Introdução à inferência estatística

Páginas 71 a 77

1.

1.1 O parâmetro é o número médio de horas de sono diárias de todos os jovens universitários portugueses.
A estatística é o número médio de horas de sono observado na amostra de 80 estudantes.

1.2 O valor da estimativa é 6,8 horas.

1.3 O estimador é a variável aleatória "média amostral".

2.

2.1 A população é o conjunto das 2500 famílias da freguesia.

2.2 O parâmetro é a proporção populacional de famílias da freguesia que utilizam o compostor doméstico fornecido pela Câmara Municipal.

2.3 A estatística utilizada foi a proporção amostral.
$\hat{p} = \frac{35}{100} = 0{,}35$
O valor da estatística é 0,35.

2.4 $2500 \times 0{,}35 = 875$
Preveem-se 875 famílias.

3.

3.1 $\hat{p} = \frac{4}{200} = 0{,}02$
A estimativa pontual é 0,02.

3.2 O parâmetro é a proporção populacional de *microchips* defeituosos entre todos os *microchips* produzidos.
A estatística é a proporção de *microchips* defeituosos observados na amostra de 200 unidades e o seu valor é 0,02.

3.3 O estimador é a variável aleatória "proporção amostral".
A estimativa é o valor obtido para a amostra considerada, que é 0,02.

4.

4.1 $4^2 = 16$
É possível formar 16 amostras.

4.2

Amostra	Média $(\bar{x})$
(6, 6)	6,0
(6, 7)	6,5
(6, 8)	7,0
(6, 9)	7,5
(7, 6)	6,5
(7, 7)	7,0
(7, 8)	7,5
(7, 9)	8,0
(8, 6)	7,0
(8, 7)	7,5
(8, 8)	8,0
(8, 9)	8,5
(9, 6)	7,5
(9, 7)	8,0
(9, 8)	8,5
(9, 9)	9,0

Logo,

Média $(\bar{x})$	Frequência
6,0	1
6,5	2
7,0	3
7,5	4
8,0	3
8,5	2
9,0	1
Total	**16**

Então, a distribuição de amostragem do estimador média é a seguinte.

Valores de $\bar{x}$	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0
Probabilidades	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

5.

5.1 Como a dimensão da amostra é superior a 30, o teorema do limite central permite afirmar que a distribuição de amostragem da média pode ser aproximada por um modelo normal, com:
- valor médio: 180 minutos
- desvio-padrão: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4$ minutos

5.2 Pretende-se determinar $P(\bar{X} > 184)$.
Já vimos que $X \sim N(180, 4)$.
Recorrendo à calculadora, obtém-se $P(\bar{X} > 184) \approx$
$\approx 0{,}159 = 15{,}9\%$.

6.

6.1 Opção (C)
$\sigma_X = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{24}{\sqrt{36}} = 4$
A afirmação I é verdadeira.
A média da distribuição de amostragem é igual à média da população (260).
A afirmação II é verdadeira.
O teorema do limite central estabelece que, para amostras suficientemente grandes, geralmente com um número de elementos maior ou igual a 30, a distribuição da média amostral aproxima-se da normal.
A afirmação III é verdadeira.
Assim, todas as afirmações são verdadeiras.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

6.2 Opção (A)

Pretende-se calcular $P(\bar{X} < 252)$ e tem-se que $\bar{X} \sim N(260, 4)$.

Recorrendo à calculadora, obtém-se $P(\bar{X} < 252) \approx$ $\approx 0{,}0228 = 2{,}28\%$.

7.

7.1 $5^2 = 25$

É possível obter 25 amostras.

7.2

$\bar{x}$	**2**	**5**	**8**	**12**	**18**
2	2	3,5	5	7	10
5	3,5	5	6,5	8,5	11,5
8	5	6,5	8	10	13
12	7	8,5	10	12	15
18	10	11,5	13	15	18

Tabela de distribuição de amostragem de $\bar{X}$:

$\bar{x}$	2	3,5	5	6,5	7	8	8,5	10	11,5	12	13	15	18
$P(\bar{X} = \bar{x})$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

7.3 $\mu = \frac{2+5+8+12+18}{5} = \frac{45}{5} = 9$

$\mu_{\bar{X}} = \frac{2\times1 + 3{,}5\times2 + 5\times3 + \ldots + 15\times2 + 18\times1}{25} = \frac{225}{25} = 9$

Como $\mu = \mu_{\bar{X}}$, o valor esperado da média amostral coincide com a média populacional. Assim, a média amostral é um estimador não enviesado da média populacional.

Relativamente ao desvio-padrão, tem-se:

$\sigma^2 = \frac{(2-9)^2+(5-9)^2+(8-9)^2+(12-9)^2+(18-9)^2}{5} = 31{,}2$

Logo, $\sigma = \sqrt{31{,}2} \approx 5{,}59$ e $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{31{,}2}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}95$.

Tem-se ainda que:

$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{(2-9)^2\times1+(3{,}5-9)^2\times2+\ldots+(15-9)^2\times2+(18-9)^2\times1}{25} =$

$= 15{,}6$

Logo, $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{15{,}6} \approx 3{,}95$.

Verifica-se, assim, que $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

8.

8.1 A população é o conjunto de todos os cães da Serra da Estrela adultos.

A amostra é o grupo de 50 cães que foi selecionado pelo veterinário.

8.2 Como a população segue uma distribuição normal, a distribuição de amostragem da média também é normal.

$\mu_{\bar{X}} = \mu = 46{,}25$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 1{,}09$

Logo, $\bar{X} \sim N(46{,}25; 1{,}09)$.

8.3 Tem-se que $\bar{X} \sim N(46{,}25; 1{,}09)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se:

a) $P(\bar{X} < 45) \approx 0{,}126 = 12{,}6\%$

b) $P(46 < \bar{X} < 48) \approx 0{,}537 = 53{,}7\%$

c) $P(\bar{X} \geq 47) \approx 0{,}246 = 24{,}6\%$

9.

9.1 $\mu_{\bar{X}} = \mu = 45$ minutos

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$ minutos

9.2 Tem-se que $\bar{X} \sim N(45, 2)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se:

$P(\bar{X} > 49) \approx 0{,}02275 = 2{,}28\%$

9.3 Tem-se que $\bar{X} \sim N(45, 12)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se:

$P(41 < \bar{X} < 51) \approx 0{,}3220 = 32{,}2\%$

9.4 Pretende-se que $|\bar{X} - 45| \leq 3$, ou seja:

$-3 \leq \bar{X} - 45 \leq 3 \Leftrightarrow 42 \leq \bar{X} \leq 48$

Tem-se que $\bar{X} \sim N(45, 2)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se:

$P(42 \leq \bar{X} \leq 48) \approx 0{,}8664 = 86{,}64\%$

10.

10.1 Opção (B)

$\mu_{\bar{X}} = \mu = 2{,}1$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{100}} = 0{,}04$

Logo, $\bar{X} \sim N(2{,}1; 0{,}04)$.

10.2 Opção (C)

Tem-se que $\bar{X} \sim N(2{,}1;\ 0{,}04)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se:

$P(\bar{X} > 2{,}18) \approx 0{,}02275 \approx 2{,}28\%$

10.3 Opção (B)

$\sigma_{\bar{X}} = 0{,}02 \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}02$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} = 0{,}02$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{0{,}4}{0{,}02}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 20$

Logo, $n = 20^2 = 400$.

11. $\bar{x} = 3200 \quad \sigma = 500 \quad n = 64$

Para um intervalo de confiança de 95%, tem-se $z \approx 1{,}96$.

Assim, o intervalo de confiança procurado é dado por $\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[3200 - 1{,}96 \times \frac{500}{\sqrt{64}};\ 3200 + 1{,}96 \times \frac{500}{\sqrt{64}}\right] =$

$= [3077{,}5; 3322{,}5]$

12. $\bar{x} = 18{,}5 \quad \sigma = 2{,}4 \quad n = 60$

Para um intervalo de confiança de 95%, tem-se $z \approx 1{,}96$.

Assim, o intervalo de confiança procurado é dado por $\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[18{,}5 - 1{,}96 \times \frac{2{,}4}{\sqrt{60}};\ 18{,}5 + 1{,}96 \times \frac{2{,}4}{\sqrt{60}}\right] =$

$= [17{,}893; 19{,}107]$

Com um nível de confiança de 95%, estima-se que a resistência média de toda a produção esteja compreendida entre 17,893 kg e 19,107 kg.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

13. $\bar{x} = 380 \quad \sigma = 35 \quad n = 49$

Para um intervalo de confiança de 99%, tem-se $z \approx 2{,}576$.

Assim, o intervalo de confiança procurado é dado por $\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[380 - 2{,}576 \times \frac{35}{\sqrt{49}};\ 380 + 2{,}576 \times \frac{35}{\sqrt{49}}\right] =$

$= [367{,}12; 392{,}88]$

A afirmação da NutriGato não é apoiada pelos dados, uma vez que o valor 400 está fora do intervalo de confiança, ou seja, pode concluir-se com 99% de confiança que o ganho médio real é inferior ao anunciado.

14. Recorrendo à calculadora, obtém-se $\bar{x} = 1{,}25$ e $s \approx 0{,}84$

Para um nível de confiança de 90%, $z = 1{,}645$.

Assim, o intervalo de confiança procurado é dado por $\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[1{,}25 - 1{,}645 \times \frac{0{,}84}{\sqrt{36}};\ 1{,}25 + 1{,}645 \times \frac{0{,}84}{\sqrt{36}}\right]$,

ou seja, $[1{,}02; 1{,}48]$.

15. $\bar{x} = 19{,}2 \quad \sigma = 1{,}8 \quad n = 36$

Para um intervalo de confiança de 99%, tem-se $z \approx 2{,}576$.

Assim, o intervalo de confiança procurado é dado por $\left[\bar{x} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[19{,}2 - 2{,}576 \times \frac{1{,}8}{\sqrt{36}};\ 19{,}2 + 2{,}576 \times \frac{1{,}8}{\sqrt{36}}\right] =$

$= [18{,}43; 19{,}97]$

Com um nível de confiança de 99%, pode afirmar-se que a alegação da marca não é plausível, já que o valor de 20 horas não pertence ao intervalo de confiança determinado.

16.

16.1 Opção (C)

Amplitude do intervalo: 8157 – 7843 = 314

Margem de erro: $\frac{314}{2} = 157$

16.2 $\bar{x} = 8000 \quad s = 800 \quad n = 100$

Para um intervalo de confiança de 90%, tem-se $z \approx 1{,}645$.

Assim, o intervalo de confiança procurado é dado por $\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[8000 - 1{,}645 \times \frac{800}{\sqrt{100}};\ 8000 + 1{,}645 \times \frac{800}{\sqrt{100}}\right] =$

$= [7868{,}4; 8131{,}6]$

17. $\hat{p} = \frac{120}{400} = 0{,}3$

A estimativa pontual é 0,3.

Para um intervalo de confiança de 95%, tem-se $z \approx 1{,}96$.

$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}3 \times (1-0{,}3)}{400}} \approx 0{,}0229$

Assim, o intervalo de confiança a 95% é dado por:

$\left[\hat{p} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$

$= [0{,}3 - 1{,}96 \times 0{,}0229;\ 0{,}3 + 1{,}96 \times 0{,}0229] =$

$= [0{,}255; 0{,}345]$

18. $\hat{p} = \frac{450}{600} = 0{,}75$

Para um intervalo de confiança de 99%, tem-se $z \approx 2{,}576$.

$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}75 \times (1-0{,}75)}{600}} \approx 0{,}0177$

Assim, o intervalo de confiança a 99% é dado por:

$\left[\hat{p} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$

$= [0{,}75 - 2{,}576 \times 0{,}0177; 0{,}75 + 2{,}576 \times 0{,}0177] =$

$= [0{,}70; 0{,}80]$

19.

19.1 $\hat{p} = \frac{160}{500} = 0{,}32$

O valor da proporção amostral é 32%.

Para um intervalo de confiança de 95%, tem-se $z \approx 1{,}96$.

$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}32 \times (1-0{,}32)}{500}} \approx 0{,}0209$

Assim, o intervalo de confiança a 95% é dado por:

$\left[\hat{p} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$

$= [0{,}32 - 1{,}96 \times 0{,}0209; 0{,}32 + 1{,}96 \times 0{,}0209] =$

$= [27{,}90; 36{,}09]$

Como o limite inferior deste intervalo é superior a 25%, então a autarquia pode avançar com o programa de instalação de painéis solares.

19.2 Opção (B)

Para um intervalo de confiança de 95%, tem-se $z \approx 1{,}96$.

Assim, $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \times \frac{30}{\sqrt{500}} \approx 2{,}63$.

20. $\sigma = 0{,}12$

Para um intervalo de confiança de 99%, tem-se $z \approx 2{,}576$.

$A = 0{,}04 \Leftrightarrow 2 \times z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}04$

$\Leftrightarrow 2 \times 2{,}576 \times \frac{0{,}12}{\sqrt{n}} = 0{,}04$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \times 2{,}576 \times 0{,}12}{0{,}04}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 15{,}456$

Logo, $n \approx 238{,}88$.

Assim, a dimensão mínima da amostra necessária é 239 ampolas.

21. $A = 5{,}661 - 5{,}139 = 0{,}522$ é a amplitude do intervalo de confiança.

Logo, a margem de erro é $E = \frac{0{,}522}{2} = 0{,}261$.

Para um intervalo de confiança de 95%, tem-se $z \approx 1{,}96$.

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

Assim, $E = 0{,}261 \Leftrightarrow z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}261$

$\Leftrightarrow 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 0{,}261$

$\Leftrightarrow \sigma = 0{,}261 \times \frac{6}{1{,}96}$

Ou seja, $\sigma \approx 0{,}8$ cm.

22. A margem de erro é:

$E = \frac{7{,}157}{2} \Leftrightarrow z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}579$

$\Leftrightarrow z \times \frac{10}{\sqrt{30}} = 3{,}579$

$\Leftrightarrow z = 3{,}579 \times \frac{\sqrt{30}}{10}$

Logo, $z \approx 1{,}96$, que corresponde a um intervalo de confiança a 95%.

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL