1. Função exponencial

Páginas 36 a 39

1.

1.1 $8^{\frac{4}{3}} + 27^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} =$
$= 2^4 + 3^2 =$
$= 16 + 9 =$
$= 25$

1.2 $64^{-1,5} = (2^6)^{-\frac{3}{2}} =$
$= 2^{-9} =$
$= \frac{1}{2^9} =$
$= \frac{1}{512}$

1.3 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}\right)^8 = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}}\right)^8 =$
$= \frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^8}{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^8} =$
$= \frac{3^4}{3^2} =$
$= 3^2 =$
$= 9$

1.4 $\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} \times 1000^{-\frac{2}{3}} = (7^{-2})^{\frac{1}{2}} \times (10^3)^{-\frac{2}{3}} =$
$= 7^{-1} \times 10^{-2} =$
$= \frac{1}{7} \times \frac{1}{100} =$
$= \frac{1}{700}$

1.5 $\left(3^{\sqrt{6}} \times 2^{\sqrt{6}}\right) : 6^{\sqrt{6}-2} = 6^{\sqrt{6}} : 6^{\sqrt{6}-2} =$
$= 6^2 =$
$= 36$

1.6 $\left(3^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}} - 5^{\pi} \times 5^{2-\pi} = 3^{\sqrt{16}} - 5^2 =$
$= 3^4 - 5^2 =$
$= 81 - 25 =$
$= 56$

2.

2.1 $\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{5}{2} \times \frac{4}{5}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$

2.2 $\left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = b^{-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)} \times b^{\frac{1}{3}} =$
$= b^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} =$
$= b^{\frac{2}{3}}$

2.3 $\left(\frac{a^{-3}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-3} = \left(a^{-3-\frac{1}{3}}\right)^{-3} =$
$= \left(a^{-\frac{10}{3}}\right)^{-3} =$
$= a^{-\frac{10}{3} \times (-3)} =$
$= a^{10}$

2.4 $\sqrt[3]{8a^6} \times (b^{-4})^{\frac{1}{2}} = (2^3 a^6)^{\frac{1}{3}} \times b^{-4 \times \frac{1}{2}} =$
$= 2^{3 \times \frac{1}{3}} \times a^{6 \times \frac{1}{3}} \times b^{-2} =$
$= 2a^2 b^{-2}$

2.5 $\frac{\left(a^{\frac{1}{2}} b^{-3}\right)^{-2}}{(a^4 b^6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2} \times (-2)} \times b^{-3 \times (-2)}}{a^{4 \times \frac{1}{2}} \times b^{6 \times \frac{1}{2}}} =$
$= \frac{a^{-1} \times b^6}{a^2 \times b^3} =$
$= \frac{a^{-1}}{a^2} \times \frac{b^6}{b^3} =$
$= a^{-1-2} \times b^{6-3} =$
$= a^{-3} b^3$

2.6 $(a^3 \times b^{-2})^2 \times \left(\frac{b}{a}\right)^4 = a^{3 \times 2} \times b^{-2 \times 2} \times \frac{b^4}{a^4} =$
$= a^6 \times b^{-4} \times b^4 \times a^{-4} =$
$= a^{6-4} \times b^{-4+4} =$
$= a^2 \times b^0 =$
$= a^2 \times 1 =$
$= a^2$

3.

3.1 $25^{2x} = (5^2)^{2x} = 5^{4x}$

3.2 $64^{\frac{x}{3}} = (2^6)^{\frac{x}{3}} = 2^{6 \times \frac{x}{3}} = 2^{2x}$

3.3 $\left(\frac{1}{27}\right)^{-3x} = (3^{-3})^{-3x} = 3^{-3 \times (-3x)} = 3^{9x}$

3.4 $100^{x-\frac{1}{2}} = (10^2)^{x-\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \left(x-\frac{1}{2}\right)} = 10^{2x-1}$

3.5 $7^{2x} = \left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{2x} = 49^{\frac{1}{2} \times 2x} = 49^x$

3.6 $(8^x)^3 = 8^{3x} = \left(\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3\right)^{3x} = 4^{\frac{1}{2} \times 3 \times 3x} = 4^{\frac{9x}{2}}$

4.

4.1 $3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3}$
$\Leftrightarrow x = -3$
C. S. $= \{-3\}$

4.2 $2^{x-2} = 64 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^6$
$\Leftrightarrow x - 2 = 6$
$\Leftrightarrow x = 8$
C. S. $= \{8\}$

4.3 $3^{3-x} = 9^{x-3} \Leftrightarrow 3^{3-x} = 3^{2x-6}$
$\Leftrightarrow 3 - x = 2x - 6$
$\Leftrightarrow -3x = -9$
$\Leftrightarrow x = 3$
C. S. $= \{3\}$

4.4 $16^{x-2} = 2 \Leftrightarrow 2^{4x-8} = 2$
$\Leftrightarrow 4x - 8 = 1$
$\Leftrightarrow 4x = 9$
$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$
C. S. $= \left\{\frac{9}{4}\right\}$

4.5 $3 \times 81^{2x-1} = 9^{2x} \Leftrightarrow 3 \times 3^{8x-4} = 3^{4x}$
$\Leftrightarrow 3^{8x-3} = 3^{4x}$
$\Leftrightarrow 8x - 3 = 4x$
$\Leftrightarrow 4x = 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$
C. S. $= \left\{\frac{3}{4}\right\}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

4.6 $\frac{1}{8^{x-2}} = 2^{4-x} \Leftrightarrow 2^{-3x+6} = 2^{4-x}$
$\Leftrightarrow -3x + 6 = 4 - x$
$\Leftrightarrow -2x = -2$
$\Leftrightarrow x = 1$
C. S. $= \{1\}$

5.

5.1 $3^{x+2} = 18 \Leftrightarrow 3^x \times 3^2 = 18$
$\Leftrightarrow 3^x \times 9 = 18$
$\Leftrightarrow 3^x = 2$

5.2 $3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1} = \frac{2}{3}$

5.3 $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = 2^2 = 4$

5.4 $3^{3x} = (3^x)^3 = 2^3 = 8$

5.5 $\frac{3^x}{3^2} = \frac{2}{9}$

5.6 $3^{-x+1} = 3^{-x} \times 3 =$
$= (3^x)^{-1} \times 3 =$
$= 2^{-1} \times 3 =$
$= \frac{1}{2} \times 3 =$
$= \frac{3}{2}$

5.7 $3^{\frac{x}{2}} = (3^x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

5.8 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-2} = (3^{-1})^{-x-2} =$
$= 3^{x+2} =$
$= 3^x \times 3^2 =$
$= 2 \times 9 =$
$= 18$

6.

6.1 $2^{-a} = \frac{1}{2^a} = \frac{1}{3}$

6.2 $2^{b+1} = 2^b \times 2 = 5 \times 2 = 10$

6.3 $3^{2c} = (3^c)^2 = 7^2 = 49$

6.4 $2^{\frac{a}{2}} = \sqrt{2^a} = \sqrt{3}$

6.5 $9^{\frac{c}{2}} = (3^2)^{\frac{c}{2}} = 3^c = 7$

6.6 $2^{a+b} = 2^a \times 2^b = 3 \times 5 = 15$

6.7 $2^{2a-b} = (2^a)^2 \times 2^{-b} = 3^2 \times \frac{1}{2^b} = \frac{9}{5}$

6.8 $27^{-c} = (3^3)^{-c} = 3^{-3c} = (3^c)^{-3} = 7^{-3} = \frac{1}{343}$

6.9 $3^{-\frac{c}{2}} = (3^c)^{-\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

6.10 $2^{ac} = (2^a)^c = 3^c = 7$

7.

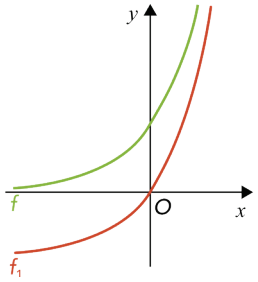
7.1 Como o gráfico de f passa no ponto de coordenadas $(0, 5)$, então $f(0) = 5 \Leftrightarrow b \times a^0 = 5 \Leftrightarrow b \times 1 = 5 \Leftrightarrow b = 5$. Assim, $f(x) = 5a^x$.
Para que a função f seja crescente tem de se ter $a > 1$.
Logo, $b = 5$ e $a \in]1, +\infty[$.

7.2 Como o gráfico de f passa nos pontos de coordenadas $(1, 6)$ e $(2, 18)$, então
$\begin{cases} f(1) = 6 \\ f(2) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ba = 6 \\ ba^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 6a = 18 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 6 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$
Logo, $a = 3$ e $b = 2$.

7.3 Uma vez que a imagem de -1 é 12 e o gráfico de f passa no ponto de coordenadas $(0, 4)$, então
$\begin{cases} f(-1) = 12 \\ f(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ba^{-1} = 12 \\ ba^0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} = 12 \\ b = 4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{12} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$

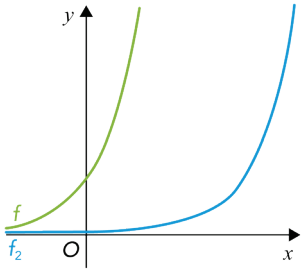
8.

8.1 $f_1(x) = f(x) - 1$



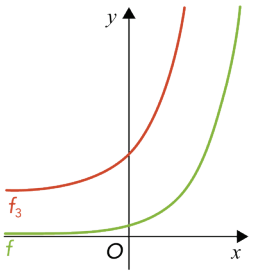
O gráfico de f_1 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(0, -1)$.
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$D'_{f_1} =]-1, +\infty[$
Interseção com eixo Ox: $(0, 0)$
Interseção com eixo Oy: $(0, 0)$
f_1 é estritamente crescente.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -1$

8.2 $f_2(x) = f(x - 3)$



O gráfico de f_2 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(3, 0)$.
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$D'_{f_2} =]0, +\infty[$
Interseção com eixo Ox: Não existe
Interseção com eixo Oy: $\left(0, \frac{1}{64}\right)$
f_2 é estritamente crescente.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = 0$

8.3 $f_3(x) = f(x + 1) + 5$



O gráfico de f_3 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(-1, 5)$.

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

$D'_{f_3} =]5, +\infty[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

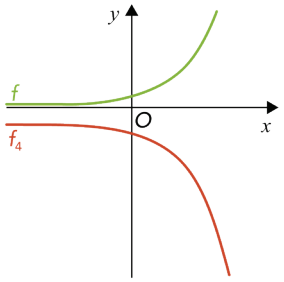
Interseção com eixo Oy: $(0, 9)$

f_3 é estritamente crescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 5$

8.4 $f_4(x) = -f(x) - 2$



O gráfico de f_4 obtém-se a partir do gráfico de f por uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -2)$.

$D_{f_4} = \mathbb{R}$

$D'_{f_4} =]-\infty, -2[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

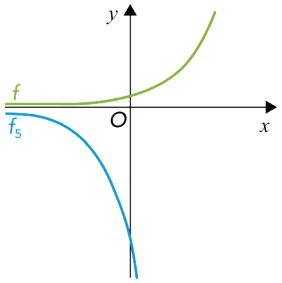
Interseção com eixo Oy: $(0, -3)$

f_4 é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = -2$

8.5 $f_5(x) = -f(x + 2)$



O gráfico de f_5 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(-2, 0)$ seguida de uma reflexão de eixo Ox.

$D_{f_5} = \mathbb{R}$

$D'_{f_5} =]-\infty, 0[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

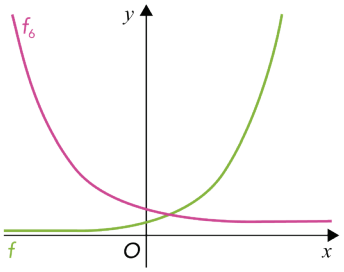
Interseção com eixo Oy: $(0, -16)$

f_5 é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_5(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_5(x) = 0$

8.6 $f_6(x) = f(-x) + 1$



O gráfico de f_6 obtém-se a partir do gráfico de f por uma reflexão de eixo Oy seguida de uma translação associada ao vetor $(0, 1)$.

$D_{f_6} = \mathbb{R}$

$D'_{f_6} =]1, +\infty[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

Interseção com eixo Oy: $(0, 2)$

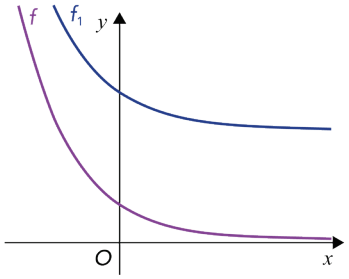
f_6 é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_6(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_6(x) = +\infty$

9.

9.1 $f_1(x) = f(x) + 3$



O gráfico de f_1 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(0, 3)$.

$D_{f_1} = \mathbb{R}$

$D'_{f_1} =]3, +\infty[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

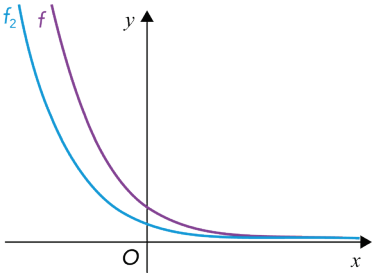
Interseção com eixo Oy: $(0, 4)$

f_1 é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$

9.2 $f_2(x) = f(x + 1)$



O gráfico de f_2 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(-1, 0)$.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$D_{f_2} = \mathbb{R}$

$D'_{f_2} =]0, +\infty[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

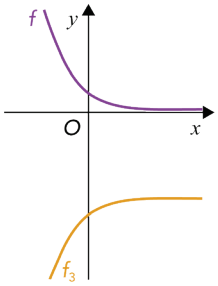
Interseção com eixo Oy: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

f_2 é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty$

9.3 $f_3(x) = -f(x) - 4$



O gráfico de f_3 obtém-se a partir do gráfico de f por uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -4)$.

$D_{f_3} = \mathbb{R}$

$D'_{f_3} =]-\infty, -4[$

Interseção com eixo Ox: Não existe

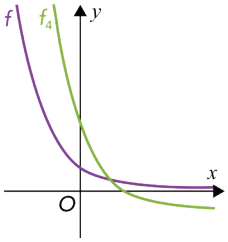
Interseção com eixo Oy: $(0, -5)$

f_3 é estritamente crescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = -4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$

9.4 $f_4(x) = f(x - 2) - 1$



O gráfico de f_4 obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(2, -1)$.

$D_{f_4} = \mathbb{R}$

$D'_{f_4} =]-1, +\infty[$

Interseção com eixo Ox: $(2, 0)$

Interseção com eixo Oy: $(0, 3)$

f_4 é estritamente decrescente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = +\infty$

10.

10.1 Verdadeiro

O gráfico da função f obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = 3^x$, de contradomínio $]0, +\infty[$, por uma translação associada ao vetor $(1, 1)$. Logo, o contradomínio de f é $]1, +\infty[$.

10.2 Verdadeiro

$f(0) = 3^{0-1} + 1 = 3^{-1} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Logo, o gráfico da função f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

10.3 Falso

O gráfico da função f obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = 3^x$, crescente, por uma translação associada ao vetor $(1, 1)$. As translações não alteram a monotonia. Logo, a função f é crescente.

10.4 Verdadeiro

$f(2) = 3^{2-1} + 1 = 3 + 1 = 4$

Logo, o ponto de coordenadas $(2, 4)$ pertence ao gráfico de f.

10.5 Falso

Como vimos antes, $D'_f =]1, +\infty[$. Logo, $f(x) > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10.6 Falso

Como $0 \notin D'_f$, então não existe qualquer ponto no gráfico de f onde $f(x) = 0$.

10.7 Falso

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3^{x-1} + 1) = +\infty$

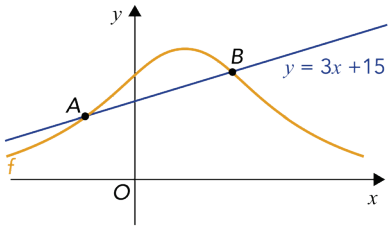
10.8 Falso

$f(2) = 4$, como vimos acima.

$f(3) = 3^{3-1} + 1 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

Como $10 \neq 12$, então a afirmação é falsa.

11.



$A(-0{,}95; 12{,}16)$

$B(1{,}91; 20{,}73)$

$d(A, B) = \sqrt{(-0{,}95 - 1{,}91)^2 + (12{,}16 - 20{,}73)^2} \approx$

$\approx 9{,}03$

12.

12.1 $V(0) = 25 \times 0{,}9^0 = 25$

O valor original da compra do equipamento é 25 000 euros.

12.2 $\text{tmv}_{[2,3]} = \frac{V(3) - V(2)}{3 - 2} =$

$= 25 \times 0{,}9^3 - 25 \times 0{,}9^2 =$

$= 18{,}225 - 20{,}25 =$

$= -2{,}025$

A taxa média de variação durante o terceiro ano é -2025 euros/ano e significa que, durante o terceiro ano após a compra, o valor do equipamento diminuiu, em média, 2025 euros por ano.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

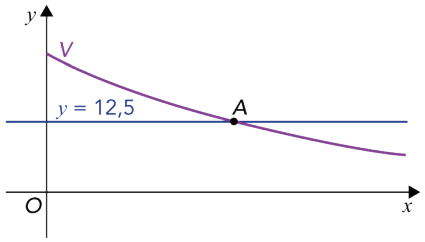
12.3 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (25 \times 0{,}9^t) = 25 \times 0 = 0$

A longo prazo, o valor do equipamento tende para zero euros devido à desvalorização.

12.4 $V(t) = \frac{1}{2}V(0)$

$\Leftrightarrow 25 \times 0{,}9^t = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow 25 \times 0{,}9^t = 12{,}5$



$A(6{,}6; 12{,}5)$

O valor do equipamento desce para metade do valor inicial ao fim de 6,6 anos, aproximadamente.

13.

13.1 $N(0) = \frac{2}{1 + 800 \times 0{,}5^0} = \frac{2}{1 + 800} \approx 0{,}002\,496\,88$

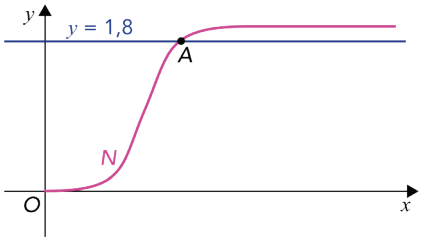
0,002 496 88 milhões ≈ 2497 pessoas

Quando a notícia foi publicada, 2497 pessoas tinham conhecimento da notícia.

13.2 $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2}{1 + 800 \times 0{,}5^t} = \frac{2}{1 + 800 \times 0} = 2$

Prevê-se que o número máximo de pessoas que tomam conhecimento da notícia é dois milhões.

13.3 $N(t) = 0{,}9 \times 2 \Leftrightarrow \frac{2}{1 + 800 \times 0{,}5^t} = 1{,}8$



$A(12{,}81; 1{,}8)$

O número de pessoas que tomaram conhecimento da notícia atinge 90% do seu potencial máximo ao fim de 13 dias.

14. $\begin{cases} f(1) = 8 \\ f(2) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2^m = 8 \\ k + 2^{2m} = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 - 2^m \\ 8 - 2^m + 2^{2m} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2m} - 2^m - 12 = 0 \end{cases}$

$\underset{y=2^m}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y^2 - y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^m = 4 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} 2^m = -3 \end{cases}}_{\text{Sistema impossível}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 - 2^2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ m = 2 \end{cases}$

O valor de k é 4 e o valor de m é 2.

15.

15.1 Capital acumulado ao fim de um ano:

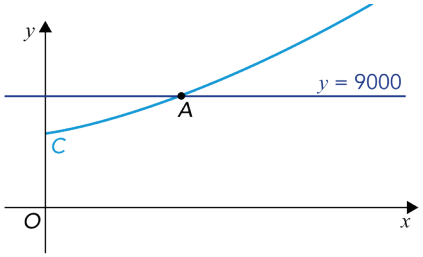
$C(1) = 6000 \times (1 + 0{,}02) = 6120$ euros

Capital acumulado ao fim de três anos:

$C(3) = 6000 \times (1 + 0{,}02)^3 \approx 6367{,}25$ euros

15.2 $C(n) = 6000 \times 1{,}02^n$

15.3 $C(n) = 9000$



$A(20{,}48; 9000)$

0,48 anos = 0,48 × 12 ≈ 6 meses

O tempo que demora a acumular 9000 euros é 20 anos e 6 meses, aproximadamente.

15.4 $\frac{C(n+10)}{C(n)} = \frac{6000 \times 1{,}02^{n+10}}{6000 \times 1{,}02^n} =$

$= \frac{1{,}02^{n+10}}{1{,}02^n} =$

$= 1{,}02^{n+10-n} =$

$= 1{,}02^{10} \approx$

$\approx 1{,}22$

O valor 1,22 significa que o capital acumulado aumenta 22% por cada período de 10 anos.

16.

16.1 $U_\gamma(1) = 150 \times (1 - 0{,}8^1) = 30$

$U_\delta(1) = \frac{200}{1 + 199 \times 0{,}7^1} \approx 1{,}426$

Ao fim de um mês, a consola Gama tem 30 000 utilizadores e a consola Delta tem 1426 utilizadores.

16.2 $\lim\limits_{t\to+\infty} U_\gamma(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(150 \times (1 - 0{,}8^t)\right) =$

$= 150 \times (1 - 0) = 150$

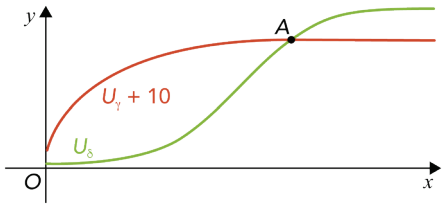
O valor obtido representa o potencial máximo de utilizadores da consola Gama a longo prazo, que é de 150 000 utilizadores.

16.3 $\lim\limits_{t\to+\infty} U_\gamma(t) = 150$, pela alínea anterior.

$\lim\limits_{t\to+\infty} U_\delta(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{200}{1 + 199 \times 0{,}7^t} = \frac{200}{1 + 199 \times 0} = 200$

A consola Delta tem maior número de utilizadores a longo prazo, que é 200 000 utilizadores.

16.4 $U_\delta(t) = U_\gamma(t) + 10$



$A(18{,}52; 157{,}59)$

$18{,}52 \approx 19$ meses

Ao fim de 19 meses, o número de utilizadores da consola Delta é superior em 10 mil ao número de utilizadores da consola Gama.

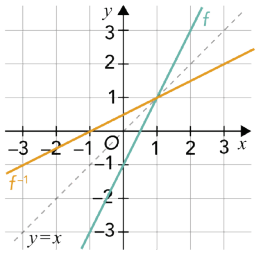
EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

2. Função inversa

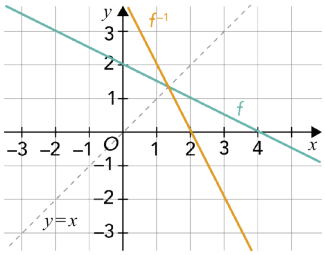
Páginas 40 e 41

17.

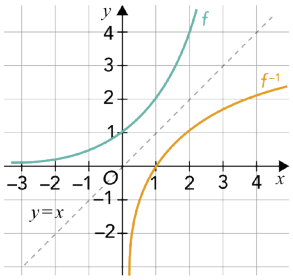
17.1



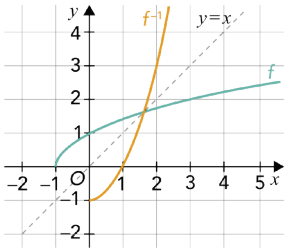
17.2



17.3



17.4

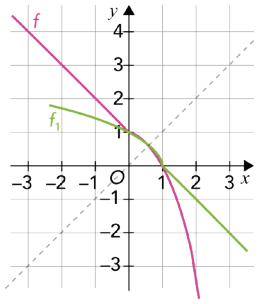


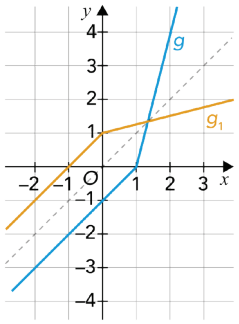
18.

18.1

a) $f^{-1}(0) = 1$
b) $f^{-1}(2) = -1$
c) $g^{-1}(0) = 1$
d) $g^{-1}(4) = 2$
e) $(f^{-1} \circ g)(1) = f^{-1}\big(g(1)\big) = f^{-1}(0) = 1$
f) $(f \circ g^{-1})(-1) = f\big(g^{-1}(-1)\big) = f(0) = 1$
g) $(f \circ f^{-1})(3) = 3$
h) $(g^{-1} \circ g)(-2) = -2$
i) $(f^{-1} \circ g^{-1})(4) = f^{-1}\big(g^{-1}(4)\big) = f^{-1}(2) = -1$

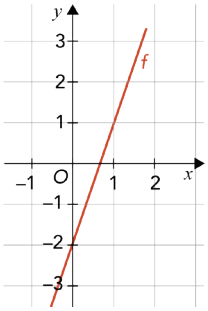
18.2



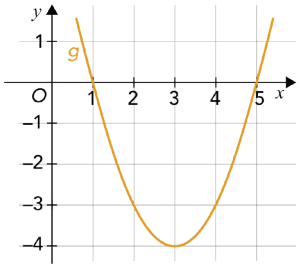


19.

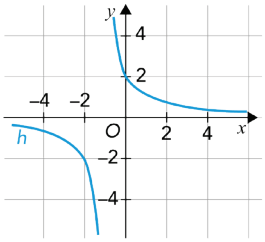
19.1 f é injetiva, pois quaisquer dois objetos distintos têm imagens distintas.



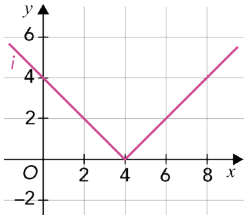
19.2 g não é injetiva, pois há pelo menos dois objetos com a mesma imagem, por exemplo, os objetos 1 e 5 têm ambos imagem 0.



19.3 h é injetiva, pois quaisquer dois objetos distintos têm imagens distintas.

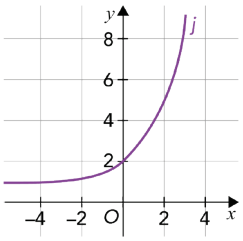


19.4 i não é injetiva, pois há pelo menos dois objetos com a mesma imagem, por exemplo, os objetos 0 e 8 têm ambos imagem 4.

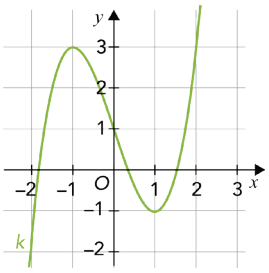


EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

19.5 j é injetiva, pois quaisquer dois objetos distintos têm imagens distintas.

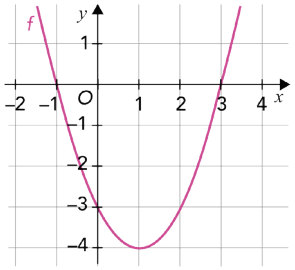


19.6 k não é injetiva, pois há pelo menos dois objetos com a mesma imagem, por exemplo, os objetos -1 e 2 têm ambos imagem 3.

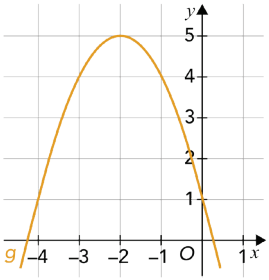


20.

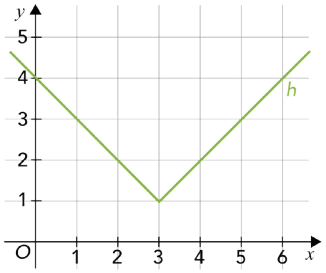
20.1 O eixo de simetria do gráfico da função é a reta de equação $x = 1$, logo $k = 1$.



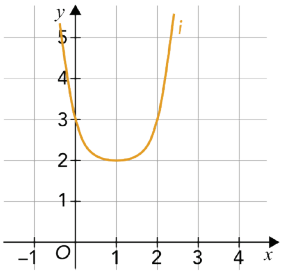
20.2 O eixo de simetria do gráfico da função é a reta de equação $x = -2$, logo $k = -2$.



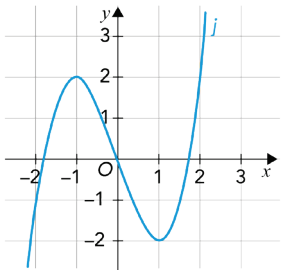
20.3 O eixo de simetria do gráfico da função é a reta de equação $x = 3$, logo $k = 3$.



20.4 O eixo de simetria do gráfico da função é a reta de equação $x = 1$, logo $k = 1$.



20.5 Por observação do gráfico da função conclui-se que $k = 1$.



20.6 Por observação do gráfico da função conclui-se que $k = 3$.



21.

21.1 $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$

$3x + 7 = y \Leftrightarrow 3x = y - 7$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-7}{3}$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$.

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

21.2 $D_g = \mathbb{R} = D'_{g^{-1}}$

$2 - 5x = y \Leftrightarrow -5x = y - 2$

$\Leftrightarrow 5x = 2 - y$

$\Leftrightarrow x = \frac{2-y}{5}$

Logo, $g^{-1}(x) = \frac{2-x}{5}$.

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

21.3 $D_h = \mathbb{R} = D'_{h^{-1}}$

$2x^3 + 1 = y \Leftrightarrow 2x^3 = y - 1$

$\Leftrightarrow x^3 = \frac{y-1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$

Logo, $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$.

$D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

21.4 $D_i = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} = D'_{i^{-1}}$

$\frac{2}{2x-1} = y \Leftrightarrow 2xy - y = 2$

$\Leftrightarrow 2xy = y + 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{y+2}{2y}$

Logo, $i^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x}$.

$D_{i^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

21.5 $D_j = \{x \in \mathbb{R}: x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-2\} = D'_{j^{-1}}$

$\frac{3x}{x+2} = y \Leftrightarrow 3x = xy + 2y$

$\Leftrightarrow 3x - xy = 2y$

$\Leftrightarrow x(3 - y) = 2y$

$\Leftrightarrow x = \frac{2y}{3-y}$

Logo, $j^{-1}(x) = \frac{2x}{3-x}$.

$D_{j^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

21.6 $D_k = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3}\right\} = D'_{k^{-1}}$

$\frac{2x-4}{3x+5} = y \Leftrightarrow 2x - 4 = 3xy + 5y$

$\Leftrightarrow 2x - 3xy = 5y + 4$

$\Leftrightarrow x(2 - 3y) = 5y + 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{5y+4}{2-3y}$

Logo, $k^{-1}(x) = \frac{5x+4}{2-3x}$.

$D_{k^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 2 - 3x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

22. $f(3) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 3$

$g^{-1}(5) = -1 \Leftrightarrow g(-1) = 5$

22.1 $f^{-1}(x + 1) + 2 = g(-1)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x + 1) = 5 - 2$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x + 1) = 3$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$

C. S. $= \{1\}$

22.2 $g(2x + 3) - f^{-1}(2) = 2$

$\Leftrightarrow g(2x + 3) = 2 + 3$

$\Leftrightarrow g(2x + 3) = 5$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -4$

$\Leftrightarrow x = -2$

C. S. $= \{-2\}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

3. Função logarítmica

Páginas 42 a 45

23.

23.1 $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$

23.2 $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5(5^{-2}) = -2$

23.3 $\log_3 \sqrt{27} = \log_3\left(3^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}$

23.4 $\log_4 64 = \log_4(4^3) = 3$

23.5 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

23.6 $\log_{27} 3 = \log_{27}\left(27^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}$

23.7 $\log_2 \frac{1}{\sqrt{32}} = \log_2\left(2^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{5}{2}$

23.8 $2^{\log_2 5} = 5$

23.9 $3^{\log_3 9} = 9$

24.

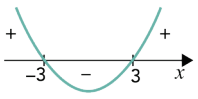
24.1 Para que a expressão tenha significado,
$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
Logo, $x \in]2, +\infty[$.

24.2 Para que a expressão tenha significado,
$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.
Logo, $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

24.3 Para que a expressão tenha significado,
$x^2 - 9 > 0$.

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 9$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$



Assim, $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3$
Logo, $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

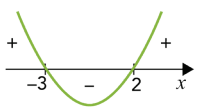
24.4 Para que a expressão tenha significado,
$4 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$.
Logo, $x \in]-\infty, 4[$.

24.5 Para que a expressão tenha significado,
$x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

24.6 Para que a expressão tenha significado,
$x^2 + x - 6 > 0$.

Cálculo auxiliar:

$x^2 + x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$



Assim, $x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 2$.
Logo, $x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$.

25.

25.1 $2^{1+\log_2(x)} = 2^1 \times 2^{\log_2 x} = 2x$

25.2 $5^{3\log_5(x)} = 5^{\log_5(x^3)} = x^3$

25.3 $10^{\log_{10}(x)-2} = \frac{10^{\log_{10}(x)}}{10^2} = \frac{x}{100}$

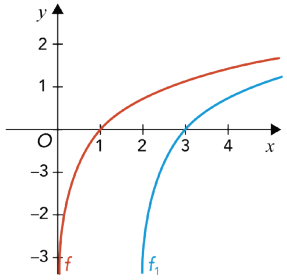
25.4 $\log_4(16x) = \log_4 16 + \log_4 x = 2 + \log_4 x$

25.5 $7^{2\log_7(x)-1} = \frac{7^{2\log_7(x)}}{7} = \frac{7^{\log_7(x^2)}}{7} = \frac{x^2}{7}$

25.6 $\log_2(8x^3) = \log_2 8 + \log_2 x^3 = 3 + 3\log_2 x$

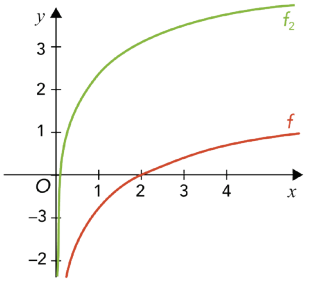
26.

26.1 O gráfico de f_1 obtém-se do gráfico de f por uma translação de vetor $(2, 0)$.



Domínio: $]2, +\infty[$
Contradomínio: $\mathbb{R}$
Interseção com eixo Ox: $(3, 0)$
Interseção com eixo Oy: Não tem
Monotonia: f_1 é crescente
Assíntota vertical: $x = 2$

26.2 O gráfico de f_2 obtém-se do gráfico de f por uma translação de vetor $(0, 3)$.



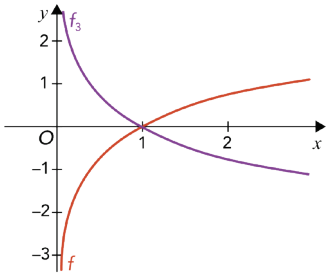
Domínio: $]0, +\infty[$
Contradomínio: $\mathbb{R}$
Interseção com eixo Ox: $(e^{-3}, 0)$

Cálculo auxiliar:

$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = -3$
$\Leftrightarrow x = e^{-3}$

Interseção com eixo Oy: Não tem
Monotonia: f_2 é crescente
Assíntota vertical: $x = 0$

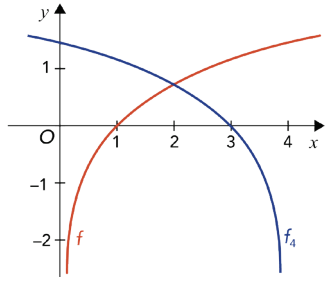
26.3 O gráfico de f_3 obtém-se do gráfico de f por uma reflexão de eixo Ox.



EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

Domínio: $]0, +\infty[$
Contradomínio: $\mathbb{R}$
Interseção com eixo Ox: $(1, 0)$
Interseção com eixo Oy: Não tem
Monotonia: f_3 é decrescente
Assíntota vertical: $x = 0$

26.4 O gráfico de f_4 obtém-se do gráfico de f por uma reflexão de eixo Oy seguida de uma translação de vetor $(4, 0)$.



Domínio: $]-\infty, 4[$
Contradomínio: $\mathbb{R}$
Interseção com eixo Ox: $(3, 0)$
Interseção com eixo Oy: $(0, \ln 4)$
Monotonia: f_4 é decrescente
Assíntota vertical: $x = 4$

27.

27.1 Como os pontos de coordenadas $(11, 3)$ e $(4, 0)$ pertencem ao gráfico de f, tem-se:

$$\begin{cases} f(11) = 3 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(11 - b) = 3 \\ \log_a(4 - b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - b = a^3 \\ 4 - b = a^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 4 - b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 3 = a^3 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 8 \\ \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Assim, $a = 2$ e $b = 3$.

27.2 O ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence ao gráfico de f, logo $f(0) = 2$.
O ponto de coordenadas $(1, -2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}, logo $f^{-1}(1) = -2 \Leftrightarrow f(-2) = 1$.
Assim,

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(0 - b) = 2 \\ \log_a(-2 - b) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = a^2 \\ -2 - b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ -2 + a^2 = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ a^2 - a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ a = \frac{1 \pm 3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 2^2 \\ a = 2 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} \\ a = -1 \end{cases}}_{\text{Sistema impossível, pois } a > 1.} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Assim, $a = 2$ e $b = -4$.

28.

28.1
$$\begin{aligned} \log_a(ab^2) &= \log_a a + \log_a b^2 = \\ &= 1 + 2\log_a b = \\ &= 1 + 2 \times (-3) = \\ &= 1 - 6 = \\ &= -5 \end{aligned}$$

28.2
$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{b^3}{\sqrt{a}}\right) &= \log_a b^3 - \log_a \sqrt{a} = \\ &= 3\log_a b - \log_a a^{\frac{1}{2}} = \\ &= 3 \times (-3) - \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{19}{2} \end{aligned}$$

28.3
$$\begin{aligned} \log_b c + \log_b a &= \frac{\log_c c}{\log_c b} + \frac{\log_a a}{\log_a b} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{-3} = \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

28.4
$$\begin{aligned} \log_b(a^2c^3) &= \log_b a^2 + \log_b c^3 \\ &= 2\log_b a + 3\log_b c \\ &= 2 \times \frac{1}{\log_a b} + 3 \times \frac{1}{\log_c b} = \\ &= 2 \times \frac{1}{-3} + 3 \times \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

28.5
$$\begin{aligned} \frac{\log_a c}{\log_b a} &= \frac{\frac{\log_b c}{\log_b a}}{\frac{1}{\log_a b}} = \\ &= \frac{\log_b c \times \log_a b}{\log_b a} \\ &= \frac{\frac{1}{\log_c b} \times \log_a b}{\frac{1}{\log_a b}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times (-3)}{\frac{1}{-3}} = \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

28.6
$$\begin{aligned} \log_b\left(\frac{a^2b^4}{c}\right) &= \log_b a^2 + \log_b b^4 - \log_b c = \\ &= 2\log_b a + 4 - \frac{1}{\log_c b} = \\ &= 2 \times \frac{1}{\log_a b} + 4 - \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{2}{3} + 4 - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

29.

29.1
$$\begin{aligned} \log_a b \times \log_b a &= \log_a b \times \frac{\log_a a}{\log_a b} = \\ &= \log_a b \times \frac{1}{\log_a b} = \\ &= \frac{\log_a b}{\log_a b} = \\ &= 1, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

29.2
$$\begin{aligned} &\log_a b - \log_{\sqrt{a}} b + \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right) = \\ &= \log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} + \frac{\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = \\ &= \log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a a^{\frac{1}{2}}} + \frac{\log_a 1 - \log_a b}{\log_a a^{-1}} = \\ &= \log_a b - \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} + \frac{-\log_a b}{-1} = \\ &= \log_a b - 2\log_a b + \log_a b = \\ &= 0, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

29.3
$$\begin{aligned} &\log_a b + \log_{a^2} b + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{a}} b = \\ &= \log_a b + \frac{\log_a b}{\log_a a^2} + \frac{1}{2} \times \frac{\log_a b}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = \\ &= \log_a b + \frac{\log_a b}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\log_a b}{\log_a a^{-1}} = \\ &= \frac{3}{2}\log_a b + \frac{1}{2} \times \frac{\log_a b}{-1} = \end{aligned}$$

$= \frac{3}{2}\log_a b - \frac{1}{2}\log_a b =$
$= \log_a b$, como queríamos demonstrar.

29.4 $\log_{a^2}\left(\frac{b^3}{a}\right) + \log_a\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{b}{a}\right) =$
$= \log_{a^2} b^3 - \log_{a^2} a + \log_a 1 - \log_a b +$
$+ \frac{1}{2}(\log_a b - \log_a a) =$
$= \frac{\log_a b^3}{\log_a a^2} - \frac{\log_a a}{\log_a a^2} + 0 - \log_a b + \frac{1}{2}(\log_a b - 1) =$
$= \frac{3\log_a b}{2} - \frac{1}{2} - \log_a b + \frac{1}{2}\log_a b - \frac{1}{2} =$
$= -1 + \log_a b$, como queríamos demonstrar.

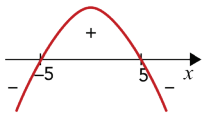
30.

30.1 $D = \{x \in \mathbb{R}: x^3 > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$
Então, para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:
$\log(x^3) + \log(\sqrt{x}) =$
$= 3\log(x) + \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) =$
$= 3\log(x) + \frac{1}{2}\log(x) =$
$= \frac{7}{2}\log(x)$, como queríamos demonstrar.

30.2 $D = \{x \in \mathbb{R}: 5 + x > 0 \wedge 5 - x > 0 \wedge$
$\wedge\ 25 - x^2 > 0\}$

Cálculo auxiliar:

$25 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 25$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$



Assim, $D = \{x \in \mathbb{R}: x > -5 \wedge x < 5\} =$
$=]-5, 5[$
Então, para $x \in]-5, 5[$, tem-se:
$\ln(5 + x) + \ln(5 - x) =$
$= \ln\big((5 + x)(5 - x)\big)$
$= \ln(25 - x^2)$, como queríamos demonstrar.

30.3 $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \frac{x^2}{5} > 0\right\} = \mathbb{R}^+$
Então, para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:
$2\log(x) - \log 5 =$
$= \log(x^2) - \log 5 =$
$= \log\left(\frac{x^2}{5}\right)$, como queríamos demonstrar.

30.4 $D = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 > 0 \wedge x + 3 > 0 \wedge \frac{2x-1}{x+3} > 0\right\}$

Cálculo auxiliar:

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	−	−	−	0	+
$x+3$	−	0	+	+	+
$\frac{2x-1}{x+3}$	+	0	−	0	+

Assim, $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x > \frac{1}{2} \wedge x > -3 \wedge\right.$
$\left.\wedge\left(x < -3 \vee x > \frac{1}{2}\right)\right\} =$
$= \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$
Então, para $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, tem-se:
$\log(2x - 1) - \log(x + 3) = \log\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)$, como queríamos demonstrar.

31.

31.1 $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^{3x}) + \ln(e^{2x}) =$
$= 3x + 2x =$
$= 5x,$ como queríamos demonstrar.

31.2 $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(xe^x) =$
$= \ln x + \ln e^x =$
$= \ln x + x$, como queríamos demonstrar.

31.3 $\forall x \in \mathbb{R}, \log(e^{2x}) - \log(e^{-x}) =$
$= \log\left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}}\right) =$
$= \log(e^{3x}) =$
$= 3x\log e$, como queríamos demonstrar.

31.4 $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(e^{-x}) =$
$= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}\right) =$
$= \ln\left(\frac{e^x}{e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) =$
$= \ln(e^{2x} + 1) =$
$= \ln(1 + e^{2x})$, como queríamos demonstrar.

31.5 $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^{x+1}) - \ln(e^{x-1}) =$
$= x + 1 - (x - 1) =$
$= x + 1 - x + 1 =$
$= 2$, como queríamos demonstrar.

31.6 $\forall x \in \mathbb{R}^+, 2\ln\left(\sqrt{xe^x}\right) - \ln x =$
$= 2\ln(xe^x)^{\frac{1}{2}} - \ln x =$
$= 2 \times \frac{1}{2}\ln(xe^x) - \ln x =$
$= \ln(xe^x) - \ln x =$
$= \ln x + \ln(e^x) - \ln x =$
$= \ln(e^x) =$
$= x$, como queríamos demonstrar.

32.

32.1 $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 0\} =]1, +\infty[$
Para qualquer valor de $x \in D$,
$\log_2(x - 1) = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 2^5$
$\Leftrightarrow x = 33$
C. S. $= \{33\}$

32.2 $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$
Para qualquer valor de $x \in D$,
$\log_2 x + 2\log_2 3 = \log_2 6$
$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 9 = \log_2 6$
$\Leftrightarrow \log_2(9x) = \log_2 6$
$\Leftrightarrow 9x = 6$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
C. S. $= \left\{\frac{2}{3}\right\}$

32.3 $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 > 0 \ \wedge\ x + 1 > 0 \ \wedge$
$\wedge\ x - 2 > 0\} =$
$=]3, +\infty[$
Para qualquer valor de $x \in D$,
$\log(x - 3) - \log(x + 1) = -\log(x - 2)$
$\Leftrightarrow \log(x - 3) + \log(x - 2) = \log(x + 1)$
$\Leftrightarrow \log(x^2 - 5x + 6) = \log(x + 1)$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = x + 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 5}_{\in D} \vee \underbrace{x = 1}_{\notin D}$

C. S. $= \{5\}$

32.4 $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$(\ln x)^2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x\,(\ln x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e$

C. S. $= \{1, e\}$

32.5 $D = \{x \in \mathbb{R}: 2 - x > 0 \ \wedge x > 0\} =]0, 2[$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$\log_2(2 - x) - \log_{\frac{1}{2}} x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(2 - x) - \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(2 - x) + \log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(2x - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -(x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

C. S. $= \{1\}$

32.6 $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$(\log_2(x^2) - 2)\left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2) - 2 = 0 \vee 2 - \log_{\frac{1}{2}} x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2) = 2 \vee \log_{\frac{1}{2}} x = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee \underbrace{x = -2}_{\notin D} \vee x = \frac{1}{4}$

C. S. $= \left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$

32.7 $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$\ln(x^2) = (\ln x)^2 \Leftrightarrow 2\ln x - (\ln x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x\,(2 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee 2 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^2$

C. S. $= \{1, e^2\}$

32.8 $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge x^2 > 0\right\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$2\log_3 x - \log_3(\sqrt{x}) - \log_9(x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3 x - \log_3\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{\log_3(x^2)}{\log_3 9} = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{2\log_3 x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 x - \log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

C. S. $= \{1\}$

32.9 $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y = \log x} y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = 1$

$\Leftrightarrow \log x = 2 \vee \log x = 1$

$\Leftrightarrow x = 10^2 \vee x = 10^1$

$\Leftrightarrow x = 100 \vee x = 10$

C. S. $= \{10, 100\}$

32.10 $D = \Big\{x \in \mathbb{R}: \underbrace{e^x + 2 > 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}} \wedge \underbrace{e^x + 3 > 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}\Big\} = \mathbb{R}$

Para qualquer valor de $x \in D$,

$\ln(e^x + 2) + \ln(e^x + 3) = \ln 12$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x} + 2e^x + 3e^x + 6) = \ln 12$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 5e^x + 6 = 12$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y = e^x} y^2 + 5y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-5 \pm 7}{2}$

$\Leftrightarrow y = -6 \vee y = 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -6}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

C. S. $= \{0\}$

33.

33.1 $2^{x-1} = 5 \Leftrightarrow x - 1 = \log_2 5$

$\Leftrightarrow x = 1 + \log_2 5$

C. S. $= \{1 + \log_2 5\}$

33.2 $e^{x+2} = 3 \Leftrightarrow x + 2 = \ln 3$

$\Leftrightarrow x = -2 + \ln 3$

C. S. $= \{-2 + \ln 3\}$

33.3 $3 \times 2^{x+1} + 2^x = 14 \Leftrightarrow 3 \times 2^x \times 2 + 2^x = 14$

$\Leftrightarrow 6 \times 2^x + 2^x = 14$

$\Leftrightarrow 7 \times 2^x = 14$

$\Leftrightarrow 2^x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$

C. S. $= \{1\}$

33.4 $e^{2x} + 3 = 4e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y = e^x} y^2 - 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow y = 3 \vee y = 1$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \vee e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = \ln 3 \vee x = 0$

C. S. $= \{0, \ln 3\}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

33.5 $2^{2x} - 5 \times 2^{x+1} + 21 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \times 2^x \times 2 + 21 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 10 \times 2^x + 21 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y=2^x} y^2 - 10y + 21 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow y = 7 \vee y = 3$

$\Leftrightarrow 2^x = 7 \vee 2^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \log_2 7 \vee x = \log_2 3$

C. S. $= \{\log_2 3, \log_2 7\}$

33.6 $3^x + 4 \times 3^{1-x} - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3^x + 4 \times \frac{3}{3^x} - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x} + 12 - 8 \times 3^x = 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \times 3^x + 12 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y=3^x} y^2 - 8y + 12 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow y = 6 \vee y = 2$

$\Leftrightarrow 3^x = 6 \vee 3^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \log_3 6 \vee x = \log_3 2$

C. S. $= \{\log_3 2, \log_3 6\}$

33.7 $4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \times 2^x - 4 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y=2^x} y^2 - 3y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$

$\Leftrightarrow 2^x = 4 \vee \underbrace{2^x = -1}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow x = 2$

C. S. $= \{2\}$

33.8 $7 \times 3^x - 3^{x+2} = -18$

$\Leftrightarrow 7 \times 3^x - 3^x \times 3^2 = -18$

$\Leftrightarrow 7 \times 3^x - 9 \times 3^x = -18$

$\Leftrightarrow -2 \times 3^x = -18$

$\Leftrightarrow 3^x = 9$

$\Leftrightarrow x = 2$

C. S. $= \{2\}$

33.9 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2e^x = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

C. S. $= \{0\}$

33.10 $4^x + 4^{1-x} = 5 \Leftrightarrow 4^x + \frac{4}{4^x} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4^{2x} + 4 - 5 \times 4^x = 0$

$\Leftrightarrow 4^{2x} - 5 \times 4^x + 4 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y=4^x} y^2 - 5y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 1$

$\Leftrightarrow 4^x = 4 \vee 4^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$

C. S. $= \{0, 1\}$

34.

34.1 $f(x) = 2 + 5e^{-x}$

$D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$

$f(x) = y \Leftrightarrow 2 + 5e^{-x} = y$

$\Leftrightarrow 5e^{-x} = y - 2$

$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y-2}{5}$

$\Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{y-2}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y-2}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{y-2}\right)$

Logo, $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{5}{x-2}\right)$.

$D_{f^{-1}} = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{5}{x-2} > 0\right\} =]2, +\infty[$

Assim, $f^{-1}:]2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln\left(\frac{5}{x-2}\right)$

34.2 $g(x) = 4 - \ln(3x - 6)$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 6 > 0\} \Leftrightarrow]2, +\infty[= D'_{g^{-1}}$

$g(x) = y \Leftrightarrow 4 - \ln(3x - 6) = y$

$\Leftrightarrow -\ln(3x - 6) = -4 + y$

$\Leftrightarrow \ln(3x - 6) = 4 - y$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = e^{4-y}$

$\Leftrightarrow 3x = 6 + e^{4-y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 + e^{4-y}}{3}$

Logo, $g^{-1}(x) = \frac{6 + e^{4-x}}{3}$.

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

Assim, $g^{-1}: \mathbb{R} \to]2, +\infty[$

$x \mapsto \frac{6 + e^{4-x}}{3}$

34.3 $h(x) = 7 + 2^{x+1}$

$D_h = \mathbb{R} = D'_{h^{-1}}$

$h(x) = y \Leftrightarrow 7 + 2^{x+1} = y$

$\Leftrightarrow 2^{x+1} = y - 7$

$\Leftrightarrow x + 1 = \log_2(y - 7)$

$\Leftrightarrow x = -1 + \log_2(y - 7)$

Logo, $h^{-1}(x) = -1 + \log_2(x - 7)$.

$D_{h^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x - 7 > 0\} =]7, +\infty[$

Assim, $h^{-1}:]7, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto -1 + \log_2(x - 7)$

34.4 $i(x) = \log_3(4 - x) + 2$

$D_i = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x > 0\} =]-\infty, 4[= D'_{i^{-1}}$

$i(x) = y \Leftrightarrow \log_3(4 - x) + 2 = y$

$\Leftrightarrow \log_3(4 - x) = y - 2$

$\Leftrightarrow 4 - x = 3^{y-2}$

$\Leftrightarrow -x = -4 + 3^{y-2}$

$\Leftrightarrow x = 4 - 3^{y-2}$

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

Logo, $i^{-1}(x) = 4 - 3^{x-2}$.
$D_{i^{-1}} = \mathbb{R}$
Assim, $i^{-1}: \mathbb{R} \to]-\infty, 4[$
$x \mapsto 4 - 3^{x-2}$

35.

35.1 O gráfico de f pode ser obtido a partir do gráfico de $y = e^x$ através de uma translação associada ao vetor $(1, 2)$.

35.2 $D_f = \mathbb{R}$
$D'_f =]2, +\infty[$

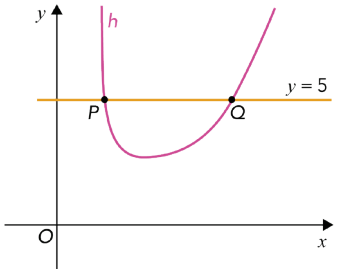
35.3 $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 2 > 0\} = \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[= D'_{g^{-1}}$
$g(x) = y \Leftrightarrow \ln(3x - 2) = y$
$\Leftrightarrow 3x - 2 = e^y$
$\Leftrightarrow 3x = 2 + e^y$
$\Leftrightarrow x = \frac{2 + e^y}{3}$
Logo, $g^{-1}(x) = \frac{2 + e^x}{3}$.
$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$
Assim, $g^{-1}: \mathbb{R} \to \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$
$x \mapsto \frac{2 + e^x}{3}$

35.4

a) $f(x) = e^{2x-2} \Leftrightarrow e^{x-1} + 2 = e^{2x-2}$
$\Leftrightarrow e^{2x-2} - e^{x-1} - 2 = 0$
$\underset{y = e^{x-1}}{\Leftrightarrow} y^2 - y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$
$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$
$\Leftrightarrow e^{x-1} = 2 \vee \underbrace{e^{x-1} = -1}_{\text{Equação impossível}}$
$\Leftrightarrow x - 1 = \ln 2$
$\Leftrightarrow x = 1 + \ln 2$
C. S. $= \{1 + \ln 2\}$

b) $3g^{-1}(x) - f(x) = e - 1$
$\Leftrightarrow 3 \times \frac{2+e^x}{3} - e^{x-1} - 2 = e - 1$
$\Leftrightarrow 2 + e^x - e^{x-1} - 2 = e - 1$
$\Leftrightarrow e^x - e^{x-1} = e - 1$
$\Leftrightarrow e^x(1 - e^{-1}) = e - 1$
$\Leftrightarrow e^x\left(1 - \frac{1}{e}\right) = e - 1$
$\Leftrightarrow e^x \times \frac{e-1}{e} = e - 1$
$\Leftrightarrow e^x = e$
$\Leftrightarrow x = 1$
C. S. $= \{1\}$

35.5 $A(x, f(x))$, ou seja, $A(x, e^{x-1} + 2)$
$B(x, g(x))$, ou seja, $B(x, \ln(3x - 2))$
Pretende-se resolver a equação $|f(x) - g(x)| = 5$
$\Leftrightarrow |e^{x-1} + 2 - \ln(3x - 2)| = 5$.
Seja $h(x) = |e^{x-1} + 2 - \ln(3x - 2)|$.



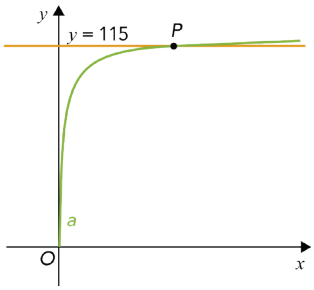
$P(0{,}70; 5)$ e $Q(2{,}55; 5)$
Então, $x \approx 0{,}70$ ou $x \approx 2{,}55$.

36.

36.1 $A(t) =$
$= 4\ln(t + 1)^{10} - \ln((t + 20)^{40} \times e^{-5t}) - 5t + 120 =$
$= 40\ln(t + 1) - (\ln(t + 20)^{40} + \ln(e^{-5t})) - 5t + 120 =$
$= 40\ln(t + 1) - 40\ln(t + 20) - (-5t) - 5t + 120 =$
$= 40(\ln(t + 1) - \ln(t + 20)) + 5t - 5t + 120 =$
$= 40\ln\left(\frac{t+1}{t+20}\right) + 120$, como queríamos demonstrar.

36.2 $A(t) = 120 - 40\ln 2$
$\Leftrightarrow 40\ln\left(\frac{t+1}{t+20}\right) + 120 = 120 - 40\ln 2$
$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{t+1}{t+20}\right) = -\ln 2$
$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{t+1}{t+20}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t+20} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2(t + 1) = t + 20$
$\Leftrightarrow 2t + 2 = t + 20$
$\Leftrightarrow t = 18$
O sinal é enviado aos 18 segundos.

36.3 Pretende-se resolver a equação $A(t) = 115$.



$P(141{,}7; 115)$
Assim, $t \approx 141{,}7$ segundos, ou seja, a recolha de imagens começa aos 2 minutos e 22 segundos.

37.

37.1 $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 > 0 \wedge x + 4 > 0\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R}: x > \frac{1}{2} \wedge x > -4\right\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$
$\forall x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$,
$\frac{1}{2}\log_2(2x - 1) - \log_2\sqrt{x + 4} = -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(2x - 1) - \log_2(x + 4)^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(2x - 1) - \frac{1}{2}\log_2(x + 4) = -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \log_2(2x - 1) - \log_2(x + 4) = -3$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)+3=\log_2(x+4)$
$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)+\log_2(2^3)=\log_2(x+4)$
$\Leftrightarrow \log_2\big((2x-1)\times 8\big)=\log_2(x+4)$
$\Leftrightarrow 16x-8=x+4$
$\Leftrightarrow 15x=12$
$\Leftrightarrow x=\frac{12}{15}$
$\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$
C. S. $=\left\{\frac{4}{5}\right\}$

37.2 $D=\{x\in\mathbb{R}: x+3>0 \wedge 2x+6>0\}=]-3,+\infty[$
$\forall x\in]-3,+\infty[$,
$2\log_2(x+3)-\log_4(2x+6)=1$
$\Leftrightarrow 2\log_2(x+3)-\frac{\log_2(2x+6)}{\log_2 4}=1$
$\Leftrightarrow 2\log_2(x+3)-\frac{\log_2(2(x+3))}{2}=1$
$\Leftrightarrow 2\log_2(x+3)-\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2(x+3))=1$
$\Leftrightarrow 2\log_2(x+3)-\frac{1}{2}(1+\log_2(x+3))=1$
$\Leftrightarrow 2\log_2(x+3)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2(x+3)=1$
$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2(x+3)=\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \log_2(x+3)=1$
$\Leftrightarrow x+3=2$
$\Leftrightarrow x=-1$
C. S. $=\{-1\}$

37.3 $D=\{x\in\mathbb{R}:(6-x)^2>0 \wedge 6-x>0\}=$
$=]-\infty,6[$
$\forall x\in]-\infty,6[$,
$\frac{1}{2}e^{2x}\ln(6-x)^2-3e^x\ln(6-x)=(3-e^x)e^x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2x}\times 2\ln(6-x)-3e^x\ln(6-x)=3e^x-e^{2x}$
$\Leftrightarrow e^{2x}\ln(6-x)-3e^x\ln(6-x)-3e^x+e^{2x}=0$
$\Leftrightarrow \ln(6-x)\,(e^{2x}-3e^x)+(e^{2x}-3e^x)=0$
$\Leftrightarrow (e^{2x}-3e^x)(\ln(6-x)+1)=0$
$\Leftrightarrow e^{2x}-3e^x=0 \vee \ln(6-x)+1=0$
$\Leftrightarrow e^x(e^x-3)=0 \vee \ln(6-x)=-1$
$\Leftrightarrow \underbrace{e^x=0}_{\text{Equação impossível}} \vee e^x-3=0 \vee 6-x=e^{-1}$
$\Leftrightarrow e^x=3 \vee -x=-6+\frac{1}{e}$
$\Leftrightarrow x=\ln 3 \vee x=6-\frac{1}{e}$
C. S. $=\left\{\ln 3, 6-\frac{1}{e}\right\}$

37.4 $D=\{x\in\mathbb{R}: x+2>0 \wedge 4x+8>0\}=]-2,+\infty[$
$\forall x\in]-2,+\infty[$,
$e^x\log_2(x+2)-6\log_4(x+2)=$
$=(3-e^x)\log_2(4x+8)$
$\Leftrightarrow e^x\log_2(x+2)-6\times\frac{\log_2(x+2)}{\log_2 4}=$
$=(3-e^x)\log_2(4(x+2))$
$\Leftrightarrow e^x\log_2(x+2)-6\times\frac{\log_2(x+2)}{2}=$
$=(3-e^x)(\log_2 4+\log_2(x+2))$
$\Leftrightarrow e^x\log_2(x+2)-3\log_2(x+2)=$
$=(3-e^x)(2+\log_2(x+2))$
$\Leftrightarrow (e^x-3)\log_2(x+2)-(3-e^x)(2+\log_2(x+2))=0$
$\Leftrightarrow (e^x-3)\log_2(x+2)+(e^x-3)(2+\log_2(x+2))=0$
$\Leftrightarrow (e^x-3)(\log_2(x+2)+2+\log_2(x+2))=0$
$\Leftrightarrow e^x-3=0 \vee 2\log_2(x+2)+2=0$
$\Leftrightarrow e^x=3 \vee \log_2(x+2)=-1$
$\Leftrightarrow x=\ln 3 \vee x+2=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x=\ln 3 \vee x=-\frac{3}{2}$
C. S. $=\left\{-\frac{3}{2},\ln 3\right\}$

38. Interseção do gráfico de f com o a reta de equação $y=6$:
$f(x)=6 \Leftrightarrow e^x-3e^{-x}+4=6$
$\Leftrightarrow e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$
$\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x-3=0$
$\Leftrightarrow e^x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$
$\Leftrightarrow e^x=\frac{2\pm 4}{2}$
$\Leftrightarrow e^x=3 \vee \underbrace{e^x=-1}_{\text{Equação impossível}}$
$\Leftrightarrow x=\ln 3$
Logo, $A(\ln 3, 6)$ e $C(\ln 3, 0)$.
Interseção do gráfico de f com o eixo Oy:
$f(0)=e^0-3e^0+4=1-3+4=2$
Logo, $B(0,2)$.
Assim, $\overline{OC}=\ln 3$, $\overline{OB}=2$ e $\overline{AC}=6$.
Então, $A_{[OCAB]}=\frac{\overline{AC}+\overline{OB}}{2}\times\overline{OC}=$
$=\frac{6+2}{2}\times\ln 3=$
$=4\ln 3=$
$=\ln(3^4)=$
$=\ln 81$

39.

39.1 $(\ln(e^2+1-1))^3-7(\ln(e^2+1-1))^2+$
$+14\ln(e^2+1-1)-8=$
$=(\ln(e^2))^3-7(\ln(e^2))^2+14\ln(e^2)-8=$
$=2^3-7\times 2^2+14\times 2-8=$
$=8-28+28-8=$
$=0$
Logo, e^2+1 é solução da equação.

39.2 $(\ln(x-1))^3-7(\ln(x-1))^2+14\ln(x-1)-8=0$
$\underbrace{\Leftrightarrow}_{y=\ln(x-1)} y^3-7y^2+14y-8=0$
Como $x=e^2+1$ é solução da equação dada no enunciado, então $y=\ln(e^2+1-1)=\ln(e^2)=2$ é solução desta equação.
Usando a Regra de Ruffini:

	1	−7	14	−8
2		2	−10	8
	1	−5	4	0

Assim,
$y^3-7y^2+14y-8=0$
$\Leftrightarrow y=2 \vee y^2-5y+4=0$
$\Leftrightarrow y=2 \vee y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$
$\Leftrightarrow y=2 \vee y=\frac{5\pm 3}{2}$
$\Leftrightarrow y=2 \vee y=4 \vee y=1$
$\Leftrightarrow \ln(x-1)=2 \vee \ln(x-1)=4 \vee \ln(x-1)=1$
$\Leftrightarrow x-1=e^2 \vee x-1=e^4 \vee x-1=e$
$\Leftrightarrow x=1+e^2 \vee x=1+e^4 \vee x=1+e$
C. S. $=\{1+e, 1+e^2, 1+e^4\}$

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

4. Função composta

Páginas 46 e 47

40.

40.1 $(f \circ g)(1) = f\big(g(1)\big) = f(2) = 5$

40.2 $(h \circ g)(1) = h\big(g(1)\big) = h(2) = 4$

40.3 $(f \circ h)(1) = f\big(h(1)\big) = f(2) = 5$

40.4 $(g \circ f)(0) = g\big(f(0)\big)$ não existe, pois $0 \notin D_f$

40.5 $(g \circ h)(0) = g\big(h(0)\big) = g(0) = 1$

40.6 $(f \circ g)(0) = f\big(g(0)\big) = f(1) = 4$

41.

41.1 $(j \circ i)(2) = j\big(i(2)\big) = j(4) = 2$

41.2 $(j \circ k)(-2) = j\big(k(-2)\big) = j(4) = 2$

41.3 $(k \circ k)(2) = k\big(k(2)\big) = k(4) = -1$

41.4 $(i \circ k)(3) = i\big(k(3)\big) = i(0) = 0$

41.5 $(k \circ j)(1) = k\big(j(1)\big) = k(1) = 3$

41.6 $(j \circ k)(0) = j\big(k(0)\big) = j(0) = 0$

42.

42.1

a) $(f \circ g)(0) = f\big(g(0)\big) =$
$= f\left(\frac{0+3}{0-1}\right) =$
$= f(-3) =$
$= 2 \times (-3) - 5 =$
$= -11$

b) $(g \circ f)(0) = g\big(f(0)\big) =$
$= g(2 \times 0 - 5) =$
$= g(-5) =$
$= \frac{-5+3}{2\times(-5)-1} =$
$= \frac{-2}{-11} =$
$= \frac{2}{11}$

c) $(h \circ f)\left(\frac{17}{2}\right) = h\left(f\left(\frac{17}{2}\right)\right) =$
$= h\left(2 \times \frac{17}{2} - 5\right) =$
$= h(12) =$
$= \sqrt{2 \times 12 + 3} =$
$= \sqrt{27} =$
$= 3\sqrt{3}$

d) $(g \circ h)(2) = g\big(h(2)\big) =$
$= g\big(\sqrt{2 \times 2 + 3}\big) =$
$= g\big(\sqrt{7}\big) =$
$= \frac{\sqrt{7}+3}{2\sqrt{7}-1} =$
$= \frac{\sqrt{7}+3}{2\sqrt{7}-1} \times \frac{2\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+1} =$
$= \frac{14+\sqrt{7}+6\sqrt{7}+3}{4\times 7-1} =$
$= \frac{17+7\sqrt{7}}{27}$

42.2 $D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

a) $D_{f\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathbb{R}$

$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) =$
$= f(2x - 5) =$
$= 2 \times (2x - 5) - 5 =$
$= 4x - 10 - 5 =$
$= 4x - 15$

Assim, $f \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 4x - 15$

b) $D_{f\circ h} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_h \wedge h(x) \in D_f\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\wedge h(x) \in \mathbb{R}\right\} =$
$= \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

$(f \circ h)(x) = f\big(h(x)\big) =$
$= f\big(\sqrt{2x+3}\big) =$
$= 2\sqrt{2x+3} - 5$

Assim, $f \circ h: \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2\sqrt{2x+3} - 5$

c) $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} \wedge g(x) \in \mathbb{R}\right\} =$
$= \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) =$
$= f\left(\frac{x+3}{2x-1}\right) =$
$= 2 \times \frac{x+3}{2x-1} - 5 =$
$= \frac{2x+6-10x+5}{2x-1} =$
$= \frac{-8x+11}{2x-1}$

Assim, $f \circ g: \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{-8x+11}{2x-1}$

43.

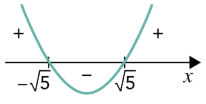
43.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 4 - x \geq 0\} =]-\infty, 4]$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: g(x) \in]-\infty, 4]\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \leq 4\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5 \leq 0\}$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 5$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$



Assim, $D_{f\circ g} = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$

43.2 $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 4 > 0\} =]-4, +\infty[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$
$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \wedge g(x) \in]-4, +\infty[\} =$
$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq 3 \wedge \frac{1}{x-3} > -4\right\}$

Cálculo auxiliar:

$\frac{1}{x-3} > -4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} + 4 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1+4x-12}{x-3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{4x-11}{x-3} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{11}{4}$		3	$+\infty$
$4x-11$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4x-11}{x-3}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$

Assim, $D_{f\circ g} = \left]-\infty, \frac{11}{4}\right[\cup \,]3, +\infty[$.

43.3 $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x-1>0\} =]1, +\infty[$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: g(x) \in]1, +\infty[\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: 2e^x + 3 > 1\}$

Cálculo auxiliar:

$2e^x + 3 > 1 \Leftrightarrow 2e^x > -2$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x > -1}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$

Assim, $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

43.4 $D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 5-x>0\} =]-\infty, 5[$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in]-\infty, 5[\wedge g(x) \in \mathbb{R}\} =$

$=]-\infty, 5[$

44.

44.1

a) $D_f = \mathbb{R}^+$

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: \underbrace{e^x + 1 \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}\right\} = \mathbb{R}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: g(x) \in \mathbb{R}^+\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{e^x}{e^x+1} > 0\right\}$

$(e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

$D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$

Assim, $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$

b) $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}^+ \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} =$

$= \mathbb{R}^+$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{e^{\ln(x)}}{e^{\ln(x)}+1} = \frac{x}{x+1}$

Assim, $g \circ f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x}{x+1}$

44.2 $(f \circ g)(x) = -\ln 3 \Leftrightarrow -\ln(1+e^{-x}) = -\ln 3$

$\Leftrightarrow 1 + e^{-x} = 3$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow -x = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

C. S. $= \{-\ln 2\}$

45.

45.1 $(f \circ g)(x) = 6x - 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = 6x - 2$

$\Leftrightarrow 3g(x) + 4 = 6x - 2$

$\Leftrightarrow 3g(x) = 6x - 6$

$\Leftrightarrow g(x) = 2x - 2$

Assim, $g(x) = 2x - 2$.

45.2 $(f \circ g)(x) = 8x + 5 \Leftrightarrow f(g(x)) = 8x + 5$

$\Leftrightarrow 1 - 2g(x) = 8x + 5$

$\Leftrightarrow -2g(x) = 8x + 4$

$\Leftrightarrow g(x) = -4x - 2$

Assim, $g(x) = -4x - 2$.

46.

46.1 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

$= f\left(\frac{kx}{x+2}\right) =$

$= \frac{\frac{kx}{x+2} + 1}{\frac{kx}{x+2} - 3} =$

$= \frac{\frac{kx+x+2}{x+2}}{\frac{kx-3(x+2)}{x+2}} =$

$= \frac{(k+1)x+2}{kx-3x-6} =$

$= \frac{(k+1)x+2}{(k-3)x-6}$

46.2 $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} \wedge g(x) \in \mathbb{R}\backslash\{3\}\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq -2 \wedge \frac{kx}{x+2} \neq 3\right\}$

Como $D_{f\circ g} = \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$, então pode concluir-se que $g(1) = 3$.

Então, $g(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{k}{1+2} = 3 \Leftrightarrow k = 9$

O valor de k é 9.

46.3 $(f \circ g)(x) = \frac{(k+1)x+2}{(k-3)x-6}$

$(f \circ g)(x) = y$

$\Leftrightarrow \frac{(k+1)x+2}{(k-3)x-6} = y$

$\Leftrightarrow (k+1)x + 2 = y(k-3)x - 6y$

$\Leftrightarrow (k+1)x - (ky - 3y)x = -2 - 6y$

$\Leftrightarrow (k+1-ky+3y)x = -2 - 6y$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2-6y}{k+1-ky+3y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6y+2}{ky-3y-k-1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6y+2}{(k-3)y-(k+1)}$

Logo, $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{6x+2}{(k-3)x-(k+1)}$.

Então, $(f \circ g)(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$.

$\frac{(k+1)x+2}{(k-3)x-6} = \frac{6x+2}{(k-3)x-(k+1)}$

$\Leftrightarrow k + 1 = 6$

$\Leftrightarrow k = 5$

O valor de k é 5.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

Exercícios globais

Páginas 48 a 51

47. Opção (A)

$\log_a(a^2 \times b) = \log_a(a^2) + \log_a b = 2 + 3 = 5$

48. Opção (D)

$f^{-1}(6) + (f \circ g)(2) = 0 + f(0) = 0 + 6 = 6$

49. 2026 – 1990 = 36 anos

$G(36) = 178 \times e^{0{,}05 \times 36} \approx 1077$

O número de gatos existentes nessa ilha no início de 2026 era, aproximadamente, 1077.

50. Opção (B)

$g(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = y$
$\Leftrightarrow 2x = y - 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$

Logo, $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

$(f \circ g^{-1})(7) = f\left(g^{-1}(7)\right) =$
$= f\left(\frac{7-3}{2}\right) =$
$= f(2) =$
$= \sqrt{2}$

Logo, a igualdade (A) é falsa.

$(f \circ g^{-1})(3) = f\left(g^{-1}(3)\right) =$
$= f\left(\frac{3-3}{2}\right) =$
$= f(0) =$
$= 0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2$

Logo, a igualdade (B) é verdadeira.

$(f \circ g^{-1})(1) = f(g^{-1}(1)) =$
$= f\left(\frac{1-3}{2}\right) =$
$= f(-1) =$
$= (-1)^2 + 2 \times (-1) + 2 = 1$

Logo, a igualdade (C) é falsa.

$(f \circ g^{-1})(5) = f(g^{-1}(5)) =$
$= f\left(\frac{5-3}{2}\right) =$
$= f(1) =$
$= \sqrt{1} = 1$

Logo, a igualdade (D) é falsa.

51. Opção (B)

Sabe-se que $\log_a(ab^2) = 9$
$\Leftrightarrow \log_a a + \log_a b^2 = 9$
$\Leftrightarrow 1 + 2\log_a b = 9$
$\Leftrightarrow 2\log_a b = 8$
$\Leftrightarrow \log_a b = 4$

Então, $\log_a \sqrt{b} = \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) =$
$= \frac{1}{2}\log_a b =$
$= \frac{1}{2} \times 4 =$
$= 2$

52. Opção (A)

$N(t_1) = 14 \Leftrightarrow 2 + 4e^{kt_1} = 14$
$\Leftrightarrow 4e^{kt_1} = 12$
$\Leftrightarrow e^{kt_1} = 3$
$\Leftrightarrow kt_1 = \ln 3$
$\Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{t_1}$

53. Opção (A)

$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(9 + 3a + b) = 0 \\ \log(16 + 4a + b) = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3a + b = 1 \\ 16 + 4a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 8 \\ 16 + 4a - 3a - 8 = 1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 13 \\ a = -7 \end{cases}$

54.

54.1 $\begin{cases} M(6) = 3{,}6 \\ M(12) = 1{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times e^{6k} = 3{,}6 \\ a \times e^{12k} = 1{,}8 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3{,}6}{e^{6k}} \\ \frac{3{,}6}{e^{6k}} \times e^{12k} = 1{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ e^{6k} = 0{,}5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ 6k = \ln 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3{,}6}{e^{-\ln 2}} \\ k = -\frac{\ln 2}{6} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3{,}6 \times e^{\ln 2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7{,}2 \\ k = -\frac{\ln 2}{6} \end{cases}$

Logo, $a = 7{,}2$ e $k = -\frac{\ln 2}{6}$

54.2 $\frac{M(t+1)}{M(t)} = \frac{a \times e^{-0{,}34 \times (t+1)}}{a \times e^{-0{,}34t}} =$
$= \frac{e^{-0{,}34t - 0{,}34}}{e^{-0{,}34t}} =$
$= e^{-0{,}34t - 0{,}34 + 0{,}34t} =$
$= e^{-0{,}34} \approx$
$\approx 0{,}71$

O valor 0,71 significa que a cada hora que passa a massa da substância passa a ser 71%, aproximadamente, da massa existente na hora anterior, ou seja, a massa da substância diminui, aproximadamente, 29% por hora.

55.

55.1 $P_0 = P(0) = 100\,000$
$a = 1 + 0{,}10 = 1{,}1$

55.2 $\begin{cases} P(1) = 2\,000\,000 \\ P(2) = 2\,400\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 a = 2\,000\,000 \\ P_0 a^2 = 2\,400\,000 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2\,000\,000\, a = 2\,400\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ a = \frac{2\,400\,000}{2\,000\,000} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} P_0 \times 1{,}2 = 2\,000\,000 \\ a = 1{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 = \frac{2\,000\,000}{1.2} \\ \end{cases}$

Assim, $a = 1{,}2$ e $P_0 \approx 1\,666\,667$.

56.

56.1 $\begin{cases} A(1) = 200 \\ A(5) = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2000}{1 + Ca^{-1}} = 200 \\ \frac{2000}{1 + Ca^{-5}} = 1000 \end{cases}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + Ca^{-1} = \frac{2000}{200} \\ 1 + Ca^{-5} = \frac{2000}{1000} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + Ca^{-1} = 10 \\ 1 + Ca^{-5} = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Ca^{-1} = 9 \\ Ca^{-5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 9a \\ 9a \times a^{-5} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{a^4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt[4]{9} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \sqrt[4]{9} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C = -9\sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} C = 9\sqrt{3} \\ a = \sqrt{3} \end{cases}$

O valor de a é $\sqrt{3}$ e o valor de C é $9\sqrt{3}$.

56.2 $\text{tmv}_{[1,5]} = \frac{A(5) - A(1)}{5 - 1} = \frac{1000 - 200}{4} = 200$

A variação média de 200 ha/ano significa que, em média, a área florestal regenerada aumentou 200 hectares por cada ano que passou, no período compreendido entre o final do primeiro ano e o final do quinto ano após o incêndio.

57.

57.1 Para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$f(x) = \log_3\left(\frac{x^2}{9}\right) - 2\log_9 x =$

$= \log_3 x^2 - \log_3 9 - 2 \times \frac{\log_3 x}{\log_3 9} =$

$= 2\log_3 x - 2 - 2 \times \frac{\log_3 x}{2} =$

$= 2\log_3 x - 2 - \log_3 x =$

$= \log_3 x - 2$, como queríamos demonstrar.

57.2 Para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$f(x) = -1 - \log_3(x + 2)$

$\Leftrightarrow \log_3 x - 2 = -1 - \log_3(x + 2)$

$\Leftrightarrow \log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2x) = \log_3 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee \underbrace{x = -3}_{\notin \mathbb{R}^+}$

C. S. $= \{1\}$

57.3 $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \log_3 x - 2 = y$

$\Leftrightarrow \log_3 x = y + 2$

$\Leftrightarrow x = 3^{y+2}$

Logo, $f^{-1}(x) = 3^{2+x}$.

$f^{-1}(x) = 21 - 2 \times 3^{-x+1}$

$\Leftrightarrow 3^{x+2} = 21 - 2 \times 3^{-x+1}$

$\Leftrightarrow 3^x \times 9 - 21 + 6 \times 3^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow 9 \times 3^{2x} - 21 \times 3^x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3 \times 3^{2x} - 7 \times 3^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$

$\Leftrightarrow 3^x = 2 \vee 3^x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \log_3 2 \vee x = -1$

Então, C. S. $= \{-1, \log_3 2\}$.

58. $A(a, g(a))$, ou seja, $A(a, \log_3(a - 1))$

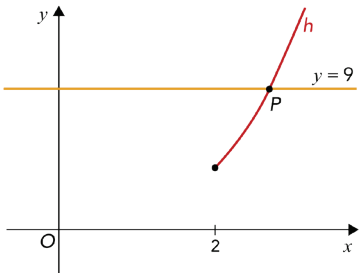
$B(a, f(a))$, ou seja, $B(a, a^2)$

$\overline{AB} = a^2 - \log_3(a - 1)$

$A_{[AOB]} = \frac{a \times (a^2 - \log_3(a-1))}{2}$

Pretende-se resolver a equação $\frac{a \times (a^2 - \log_3(a-1))}{2} = 9$.

Seja $h(x) = \frac{x(x^2 - \log_3(x-1))}{2}$.



$P(2{,}68; 9)$

Então, $a \approx 2{,}7$.

59.

59.1 $m = 5{,}3 \Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{F}{F_0}\right) = 5{,}3$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{F}{F_0}\right) = -\frac{5{,}3}{2{,}5}$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{F}{F_0}\right) = -2{,}12$

$\Leftrightarrow \frac{F}{F_0} = 10^{-2{,}12}$

Logo, $\frac{F}{F_0} \approx 0{,}0076$.

59.2 $m_2 - m_1 = 2{,}5$

$\Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{F_2}{F_0}\right) - \left(-2{,}5\log\left(\frac{F_1}{F_0}\right)\right) = 2{,}5$

$\Leftrightarrow -2{,}5\log\left(\frac{F_2}{F_0}\right) + 2{,}5\log\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 2{,}5$

$\Leftrightarrow -\log\left(\frac{F_2}{F_0}\right) + \log\left(\frac{F_1}{F_0}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{\frac{F_1}{F_0}}{\frac{F_2}{F_0}}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = 10$

$\Leftrightarrow F_1 = 10 \times F_2$

Ou seja, F_1 é 10 vezes maior do que F_2, como queríamos demonstrar.

59.3 $m_B - m_A = -2{,}5\log\left(\frac{F_B}{F_0}\right) - \left(-2{,}5\log\left(\frac{F_A}{F_0}\right)\right) =$

$= -2{,}5\log\left(\frac{F_B}{F_0}\right) + 2{,}5\log\left(\frac{F_A}{F_0}\right) =$

$= 2{,}5\left(-\log\left(\frac{F_B}{F_0}\right) + \log\left(\frac{F_A}{F_0}\right)\right) =$

$= 2{,}5\log\left(\frac{F_A}{F_B}\right) =$

$= 2{,}5\log\left(\frac{4 \times 10^{-12}}{1 \times 10^{-13}}\right) =$

$= 2{,}5\log(4 \times 10) \approx 4$

Logo, $m_B - m_A \approx 4$.

60.

60.1 $R = 5 + 2\log_3(i + 6)$

$\Leftrightarrow R - 5 = 2\log_3(i + 6)$

$\Leftrightarrow \frac{R-5}{2} = \log_3(i + 6)$

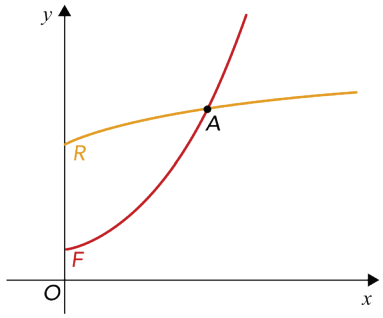
$\Leftrightarrow i + 6 = 3^{\frac{R-5}{2}}$

$\Leftrightarrow i = 3^{\frac{R-5}{2}} - 6$, como queríamos demonstrar.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

60.2 $R(i) = 2 + R(3)$
$\Leftrightarrow 5 + 2\log_3(i+6) = 2 + 5 + 2\log_3(3+6)$
$\Leftrightarrow 2\log_3(i+6) = 2 + 2\log_3(9)$
$\Leftrightarrow \log_3(i+6) = 1 + \log_3(9)$
$\Leftrightarrow \log_3(i+6) = 1 + 2$
$\Leftrightarrow \log_3(i+6) = 3$
$\Leftrightarrow i + 6 = 3^3$
$\Leftrightarrow i = 27 - 6$
$\Leftrightarrow i = 21$
O valor de i é 21 candelas/m^2.

60.3 Pretende-se resolver a equação $R(i) = F(i)$.



$A(12{,}93; 10{,}35)$
O encandeamento ocorre a partir de uma intensidade de, aproximadamente, 13 candelas/m^2.

61. Opção (B)
A expressão apresentada na opção (A) corresponde a uma função crescente, contrariando a afirmação "à medida que o tempo passa, a voltagem diminui", pelo que deve ser rejeitada.
Uma condição apresentada é $V(1) = 12$. Na opção (C), $V(1) = 12 - \ln(12) \neq 12$, pelo que se rejeita esta opção.
Segundo o enunciado, a bateria foi fabricada para funcionar durante pelo menos 10 horas. Como a expressão apresentada na opção (D) só é válida para $t < 4$, esta opção deve ser excluída.

62. Opção (D)
$\log_x(e^a) = \log_a e \Leftrightarrow a\log_x e = \log_a e$
$\Leftrightarrow a\frac{\log_a e}{\log_a x} = \log_a e$
$\Leftrightarrow \frac{a}{\log_a x} = 1$
$\Leftrightarrow \log_a x = a$
$\Leftrightarrow x = a^a$

63. As coordenadas dos vértices do trapézio são:
$A(k, e^k)$
$B(k+1, e^{k+1})$
$C(k+1, 0)$
$D(k, 0)$
Assim,
$\overline{AD} = e^k$
$\overline{BC} = e^{k+1}$
$\overline{CD} = 1$
Logo, $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{CD} =$
$= \frac{e^{k+1} + e^k}{2} \times 1 =$
$= \frac{e^k \times e + e^k}{2} =$
$= \frac{e^k(e+1)}{2}$, como queríamos demonstrar.

64. $P(a, h(a))$, ou seja, $P\left(a, a^3 + \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\right)$.
$Q(-a, h(-a))$, ou seja, $Q\left(-a, -a^3 + \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right)$.
Seja M o ponto médio de $[PQ]$.
$M = \left(\frac{a-a}{2}, \frac{a^3 + \ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) - a^3 + \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)}{2}\right) =$
$= \left(0, \frac{\ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)}{2}\right) =$
$= \left(0, \frac{\ln\left(\frac{1-a}{1+a} \times \frac{1+a}{1-a}\right)}{2}\right) =$
$= \left(0, \frac{\ln 1}{2}\right) =$
$= (0, 0)$
Logo, o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$ coincide com a origem do referencial, como queríamos demonstrar.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

5. Derivadas

Páginas 52 a 56

65.

65.1 $f'(x) = (2^{x+1})' =$
$= (x+1)'2^{x+1}\ln 2 =$
$= 2^{x+1}\ln 2$

65.2 $f'(x) = (\ln(x^2+2x))' =$
$= \frac{(x^2+2x)'}{x^2+2x} =$
$= \frac{2x+2}{x^2+2x}$

65.3 $f'(x) = (\log_5(3x+1))' =$
$= \frac{(3x+1)'}{(3x+1)\ln 5} =$
$= \frac{3}{(3x+1)\ln 5}$

65.4 $f'(x) = \left(\sqrt{e^{x^2-1}}\right)' =$
$= \left(e^{\frac{x^2-1}{2}}\right)' =$
$= \left(\frac{x^2-1}{2}\right)' e^{\frac{x^2-1}{2}} =$
$= x\sqrt{e^{x^2-1}}$

65.5 $f'(x) = ((\ln(x+1))^2)' =$
$= 2\ln(x+1)\,(\ln(x+1))' =$
$= 2\ln(x+1)\frac{(x+1)'}{x+1} =$
$= \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$

65.6 $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right)' =$
$= \left(x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\right)' =$
$= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' e^{-x} + x^{\frac{1}{2}}(e^{-x})' =$
$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} + x^{\frac{1}{2}}(-x)'e^{-x} =$
$= \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} - \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

65.7 $f'(x) = \left((ex+2)(e^{3x}+1)\right)' =$
$= (ex+2)'(e^{3x}+1) + (ex+2)(e^{3x}+1)' =$
$= e(e^{3x}+1) + (ex+2)(3x)'e^{3x}$
$= e(e^{3x}+1) + 3(ex+2)e^{3x}$

65.8 $f'(x) = \left(\frac{x+1}{e^{x+1}}\right)' =$
$= \frac{(x+1)'e^{x+1} - (x+1)(e^{x+1})'}{(e^{x+1})^2} =$
$= \frac{e^{x+1} - (x+1)(x+1)'e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} =$
$= \frac{e^{x+1} - (x+1)e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} =$
$= \frac{e^{x+1}(1-(x+1))}{(e^{x+1})^2} =$
$= -\frac{x}{e^{x+1}}$

65.9 $f'(x) = \left(\frac{\ln(x+2)}{2x+1}\right)' =$
$= \frac{(\ln(x+2))'(2x+1) - \ln(x+2)(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$
$= \frac{\frac{(x+2)'}{x+2}(2x+1) - 2\ln(x+2)}{(2x+1)^2} =$
$= \frac{\frac{2x+1}{x+2} - 2\ln(x+2)}{(2x+1)^2} =$
$= \frac{2x+1-2(x+2)\ln(x+2)}{(x+2)(2x+1)^2}$

65.10 $f'(x) = (\ln(x)\log_2(x+1))' =$
$= (\ln(x))'\log_2(x+1) + \ln(x)\,(\log_2(x+1))' =$
$= \frac{x'}{x}\log_2(x+1) + \ln(x)\frac{(x+1)'}{(x+1)\ln 2} =$
$= \frac{\log_2(x+1)}{x} + \frac{\ln(x)}{(x+1)\ln 2}$

65.11 $f'(x) = \left((e^x - x)\ln x\right)' =$
$= (e^x - x)'\ln x + (e^x - x)(\ln x)' =$
$= (e^x - 1)\ln x + (e^x - x)\frac{1}{x} =$
$= (e^x - 1)\ln x + \frac{e^x}{x} - 1$

65.12 $f'(x) = \left(\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)\right)' =$
$= \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)'}{\frac{e^x}{x}} =$
$= \frac{\frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2}}{\frac{e^x}{x}} =$
$= \frac{\frac{e^x x - e^x}{x^2}}{\frac{e^x}{x}} =$
$= \frac{e^x(x-1)x}{e^x x^2} =$
$= \frac{x-1}{x}$

66.

66.1 $f'(x) = (4\operatorname{sen} x\cos x)' =$
$= (4\operatorname{sen} x)'(\cos x) + 4\operatorname{sen} x\,(\cos x)' =$
$= 4\cos x\cos x + 4\operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x) =$
$= 4\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x$

66.2 $f'(x) = \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)' =$
$= \left((\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)' =$
$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{sen} x)' =$
$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

66.3 $f'(x) = (\cos(x^2+2x+2))' =$
$= -(x^2+2x+2)'\operatorname{sen}(x^2+2x+2) =$
$= -(2x+2)\operatorname{sen}(x^2+2x+2)$

66.4 $f'(x) = (\operatorname{tg}(\cos x))' =$
$= \frac{(\cos x)'}{\cos^2(\cos x)} =$
$= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2(\cos x)}$

66.5 $f'(x) = (e^{2x}\cos x)' =$
$= (e^{2x})'\cos x + e^{2x}(\cos x)' =$
$= 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\operatorname{sen} x =$
$= e^{2x}(2\cos x - \operatorname{sen} x)$

66.6 $f'(x) = (x^3\ln(\operatorname{sen} x))' =$
$= (x^3)'\ln(\operatorname{sen} x) + x^3\frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} =$
$= 3x^2\ln(\operatorname{sen} x) + \frac{x^3\cos x}{\operatorname{sen} x}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

66.7 $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{e^{x^2}}\right)' =$

$= \frac{(\cos x)' e^{x^2} - \cos x\left(e^{x^2}\right)'}{\left(e^{x^2}\right)^2} =$

$= \frac{-\operatorname{sen} x \times e^{x^2} - \cos x (x^2)' e^{x^2}}{e^{2x^2}} =$

$= \frac{-e^{x^2} \operatorname{sen} x - 2xe^{x^2} \cos x}{e^{2x^2}} =$

$= \frac{-e^{x^2}(\operatorname{sen} x + 2x \cos x)}{e^{2x^2}} =$

$= -\frac{\operatorname{sen} x + 2x \cos x}{e^{x^2}}$

66.8 $f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{3\cos x}\right)\right)' =$

$= \frac{\left(\frac{x}{3\cos x}\right)'}{\frac{x}{3\cos x}} =$

$= \frac{\frac{x' 3\cos x - x(3\cos x)'}{(3\cos x)^2}}{\frac{x}{3\cos x}} =$

$= \frac{\frac{3\cos x + 3x \operatorname{sen} x}{(3\cos x)^2}}{\frac{x}{3\cos x}} =$

$= \frac{(3\cos x + 3x \operatorname{sen} x) \times 3\cos x}{(3\cos x)^2 x} =$

$= \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{x \cos x} =$

$= \frac{1}{x} + \operatorname{tg} x$

66.9 $f'(x) = (\ln(\cos(x^2))' =$

$= \frac{(\cos(x^2))'}{\cos(x^2)} =$

$= \frac{-(x^2)' \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)} =$

$= -2x \operatorname{tg}(x^2)$

66.10 $f'(x) = \left(\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}\right)' =$

$= \frac{(\cos x)'(2\operatorname{sen}^2 x) - \cos x (2\operatorname{sen}^2 x)'}{(2\operatorname{sen}^2 x)^2} =$

$= \frac{-\sin x \times 2\operatorname{sen}^2 x - \cos x \times 2 \times 2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)'}{4\operatorname{sen}^4 x} =$

$= \frac{-2\operatorname{sen}^3 x - 4\cos x \operatorname{sen} x \cos x}{4\operatorname{sen}^4 x} =$

$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^3 x}$

67.

67.1 $f(x) = x - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$f'(x) = (x - \ln x)' =$

$= 1 - \frac{1}{x} =$

$= \frac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de f	n.d.	↘	Mín.	↗

A função f é decrescente em $]0, 1[$ e é crescente em $]1, +\infty[$.

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

A função f tem mínimo relativo 1 para $x = 1$.

67.2 $g(x) = e^{1-x^2}$

$D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = \left(e^{1-x^2}\right)' =$

$= (1 - x^2)' e^{1-x^2} =$

$= -2xe^{1-x^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2xe^{1-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow -2x = 0 \vee \underbrace{e^{1-x^2} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de g′	$+$	0	$-$
Variação de g	↗	Máx.	↘

A função g é crescente em $]-\infty, 0[$ e é decrescente em $]0, +\infty[$.

$g(0) = e^{1-0} = e$

A função g tem máximo relativo e para $x = 0$.

67.3 $h(x) = xe^{3x}$

$D_h = \mathbb{R}$

$h'(x) = (xe^{3x})' =$

$= x' e^{3x} + x(e^{3x})' =$

$= e^{3x} + x(3x)' e^{3x} =$

$= e^{3x} + 3x\, e^{3x} =$

$= e^{3x}(1 + 3x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x}(1 + 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{3x} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee 1 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
Sinal de h'	$-$	0	$+$
Variação de h	↘	Mín.	↗

A função h é decrescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e é crescente em $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

$h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} e^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3e}$

A função h tem mínimo relativo $-\frac{1}{3e}$ para $x = -\frac{1}{3}$.

67.4 $i(x) = \frac{\ln x}{x}$

$D_i =]0, +\infty[$

$i'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' =$

$= \frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} =$

$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} =$

$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$i'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = e$

x	0		e	$+\infty$
Sinal de i'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de i	n.d.	↗	Máx.	↘

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

A função i é crescente em $]0, e[$ e é decrescente em $]e, +\infty[$.

$i(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

A função i tem máximo relativo $\frac{1}{e}$ para $x = e$.

68.

68.1

a) $f'(x) = (e^{3x-2})' =$
$= (3x-2)'e^{3x-2} =$
$= 3e^{3x-2}$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$m_r = f'(1) = 3e$

Então, $r: y = 3ex + b$

$f(1) = e$, logo, o ponto de coordenadas $(1, e)$ pertence à reta r e

$e = 3e \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2e$.

Assim, $r: y = 3ex - 2e$

b) Seja s a reta tangente ao gráfico de f que é perpendicular à reta de equação $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

$m_s = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$

Logo, $s: y = 3x + b$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto de tangência.

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 3e^{3x-2} = 3$
$\Leftrightarrow e^{3x-2} = 1$
$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = e^0 = 1$, logo, o ponto de coordenadas $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ é o ponto de tangência.

Então, $1 = 3 \times \frac{2}{3} + b \Leftrightarrow b = -1$.

Assim, $s: y = 3x - 1$.

68.2 $f(x) = 3 \Leftrightarrow e^{3x-2} = 3$
$\Leftrightarrow 3x - 2 = \ln 3$
$\Leftrightarrow 3x = 2 + \ln 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{2 + \ln 3}{3}$

As coordenadas do ponto de tangência são, então $\left(\frac{2 + \ln 3}{3}, 3\right)$.

O declive da reta tangente, t, ao gráfico de f nesse ponto é $m_t = f'\left(\frac{2 + \ln 3}{3}\right) = 3 \times 3 = 9$.

O declive da reta normal, n, ao gráfico de f nesse ponto é $m_n = -\frac{1}{9}$.

Então, $n: y = -\frac{1}{9}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{2 + \ln 3}{3}, 3\right)$ pertence a esta reta,

$3 = -\frac{1}{9} \times \frac{2 + \ln 3}{3} + b$
$\Leftrightarrow b = 3 + \frac{2 + \ln 3}{27}$
$\Leftrightarrow b = \frac{83 + \ln 3}{27}$

Assim, $n: y = -\frac{1}{9}x + \frac{83 + \ln 3}{27}$.

69.

69.1

a) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

$f(2) = \ln(2^2 + 3) = \ln 7$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$

$f'(2) = \frac{2 \times 2}{2^2 + 3} = \frac{4}{7}$

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 é da forma $y = \frac{4}{7}x + b$. Como o ponto de coordenadas $(2, \ln 7)$ pertence a esta reta, tem-se:

$\ln 7 = \frac{4}{7} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{8}{7} + \ln 7$

Assim, a equação pedida é $y = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} + \ln 7$.

b) A abcissa do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy é 0.

$f(0) = \ln 3$

$f'(0) = 0$

Assim, a equação pedida é $y = \ln 3$.

69.2

a) $f(3) = \ln(3^2 + 3) = \ln 12$

$f'(3) = \frac{2 \times 3}{3^2 + 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Logo, $t: y = \frac{1}{2}x + b$. Como o ponto de coordenadas $(3, \ln 12)$ pertence à reta t, tem-se:

$\ln 12 = \frac{1}{2} \times 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2} + \ln 12$

Assim, $t: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \ln 12$.

Vamos determinar a abcissa do ponto de interseção desta reta com a reta de equação $y = x - 3$.

$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \ln 12 = x - 3$
$\Leftrightarrow x - 3 + 2\ln 12 = 2x - 6$
$\Leftrightarrow x = 3 + 2\ln 12$

A ordenada do ponto de interseção é:

$y = 3 + 2\ln 12 - 3 = 2\ln 12$

Então, as coordenadas do ponto de interseção são $(3 + 2\ln 12, 2\ln 12)$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+3} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 4x = x^2 + 3$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Para $x = 1$, tem-se $y = \ln(1^2 + 3) = \ln 4$

Para $x = 3$, tem-se $y = \ln(3^2 + 3) = \ln 12$

As coordenadas dos pontos procurados são $(1, \ln 4)$ e $(3, \ln 12)$.

70.

70.1 $f(x) = x^4 - 6x^2$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0$
$\Leftrightarrow 12(x-1)(x+1) = 0$

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x+1=0$
$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f''	+	0	–	0	+
Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$f(-1)=1-6=-5$
$f(1)=1-6=-5$
O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-1,1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$; apresenta dois pontos de inflexão de coordenadas $(-1,-5)$ e $(1,-5)$.

70.2 $g(x)=\frac{3x}{x^2-9}$
$D_g=\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$
$g'(x)=\frac{3(x^2-9)-3x\times 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{-3x^2-27}{(x^2-9)^2}$
$g''(x)=\frac{-6x(x^2-9)^2-(-3x^2-27)\times 2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4}=$
$=\frac{(x^2-9)[-6x(x^2-9)+4x(3x^2+27)]}{(x^2-9)^4}=$
$=\frac{2x(-3x^2+27+6x^2+54)}{(x^2-9)^3}=$
$=\frac{6x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}$
$g''(x)=0$
$\Leftrightarrow \frac{6x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}=0$
$\Leftrightarrow (6x=0 \vee x^2+27=0) \wedge (x^2-9)^3\neq 0$
$\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$6x(x^2+27)$	–	–	–	0	+	+	+
$(x^2-9)^3$	+	0	–	–	–	0	+
Sinal de g''	–	n.d.	+	0	–	n.d.	+
Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

$g(0)=0$
O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-3[$ e em $]0,3[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-3,0[$ e em $]3,+\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $(0,0)$.

70.3 $h(x)=e^x(x-1)$
$D_h=\mathbb{R}$
$h'(x)=e^x(x-1)+e^x\times 1=xe^x$
$h''(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$
$h''(x)=0 \Leftrightarrow e^x(1+x)=0$
$\Leftrightarrow e^x=0 \vee 1+x=0$
$\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sinal de h''	–	0	+
Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h	$\cap$	P.I.	$\cup$

$h(-1)=e^{-1}\times(-1-1)=-\frac{2}{e}$
O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1,+\infty[$; apresenta um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-1,-\frac{2}{e}\right)$.

70.4 $i(x)=\ln(x^2+3)$
$D_i=\mathbb{R}$
$i'(x)=\frac{2x}{x^2+3}$
$i''(x)=\frac{2(x^2+3)-2x\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}$
$i''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2}=0$
$\Leftrightarrow -2x^2+6=0 \wedge (x^2+3)^2\neq 0$
$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
Sinal de i''	–	0	+	0	–
Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de i	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

$i(-\sqrt{3})=i(\sqrt{3})=\ln 6$
O gráfico de i tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\sqrt{3}[$ e em $]\sqrt{3},+\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$; apresenta dois pontos de inflexão de coordenadas $(-\sqrt{3},\ln 6)$ e $(\sqrt{3},\ln 6)$.

71. $f(x)=x^3+ax^2-2x+1$
$f'(x)=3x^2+2ax-2$
$f''(x)=6x+2a$
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+2a=0$
$\Leftrightarrow x=-\frac{a}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{a}{3}$	$+\infty$
Sinal de f''	–	0	+
Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Logo, $-\frac{a}{3}=1 \Leftrightarrow a=-3$.

72.

72.1 $f'(x)\times f(x)<0$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
Variação de f	↘	↘	↘	Min	↗	↗	↗	Max	↘	↘	↘	Min	↗	↗	↗
Sinal de f'	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+	+	+
Sinal de f	+	0	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+
Sinal de $f'\times f$	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+

C.S.$=]-\infty,-1[\cup \left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]\frac{1}{2},1\right[\cup \left]\frac{3}{2},2\right[$

72.2 $f(x) \times f''(x) > 0$

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	$\cup$	$\cup$	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	$\cup$	$\cup$
Sinal de f''	+	+	+	0	–	0	+	+	+
Sinal de f	+	0	–	0	+	0	–	0	+
Sinal de $f'' \times f$	+	0	–	0	–	0	–	0	+

C.S.$=]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

72.3 $f''(x) \times f'(x) \geq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Sinal de f'	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+
Sinal de f''	+	+	+	0	–	–	–	0	+	+	+
Sinal de $f'' \times f'$	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+

C.S.$= \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

72.4 $\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
Sinal de f	+	0	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+
Sinal de f'	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+	+	+
Sinal de $\frac{f}{f'}$	–	0	+	n.d.	–	0	+	n.d.	–	0	+	n.d.	–	0	+

C.S.$= \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[1, \frac{3}{2}\right[\cup [2, +\infty[$

73. $L(p) = p^2(12 - 2\ln p)$

$L'(p) = 2p(12 - 2\ln p) + p^2 \times \left(-\frac{2}{p}\right) =$

$= 24p - 4p\ln p - 2p =$

$= 22p - 4p\ln p$

$L'(p) = 0 \Leftrightarrow 22p - 4p\ln p = 0$

$\Leftrightarrow 2p(11 - 2\ln p) = 0$

$\Leftrightarrow 2p = 0 \vee 11 - 2\ln p = 0$

$\Leftrightarrow p = 0 \vee \ln p = \frac{11}{2}$

$\Leftrightarrow p = 0 \vee p = e^{\frac{11}{2}}$

p	1		$e^{\frac{11}{2}}$		e^6
Sinal de L'		+	0	–	
Variação de L		↗	Máx.	↘	

A função L atinge um máximo absoluto em $e^{\frac{11}{2}} \approx 244{,}69$.

Assim, o preço do bilhete que maximiza o lucro é, aproximadamente, 244,69 euros.

74.

74.1 $B(t) = e^{-t^2+4t+1}$

$B'(t) = (-2t + 4)e^{-t^2+4t+1}$

$B'(1) = (-2 + 4)e^{-1+4+1} = 2e^4 \approx 109{,}2$

A velocidade de crescimento da população no instante $t = 1$ é 109,2 milhões de bactérias por dia, aproximadamente.

74.2 $B'(t) = (-2t + 4)e^{-t^2+4t+1}$

$B'(t) = 0 \Leftrightarrow B'(t) = (-2t + 4)e^{-t^2+4t+1} = 0$

$\Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \vee e^{-t^2+4t+1} = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$

t	0		2	$+\infty$
Sinal de B'		+	0	–
Variação de B		↗	Máx.	↘

A população atinge o seu máximo ao fim de 2 dias.

74.3 $\text{tmv}_{[0,4]} = \frac{B(4) - B(0)}{4 - 0} =$

$= \frac{e^{-16+16+1} - e^{-0+0+1}}{4} =$

$= \frac{e - e}{4} =$

$= 0$

$B'(t) = 0 \Leftrightarrow B'(t) = (-2t + 4)e^{-t^2+4t+1} = 0$

$\Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \vee e^{-t^2+4t+1} = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$

O instante procurado é $t = 2$.

75. $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

$f(0) = e^0 = 1$

$m_r = f'(0) = e^0 = 1$

$r: y = x + b$

O ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence à reta r:

$1 = 0 + b \Leftrightarrow b = 1$

Logo, $r: y = x + 1$.

Seja s a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.

$f(a) = e^a$

$m_s = f'(a) = e^a$

$s: y = e^a x + b$

O ponto de coordenadas (a, e^a) pertence à reta s:

$e^a = e^a \times a + b \Leftrightarrow b = e^a - ae^a$

Logo, $s: y = e^a x + e^a - ae^a$.

Determinando a abcissa do ponto de interseção das retas r e s:

$x + 1 = e^a x + e^a - ae^a$

$\Leftrightarrow x - e^a x = e^a - ae^a - 1$

$\Leftrightarrow x(1 - e^a) = e^a - ae^a - 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^a - ae^a - 1}{1 - e^a}$

A ordenada do ponto de interseção das retas r e s é, então,

$y = \frac{e^a - ae^a - 1}{1 - e^a} + 1 =$

$= \frac{e^a - ae^a - 1 + 1 - e^a}{1 - e^a} =$

$= \frac{-ae^a}{1 - e^a} =$

$= \frac{ae^a}{e^a - 1}$, como queríamos demonstrar.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

76. $P(a, f(a))$, ou seja, $P(a, 1-\ln a)$

$Q(a, 0)$

$f'(x) = (1-\ln x)' = -\frac{1}{x}$

Logo, $m_r = f'(a) = -\frac{1}{a}$.

$r: y = -\frac{1}{a}x + b$

Como o ponto P pertence à reta r:

$1-\ln a = -\frac{1}{a} \times a + b \Leftrightarrow b = 2 - \ln a$

E, portanto, $r: y = -\frac{1}{a}x + 2 - \ln a$.

Se $x = 0$, então $y = 2 - \ln a$, o que significa que $R(0, 2-\ln a)$.

Então, $\overline{PQ} = 1 - \ln a$, $\overline{OR} = 2 - \ln a$ e $\overline{OQ} = a$.

Assim, $A_{[OPQR]} = \frac{\overline{OR}+\overline{PQ}}{2} \times \overline{OQ} =$

$= \frac{2 - \ln a + 1 - \ln a}{2} \times a =$

$= \frac{3a - 2a\ln a}{2} =$

$= \frac{1}{2}(3a - 2a\ln a)$

Seja, então, $g(a) = \frac{1}{2}(3a - 2a\ln a)$. Pretende-se encontrar o valor de a para o qual esta função atinge um máximo.

$g'(a) = \frac{1}{2}\left(3 - \left(2\ln a + 2a \times \frac{1}{a}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}(3 - 2\ln a - 2) =$

$= \frac{1}{2}(1 - 2\ln a)$

$g'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - 2\ln a) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\ln a = 0$

$\Leftrightarrow \ln a = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{2}}$

a	0		$e^{\frac{1}{2}}$		e
Sinal de g'		+	0	−	
Variação de g		↗	Máx.	↘	

Logo, a área do trapézio $[OQPR]$ é máxima quando $a = e^{\frac{1}{2}}$, ou seja, $a = \sqrt{e}$.

77.

77.1 $C(t) = \frac{10\ln(t+1)}{t+1}$

$C'(t) = \frac{10 \times \frac{1}{t+1} \times (t+1) - 10\ln(t+1)}{(t+1)^2} =$

$= \frac{10 - 10\ln(t+1)}{(t+1)^2}$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{10 - 10\ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 10 - 10\ln(t+1) = 0 \wedge (t+1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \wedge t \neq -1$

$\Leftrightarrow t + 1 = e \wedge t \neq -1$

$\Leftrightarrow t = e - 1$

t	0		$e-1$		12
Sinal de C'		+	0	−	
Variação de C		↗	Máx.	↘	

A concentração é máxima no instante $t = e - 1 \approx$

$\approx 1{,}718\,28$.

$0{,}718\,28 \times 60 \approx 43$

Logo, decorreu 1 hora e 43 minutos após a toma do medicamento até a concentração atingir o seu valor máximo.

77.2 $C'(t) = \frac{10 - 10\ln(t+1)}{(t+1)^2}$

$C''(t) = \frac{-10 \times \frac{1}{t+1} \times (t+1)^2 - (10 - 10\ln(t+1))2(t+1)}{(t+1)^4} =$

$= \frac{-10(t+1) - 20(1 - \ln(t+1))(t+1)}{(t+1)^4} =$

$= \frac{10(t+1)(-1-2+2\ln(t+1))}{(t+1)^4} =$

$= \frac{10(-3+2\ln(t+1))}{(t+1)^3}$

$C''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{10(-3+2\ln(t+1))}{(t+1)^3} = 0$

$\Leftrightarrow -3 + 2\ln(t+1) = 0 \wedge (t+1)^3 \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{3}{2} \wedge t \neq -1$

$\Leftrightarrow t + 1 = e^{\frac{3}{2}} \wedge t \neq -1$

$\Leftrightarrow t = e^{\frac{3}{2}} - 1$

t	0		$e^{\frac{3}{2}} - 1$		12
Sinal de C''		−	0	+	
Variação de C'		↘	Min.	↗	

Assim, C' atinge o valor mínimo para $t = e^{\frac{3}{2}} - 1 \approx$

$\approx 3{,}481\,69$.

$0{,}481\,69 \times 60 \approx 29$

Logo, o instante em que a concentração está a diminuir mais rapidamente ocorre 3 horas e 29 minutos após a toma.

78. O gráfico que pode representar a função f é o gráfico II.

A função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, logo é uma função contínua. Assim, o gráfico IV não pode representar a função f por se tratar do gráfico de uma função descontínua em $x = 4$. Logo, não tem derivada finita no ponto de abcissa 4.

O gráfico III não pode representar a função f, uma vez que no ponto de abcissa 2 a derivada não é nula, pois o declive da reta tangente ao gráfico da função neste ponto é negativo.

O gráfico I não pode representar a função f, porque para $x \in]-\infty, 2[$ o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo, o que significa que $f''(x) < 0$, contrariando o enunciado.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

6. Funções contínuas e deriváveis

Páginas 57 a 61

79.

79.1 $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$

79.2 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

79.3 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

79.4 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe

79.5 $\lim\limits_{x\to 2^+} [f(x)]^2 = 0^2 = 0$

79.6 $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2$

79.7 $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

79.8 $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{f(x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

79.9 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

79.10 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \frac{3}{4}$

80.

80.1 $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^4 + x^2 + 2) \underset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^4) = -\infty$

80.2 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{2}{3x+1}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{2x+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}} = \frac{3}{2}$

80.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-1}{x} =$

$= \frac{-1}{-\infty} =$

$= 0$

80.4 $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x+1} \times \frac{1}{3x}\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+2x}{3x^2+3x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{3+\frac{3}{x}} =$

$= \frac{1}{3}$

80.5 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}\right) \underset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}) \times (\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1-(x+2)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} =$

$= -\frac{3}{+\infty} =$

$= 0$

80.6 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{2x} \underset{(\infty-\infty)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}{2x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1-(x+2)}{2x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-1}{2x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} =$

$= -\frac{1}{+\infty} =$

$= 0$

80.7 $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} (x+1) =$

$= -1 + 1$

$= 0$

80.8 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x+2} =$

$= \frac{0}{4} =$

$= 0$

Cálculo auxiliar:

	1	−3	0	4
2		2	−2	−4
	1	−1	−2	0

80.9 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x+1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

80.10 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} =$

$= \frac{1+1+1}{2\times 2} =$

$= \frac{3}{4}$

Cálculo auxiliar:

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

80.11 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-4)\times\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \left((x+2)\sqrt{x-2}\right) =$

$= 4 \times 0 =$

$= 0$

80.12 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-5x+6}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-5x+6}} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\frac{1}{x-2}} =$

$= \sqrt{1} =$

$= 1$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$

80.13 $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} =$

$= \lim\limits_{x\to 9} (\sqrt{x}+3) =$

$= 3 + 3 =$

$= 6$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

80.14 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=$

$=\frac{1}{2\times 2}=$

$=\frac{1}{4}$

81.

81.1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

81.2 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

81.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=0$

81.4 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$

81.5 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

81.6 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

81.7 $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x)=1$

81.8 $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-(x+1))=0$

81.9 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{f(x)+1}=\frac{3}{-1^-+1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

81.10 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{3x+5}=\frac{1}{3}$

82.

82.1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+2)=2=f(0)$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$, então f é contínua em $x=0$.

82.2 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-3x}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-3)=$

$=-3=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0)=1$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq f(0)$, então f não é contínua em $x=0$.

82.3 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^3-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-1}=-1$

$f(0)=0$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq f(0)$, então f não é contínua em $x=0$.

82.4 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x^2-3x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x-3}=$

$=-\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{2x+3}=\frac{1}{3}$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então f não é contínua em $x=0$.

83.

83.1 $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$

$D=\{x\in\mathbb{R}: x-2\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x+3}{x-2}=\frac{7}{0^+}=+\infty$

Logo, a reta de equação $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, por se tratar de uma função racional com este domínio.

Assíntotas horizontais

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+3}{x-2}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+3}{x-2}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=2$

Logo, a reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$ e quando $x\to-\infty$.

83.2 $f(x)=\frac{x^2+2}{3x+2}$

$D=\{x\in\mathbb{R}: 3x+2\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}^+}\frac{x^2+2}{3x+2}=\frac{\frac{22}{9}}{0^+}=+\infty$

Logo, a reta de equação $x=-\frac{2}{3}$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, por se tratar de uma função racional com este domínio.

Assíntotas não verticais

$m=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+2}{3x+2}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+2x}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=$

$=\frac{1}{3}$

$b=\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-mx)=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x+2}-\frac{1}{3}x\right)\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6-2x}{9x+6}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{6}{x}-2}{9+\frac{6}{x}}=$

$=-\frac{2}{9}$

$m=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2+2}{3x+2}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+2x}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=$

$=\frac{1}{3}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x+2}-\frac{1}{3}x\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6-2x}{9x+6} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{6}{x}-2}{9+\frac{6}{x}} =$

$= -\frac{2}{9}$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

83.3 $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2-9 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} =$

$= \frac{30}{0^-} =$

$= -\infty$

Logo, a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to3^+}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-2}{x+3} =$

$= \frac{1}{6}$

Analogamente, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{6}$.

Logo, a reta de equação $x = 3$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$, por se tratar de uma função racional com este domínio.

Assíntotas horizontais

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} =$

$= 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} =$

$= 1$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

83.4 $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2+3x+2 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$

Cálculo auxiliar:

$x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$

Logo, a reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

Cálculo auxiliar:

	1	0	0	1
−1		−1	1	−1
	1	−1	1	0

$= \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2-x+1}{x+2} =$

$= 3$

Analogamente, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = 3$.

Logo, a reta de equação $x = -1$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Não há outras assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, por se tratar de uma função racional com este domínio.

Assíntotas não verticais

$m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^3+3x^2+2x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}-x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+2}-x\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{1+\frac{2}{x}} =$

$= -3$

$m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^3+3x^2+2x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} =$

$= 1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}-x\right) \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+2}-x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{x+2} =$

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-3}{1+\frac{2}{x}} =$

$= -3$

Logo, a reta de equação $y = x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

84.

84.1 $\lim\limits_{x\to0}(e^{3x} + \ln(x+e)) = e^0 + \ln e = 1 + 1 = 2$

84.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^x) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$

84.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{e^x + \ln x} = \frac{5}{+\infty+(+\infty)} = \frac{5}{+\infty} = 0$

84.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3 - e^x) = 3 - e^{-\infty} = 3 - 0 = 3$

84.5 $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x - \ln x) = e^0 - \ln(0^+) = 1 - (-\infty) = +\infty$

84.6 $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{e^x+2}{\ln x} = \frac{e+2}{\ln(1^+)} = \frac{e+2}{0^+} = +\infty$

85.

85.1 $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{5x}-1}{x} = 5 \lim\limits_{5x\to0} \frac{e^{5x}-1}{5x} =$

$= 5 \times 1 =$

$= 5$

85.2 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 3 \lim\limits_{3x\to0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} =$

$= 3 \times 1 =$

$= 3$

85.3 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+4x)}{3x} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+4x)}{x} =$

$= \frac{1}{3} \times 4 \lim\limits_{4x\to0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} =$

$= \frac{1}{3} \times 4 \times 1 =$

$= \frac{4}{3}$

85.4 $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x+1}-e}{5x} = \frac{1}{5} \lim\limits_{x\to0} \frac{e(e^{2x}-1)}{x} =$

$= \frac{e}{5} \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x} =$

$= \frac{e}{5} \times 2 \lim\limits_{2x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$

$= \frac{e}{5} \times 2 \times 1 =$

$= \frac{2e}{5}$

85.5 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-x)^5}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to0} \frac{5\ln(1-x)}{x} =$

$= \frac{5}{2} \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-x)}{x} =$

$= -\frac{5}{2} \lim\limits_{-x\to0} \frac{\ln(1-x)}{-x} =$

$= -\frac{5}{2} \times 1 =$

$= -\frac{5}{2}$

85.6 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(\sqrt{1+8x})}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+8x)^{\frac{1}{2}}}{x} =$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+8x)}{x} =$

$= \frac{1}{2} \times 8 \lim\limits_{8x\to0} \frac{\ln(1+8x)}{8x} =$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 1 =$

$= 4$

85.7 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x^2-5x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x(x-5)} =$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \times \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x-5} =$

$= 2 \lim\limits_{2x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \left(-\frac{1}{5}\right) =$

$= 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{5}\right) =$

$= -\frac{2}{5}$

85.8 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$

$= \frac{1}{2} \times 1 =$

$= \frac{1}{2}$

85.9 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}} =$

$= \frac{3 \lim\limits_{3x\to0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{2 \lim\limits_{2x\to0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} =$

$= \frac{3 \times 1}{2 \times 1} =$

$= \frac{3}{2}$

85.10 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \left(\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 =$

$= \left(\frac{1}{2} \lim\limits_{\frac{x}{2}\to0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$

$= \left(\frac{1}{2} \times 1\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}$

85.11 $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}} =$

$= \frac{2 \lim\limits_{2x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x}}{3 \lim\limits_{3x\to0} \frac{\ln(1+3x)}{3x}} =$

$= \frac{2 \times 1}{3 \times 1} =$

$= \frac{2}{3}$

85.12 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-x)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} =$

$= \frac{-\lim\limits_{-x\to0} \frac{\ln(1-x)}{-x}}{\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}} =$

$= -\frac{1}{1} =$

$= -1$

85.13 $\operatorname{Lim}_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}} =$

$= \frac{2 \lim\limits_{2x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x}}{3 \lim\limits_{3x\to0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} =$

$= \frac{2 \times 1}{3 \times 1} =$

$= \frac{2}{3}$

85.14 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} =$

$= \frac{\lim\limits_{\operatorname{sen} x\to0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}{\left(\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{-1}} =$

$= \frac{1}{1} =$

$= 1$

85.15 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{e^x-e^5}=\left(\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x-e^5}{5-x}\right)^{-1}=$

$=\left(\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^5(e^{x-5}-1)}{5-x}\right)^{-1}=$

$=\left(-\lim\limits_{x-5\to 0}\dfrac{e^5(e^{x-5}-1)}{x-5}\right)^{-1}=$

$=-\dfrac{1}{e^5}$

86.

86.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=$

$=+\infty+0=$

$=+\infty$

86.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^2-4)\,e^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4}{e^x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x}=$

$=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\right)^{-1}-\dfrac{4}{+\infty}=$

$=\dfrac{1}{+\infty}-0=$

$=0-0=$

$=0$

86.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x+x^2}{e^x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(3+\frac{x^2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{5}{e^x}\right)}=$

$=\dfrac{3+\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\right)^{-1}}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{e^x}}=$

$=\dfrac{3+\frac{1}{+\infty}}{1-\frac{5}{+\infty}}=$

$=\dfrac{3+0}{1-0}=$

$=3$

86.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^4)}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln x}{2x}=$

$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$

$=2\times 0=$

$=0$

86.5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2}=$

$\underset{\text{M.V.: } y=-x}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y^2}=$

$=+\infty$

86.6 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]\underset{\text{M.V.: } y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{y}\ln\left(\dfrac{1}{2y}\right)\right)=$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{-\ln(2y)}{y}=$

$=-\left(\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln 2}{y}+\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}\right)=$

$=-\dfrac{\ln 2}{+\infty}-0=$

$=0-0=0$

87.

87.1 Recorrendo à regra de L'Hôpital, tem-se:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\operatorname{sen} x}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-\cos x)'}{(\operatorname{sen} x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\operatorname{sen} x}{\cos x}=$

$=\dfrac{1+0}{1}=$

$=1$

87.2 Recorrendo à regra de L'Hôpital, tem-se:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x\ln x)'}{(x^2-1)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+x\times\frac{1}{x}}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{2x}=$

$=\dfrac{0+1}{2}=$

$=\dfrac{1}{2}$

87.3 Recorrendo à regra de L'Hôpital, tem-se:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}\underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x^2+1))'}{x'}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}}=$

$=\dfrac{2}{+\infty+0}=$

$=0$

87.4 Recorrendo à regra de L'Hôpital, tem-se:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x-x+1)'}{((x-1)^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}{(2(x-1))'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2}=$

$=-\dfrac{1}{2}$

87.5 Recorrendo à regra de L'Hôpital, tem-se:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=$

$=\dfrac{1+1}{2}=$

$=1$

87.6 Recorrendo à regra de L'Hôpital, tem-se:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+x)-x)'}{(x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-1-x}{1+x}}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{1+x}}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2x(1+x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=$

$=-\dfrac{1}{2(1+0)}=$

$=-\dfrac{1}{2}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

88.

88.1 Para que f seja contínua em $x = 0$, temos de ter $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

$f(0) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} =$

$= -\lim\limits_{-x\to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{-x} =$

$= -1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^x}{x} =$

$= -\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} =$

$= -1$

Logo, f é contínua em $x = 0$.

88.2 Para que g seja contínua em $x = 0$, temos de ter $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

$g(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(e^2 + x) =$

$= \ln(e^2) =$

$= 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{4x} =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{2x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$

$= \frac{1}{2} \times 1 =$

$= \frac{1}{2}$

Como $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então g não é contínua em $x = 0$.

89.

89.1 Para que f seja contínua em $x = 0$, temos de ter $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

$f(0) = k - e^0 = k - 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2\lim\limits_{2x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2$

Logo, $k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$.

O valor de k é 3.

89.2 Para que g seja contínua em $x = 0$, temos de ter $g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

$g(0) = 4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+4x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (x + 4) =$

$= 0 + 4 =$

$= 4$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx}-1}{x} =$

$= k\lim\limits_{kx\to 0^-} \frac{e^{kx}-1}{kx} =$

$= k \times 1 =$

$= k$

Logo, $k = 4$.

90.

90.1 $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$, porque resulta de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, então não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} =$

$= \frac{1-0}{1+0} =$

$= 1$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} =$

$= \frac{0-1}{0+1} =$

$= -1$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

90.2 $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$

$D_f =]0, +\infty[$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(2x + \frac{\ln x}{x}\right) =$

$= 0 + \frac{-\infty}{0^+} =$

$= -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $]0, +\infty[$.

Assíntotas não verticais

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\frac{\ln x}{x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{\ln x}{x^2}\right) =$

$= 2 + 0 =$

$= 2$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x + \frac{\ln x}{x} - 2x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =$

$= 0$

A reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

90.3 $f(x) = x - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln x) =$
$= 0 - (-\infty) =$
$= +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $]0, +\infty[$.

Assíntotas não verticais

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x - \ln x}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) =$
$= 1 - 0 =$
$= 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x - x) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln x) =$
$= -\infty$

O gráfico de f não admite assíntotas não verticais.

90.4 $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: e^x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} =$
$= \left(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x}\right)^{-1} =$
$= 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{e^x - 1} =$
$= \left(\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}\right)^{-1} =$
$= 1$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Assíntotas não verticais

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - 1} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} =$
$= \frac{1}{+\infty - 0} =$
$= 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{e^x - 1}}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} =$
$= \frac{1}{0 - 1} =$
$= -1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} + x\right) =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x + xe^x - x}{e^x - 1} =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} =$
$\underset{\text{M.V.: } y = -x}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{-ye^{-y}}{e^{-y} - 1} =$
$= -\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\frac{y}{e^y}}{\frac{1}{e^y} - 1} =$
$= -\frac{\left(\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}\right)^{-1}}{0 - 1} =$
$= -\frac{0}{-1} =$
$= 0$

A reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

91.

91.1 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\frac{1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Assíntotas não verticais

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}} =$
$= \frac{1}{1 - 0} =$
$= 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2 - 1} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(x - \frac{1}{x}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} =$
$= \frac{1}{+\infty - 0} =$
$= 0$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

Analogamente se conclui que a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \wedge (x^2-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2 = 0 \vee x^2 - 3 = 0) \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de f	↗	Máx.	↘	n.d.	↘		↘	n.d.	↘	Min.	↗

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

A função f é crescente em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]\sqrt{3}, +\infty[$, é decrescente em $]-\sqrt{3}, -1[$, em $]-1, 1[$ e em $]1, \sqrt{3}[$, tem máximo relativo $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ para $x = -\sqrt{3}$ e tem mínimo relativo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ para $x = \sqrt{3}$.

Concavidade e extremos

$$f''(x) = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)\left((4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)\right)}{(x^2-1)^4} = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

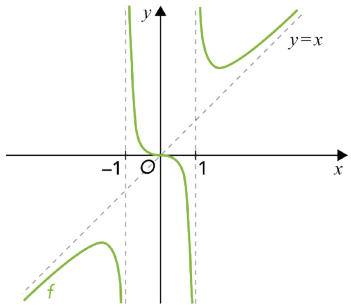
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x = 0 \wedge (x^2-1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+3) = 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (2x = 0 \vee x^2 + 3 = 0) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	∩	n.d.	∪	P.I.	∩	n.d.	∪

$f(0) = 0$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$, tem concavidade voltada para cima em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão de coordenadas $(0, 0)$.

Representação gráfica



91.2 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

Não há assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Monotonia e extremos

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{e^x \times x^2 - e^x \times 2x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow e^x(x-2) = 0 \wedge x^3 \neq 0 \Leftrightarrow (e^x = 0 \vee x - 2 = 0) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de f	↗	n.d.	↘	Min.	↗

$f(2) = \frac{e^2}{4}$

A função f é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$, é decrescente em $]0, 2[$ e tem mínimo relativo $\frac{e^2}{4}$ para $x = 2$.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

Concavidade e extremos

$f''(x) = \left(\frac{e^x(x-2)}{x^3}\right)' =$

$= \frac{(e^x(x-2)+e^x)x^3 - e^x(x-2)3x^2}{x^6} =$

$= \frac{x^3e^x(x-2+1) - 3x^2e^x(x-2)}{x^6} =$

$= \frac{x^2e^x(x(x-1) - 3(x-2))}{x^6} =$

$= \frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4} = 0$

$\Leftrightarrow e^x(x^2-4x+6) = 0 \wedge x^4 \neq 0$

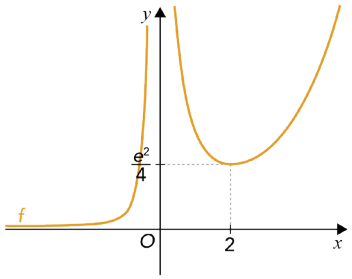
$\Leftrightarrow \left(\underbrace{e^x = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee x^2-4x+6 = 0\right) \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2}}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \wedge x \neq 0$

$f''(x) = \frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

Representação gráfica



91.3 $f(x) = x - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

Assíntotas verticais

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $]0, +\infty[$.

Assíntotas não verticais

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \ln x}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) =$

$= 1 - 0 =$

$= 1$

$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$

$= \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x - x) =$

$= \lim_{x\to+\infty} (-\ln x) =$

$= -\infty$

Não há assíntotas não verticais ao gráfico de f.

Monotonia e extremos

$f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de f	n.d.	↘	Min.	↗

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

A função f é crescente em $]1, +\infty[$, é decrescente em $]0, 1[$, e tem mínimo relativo 1 para $x = 1$.

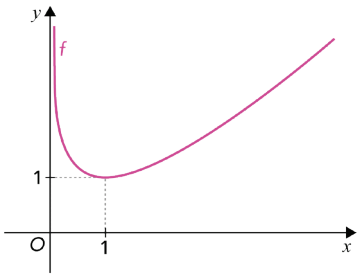
Concavidade e extremos

$f''(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)' = \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0,$

$\forall x \in]0, +\infty[$.

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

Representação gráfica



91.4 $f(x) = x(\ln x)^2$

$D_f =]0, +\infty[$

Assíntotas verticais

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x(\ln x)^2) =$

$\underset{\text{M.V.: } y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)^2\right) =$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{(-\ln y)^2}{y} =$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln y)^2}{y} =$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{2\ln y \times \frac{1}{y}}{1} =$

$= 2\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} =$

$= 2 \times 0 =$

$= 0$

A reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

O gráfico de f não admite outras assíntotas verticais, pois f é contínua em $]0, +\infty[$.

Assíntotas não verticais

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\ln x)^2}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 =$

$= +\infty$

Não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

Monotonia e extremos

$f'(x) = (x(\ln x)^2)' =$
$= (\ln x)^2 + x \times 2\ln x \times \frac{1}{x} =$
$= (\ln x)^2 + 2\ln x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x = 0$
$\Leftrightarrow \ln x\,(\ln x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee \ln x = -2$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$

x	0		e^{-2}		1	$+\infty$
$\ln x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln x + 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Sinal de f'	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f	n.d.	↗	Máx.	↘	Min.	↗

$f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$

$f(1) = 1(\ln 1)^2 = 1 \times 0 = 0$

A função f é crescente em $]0, e^{-2}[$ e em $]1, +\infty[$, é decrescente em $]e^{-2}, 1[$, tem máximo relativo $\frac{4}{e^2}$ para $x = e^{-2}$ e tem mínimo relativo 0 para $x = 1$.

Concavidade e extremos

$f''(x) = ((\ln x)^2 + 2\ln x)' =$
$= 2\ln x \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} =$
$= \frac{2(\ln x + 1)}{x}$

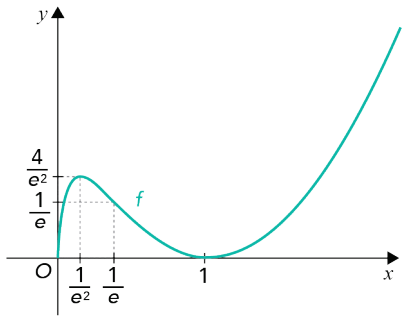
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln x + 1)}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \wedge x \neq 0$
$\Leftrightarrow x = e^{-1}$

x	0		e^{-1}	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	$-$	0	$+$
Concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$f(e^{-1}) = e^{-1}(\ln(e^{-1}))^2 = \frac{1}{e}$

O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0, e^{-1}[$, tem concavidade voltada para cima em $]e^{-1}, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

Representação gráfica



92.

92.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4e^{3x} - e^{2x}}{2e^{3x} + 3e^x - e^{-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}(4 - e^{-x})}{e^{3x}(2 + 3e^{-2x} - e^{-4x})} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4 - e^{-x}}{2 + 3e^{-2x} - e^{-4x}} =$
$= \frac{4 - 0}{2 + 0 - 0} =$
$= 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^{3x} - e^{2x}}{2e^{3x} + 3e^x - e^{-x}} =$
$= \frac{0 - 0}{0 + 0 - (+\infty)} =$
$= \frac{0}{-\infty} =$
$= 0$

92.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x^2) - \ln(ex^2 + x)) \overset{(\infty-\infty)}{=}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2}{ex^2 + x}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e + \frac{1}{x}}\right) =$
$= \ln\left(\frac{1}{e}\right) =$
$= -1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (\ln(x^2) - \ln(ex^2 + x)) \overset{(\infty-\infty)}{=}$
$= \lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\frac{x^2}{ex^2 + x}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\frac{x}{ex + 1}\right) =$
$= \ln(0^+) =$
$= -\infty$

92.3 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} =$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} =$
$= \frac{1}{1 + 1 + 0} =$
$= \frac{1}{2}$

92.4 $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \frac{2x - 4}{\ln(x - 1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$
$= \lim\limits_{x\to2} \frac{2(x-2)}{\ln(x-1)} =$
$\underset{\text{M.V.: } y = x-2}{=} 2\lim\limits_{y\to0} \frac{y}{\ln(y+1)} =$
$= 2\left(\lim\limits_{y\to0} \frac{\ln(y+1)}{y}\right)^{-1} =$
$= 2 \times 1 =$
$= 2$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\ln(x-1)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\ln(x-1)} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x-1} =$$
$$\underset{\text{M.V.: } y=x-1}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\ln y} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x-1} =$$
$$= +\infty \times 2 =$$
$$= +\infty$$

92.5 $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{e^x-x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(x^2)'}{(e^x-x-1)'} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{2x}{e^x-1} =$$
$$= 2\left(\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}\right)^{-1} =$$
$$= 2 \times 1 =$$
$$= 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x-x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x-x-1)'} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x-1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} =$$
$$= \frac{2}{+\infty-0} =$$
$$= 0$$

92.6 $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{-x+1+\ln x}{x^2} =$
$$= \frac{-\infty}{0^+} =$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1+\ln x}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right) =$$
$$= 0+0+0 =$$
$$= 0$$

92.7 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x+1}} =$
$$= \frac{+\infty}{1} =$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x+1}} =$$
$$= \frac{0}{+\infty} =$$
$$= 0$$

92.8 $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \left[(x^2-1)e^{-\frac{1}{x-1}}\right] \overset{(0\times\infty)}{=}$
$$= \lim_{x\to1^+} (x+1) \times \lim_{x\to1^+} \left[(x-1)e^{-\frac{1}{x-1}}\right] =$$
$$\underset{\text{M.V.: } y=\frac{1}{x-1}}{=} \lim_{x\to1^+} (x+1) \times \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{e^{-y}}{y}\right) =$$
$$= 2 \times \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{ye^y}\right) =$$
$$= 2 \times \frac{1}{+\infty} =$$
$$= 2 \times 0 =$$
$$= 0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \left[(x^2-1)e^{-\frac{1}{x-1}}\right] =$$
$$= \lim_{x\to1^-} (x+1) \times \lim_{x\to1^-} \left[(x-1)e^{-\frac{1}{x-1}}\right] =$$
$$\underset{\text{M.V.: } y=-\frac{1}{x-1}}{=} \lim_{x\to1^-} (x+1) \times \lim_{y\to+\infty} \left(-\frac{1}{y}e^y\right) =$$
$$= 2 \times \left(-\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}\right) =$$
$$= 2 \times (-\infty) =$$
$$= -\infty$$

Como $\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$, então não existe $\lim_{x\to1} f(x)$.

93.

93.1 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x^3+x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Assíntotas verticais

O único candidato a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 0$, já que a função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{2x}-1}{x^3+x} =$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{e^{2x}-1}{x(x^2+1)} =$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{e^{2x}-1}{x} \times \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2+1} =$$
$$= 2 \lim_{2x\to0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{1}{1} =$$
$$= 2 \times 1 \times 1 =$$
$$= 2$$

De forma análoga, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 2$.

Logo, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{x^3+x} = \frac{0-1}{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x^3+x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{x^4+x^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{2x}}{x^4}-\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \frac{+\infty}{1} =$$
$$= +\infty$$

Não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

93.2 $f(x) = \begin{cases} \ln(e^x+2) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^2+\ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Assíntotas verticais

O único candidato a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 0$, já que a função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+\ln x}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{\ln x}{x}\right) =$$
$$= 0 + \frac{-\infty}{0^+} =$$
$$= -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln(e^x + 2) =$$
$$= \ln(0 + 2) =$$
$$= \ln 2$$

A reta de equação $y = \ln 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2+\ln x}{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\ln x}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) =$$
$$= 1 + 0 =$$
$$= 1$$
$$b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+\ln x}{x} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(x + \frac{\ln x}{x} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} =$$
$$= 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

93.3 $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{1-e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2}{x+1} - \ln(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Assíntotas verticais

O único candidato a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 0$, já que a função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{1-e^{2x}} = \frac{3}{1-1^-} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{1-e^{2x}} = \frac{3}{1-0} = 3$$

A reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1} - \ln(x+1)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x} - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}\right) =$$
$$\underset{\text{M.V.: } y = x+1}{=} \frac{1}{1+0} - \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$
$$= 1 - 0 \times 1 =$$
$$= 1$$
$$b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \ln(x+1) - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} - \ln(x+1)\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \ln(x+1)\right) =$$
$$= -1 - (+\infty) =$$
$$= -\infty$$

Não existe assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

93.4 $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{e^{x-1}-x} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2x^2 - \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Assíntotas verticais

O único candidato a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = 1$, já que a função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{e^{x-1}-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{((x-1)^2)'}{(e^{x-1}-x)'} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{e^{x-1}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(2(x-1))'}{(e^{x-1}-1)'} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{e^{x-1}} =$$
$$= \frac{2}{e^0} =$$
$$= 2$$

A reta de equação $x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{(x-1)^2}{e^{x-1}-x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)^2}{x(e^{x-1}-x)} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+1}{xe^{x-1}-x^2} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{e^{x-1}}{x}-1} =$$
$$= \frac{1-0+0}{0-1} =$$
$$= -1$$
$$b = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{e^{x-1}-x} + x\right) =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+1+xe^{x-1}-x^2}{e^{x-1}-x} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x+1+xe^{x-1}}{e^{x-1}-x} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}+e^{x-1}}{\frac{e^{x-1}}{x}-1} =$$
$$= \frac{-2+0+0}{0-1} =$$
$$= 2$$

A reta de equação $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2 - \ln x}{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2 - \ln x}{x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x^2}\right) =$$
$$= 2 - 0 =$$
$$= 2$$
$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2 - \ln x}{x} - 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2x - \frac{\ln x}{x} - 2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) =$$
$$= 0$$

A reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

94. $D_g = D_h = \mathbb{R}^+$

Como a reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota ao gráfico de g, tem-se que $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$.

Assim, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(g(x)) - \ln x) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{g(x)}{x}\right) =$$
$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}\right) =$$
$$= \ln 2$$

Logo, a reta de equação $y = \ln 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de h.

95. $D_f = D_g = \mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$, ou seja, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, logo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Assim, $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + \sqrt{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$
$$= 1 + 0 =$$
$$= 1$$
$$b = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - mx) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (f(x) + \sqrt{x} - x) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) + \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$$
$$= 0 + (+\infty) =$$
$$= +\infty$$

Logo, o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

96. $D_f = D_g = \mathbb{R}^+$

$$m_g = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2 + f(x)}{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + f(x)}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{f(x)}{x^2}\right) =$$
$$= 1 + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}\right) =$$
$$= 1 + m \times 0 =$$
$$= 1$$
$$b_g = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + f(x)}{x} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{f(x)}{x} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= m$$

Logo, a reta de equação $y = x + m$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

7. Resolução aproximada de equações

Páginas 62 a 64

97.

97.1 A função T é contínua no seu domínio por se tratar do resultado de operações sucessivas com funções contínuas, em particular, é contínua em $[2, 3]$.

$T(2) = 10 + 5 \times 2 \times e^{-0,2\times 2} \approx 16,703$

$T(3) = 10 + 5 \times 3 \times e^{-0,2\times 3} \approx 18,232$

Logo, $T(2) < 18 < T(3)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe um instante entre os dois e os três minutos em que a temperatura da substância foi exatamente 18 °C.

97.2 De acordo com a alínea anterior, a equação $T(t) = 18$ tem pelo menos uma solução em $[2, 3]$, ou seja, a equação $T(t) - 18 = 0$ tem pelo menos uma solução nesse intervalo.

Seja $f(t) = T(t) - 18$.

Iteração	$[a, b]$	a	b	$\frac{b-a}{2}$
1	$[2, 3]$	2	3	0,5
2	$[2,5; 3]$	2,5	3	0,25
3	$[2,75; 3]$	2,75	3	0,125
4	$[2,75; 2,875]$	2,75	2,875	0,0625
5	$[2,75; 2,8125]$	2,75	2,8125	$\mathbf{0,031\,25}$

Iteração	$f(a)$	$f(b)$	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$
1	$-1,297$	0,232	2,5	$-0,418$
2	$-0,418$	0,232	2,75	$-0,067$
3	$-0,067$	0,232	2,875	0,089
4	$-0,067$	0,089	2,8125	0,013
5			$\mathbf{2,781\,25}$	

Como $0,03125 < 0,05$ então o valor aproximado da solução é o ponto médio do intervalo $[2,75; 2,8125]$, que é 2,781 25.

97.3 $f(t) = T(t) - 18 =$

$= 10 + 5te^{-0,2t} - 18 =$

$= 5te^{-0,2t} - 8$

$f'(t) = 5e^{-0,2t} + 5t \times (-0,2)e^{-0,2t} =$

$= 5e^{-0,2t}(1 - 0,2t)$

Fórmula de recorrência: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Iteração	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
1	2	$-1,297$	2,011	2,645
2	2,645	$-0,208$	1,388	2,795
3	2,795	$-0,009$	1,261	$\mathbf{2,802}$

A aproximação obtida após três iterações é 2,802.

98.

98.1 $f(x) = e^x + x - 2$

Iteração	$[a, b]$	a	b	$\frac{b-a}{2}$
1	$[0; 1]$	0	1	0,5
2	$[0; 0,5]$	0	0,5	0,25
3	$[0,25; 0,5]$	0,25	0,5	0,125
4	$[0,375; 0,5]$	0,375	0,5	$\mathbf{0,0625}$

Iteração	$f(a)$	$f(b)$	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$
1	-1	1,718	0,5	0,149
2	-1	0,149	0,25	$-0,466$
3	$-0,466$	0,149	0,375	$-0,170$
4			$\mathbf{0,4375}$	

Como $0,0625 < 0,1$ então o valor aproximado da solução é o ponto médio do intervalo $[0,375; 0,5]$, que é 0,4375.

98.2 $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$

Iteração	$[a, b]$	a	b	$\frac{b-a}{2}$
1	$[1; 2]$	1	2	0,5
2	$[1,5; 2]$	1,5	2	0,25
3	$[1,75; 2]$	1,75	2	0,125
4	$[1,875; 2]$	1,875	2	$\mathbf{0,0625}$

Iteração	$f(a)$	$f(b)$	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$
1	0,841	$-0,091$	1,5	0,497
2	0,497	$-0,091$	1,75	0,234
3	0,234	$-0,091$	1,875	0,079
4			$\mathbf{1,9375}$	

Como $0,0625 < 0,1$ então o valor aproximado da solução é o ponto médio do intervalo $[1,875; 2]$, que é 1,9375.

99.

99.1 $f(x) = e^x - 3x$

$f'(x) = e^x - 3$

Fórmula de recorrência: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Iteração	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
1	0,5	0,1487	$-1,3513$	0,6101
2	0,6101	0,0104	$-1,1595$	0,6190
3	0,6190	0,0001	$-1,1430$	$\mathbf{0,6191}$

A aproximação obtida após três iterações é 0,619.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

99.2 $f(x) = 2\operatorname{sen} x - \ln(x+1)$

$f'(x) = 2\cos x - \frac{1}{x+1}$

Fórmula de recorrência: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Iteração	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
1	2,5	−0,0558	−1,8880	2,4704
2	2,4704	−0,0005	−1,8543	2,4702
3	2,4702	−0,0001	−1,8541	**2,4702**

A aproximação obtida após três iterações é 2,470.

100.

100.1 No intervalo $]-1, +\infty[$, a função f é contínua porque é definida por uma função racional, em que o denominador não se anula.

No intervalo $]-\infty, -1[$, a função f é contínua porque é definida pelo quociente entre duas funções contínuas, em que o denominador não se anula.

Para que a função f seja contínua em $x = -1$ tem de se ter $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$.

$f(-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} =$

$= \frac{\sqrt{1+3}}{-1} =$

$= -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} (x-1) =$

$= -2$

Logo, a função f é contínua em $x = -1$.

Assim, f é contínua em $\mathbb{R}$.

100.2 Como f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[-2, -1]$.

$f(-2) = \frac{\sqrt{4+3}}{-2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \approx -1{,}32$ (2 c.d.)

$f(-1) = -2$

$f(-1) < -\frac{3}{2} < f(-2)$

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe, pelo menos uma solução da equação $f(x) = -\frac{3}{2}$ no intervalo $]-2, -1[$.

101. $e^{x-1} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow e^{x-1} - \frac{3}{x} = 0$

Seja $f(x) = e^{x-1} - \frac{3}{x}$.

A função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, por se tratar do resultado de operações com funções contínuas, em particular, f é contínua em $[1, 2]$.

$f(1) = e^{1-1} - \frac{3}{1} = 1 - 3 = -2 < 0$

$f(2) = e^{2-1} - \frac{3}{2} = e - \frac{3}{2} > 0$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]1, 2[$, ou seja, a equação $e^{x-1} = \frac{3}{x}$ tem pelo menos uma solução neste intervalo.

102. Para aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy no intervalo $]-1, 1[$, a função tem de ser contínua g nesse intervalo.

No intervalo $]0, +\infty[$, a função g é contínua por se encontrar definida por uma função polinomial, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

No intervalo $]-\infty, 0[$, a função g é contínua por se encontrar definida pelo quociente entre duas funções contínuas, em que o denominador não se anula, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

Para que a função g seja contínua em $x = 0$ tem de se ter $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

$g(0) = k$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x-k}{x-1} = \frac{-k}{-1} = k$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + 2x + k) = k$

Logo, a função g é contínua em $x = 0$, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$.

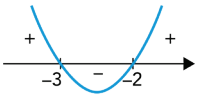
Assim, g é contínua em $\mathbb{R}$ e, em particular, g é contínua em $[-1, 1]$.

$g(-1) = \frac{2\times(-1)-k}{-1-1} = \frac{-2-k}{-2} = \frac{k+2}{2}$

$g(1) = 1^2 + 2\times 1 + k = 3 + k$

Para que se possa usar o teorema de Bolzano-Cauchy para concluir que a função g admite pelo menos um zero no intervalo $]-1, 1[$ tem de se ter:

$g(-1) \times g(1) < 0 \Leftrightarrow \frac{k+2}{2} \times (k+3) < 0$



Assim, o conjunto dos valores de k é $]-3, -2[$.

103.

103.1 Pretende-se mostrar que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{10}, 1\right[$.

A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por ser o resultado de operações com funções contínuas neste conjunto, em particular, f é contínua em $\left[\frac{1}{10}, 1\right]$.

$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - 2\ln\left(\frac{1}{10}\right) \approx 4{,}705$

$f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$

Logo, $f(1) < 2 < f\left(\frac{1}{10}\right)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução em $\left]\frac{1}{10}, 1\right[$.

103.2 $f'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

x	0		2	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	−	0	+
Variação de f	n.d.	↘	Mín.	↗

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

A função f é estritamente decrescente em $]0,2[$, em particular, é estritamente decrescente em $\left]\frac{1}{10},1\right[$.
Como f é contínua e estritamente decrescente no intervalo $\left]\frac{1}{10},1\right[$, então o seu gráfico só pode intersetar a reta de equação $y=2$ num único ponto desse intervalo.

103.3 $f(x)=2 \Leftrightarrow x-2\ln x=2$
$\Leftrightarrow x-2\ln x-2=0$
Seja $g(x)=x-2-2\ln x$

a) $g'(x)=1-\frac{2}{x}$

Fórmula de recorrência: $x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

$x_1=5{,}5$

$x_2=5{,}5-\frac{g(5{,}5)}{g'(5{,}5)}\approx 5{,}5-\frac{0{,}0905}{0{,}6364}\approx 5{,}358$

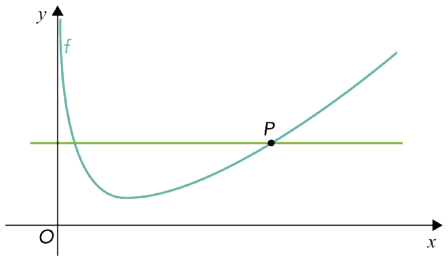
b)

Iteração	$[a,b]$	a	b	$\frac{b-a}{2}$
1	$[5;6]$	5	6	0,5
2	$[5;5{,}5]$	5	5,5	0,25
3	$[5{,}25;5{,}5]$			

Iteração	$g(a)$	$g(b)$	$m=\frac{a+b}{2}$	$g(m)$
1	$-0{,}219$	0,416	5,5	0,091
2	$-0{,}219$	0,091	5,25	$-0{,}066$
3				

Um intervalo de amplitude 0,25 que contém uma solução da equação é $[5{,}25;5{,}5]$.

103.4



$P(5{,}36;2)$
A solução de $f(x)=2$ no intervalo $]5,6[$ é, aproximadamente, 5,36.

104. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o resultado de operações com funções contínuas neste conjunto, em particular, g é contínua em $[0,2]$.
$g(0)=e^0+a\times 0=1>0$
$g(2)=e^2+a\times 2=e^2+2a$
Sabe-se que $a<-4$, então
$a<-4 \Leftrightarrow 2a<-8 \Leftrightarrow e^2+2a<e^2-8$
Como $e^2-8\approx -0{,}611$, então $g(2)<0$.
Logo, $g(2)<0<g(0)$.
Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $g(x)=0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0,2[$.

105. Pretende-se provar que existe pelo menos um ponto c no intervalo $[0,k]$ tal que $g(c)=c \Leftrightarrow g(c)-c=0$.
Seja $f(x)=g(x)-x$.
A função f é contínua em $[0,k]$ por se tratar da diferença entre funções contínuas nesse intervalo.
$f(0)=g(0)-0=k-0=k>0$
$f(k)=g(k)-k=0-k=-k<0$
Logo, $f(k)<0<f(0)$.
Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um c no intervalo $]0,k[$ tal que $f(c)=0$, ou seja, tal que $g(c)=c$.

106. A função h é contínua em $[a,b]$ por se tratar da diferença entre funções contínuas neste intervalo.
$h(a)=(g\circ f)(a)-a=$
$=g\big(f(a)\big)-a=$
$=g(a)-a=$
$=b-a>0$
$h(b)=(g\circ f)(b)-b=$
$=g\big(f(b)\big)-b=$
$=g(b)-b=$
$=a-b<0$
Logo, $h(b)<0<h(a)$
Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos garantir que existe pelo menos um zero de h no intervalo $]a,b[$.

107. Pretende-se provar que existe pelo menos um ponto $c\in]0,L[$ tal que $f(c)=f(c+L)$.
$f(c)=f(c+L) \Leftrightarrow f(c)-f(c+L)=0$
Seja $g(x)=f(x)-f(x+L)$.
A função g é contínua em $[0,L]$, por se tratar da diferença entre funções contínuas neste intervalo.
$g(0)=f(0)-f(L)$
$g(L)=f(L)-f(2L)=f(L)-f(0)$
Então,
$g(0)\times g(L)=\big(f(0)-f(L)\big)\times\big(f(L)-f(0)\big)=$
$=-\big(f(0)-f(L)\big)^2<0$
Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, a equação $g(x)=0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0,L[$, ou seja, a equação $f(x)=f(x+L)$ tem pelo menos uma solução nesse intervalo.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

Exercícios globais

Páginas 65 a 70

108. Opção (D)

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, logo f' é negativa neste intervalo, o que exclui a opção (C).

A função f também é estritamente decrescente em $]0, 4[$, logo f' também é negativa neste intervalo, o que exclui a opção (A).

No intervalo $]4, +\infty[$, a função f é crescente, pelo que f'é positiva, e exclui-se a opção (B).

A opção correta é, assim, a opção (D).

109. Opção (C)

As abcissas dos pontos de inflexão são zeros de f''. Por observação do gráfico, pode afirmar-se que, dos quatro valores apresentados, apenas o 1 pode ser abcissa desse ponto de inflexão.

110. Opção (B)

Como a reta que é o gráfico da função f'' tem declive negativo e interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -1)$, então o ponto de interseção desta reta com o eixo Ox tem abcissa negativa e $f''(x) < 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$. Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$.

111. Opção (A)

O gráfico da opção (B) não é o correto, pois $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe e é positivo para qualquer número real a não nulo, ou seja, $f'(a) > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, neste gráfico, a função representada é decrescente em $\mathbb{R}^-$, logo $f'(a) < 0$ em $\mathbb{R}^-$.

O gráfico da opção (C) não é o correto, pois existe um número real positivo a partir do qual a função é decrescente, ou seja, a partir do qual $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ é negativo.

O gráfico da opção (D) não é o correto, pois, tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$, o que não pode acontecer já que $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

112. Opção (B)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+3x}{x} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + 3 = 5$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

113. Opção (A)

A reta de equação $y = -x + 4$ é assíntota ao gráfico de g, de domínio $\mathbb{R}^+$, logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) + x) = 4$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) + x + \frac{g(x)}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) + x) + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} =$

$= -1 + 4 = 3$

114. Opção (B)

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{2x}{x+1} = 0 = f(0)$

Para a opção (A), tem-se:

$\lim\limits_{x\to0^-} (f+g)(x) = 1 + 0 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} (f+g)(x) = 0 + 1 = 1$

$(f+g)(0) = 0 + 0 = 0$

Para a opção (B), tem-se:

$\lim\limits_{x\to0^-} (f+g)(x) = 1 + (-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} (f+g)(x) = 0 + 0 = 0$

$(f+g)(0) = 0 + 0 = 0$

Para a opção (C), tem-se:

$\lim\limits_{x\to0^-} (f+g)(x) = 1 + (-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} (f+g)(x) = 0 + 1 = 1$

$(f+g)(0) = 0 + 1 = 1$

Para a opção (D), tem-se:

$\lim\limits_{x\to0^-} (f+g)(x) = 1 + 1 = 2$

$\lim\limits_{x\to0^+} (f+g)(x) = 0 + 0 = 0$

$(f+g)(0) = 0 + 1 = 1$

Apenas na opção (B) se tem $\lim\limits_{x\to0^-} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (f+g)(x) = (f+g)(0)$.

115. $x + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - x$, com $x \in]0, 8[$.

A medida da hipotenusa é dada, em função de x, por

$h(x) = \sqrt{x^2 + (8-x)^2} =$

$= \sqrt{x^2 + 64 - 16x + x^2} =$

$= \sqrt{2x^2 - 16x + 64}$

Então,

$h'(x) = \left(\sqrt{2x^2 - 16x + 64}\right)' =$

$= \frac{1}{2}(2x^2 - 16x + 64)^{-\frac{1}{2}}(2x^2 - 16x + 64)' =$

$= \frac{4x - 16}{2\sqrt{2x^2 - 16x + 64}}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-16}{2\sqrt{2x^2-16x+64}} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 16 = 0 \wedge \underbrace{2x^2 - 16x + 64 > 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow x = 4$

Cálculo auxiliar:

$2x^2 - 16x + 64 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-4\times32}}{2}$

Equação impossível em $\mathbb{R}$

x	0		4		8
Sinal de h'		–	0	+	
Variação de h		↘	Mín.	↗	

$h(4) = \sqrt{2 \times 16 - 16 \times 4 + 64} = 4\sqrt{2}$

O valor mínimo do comprimento da hipotenusa é $4\sqrt{2}$.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

116.

116.1 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: \underbrace{1 + e^{-2x} \neq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}\right\} = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar do resultado de operações com funções contínuas neste conjunto, em que o denominador nunca se anula, logo o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1+e^{-2x}} = \\ = \frac{4}{1+e^{-\infty}} = \\ = \frac{4}{1+0} = \\ = 4$$

A reta de equação $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+e^{-2x}} = \\ = \frac{4}{1+e^{+\infty}} = \\ = \frac{4}{1+(+\infty)} = \\ = \frac{4}{+\infty} = \\ = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

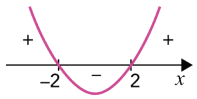
116.2 $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0\} = \\ =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$



Assíntotas verticais

$\lim_{x\to-2^-} g(x) = \lim_{x\to-2^-} \ln(x^2-4) = \ln(0^+) = -\infty$

A reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

$\lim_{x\to2^+} g(x) = \lim_{x\to2^+} \ln(x^2-4) = \ln(0^+) = -\infty$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{x} = \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x^2-4))'}{x'} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-4}}{1} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-\frac{4}{x}} = \\ = \frac{2}{+\infty} = \\ = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \\ = \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-4) = \\ = \ln(+\infty) = \\ = +\infty$$

O gráfico de g não admite assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

Analogamente se prova que o gráfico de g não admite assíntota não vertical quando $x \to -\infty$.

116.3 $f(x) = \frac{4}{1+e^{-2x}}$

$f'(x) = \frac{0-4(-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{8e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$

Como $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio e não tem extremos.

116.4 $g(x) = \ln(x^2-4)$

$g(\sqrt{5}) = \ln(5-4) = \ln 1 = 0$

$g'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

$m_t = g'(\sqrt{5}) = \frac{2\sqrt{5}}{5-4} = 2\sqrt{5}$

Logo, $t: y = 2\sqrt{5}x + b$.

O ponto de coordenadas $(\sqrt{5}, 0)$ pertence à reta t:

$0 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} + b \Leftrightarrow b = -10$

Assim, $t: y = 2\sqrt{5}x - 10$

116.5 $g'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

$$g''(x) = \frac{2(x^2-4) - 2x \times 2x}{(x^2-4)^2} = \\ = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} = \\ = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

$g''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Logo, o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

116.6 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Pretende-se mostrar que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]7, 9[$.

A função h é contínua no seu domínio ($D_h =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$) por se tratar da diferença entre funções contínuas nesse conjunto, em particular, h é contínua em $[7, 9]$.

$h(7) = \frac{4}{1+e^{-14}} - \ln(49-4) \approx 0{,}193$

$h(9) = \frac{4}{1+e^{-18}} - \ln(81-4) \approx -0{,}344$

Logo, $h(9) < 0 < h(7)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists x \in]7, 9[: h(x) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in]7, 9[: f(x) = g(x)$

116.7 Seja h a função definida na alínea anterior.

$h(x) = \frac{4}{1+e^{-2x}} - \ln(x^2-4)$

$h'(x) = \frac{8e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} - \frac{2x}{x^2-4}$

Fórmula de recorrência: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

Assim, $x_2 = 8 - \frac{h(8)}{h'(8)} \approx 8 - \frac{-0{,}094\,35}{-0{,}266\,67} \approx 7{,}646$.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

117.

117.1 Para que f seja contínua em $x = 0$, tem de se ter $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{x} =$

$= 2 \lim\limits_{2x\to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} =$

$= 2 \times 1 =$

$= 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} + 3\right) =$

$= -\lim\limits_{-x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1}{-x} + 3 =$

$= -1 + 3 =$

$= 2$

Assim, f é contínua em $x = 0$.

117.2 $f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) - x^3 = 0$.

Seja $g(x) = f(x) - x^3$. Pretende-se mostrar que a função g tem pelo menos um zero em $]-1, 2[$.

A função g é contínua em $[-1, 2]$, pois está definida pela diferença entre funções contínuas neste intervalo (vimos na alínea anterior que f é contínua em $x = 0$).

$g(-1) = \frac{\text{sen}(-2)}{-1} - (-1)^3 = \text{sen}(2) + 1 \approx 1{,}91 > 0$

$g(2) = \frac{e^{-2}-1}{2} + 3 - 2^3 \approx -5{,}43 < 0$

Logo, $g(2) < 0 < g(-1)$.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists x \in]-1, 2[: g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \exists x \in]-1, 2[: f(x) = x^3$

117.3 $f(x) = (4 - x)e^{x-3} + 2$ se $x \in]4, +\infty[$.

$f'(x) = -1 \times e^{x-3} + (4 - x)e^{x-3} =$

$= e^{x-3}(-1 + 4 - x) =$

$= e^{x-3}(3 - x)$

$f''(x) = e^{x-3}(3 - x) + e^{x-3} \times (-1) =$

$= e^{x-3}(3 - x - 1) =$

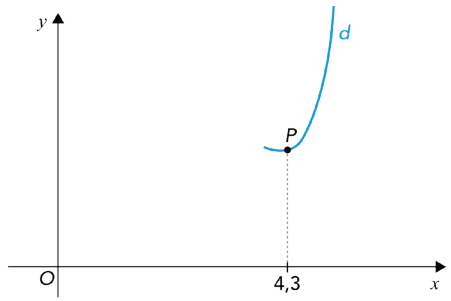
$= e^{x-3}(2 - x)$

$f''(x) < 0, \forall x \in]4, +\infty[$. logo, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]4, +\infty[$ e não existem pontos de inflexão neste intervalo.

117.4 $P(x, f(x))$, com $x > 4$, logo $P(x, (4 - x)e^{x-3} + 2)$.

A distância entre o ponto P e a origem do referencial é dada por $d(x) = \sqrt{x^2 + \left(f(x)\right)^2} =$

$= \sqrt{x^2 + \left((4 - x)e^{x-3} + 2\right)^2}$.



A abcissa do ponto P é 4,3, aproximadamente.

118.

118.1 Opção (C)

20 000 = 200 centenas

16 horas: $P(0) = 0$

17 horas: $P(1) = 10 \times 11 \times e^{-0,1} \approx 99{,}5$

18 horas: $P(2) = 10 \times 2 \times 10 \times e^{-0,2} \approx 163{,}7$

19 horas: $P(3) = 10 \times 3 \times 9 \times e^{-0,3} \approx 200{,}03$

20 horas: $P(4) = 10 \times 4 \times 8 \times e^{-0,4} \approx 214{,}50$

Como P é contínua em $[2, 3]$ e $P(2) < 200 < P(3)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists x \in]2, 3[: P(x) = 200$, ou seja, há um instante entre as 18 horas e as 19 horas em que estavam no recinto 20 000 pessoas.

118.2 $P(t) = 100 \Leftrightarrow P(t) - 100 = 0$

Seja $f(t) = P(t) - 100$

Iteração	$]a, b[$	a	b	$\frac{b-a}{2}$
1	$]1; 2[$	1	2	0,5
2	$]1; 1{,}5[$	1	1,5	0,25
3	$]1; 1{,}25[$	1	1,25	0,125
4	$]1; 1{,}125[$	1	1,125	$\mathbf{0{,}0625}$

Iteração	$f(a)$	$f(b)$	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$
1	−0,47	63,75	1,5	35,56
2	−0,47	35,56	1,25	18,58
3	−0,47	18,58	1,125	9,32
4			$\mathbf{1{,}0625}$	

$0{,}0625 \times 60 \approx 4$

O instante pedido é $t \approx 1{,}0625$, o que corresponde às 17 horas e 4 minutos, aproximadamente.

118.3 $P'(t) = (10t(12 - t)e^{-0,1t})' =$

$= \left((120t - 10t^2)e^{-0,1t}\right)' =$

$= (120 - 20t)e^{-0,1t} +$

$+ (120t - 10t^2)(-0{,}1)e^{-0,1t} =$

$= e^{-0,1t}(120 - 20t - 12t + t^2) =$

$= e^{-0,1t}(t^2 - 32t + 120)$

$P'(2) = e^{-0,2} \times (4 - 64 + 120) =$

$= 60e^{-0,2} \approx 49{,}12$

No instante $t = 2$, isto é, às 18 horas, o número de pessoas no recinto estava a aumentar a uma taxa de 49,12 centenas por hora, ou seja, 4912 pessoas por hora, aproximadamente.

118.4 $P'(t) = e^{-0,1t}(t^2 - 32t + 120)$

$P'(t) = 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,1t}(t^2 - 32t + 120) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,1t} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \vee\ t^2 - 32t + 120 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 480}}{2}$

Logo, $t \approx 4{,}34 \vee t \approx 27{,}66$.

t	0		4,34		12
Sinal de P'		+	0	−	
Variação de P		↗	Máx.	↘	

$0{,}34 \times 60 = 20{,}4$

Assim, o número de pessoas no recinto foi máximo às 20 horas e 20 minutos.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

119.

119.1 $f(1) = 2e$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{xe^x - e}{x-1} =$$

$$\underset{\text{M.V.: } y = x-1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)e^{y+1} - e}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{ye^{y+1} + e^{y+1} - e}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{y+1} + \lim_{y\to 0} \frac{e(e^y - 1)}{y} =$$

$$= e + e \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= e + e \times 1 =$$

$$= 2e$$

$y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$

Como $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

119.2

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x - e}{x^2 - x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{+\infty - 0}{1 - 0} =$$

$$= +\infty$$

Não existe assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x - e}{x^2 - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{x - 1} =$$

$$= \frac{0 - 0}{-\infty - 1} =$$

$$= 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x - e}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{1 - \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{0 - 0}{1 - 0} =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

119.3 Para $x \neq 1$,

$$f'(x) = \left(\frac{xe^x - e}{x-1}\right)' =$$

$$= \frac{(xe^x - e)'(x-1) - (xe^x - e)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(x-1) - (xe^x - e)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{xe^x - e^x + x^2e^x - xe^x - xe^x + e}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(x^2 - x - 1) + e}{(x-1)^2}$$

Assim, $f'(0) = \frac{1\times(-1) + e}{(-1)^2} = e - 1$.

$f(0) = \frac{0 - e}{0 - 1} = e$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 é do tipo $y = (e-1)x + b$.

O ponto de coordenadas $(0, e)$ pertence a esta reta, logo $e = (e-1) \times 0 + b \Leftrightarrow b = e$

A equação pedida é $y = (e-1)x + e$.

120.

120.1 Para que f seja contínua em $x = 0$, tem de se ter $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\ln(1-x) + x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{1-x} + 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-1+1-x}{1-x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-x}{1-x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{2x(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2(1-x)} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Como $f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

120.2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= +\infty - 0 - 0 =$$

$$= +\infty$$

Não existe assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$$

$$\underset{\text{M.V.: } y = -x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} + 0 =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(1+y)}{1+y} \times \lim_{y\to+\infty} \frac{1+y}{y^2} =$$

$$\underset{\text{M.V.: } z = 1+y}{=} \lim_{z\to+\infty} \frac{\ln z}{z} \times \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}\right) =$$

$$= 0 \times 0 =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

120.3

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} =$$

$$= -f'(1) \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - x - 1}{x^2}\right)' =$$

$$= \frac{(e^x - 1)x^2 - (e^x - x - 1)2x}{x^4}$$

$$f'(1) = \frac{(e-1)\times 1 - (e-1-1)\times 2}{1} =$$

$$= e - 1 - 2e + 4 =$$

$$= 3 - e$$

Assim, $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2} = -f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{e-3}{2}$.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

120.4 $g(x) = x^2 f(x) - \frac{e^x}{2} =$

$= x^2 \times \frac{e^x - x - 1}{x^2} - \frac{e^x}{2} =$

$= e^x - x - 1 - \frac{e^x}{2} =$

$= \frac{e^x}{2} - x - 1$

$g'(x) = \frac{e^x}{2} - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

x	0		$\ln 2$	$+\infty$
Sinal de g'		$-$	0	$+$
Variação de g		↘	Mín.	↗

$g(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{2} - \ln 2 - 1 =$

$= \frac{2}{2} - \ln 2 - 1 =$

$= -\ln 2$

A função g é decrescente em $]0, \ln 2\,[$ e é crescente em $]\ln 2\,, +\infty[$, tem mínimo absoluto $-\ln 2$ para $x = \ln 2$.

121.

121.1 Para $t \in [0, a]$, $E(t) =$

$= 10\ln(0{,}2t + 0{,}1)^{11} - 10\ln(2t + 1) + 10\ln 10 - 32t + 231 =$

$= 10\ln(0{,}2t + 0{,}1)^{11} - 10(\ln(2t + 1) - \ln 10) - 32t + 231 =$

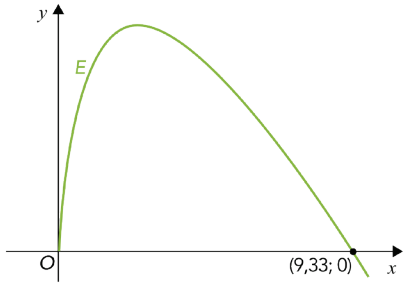
$= 10\ln(0{,}2t + 0{,}1)^{11} - 10\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 231 =$

$= 10\,(\ln(0{,}2t + 0{,}1)^{11} - \ln(0{,}2t + 0{,}1)) - 32t + 231 =$

$= 10\ln(0{,}2t + 0{,}1)^{10} - 32t + 231$

$= 100\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 231$

121.2 $E(t) = 0 \Leftrightarrow 100\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 231 = 0$



As coordenadas do ponto de interseção do gráfico de E com o eixo Ox são (9,33; 0).

Assim, $a \approx 9{,}33$ horas.

121.3 Opção (C)

A função E é contínua em todo o seu domínio, em particular, é contínua em qualquer um dos intervalos apresentados.

$E(6) = 100\ln(0{,}2 \times 6 + 0{,}1) - 32 \times 6 + 231 \approx$

$\approx 65{,}24$

$E(7) = 100\ln(0{,}2 \times 7 + 0{,}1) - 32 \times 7 + 231 \approx$

$\approx 47{,}55$

$E(8) = 100\ln(0{,}2 \times 8 + 0{,}1) - 32 \times 8 + 231 \approx$

$\approx 28{,}06$

$E(9) = 100\ln(0{,}2 \times 9 + 0{,}1) - 32 \times 9 + 231 \approx$

$\approx 7{,}19$

$E(10) = 100\ln(0{,}2 \times 10 + 0{,}1) - 32 \times 10 + 231 \approx$

$\approx -14{,}81$

121.4 $E(t) = 50 \Leftrightarrow 100\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 231 = 50$

$\Leftrightarrow 100\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 181 = 0$

Seja $f(t) = 100\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 181$.

Iteração	$]a, b[$	a	b	$\frac{b-a}{2}$
1	$]6; 7[$	6	7	0,5
2	$]6{,}5; 7[$	6,5	7	0,25
3	$]6{,}75; 7[$	6,75	7	0,125
4	$]6{,}75; 6{,}875[$	6,75	6,875	**0,0625**

Iteração	$f(a)$	$f(b)$	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$
1	15,24	−2,45	6,5	6,65
2	6,65	−2,45	6,75	2,16
3	2,16	−2,45	6,875	−0,13
4			**6,8125**	

$0{,}8125 \times 60 = 48{,}75$

Um valor aproximado para o instante, entre as 14 horas e as 15 horas, em que a bateria estava a 50% é 6,8125, que corresponde às 14 horas e 49 minutos, aproximadamente.

121.5 $E'(t) = (100\ln(0{,}2t + 0{,}1) - 32t + 231)' =$

$= 100 \times \frac{0{,}2}{0{,}2t + 0{,}1} - 32 =$

$= \frac{20}{0{,}2t + 0{,}1} - 32$

$E'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{0{,}2t + 0{,}1} - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 20 - 6{,}4t - 3{,}2 = 0 \wedge 0{,}2t + 0{,}1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 6{,}4t = 16{,}8 \wedge t \neq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = 2{,}625$

t	0		2,625		a
Sinal de E'		+	0	−	
Variação de E	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.

A função E é estritamente crescente em $]0;\ 2{,}625[$ e é estritamente decrescente em $]2{,}625;\ a[$, atinge o seu máximo em $t = 2{,}625$.

$0{,}625 \times 60 = 37{,}5$

A bateria do telemóvel atingiu o nível máximo às 10 horas e 38 minutos, aproximadamente.

122. A afirmação I é verdadeira pois, como toda a função com derivada finita num ponto do seu domínio é contínua nesse ponto, então se f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, $\mathbb{R}$, pode concluir-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

A afirmação II é falsa pois, da igualdade $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2) = 0$, que é equivalente a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, pode concluir-se que a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$ pelo que o gráfico da

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

função f não admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.
A afirmação III é falsa pois, como f' é decrescente em $\mathbb{R}^+$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo nesse intervalo.

123. Como a reta de equação $y = 3x + 2$ é assíntota ao gráfico de f, tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ e que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = 2$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} =$
$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} =$
$= \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) - \frac{1}{3}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{f(x)} - \frac{1}{3}x\right) =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - xf(x)}{3f(x)} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x(f(x)-3x)}{3f(x)} =$
$= -\frac{1}{3} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} \times$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) =$
$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 =$
$= -\frac{2}{9}$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ é assíntota ao gráfico de g.

124.

124.1 $f(x) = -\ln(x^2 - 1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\ln(x^2 - 1)$
$D = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge x^2 - 1 > 0\} =$
$=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
Para $x \in D$, $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\ln(x^2 - 1)$
$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2 - 1) = \ln 1$
$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \times (x^2 - 1)\right] = \ln 1$
$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \times (x-1)(x+1) = 1$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$
$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin D} \vee x = -2$
C. S. $= \{-2\}$

124.2 Assíntotas verticais
A função f é contínua em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ por se tratar da composta entre duas funções contínuas, uma função logarítmica e uma função racional, assim, as únicas candidatas a assíntotas verticais ao seu gráfico são as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 0^+ = -\infty$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$
$= \ln(+\infty) =$
$= +\infty$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas horizontais

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

124.3 Seja $g(x) = f(x) - x$.
Pretende-se mostrar que a função g tem, pelo menos, um zero em $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$.
A função g é contínua em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas neste intervalo.

$g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} =$
$= \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}\right) - \frac{3}{2} =$
$= \ln 5 - \frac{3}{2} > 0$

$g(2) = f(2) - 2 =$
$= \ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right) - 2 =$
$= \ln 3 - 2 < 0$

Assim, $g(2) < 0 < g\left(\frac{3}{2}\right)$.
Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy,
$\exists c \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[: g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0$
$\Leftrightarrow f(c) = c$

124.4 $f(3) = \ln\left(\frac{3+1}{3-1}\right) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} =$
$= \frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} =$
$= \frac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} =$
$= \frac{-2}{x^2-1}$

$f'(3) = \frac{-2}{9-1} = -\frac{1}{4}$

$r: y = -\frac{1}{4}x + b$

$(3, \ln 2) \in r: \ln 2 = -\frac{1}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} + \ln 2$

Então, $r: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \ln 2$

Logo, $C\left(0, \frac{3}{4} + \ln 2\right)$, $B(3, \ln 2)$ e $A(3, 0)$.

Assim, $A_{[OABC]} = \frac{\left(\frac{3}{4} + \ln 2 + \ln 2\right) \times 3}{2} =$
$= \left(\frac{3}{4} + 2\ln 2\right) \times \frac{3}{2} =$
$= \frac{9}{8} + 3\ln 2$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL