Matrizes

Páginas 84 a 92

1.

1.1 A matriz N é do tipo 2×3.

1.2

a) $n_{13} = 7$, significa que existem sete colaboradores em Inteligência Artificial no Departamento de Inovação e Projetos.

b) $n_{21} = 9$, significa que existem nove especialistas em Desenvolvimento de *Software* no Departamento de Operações e Manutenção.

1.3 4 + 6 = 10

O número total de colaboradores na área de Cibersegurança é 10.

1.4 12 + 4 + 7 = 23

O número total de colaboradores no Departamento de Inovação e Projetos é 23.

2.

2.1 $D = \begin{bmatrix} 10 & 600 & 50 \\ 25 & 450 & 70 \\ 1{,}5 & 400 & 40 \end{bmatrix}$

2.2 $d_{12} = 600;\ d_{21} = 25;\ d_{33} = 40$

2.3 $d_{12} = 600$ significa que o João gastou 600 calorias durante a corrida.

$d_{21} = 25$ significa que o João percorreu 25 quilómetros na modalidade ciclismo.

$d_{33} = 40$ significa que o João nadou durante 40 minutos.

3.

3.1 Para que as matrizes sejam iguais:

$$\begin{cases} x + 5 = 9 \\ 2y = 10 \\ 3 = z - 1 \\ w^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ z = 4 \\ w = 4 \vee w = -4 \end{cases}$$

Assim, o valor de x é 4, o valor de y é 5, o valor de z é 4 e w pode ser 4 ou -4.

3.2 Para que as matrizes sejam iguais:

$$\begin{cases} x = 12 \\ y + 7 = 43 \\ z - 4 = 20 \\ 10 = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 36 \\ z = 24 \\ w = 10 \end{cases}$$

Assim, o valor de x é 12, o valor de y é 36, o valor de z é 24 e o valor de w é 10.

4. Opção (C)

Uma matriz do tipo 1×5 tem uma linha e cinco colunas, logo é uma matriz linha.

5. Opção (B)

A diagonal principal de uma matriz quadrada é formada por elementos a_{ij}, em que $i = j$.

6.

6.1 $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

6.2 $3A - B = 3\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 16 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

6.3 $\frac{1}{2}D + A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

6.4 $B + C$ não é possível porque as matrizes B e C não são do mesmo tipo.

6.5 $A + B - D = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

6.6 $2A - B + I_2 = 2\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 11 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 11 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

7.

7.1 $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 - 1 \times 1 + 3 \times 0 \\ 0 \times 4 + 4 \times 1 - 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 1 + 0 \\ 0 + 4 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

7.2 $B \times A$ não é possível, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

7.3 $A \times C$ não é possível, porque o número de colunas de A é diferente do número de linhas de C.

7.4 $C \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 0 & -2 + 4 & 6 - 1 \\ -2 + 0 & 1 + 12 & -3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -2 & 13 & -6 \end{bmatrix}$

7.5 $C \times D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 1 & 2 + 4 \\ -5 - 3 & -1 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$

7.6 $D \times C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 1 & 5 + 3 \\ -2 - 4 & -1 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

8. Opção (D)

A matriz $A + B$, neste contexto, representa o total acumulado de vendas nos dois meses.

9.

9.1 $A' = A + \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

$B' = B + \vec{v} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$

$C' = C + \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

Matriz dos novos vértices:

$\begin{bmatrix}3 & 5 & 3\\-2 & -2 & 1\end{bmatrix}$

9.2 $A' = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$

$C' = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \times C = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\12\end{bmatrix}$

Novos vértices: $A'(3,3); B'(9,3); C'(3,12)$

Como $k > 1$, a operação resultou numa ampliação.

9.3 $A' = \begin{bmatrix}\cos 90° & -\operatorname{sen} 90°\\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90°\end{bmatrix} \times A =$

$= \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix}\cos 90° & -\operatorname{sen} 90°\\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90°\end{bmatrix} \times B =$

$= \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$C' = \begin{bmatrix}\cos 90° & -\operatorname{sen} 90°\\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90°\end{bmatrix} \times C =$

$= \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$

Novos vértices: $A'(-1,1), B'(-1,3), C'(-4,1)$

10.

10.1 $A = \begin{bmatrix}2\times1+1 & 2\times1+2\\2\times2+1 & 2\times2+2\\2\times3+1 & 2\times3+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}$

10.2 $a_{32} = 8$ significa que a linha de produção 3 produz diariamente oito centenas de unidades da liga metálica de código 2.

11.

11.1 Para que as matrizes A e B sejam iguais:

$\begin{cases}x + y = 24\\ z - x = 5\\ 2x + z = 50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 24 - x\\ z = x + 5\\ 2x + x + 5 = 50\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\\-\\3x = 45\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 24 - 15\\ z = 15 + 5\\ x = 15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y = 9\\ z = 20\\ x = 15\end{cases}$

O valor de x é 15, o valor de y é 9 e o valor de z é 20.

11.2 $a_{12} = 45$ significa que foram encontrados 45 fragmentos de cerâmica no setor norte da escavação.

11.3 $A = \begin{bmatrix}20 + 10 & 45\\30 - 20 & 2\times20 + 30\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}30 & 45\\10 & 70\end{bmatrix}$

12. Opção (D)

A matriz identidade de grau 2 é $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. Assim:

$\begin{cases}x + y = 1\\ x - y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 - y\\ 1 - y - y = 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\\2y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = 0\end{cases}$

Logo, $x = 1$ e $y = 0$.

13. Opção (C)

O produto $A \times B$ é possível, porque o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B. A matriz $C = A \times B$ tem tantas linhas como a matriz A e tantas colunas como a matriz B, logo é do tipo 2×1.

14. Para que a matriz A seja a matriz nula:

$\begin{cases}k^2 - 16 = 0\\ k + 4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k^2 = 16\\ k = -4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases}k = 4\\ k = -4\end{cases}}_{\text{Sistema impossível}} \vee\ k = -4$

Logo, o valor de k tem de ser -4, ou seja, ao espaço I corresponde a opção b).

A matriz B é uma matriz coluna, logo ao espaço II corresponde opção b).

A matriz B é do tipo 4×1, logo ao espaço III corresponde a opção a).

A matriz C é uma matriz diagonal para qualquer valor de k, logo ao espaço IV corresponde a opção b).

Se $k = 1$, então a matriz C é uma matriz identidade, logo ao espaço V corresponde a opção a).

15. Opção (A)

$C' = 0{,}8 \times C =$

$= 0{,}8 \times \begin{bmatrix}10 & 20\\30 & 40\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}8 & 16\\24 & 32\end{bmatrix}$

16. Opção (B)

$AB - BA = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}1\times1+2\times4 & 1\times0+2\times1\\0\times1+1\times4 & 0\times0+1\times1\end{bmatrix} -$

$- \begin{bmatrix}1\times1+0\times0 & 1\times2+0\times1\\4\times1+1\times0 & 4\times2+1\times1\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}9 & 2\\4 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 9\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}8 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}$

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL

17.

17.1

a) $A+B-C=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}A-B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

c) $2A-3B+C=$

$=2\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}8 & 4\\ -4 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -3\\ 9 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}8 & 7\\ -13 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}9 & 12\\ -14 & 6\end{bmatrix}$

d) $A+B\times C=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 15\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -1 & 21\end{bmatrix}$

e) $A\times 2B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}\times 2\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 36 & 28\end{bmatrix}$

f) $A\times B-B\times C=$

$=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 18 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 15\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 17 & -1\end{bmatrix}$

17.2

a) $2X-A+B=0$

$\Leftrightarrow 2X=A-B$

$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}(A-B)$

$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -5 & 4\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ -\frac{5}{2} & 2\end{bmatrix}$

b) $A\times C+X=B$

$\Leftrightarrow X=B-A\times C$

$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 20\\ -8 & -10\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-2 & -21\\ 11 & 12\end{bmatrix}$

18.

A. Afirmação verdadeira.
A multiplicação de matrizes verifica a propriedade associativa.

B. Afirmação falsa.
A multiplicação de matrizes não verifica a propriedade comutativa.

C. Afirmação verdadeira.
A multiplicação de matrizes verifica a existência de elemento neutro, que é a matriz identidade.

D. Afirmação falsa.
Por exemplo, se $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, então $A\times B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, mas nem A nem B são matrizes nulas.

E. Afirmação falsa.
Por exemplo, se $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{bmatrix}$, então $A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=A\times C$, mas $B\neq C$.

F. Afirmação falsa.
Por exemplo, se $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, então:

$(A+B)^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Mas:

$A^2+2AB+B^2=$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+$

$+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

19. Opção (B)
O elemento c_{11} é obtido multiplicando a primeira linha de Q, que representa as quantidades de madeira, metal e plástico usados no modelo $M1$, pela primeira coluna de P, que contém o custo unitário de cada um dos materiais, logo representa o custo total de produção do modelo $M1$.

20.

20.1 $Q=\begin{bmatrix}50 & 100 & 20\\ 30 & 80 & 15\end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix}3\\ 0{,}50\\ 5\end{bmatrix}$

20.2 $R=Q\times P=$

$=\begin{bmatrix}50 & 100 & 20\\ 30 & 80 & 15\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\ 0{,}5\\ 5\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}50\times 3+100\times 0{,}5+20\times 5\\ 30\times 3+80\times 0{,}5+15\times 5\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}300\\ 205\end{bmatrix}$

Os valores obtidos representam o custo total necessário para repor os vários artigos em cada loja, nomeadamente, 300 € para a Loja A e 205 € para a Loja B.

20.3 $P_{\text{novo}}=0{,}9\times P=0{,}9\times\begin{bmatrix}3\\ 0{,}5\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2{,}70\\ 0{,}45\\ 4{,}50\end{bmatrix}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

21.

21.1 $V = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 10 \\ 30 & 15 & 5 \\ 50 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

21.2 $M = V \times P =$

$= \begin{bmatrix} 40 & 20 & 10 \\ 30 & 15 & 5 \\ 50 & 10 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 420 \\ 305 \\ 448 \end{bmatrix}$

21.3 $m_{31} = 448$ representa o valor total recebido pela venda dos bilhetes da Sala 3 nessa sessão.

22.

22.1 $S = A + B =$

$= \begin{bmatrix} 1200 & 450 \\ 800 & 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1350 & 410 \\ 980 & 380 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2550 & 860 \\ 1780 & 680 \end{bmatrix}$

Esta matriz representa o inventário total deste grupo por género literário e por tipo de edição.

22.2 $A \times K = \begin{bmatrix} 1200 & 450 \\ 800 & 300 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1{,}15 & 0 \\ 0 & 0{,}90 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1380 & 405 \\ 920 & 270 \end{bmatrix}$

22.3 $L = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A \times L = \begin{bmatrix} 1200 & 450 \\ 800 & 300 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8550 \\ 5700 \end{bmatrix}$

Estes valores representam o lucro total previsto para a livraria A, para cada género.

23. Opção (C)

A matriz de transformação $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ é diagonal, com ambos os elementos da diagonal principal iguais a 0,5. Como $0 < 0{,}5 < 1$, ocorre uma redução de tamanho, ficando os comprimentos dos lados iguais a metade dos originais.

24. $A(0,0), B(3,0), C(3,2), D(0,2)$

$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

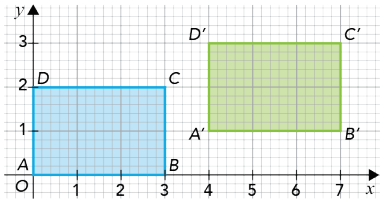
24.1 $\vec{v} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A' = A + \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B' = B + \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C' = C + \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

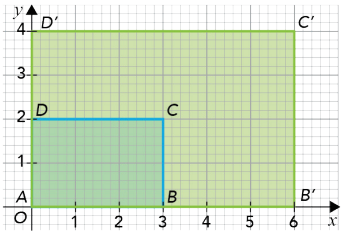
$D' = D + \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$



24.2 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times M =$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

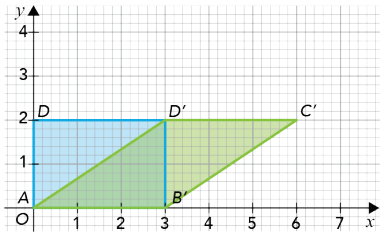
$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$



24.3 $\begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times M =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

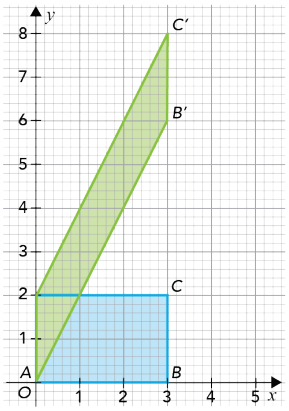
$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$



24.4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times M =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

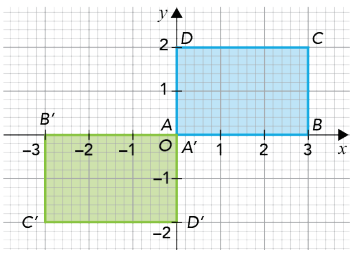
$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$



24.5 $\begin{bmatrix} \cos 180° & -\operatorname{sen} 180° \\ \operatorname{sen} 180° & \cos 180° \end{bmatrix} \times M =$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$



EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

25.

25.1 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 7\end{bmatrix}$

Matriz de transformação: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

Novos pontos: $A'(0,0), B'(2,4), C'(2,7)$

25.2 $\begin{bmatrix}\cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°)\\ \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$

Novos pontos: $A'(0,0),\ B'(0,-2), C'(3,-2)$

25.3 Variação de tamanho de razão 2:

$2\times\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

Translação de vetor $\vec{v}(3,2)$:

$A'=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$

$B'=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 2\end{bmatrix}$

$C'=\begin{bmatrix}4\\ 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 8\end{bmatrix}$

Novos pontos: $A'(3,2), B'(7,2), C'(7,8)$

26. Opção (C)

$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}$

$A^2+xA+yI_2=0$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1+x+y & 8+2x\\ 0 & 9+3x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1+x+y=0\\ 8+2x=0\\ 9+3x+y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-4+y=0\\ x=-4\\ 9-12+y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\ x=-4\end{cases}$

Logo, $x=-4$ e $y=3$.

27. Opção (B)

$XY=I\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & y\\ w & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+aw & y+az\\ w & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+aw=1\\ y+az=0\\ w=0\\ z=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y+a=0\\ w=0\\ z=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-a\\ w=0\\ z=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow Y=\begin{bmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

28.

28.1 $H=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$

$E=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 8 & 2 & 3\\ 10 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

28.2 $M=H\times E=$

$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 8 & 2 & 3\\ 10 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}32 & 7 & 11\\ 39 & 9 & 14\\ 54 & 13 & 20\end{bmatrix}$

Os valores apresentados na segunda linha desta matriz representam a quantidade total de cada tipo de material elétrico para equipar um apartamento do tipo T3.

28.3 Já vimos que $M=H\times E=\begin{bmatrix}32 & 7 & 11\\ 39 & 9 & 14\\ 54 & 13 & 20\end{bmatrix}$.

Seja $C=\begin{bmatrix}8\\ 12\\ 6\end{bmatrix}$ a matriz que representa o custo unitário de cada tipo de material elétrico.

Assim, $M\times C=\begin{bmatrix}32 & 7 & 11\\ 39 & 9 & 14\\ 54 & 13 & 20\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8\\ 12\\ 6\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}406\\ 504\\ 708\end{bmatrix}$

Cada valor desta matriz representa o custo total do material elétrico necessário para equipar um apartamento do tipo T2, T3 e T4, respetivamente.

29. $M=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$

29.1 Variação de tamanho de fator 2:

$M'=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix}$

Translação de vetor $\vec{v}(-1,2)$:

$M''=M'+\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 6 & 6\end{bmatrix}$

29.2 Cisalhamento horizontal de fator $k=2$:

$C'=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}$

Rotação de 180°:

$C''=\begin{bmatrix}\cos 180° & -\operatorname{sen} 180°\\ \operatorname{sen} 180° & \cos 180°\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-6\\ -2\end{bmatrix}$

29.3

a) $T\times\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

EDITÁVEL
FOTOCOPIÁVEL

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = -2 \\ 2c = 2 \\ 2d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicando T ao ponto C:

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ representa uma rotação de $45°$ com centro na origem, cuja matriz de transformação é $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, seguida de uma variação de tamanho de fator $k = \sqrt{2}$.

30.

30.1 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^4 = A^3 \times A =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 4a & 6a^2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

30.2 Os elementos da diagonal principal são 1.

Para cada A^n, $m_{12} = m_{23} = na$, onde m_{ij} representa o elemento da linha i e coluna j da matriz A^n.

Para deduzir m_{13}, repare-se que os coeficientes seguem a sequência:

$0, 1, 3\ (1 + 2 = 3), 6\ (1 + 2 + 3 = 6), \ldots$

Ou seja, são da forma:

$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}_{\text{progressão aritmética de razão 1}} = \frac{1+n-1}{2} \times (n-1) =$

$= \frac{n(n-1)}{2}$

Assim, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na & \frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30.3 $A^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 50a & 1225a^2 \\ 0 & 1 & 50a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EDITÁVEL FOTOCOPIÁVEL