $\frac{1}{2}$ é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

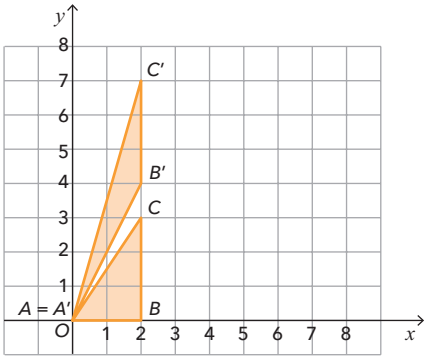
- A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo um cisalhamento vertical de fator $\frac{1}{2}$ é o ponto B' cujas coordenadas são (2, 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

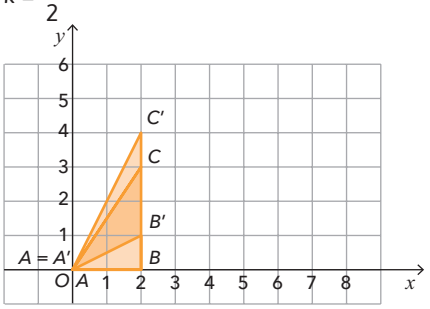
- A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo um cisalhamento vertical de fator $\frac{1}{2}$ é o ponto C' cujas coordenadas são (2, 4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $k = 2$



$k = \frac{1}{2}$



c) Num cisalhamento vertical, a abcissa do ponto não se altera.

- A ordenada aumenta (ou diminui) em função da abcissa e do fator k.
- Os pontos com $x = 0$ permanecem fixos (neste caso, o ponto A).
- Quanto maior for o valor de k, maior é o deslocamento vertical.

Assim:

- com $k = 2$, os pontos sobem mais;
- com $k = \frac{1}{2}$, o deslocamento vertical é menor.

O cisalhamento vertical "inclina" a figura para cima, mantendo as abcissas.

17.

a) A matriz de uma rotação de centro na origem e amplitude α é:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

i. Rotação de centro na origem e amplitude 90º:

Matriz da transformação

$$\begin{bmatrix} \cos 90 & -\text{sen}\,90 \\ \text{sen}\,90 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo uma rotação de centro na origem e amplitude 90º é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo uma rotação de centro na origem e amplitude 90º é o ponto B' cujas coordenadas são (0, 2):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo uma rotação de centro na origem e amplitude 90º é o ponto C' cujas coordenadas são (–3, 2):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ii. Rotação de centro na origem e amplitude 180º:

Matriz da transformação

$$\begin{bmatrix} \cos 180 & -\text{sen}\,180 \\ \text{sen}\,180 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- A imagem do ponto $A(0, 0)$ segundo uma rotação de centro na origem e amplitude 180º é o ponto $A' = A$ cujas coordenadas são (0, 0):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

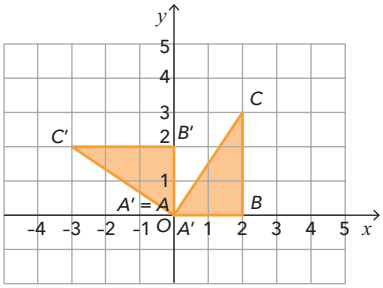
- A imagem do ponto $B(2, 0)$ segundo uma rotação de centro na origem e amplitude 180º é o ponto B' cujas coordenadas são (–2, 0):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

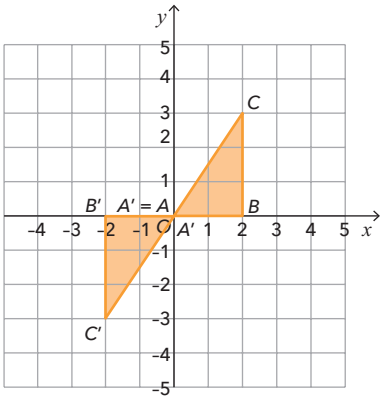
- A imagem do ponto $C(2, 3)$ segundo uma rotação de centro na origem e amplitude 180º é o ponto C' cujas coordenadas são (–2, –3):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

b) Rotação de centro na origem e amplitude 90º:



Rotação de centro na origem e amplitude 180º:



Aprende Fazendo Global – páginas 118 a 121

1.

a) Matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

b) A matriz obtida é do tipo 2 × 3.

c) **i.** $a_{12} = 3$ e representa o número de funcionários do turno da manhã no setor da administração.

ii. $a_{21} = 5$ e representa o número de funcionários do turno da tarde no setor da produção.

d) **i.** Número total de funcionários do turno da manhã: $a_{11} + a_{12} + a_{13}$

ii. Número total de funcionários no setor da produção: $a_{11} + a_{21}$

2. Opção (B)

A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ tem 3 linhas e 2 colunas, logo, é do tipo 3 × 2.

3.

a) As duas matrizes são do mesmo tipo 2 × 3, logo, a soma é possível.

$$A + C = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 0+4 & 2+0 \\ -1+2 & 3+(-2) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Também é possível (as duas matrizes são mesmo tipo).

$$A - C = \begin{bmatrix} 1-(-1) & 0-4 & 2-0 \\ -1-2 & 3-(-2) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

c) A é do tipo 2 × 3 e B é do tipo 3 × 2.
Não é possível somar, porque as matrizes não são do mesmo tipo.

d) Multiplicamos todos os elementos de A por 2:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

e) A é do tipo 2 × 3 e B é do tipo 3 × 2. Assim, o produto é possível e o resultado será uma matriz do tipo 2 × 2.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Cálculos auxiliares
- $1 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 1 = 4$
- $1 \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 2 = 5$
- $-1 \times 2 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = -1$
- $-1 \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 2 = -2$

f) B é do tipo 3 × 2 e A é do tipo 2 × 3. Assim, a multiplicação é possível e o resultado será uma matriz do tipo 3 × 3.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Cálculos auxiliares
1ª linha: $(2, 1) \times A = (1, 3, 5)$
2ª linha: $(0, -1) \times A = (1, -3, -1)$
3ª linha: $(1, 2) \times A = (-1, 6, 4)$

g) C é do tipo 2 × 3 e B é do tipo 3 × 2. Assim, a multiplicação é possível e o resultado é uma matriz do tipo 2 × 2.

$$C \times B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Cálculos auxiliares
- $-1 \times 2 + 4 \times 0 + 0 \times 1 = -2$
- $-1 \times 1 + 4 \times (-1) + 0 \times 2 = -5$
- $2 \times 2 + (-2) \times 0 + 1 \times 1 = 5$
- $2 \times 1 + (-2) \times (-1) + 1 \times 2 = 6$

4.

a) Uma variação de tamanho de razão $k = 2$ é representada pela matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Um cisalhamento horizontal de fator $k = 1$ é representado pela matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação total é representada pela matriz:

$$HS = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) **1º Passo:** Aplicar a variação de tamanho

$$S \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 2 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Após a variação de tamanho, o ponto tem coordenadas $P'(4, -2)$.

2º Passo: Aplicar o cisalhamento horizontal

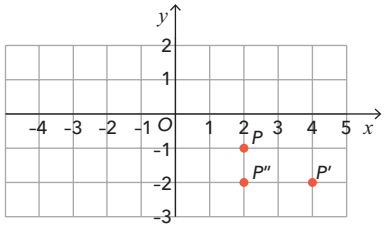
$$H \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 1 \times (-2) \\ 0 \times 4 + 1 \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Assim, as coordenadas após as duas transformações são $P''(2, -2)$.
Observa que poderíamos ter efetuado:

$$HSP = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

c) Interpretação geométrica
- A variação de tamanho de razão 2 duplica as distâncias do ponto à origem, fazendo com que o ponto se afaste da origem, mas mantenha a sua direção.
- O cisalhamento horizontal desloca o ponto horizontalmente em função da sua ordenada, sem alterar o valor da ordenada.
- Como a ordenada final é negativa ($y = -2$), o cisalhamento provoca um deslocamento para a esquerda.

Globalmente, o ponto:
- afasta-se da origem;
- depois, desliza horizontalmente, terminando numa posição diferente, mas com a mesma ordenada do ponto após o *scaling*.



5. Organizando os dados em matrizes:
- Matriz linha com os litros de leite entregues:

$$L = [1200 \;\; 950 \;\; 800 \;\; 600 \;\; 450]$$

- Matriz coluna com as percentagens (em forma decimal) de leite de qualidade A:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}35 \\ 0{,}50 \\ 0{,}30 \\ 0{,}60 \end{bmatrix}$$

Pretendemos o produto LP:

$$LP = [1200 \;\; 950 \;\; 800 \;\; 600 \;\; 450]\begin{bmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}35 \\ 0{,}50 \\ 0{,}30 \\ 0{,}60 \end{bmatrix} =$$

$$= [1200(0{,}40) + 950(0{,}35) + 800(0{,}50) + 600(0{,}30) + 450(0{,}60)] =$$
$$= [480 + 332{,}5 + 400 + 180 + 270] =$$
$$= [1662{,}5]$$

Chegaram à fábrica 1662,5 litros de leite de qualidade A.

6. Opção (D)
Determinemos AB:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (-1)\times 5 + 2\times 7 & (-1)\times 6 + 2\times(-8) \\ 3\times 5 + 4\times 7 & 3\times 6 + 4\times(-8) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -22 \\ 43 & -14 \end{bmatrix}$$

Determinemos BA:

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5\times(-1) + 6\times 3 & 5\times 2 + 6\times 4 \\ 7\times(-1) + (-8)\times 3 & 7\times 2 + (-8)\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 34 \\ -31 & -18 \end{bmatrix}$$

Temos que $AB \neq BA$.

A afirmação I é falsa.

Observe-se que a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade I.

Assim, $AC = AI = A$ e $CA = IA = A$.

Logo, $AC = CA$.
A afirmação II é verdadeira.

7. Para organizar a composição dos *kits* numa matriz, podemos utilizar a matriz A, onde a primeira linha representa o *kit* básico (2 t-*shirts*, 1 calção, 2 meias) e a segunda linha representa o *kit* pro (3 t-*shirts*, 2 calções, 3 meias):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para organizar os preços numa matriz, podemos utilizar a matriz coluna P:

$$P = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

O custo total de cada *kit*, C, é obtido através do produto da matriz A por P:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A matriz resultante é:

$$C = \begin{bmatrix} 60 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Tem-se, assim, que o valor de custo do *kit* básico é 60 € e o valor de custo do *kit* pro é 100 €.

8.

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 1 + 2a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$2A + AB = \begin{bmatrix} 2 + ab & 1 + 4a \\ 4 - b & -2 \end{bmatrix}$$

Assim, pretende-se determinar os valores reais de a e b tais que $2A + AB = C$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 2 + ab & 1 + 4a \\ 4 - b & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Para tal tem de se verificar:

$$\begin{cases} 2 + ab = 2 \\ 1 + 4a = 3 \\ 4 - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + ab = 2 \\ 4a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 0 = 2 \\ a = \dfrac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Conclui-se, assim, que $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 0$.

9.

a) Opção (B)

A matriz que representa uma rotação de centro na origem e amplitude 90º é a matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos 90 & -\text{sen } 90 \\ \text{sen } 90 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Opção (C)

A matriz que representa uma rotação de centro na origem e amplitude 180º é a matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos 180 & -\text{sen } 180 \\ \text{sen } 180 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10. $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Assim:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ -z & -t \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$AX + X = \begin{bmatrix} x+2z+x & y+2t+y \\ -z+z & -t+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2z & 2y+2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$AX + X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+2z & 2y+2t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Comparando elementos, tem-se:

$$\begin{cases} 2x+2z=3 \\ 2y+2t=1 \\ 0=2 \end{cases}$$

A condição $0 = 2$ é impossível, logo o sistema é impossível e, portanto, não existe nenhuma matriz X que verifique $AX + X = B$.

11.

a) O produto matricial AX permite calcular o consumo total de cada matéria-prima numa semana.

- A 1ª linha do resultado indica o consumo total da matéria-prima M_1.
- A 2ª linha indica o consumo total da matéria-prima M_2.

Cada valor resulta da soma:

(consumo por unidade) × (número de unidades produzidas)

Logo, no contexto do problema, $AX = B$.

b) O número de unidades produzidas do produto P_3 é igual ao número de unidades produzidas do produto P_2, ou seja, $z = y$.

Sabemos que $AX = B$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 19 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+y+3z \\ x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Logo, tem de se verificar:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=26 \\ x+2y+z=19 \end{cases}$$

Como $z = y$, vem que:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=26 \\ x+2y+z=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3y=26 \\ x+2y+y=19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=26 \\ x+3y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=26 \\ x=19-3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(19-3y)+4y=26 \\ \text{---------} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 38-6y+4y=26 \\ \text{---------} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y=-12 \\ \text{---------} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=19-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=1 \end{cases}$$

Como $z = y$, tem-se $z = 6$.

Assim, $x = 1$, $y = 6$, $z = 6$, ou seja, produziram-se uma unidade do produto P_1, seis unidades do produto P_2 e seis unidades do produto P_3.

c) O número de unidades produzidas de P_3 é o dobro do número de unidades produzidas de P_2, ou seja, $z = 2y$.

Sabemos que $AX = B$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 19 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+y+3z \\ x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Logo, tem de se verificar:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=26 \\ x+2y+z=19 \end{cases}$$

Como $z = 2y$, vem que:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=26 \\ x+2y+z=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3\times 2y=26 \\ x+2y+2y=19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7y=26 \\ x+4y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(19-4y)+7y=26 \\ x=19-4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 38-8y+7y=26 \\ \text{---------} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=19-4\times 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=-29 \end{cases}$$

Como x representa o número de unidades produzidas de P_1, x não pode ser um valor negativo.

Assim, não existe nenhuma produção possível que satisfaça simultaneamente:

- o consumo de matérias-primas indicado;
- a condição $z = 2y$.

d) O aumento é de 2 unidades de cada produto, logo, a nova matriz de produção é:

$$X' = X + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O novo consumo total será AX', ou seja:

$$AX' = A\left[X + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right] =$$

$$= AX + A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que $AX = B = \begin{bmatrix} 26 \\ 19 \end{bmatrix}$ e que

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 2+1\times 2+3\times 2 \\ 1\times 2+2\times 2+1\times 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

vem que:

$$AX' = A\left[X + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right] =$$

$$= AX + A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} 26 \\ 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 38 \\ 27 \end{bmatrix}$

Após o aumento da produção, o novo consumo total será de:
- 38 kg de matéria-prima M_1;
- 27 kg de matéria-prima M_2.

12. Opção (D)

a) **1.** Variação de tamanho de fator $k = 2$

Matriz: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Aplicando ao ponto P:

$S \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. Cisalhamento horizontal de fator $k = 1$

Matriz: $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicando ao ponto obtido:

$H \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Rotação de centro na origem e amplitude 90º no sentido positivo

Matriz: $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Aplicando ao ponto obtido:

$R \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

b) As matrizes associadas a cada transformação são:

Variação de tamanho: $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Cisalhamento horizontal: $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rotação de 90º: $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Como as transformações são aplicadas pela ordem indicada, a matriz da transformação global é:

$T = R \times H \times S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Exercícios–Tipo Exame – páginas 122 a 124

1. **a)** Matriz do tipo 4 × 2. **a) – 4**

b) Matriz do tipo 3 × 4. **b) – 3**

c) Matriz do tipo 2 × 3. **c) – 2**

A resposta correta é: a) – 4; b) – 3; c) – 2

2. **I.** A é do tipo 2 × 2, logo, trata-se de uma matriz quadrada. ⟶ **a)**.

II. B é uma matriz quadrada, em que todos os elementos fora da diagonal principal são zero. Na diagonal principal, os elementos não são todos iguais a 1. Logo, trata-se de uma matriz diagonal que não é a matriz identidade. ⟶ **a)**.

III. AD é a matriz produto e, como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de D, então AD está definido. Calculando AD, obtém-se uma matriz diagonal. ⟶ **a)**.

$AD = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

IV. AC é a matriz produto e, como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de C, então AC está definido e a dimensão do resultado é 2 × 1. ⟶ **c)**.

A resposta correta é: I – a); II – a); III – a); IV – c)

3. Calcula-se $A \times A$:

$A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x & -1+y \\ x(y-1) & x+y^2 \end{bmatrix}$

Impondo a condição $A^2 = A$, obtém-se o sistema:

$\begin{cases} 1+x=-1 \\ -1+y=1 \\ x(y-1)=x \\ x+y^2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ xy-2x=0 \\ x+y^2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ -4+4=0 \\ -2+4=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

Conclui-se que os valores procurados são $x = -2$ e $y = 2$.

4. Calcula-se, em primeiro lugar, $2B$:

$2B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Calcula-se, agora, o produto BA:

$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & 16 \\ -5 & -4 & -8 \end{bmatrix}$

Cálculos auxiliares

1ª linha
- $2 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times (-1) = 6$
- $2 \times (-2) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = -3$
- $2 \times 0 + 1 \times 4 + (-1) \times 2 = 2$

2ª linha
- $0 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times (-1) = 7$
- $0 \times (-2) + 3 \times 1 + 2 \times 0 = 3$
- $0 \times 0 + 3 \times 4 + 2 \times 2 = 16$

3ª linha
- $1 \times 1 + (-2) \times 3 + 0 \times (-1) = -5$
- $1 \times (-2) + (-2) \times 1 + 0 \times 0 = -4$
- $1 \times 0 + (-2) \times 4 + 0 \times 2 = -8$

Somando as matrizes obtidas:

$2B + BA = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & 16 \\ -5 & -4 & -8 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 20 \\ -3 & -8 & -8 \end{bmatrix}$

5. Opção (C)

Na opção (A)

$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$, $k > 1$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é uma ampliação de fator k da figura $[ABCD]$, o que não traduz corretamente a transformação dada.

Na opção (B)

$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$, $0 < k < 1$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é uma redução de fator k da figura $[ABCD]$, o que não traduz corretamente a transformação dada.

Na opção (C)

$\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, $k > 0$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é a imagem de $[ABCD]$ segundo um cisalhamento horizontal de fator k, ou seja, preserva y.

Na opção (D)

$\begin{cases} x' = x \\ y' = kx + y \end{cases}$, $k > 0$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é a imagem de $[ABCD]$ segundo um cisalhamento vertical de fator k, ou seja, não preserva y, o que não traduz corretamente a transformação dada.

Logo, (C) é a opção correta.

6. Opção (A)

Pretende-se a imagem de $P(1, 1)$ por uma rotação de centro na origem e amplitude 60º (sentido positivo).

A matriz de rotação de ângulo θ em torno da origem é:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para $\theta = 60^\circ$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo:

$$R_{60^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aplicando a rotação ao vetor coluna de P, vem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, a imagem de $P(1, 1)$ é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, o que corresponde à opção (A).

7. Opção (A)

A dilatação T_1 de razão 2 (centro na origem) é representada por:

$$M_{T_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

O cisalhamento horizontal T_2 de fator 3 é representado por:

$$M_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } (x', y') = (x + 3y, y)$$

Aplicando primeiro T_1 e depois T_2, a matriz da transformação composta é:

$$M = M_{T_2} M_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8.

a) Matriz de ingredientes: as linhas representam os tipos de suplementos e as colunas representam os ingredientes.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Matriz de produção: as linhas representam os dias de produção e as colunas representam os tipos de suplementos.

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 150 & 50 \\ 80 & 120 \end{bmatrix}$$

b) $C = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 150 & 50 \\ 80 & 120 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 100 \times 0{,}4 + 100 \times 0{,}6 & 100 \times 0{,}5 + 100 \times 0{,}5 & 100 \times 0{,}6 + 100 \times 0{,}4 \\ 150 \times 0{,}4 + 50 \times 0{,}6 & 150 \times 0{,}5 + 50 \times 0{,}5 & 150 \times 0{,}6 + 50 \times 0{,}4 \\ 80 \times 0{,}4 + 120 \times 0{,}6 & 80 \times 0{,}5 + 120 \times 0{,}5 & 80 \times 0{,}6 + 120 \times 0{,}4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 90 & 100 & 110 \\ 104 & 100 & 96 \end{bmatrix} =$$

A matriz C representa a quantidade total de cada ingrediente necessária para satisfazer a produção diária de maçã, de amendoim e de chocolate.

c) Os elementos da segunda linha da matriz C representam as quantidades totais de ingredientes necessários para a produção do segundo dia. Em particular, a primeira coluna corresponde à maçã, a segunda ao amendoim e a terceira ao chocolate, sendo necessárias, respetivamente, 90 kg de maçã, 100 kg de amendoim e 110 kg de chocolate.

Teste Final – páginas 125 a 127

1. **a)** Há três turmas, logo há três grupos a registar.
Em cada turma há duas categorias (rapazes, raparigas), logo há dois valores por turma.
Precisamos de uma matriz do tipo 3 × 2 (3 linhas para as turmas e 2 colunas para rapazes/raparigas) ou do tipo 2 × 3 (se se invertesse a ordem).
Na Coluna II, a única matriz com esses dados é a 2, que é do tipo 3 × 2:

$$\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 15 & 14 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

a) ⟶ **2**

b) Há quatro dias, logo há quatro registos.
Em cada dia há dois valores (máxima e mínima).
Precisamos de uma matriz do tipo 2 × 4 (2 linhas: máx./mín.; 4 colunas: dias 1 a 4) ou do tipo 4 × 2.
Na Coluna II, a matriz 5 é a única com esses dados.

$$\begin{bmatrix} 21 & 14 & 19 & 23 \\ 9 & 11 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

b) ⟶ **5**

c) Há três meses, logo há três valores.
Podemos representar por uma matriz do tipo 3 × 1 ou do tipo 1 × 3.
Na Coluna II, a matriz 4 tem três valores:
[120 95 110]

c) ⟶ **4**

A resposta correta é: a) – 2; b) – 5; c) – 4

2. **I.** A matriz A é constituída por 2 linhas e por 3 colunas, logo não é uma matriz quadrada nem diagonal.
- Não é quadrada (teria de ser $n \times n$).
- Não pode ser diagonal (para ser diagonal teria de ser quadrada).

Assim, é retangular. ⟶ **b)**

II. B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⟶ **b)**

III. Para somar matrizes, elas têm de ser do mesmo tipo.
A é do tipo 2×3.
D é do tipo 2×3.
A soma está definida e o resultado é do tipo 2×3. ⟶ **a)**

IV. A é do tipo 2×3.
C é do tipo 3×1.
Logo, AC é do tipo 2×1, que é uma matriz coluna. ⟶ **a)**

A resposta correta é: I – b); II – b); III – a); IV – a)

3. Queremos representar os preços numa matriz. Há dois tamanhos (grande, pequeno) e três qualidades (económica, normal, *premium*). Logo, uma forma natural é usar uma matriz 2×3, em que linhas correspondem aos tamanhos (grande, pequeno) e colunas correspondem às qualidades (económica, normal, *premium*)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2{,}6 & 3{,}2 \\ 1{,}5 & 2 & 2{,}6 \end{bmatrix}$$

com a convenção:
1.ª linha: cadernos grandes
2.ª linha: cadernos pequenos
e
- **1.ª coluna:** económica
- **2.ª coluna:** normal
- **3.ª coluna:** *premium*

4. Para que $A = B$, é necessário e suficiente que os elementos correspondentes sejam iguais, obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 2 \\ 3 = c + 1 \\ 2 = 2 \\ b + 1 = c + 2 \\ a^2 + a + 2 = 2 \\ b - 1 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ c = 2 \\ b = c + 1 \\ a^2 + a = 0 \\ b - 1 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ c = 2 \\ b = c + 1 \\ a(a+1) = 0 \\ b - 1 = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = c + 1 \\ a(a+1) = 0 \\ b - 1 = d \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \\ b = c + 1 \\ a(a+1) = 0 \\ b - 1 = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = 3 \\ 2 = 0 \\ 2 = d \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \\ b = c + 1 \\ a(a+1) = 0 \\ b - 1 = d \end{cases}$$

condição impossível

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 2 \\ b = 3 \\ 0 = 0 \\ 2 = d \end{cases}$$

$a = -1$, $b = 3$, $c = 2$ e $d = 2$

5.

5.1 O produto de um escalar por uma matriz obtém-se multiplicando cada elemento da matriz por esse escalar. Assim:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

5.2 A soma de matrizes está definida se e só se as matrizes forem do mesmo tipo.
Como A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×2, a operação $A + B$ não está definida.

5.3 O produto AB está definido, uma vez que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B (ambos iguais a 3).
O resultado é uma matriz do tipo 2×2:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -4 & 13 \end{bmatrix}$$

5.4 O produto BA está definido, pois o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A (ambos iguais a 2). O resultado é uma matriz do tipo 3×3:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 14 & -3 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

6. A matriz A tem dimensão 3×2, enquanto as matrizes B e C têm dimensão 3×3.
O produto BA está definido, uma vez que o número de colunas de B coincide com o número de linhas de A. O resultado tem dimensão 3×2.
De modo análogo, o produto CA está definido e tem igualmente dimensão 3×2.
Consequentemente, a soma $BA + CA$ está definida, por se tratar da soma de duas matrizes com a mesma dimensão.
Pela propriedade distributiva da multiplicação de matrizes relativamente à adição, $BA + CA = (B + C)A$.

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B + C)A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 16 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

A operação $BA + CA$ está definida e o seu valor é:

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 16 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Opção (B)
Pretende-se a imagem do ponto $P(2, 1)$ por uma rotação de centro na origem e amplitude 135º.
A rotação de ângulo θ em torno da origem é dada por $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Para $\theta = 135º$, $\cos 135º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\ 135º = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, a matriz de rotação é:

$$R_{135º} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Aplicando a $P(2, 1)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de x':

$$x' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 1 =$$

$$= -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Cálculo de y':

$$y' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 1 =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a imagem de $P(2, 1)$ é $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. Opção (A)

Na opção (A)

$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$, com $k > 1$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é uma ampliação de fator k da figura $[ABCD]$.

Na opção (B)

$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$, com $0 < k < 1$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é uma redução de fator k da figura $[ABCD]$, o que não traduz corretamente a transformação.

Na opção (C)

$\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, com $k > 0$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é a imagem de $[ABCD]$ segundo um cisalhamento horizontal de fator k, o que não traduz corretamente a transformação, já que esta não preserva x.

Na opção (D)

$\begin{cases} x' = x \\ y' = kx + y \end{cases}$, $k > 0$, ou seja, $[A'B'C'D']$ é a imagem de $[ABCD]$ segundo um cisalhamento vertical de fator k, o que não traduz corretamente a transformação, já que esta não preserva y.

9. Opção (A)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

Esta transformação é um cisalhamento vertical de fator 2, logo, $x' = x$ e $y' = y + 2x$.

Seja $\ell > 0$ a medida do lado do quadrado $[ABCD]$.

Então, $B(\ell, 0)$ e $B'(\ell, 2\ell)$.

Como $2\ell > 0$, de entre as opções apresentadas, a única que respeita as coordenadas de B' é a (A).