

1. O ponto médio de $[AB]$ é um dos pontos da mediatriz.

$(1, -2)$ é solução da equação $y = -3x + 1$, pois $-2 = -3 \times 1 + 1$.

Opção (D)

2. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 22$

As coordenadas de pontos do eixo Oz são do tipo $(0, 0, z)$.

$$(0+2)^2 + (0-3)^2 + (z-1)^2 = 22$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = 9 \Leftrightarrow z-1 = 3 \vee z-1 = -3$$

$$z = 4 \vee z = -2$$

Coordenadas dos pontos de interseção: $(0, 0, 4)$

e $(0, 0, -2)$

Coordenadas do ponto médio: $(0, 0, 1)$

Opção (D)

- 3.1. $(-1-2)^2 + 2^2 + (-3+1)^2 \leq 15 \Leftrightarrow 17 \leq 15 \rightarrow$ Falso

As coordenadas do ponto A não são solução da inequação $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 15$.

Conclui-se que A não pertence à esfera.

$$(3-2)^2 + 0^2 + (-1+1)^2 \leq 15 \Leftrightarrow 1 \leq 15 \rightarrow$$
 Verdadeiro

As coordenadas do ponto B são solução da

$$\text{inequação } (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 15.$$

Conclui-se que B pertence à esfera.

- 3.2. $C(2, 0, -1)$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-0)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

Medida da área do quadrado: $(\sqrt{17})^2$, ou seja, 17

- 3.3. Centro da esfera: $C(2, 0, -1)$

Raio da esfera: $\sqrt{15}$

A distância de C ao plano de equação $z = 3$ é igual a $|3 - (-1)|$, ou seja, 4.

Como $\sqrt{15} < 4$, conclui-se que a esfera não intersesta o plano de equação $z = 3$.

Opção (D)

- 4.1. Reta r: $y = 2x + 1$

As coordenadas do ponto S são $(0, 1)$.

T é o ponto médio de $[AB]$. As coordenadas de T

$$\text{são } \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2} \right), \text{ ou seja, } (1, 3).$$

As coordenadas do ponto médio de $[ST]$ são

$$\left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+3}{2} \right), \text{ ou seja, } \left(\frac{1}{2}, 2 \right).$$

- 4.2. $S(0, 1)$ e $B(3, 2)$

Sejam (x, y) as coordenadas de C.

$$\text{Então, } (0, 1) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2} \right).$$

$$\frac{x+3}{2} = 0 \wedge \frac{y+2}{2} = 1 \Leftrightarrow x = -3 \wedge y = 0$$

As coordenadas do ponto C são $(-3, 0)$.

- 5.1. a) Seja A' a imagem de A pela meia-volta com centro em O.

$$A'(3, -4)$$

- b) Seja A'' a imagem de A pela reflexão de eixo Ox.

$$A''(-3, -4)$$

- 5.2. Seja $A''(-3, -4)$ a imagem de A pela reflexão de eixo Ox.

$B(3, 4)$ é a imagem de A pela reflexão de eixo

Oy.

O perímetro do retângulo é dado por:

$$2 \times (\overline{AB} + \overline{AA''})$$

$$\overline{AB} = |3 - (-3)| = 6 \text{ e } \overline{AA''} = |4 - (-4)| = 8$$

$$\text{Assim, tem-se: } 2 \times (\overline{AB} + \overline{AA''}) = 2 \times (6 + 8) = 28$$

A medida do perímetro do retângulo inscrito na circunferência é 28.



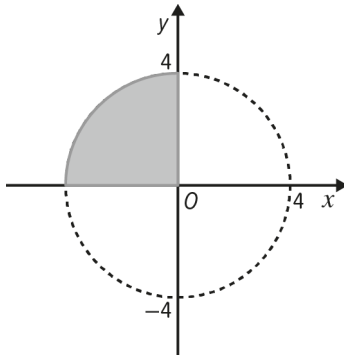
6. $C_1(-1, 0, 0)$ e $C_2(3, 0, 0)$

$$C_3\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1, 0, 0).$$

$\overline{C_3C_1} = 2$ e, atendendo aos raios de S_1 e S_3 ,
conclui-se que S_1 e S_3 têm um só ponto comum.

Opção (C)

7.1. Seja P o perímetro da região considerada.



$$P = 4 + 4 + \frac{2 \times \pi \times 4}{4} = 8 + 2\pi$$

A medida do perímetro da região considerada é $8 + 2\pi$.

7.2. Seja A a área da região considerada.

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi$$

A medida da área da região considerada é 4π .

8.1. a) $EF: \begin{cases} x = 3 \\ z = 6 \end{cases}$

b) $BF: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

8.2. Plano mediador de $[AE]: z = 3$

8.3. $C(0, 4, 0)$ e $E(3, 0, 6)$

O plano mediador de $[CE]$ é o conjunto de pontos $Q(x, y, z)$, tais que: $\overline{QC} = \overline{QE}$.

$$\overline{QC} = \overline{QE} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2 &= \\ &= (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-6)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 + z^2 &= \\ &= x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 - 12z + 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x - 8y + 12z &= 29 \end{aligned}$$

$P(k+1, 7, -k)$ pertence ao plano mediador,

logo:

$$6 \times (k+1) - 8 \times 7 + 12(-k) = 29$$

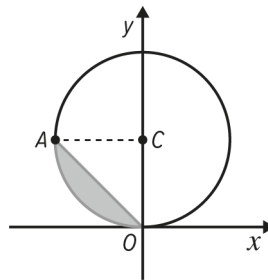
$$\Leftrightarrow 6k + 6 - 56 - 12k = 29 \Leftrightarrow -6k = 79 \Leftrightarrow k = -\frac{79}{6}$$

O ponto P tem coordenadas $\left(-\frac{79}{6} + 1, 7, \frac{79}{6}\right)$, ou

seja, $\left(-\frac{73}{6}, 7, \frac{79}{6}\right)$

9.1. $C(0, 2)$ e $A(-2, 2)$

$$\overline{CA} = \sqrt{(0+2)^2 + (2-2)^2} = 2$$



Equação do círculo de centro $C(0, 2)$ e raio 2:

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

A reta AO tem uma equação do tipo $y = kx$ e passa pelo ponto $A(-2, 2)$.

$$2 = -2k \Leftrightarrow k = -1$$

Equação da reta $AO: y = -x$

Região colorida:

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \quad \wedge \quad y \leq -x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq 4 \quad \wedge \quad y \leq -x$$

9.2. $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Perímetro: $\frac{2\pi \times 2}{4} + \sqrt{8} = \sqrt{8} + \pi \approx 5,97$

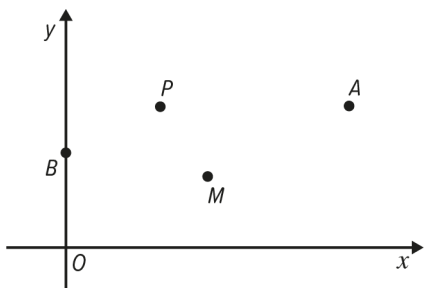
$$5,9 < \sqrt{8} + \pi < 6$$

9.3. Área: $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{2 \times 2}{2} = \frac{4\pi}{4} - 2 = \pi - 2$

Área: $\pi - 2$



1. Sejam (x, y) as coordenadas de A .



M ponto médio de $[AO]$, então, tem-se:

$$\left(3, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 3 \wedge \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \wedge y = 3$$

$$A(6,3) \text{ e } \overrightarrow{OA} = A - O = (6, 3)$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = (2, 1) \text{ e}$$

$$P = B + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = (0, 2) + (2, 1) = (2, 3)$$

$$P(2, 3)$$

- 2.1. $(\overline{AB})^2 = 2^2 + 2^2$. Daqui resulta que $\overline{AB} = \sqrt{8}$. (a

medida da aresta do cubo é $\sqrt{8}$)

$$F(2, 0, \sqrt{8}) \text{ e } C(-2, 0, 0).$$

$$\overline{FC} = C - F = (-2, 0, 0) - (2, 0, \sqrt{8}) =$$

$$= (-4, 0, -\sqrt{8}) = (-4, 0, -2\sqrt{2})$$

$$\overline{FC} = (-4, 0, -2\sqrt{2})$$

- 2.2. Qualquer ponto da reta BG é do tipo

$$(0, 2, z), z \in \mathbb{R}.$$

Se P pertence à aresta $[BG]$, tem-se

$$P(0, 2, z), z \in [0, \sqrt{8}]$$

Opção (C)

3. $A(0, y, 0), y > 0$ e $B(0, 0, z), z < 0$

$$\overline{AB} = B - A = (0, 0, z) - (0, y, 0) = (0, -y, z)$$

Repara que: $-y < 0$ e $z < 0$

Opção (A)

4. $\overline{AB} = B - A = (4, -6)$. Declive da reta AB é igual

$$a - \frac{6}{4}, \text{ ou seja, } -\frac{3}{2}.$$

Declive da reta r é dado por $\frac{-2a}{1}$, ou seja, $-2a$.

Retas paralelas têm o mesmo declive. Então,

$$-2a = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

Opção (D)

5. A reta para conter um diâmetro tem de passar pelo centro da esfera.

Centro da esfera: $C(0, 1, 0)$

O ponto C pertence à reta da opção (C)

$$(x, y, z) = (-2, -1, -3) + k(2, 2, 3), k \in \mathbb{R}$$

$$(0, 1, 0) = (-2, -1, -3) + k(2, 2, 3), k \in \mathbb{R}$$

Daqui resulta que

$$\begin{cases} 0 = -2 + 2k \\ 1 = -1 + 2k \\ 0 = -3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

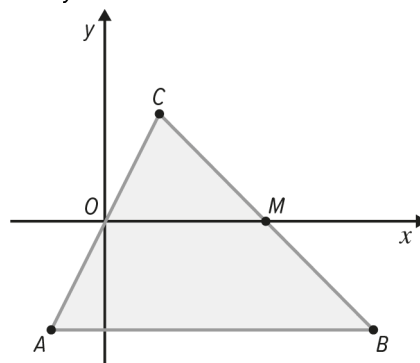
Basta considerar $k = 1$

Opção (C)

6. A reta BC tem declive igual a -1 e passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1)$. $y = -x + b$

Sabe-se que $1 = -2 + b$, ou seja, $b = 3$.

$$BC: y = -x + 3$$



O ponto C é a interseção das retas AC e BC .

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

O ponto C tem coordenadas $(1, 2)$

O ponto M pertence à reta BC e ao eixo Ox .

$$M(x, 0) \text{ e } 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3.$$



O ponto M tem coordenadas $(3, 0)$.

Sabe-se que M é o ponto médio de $[BC]$.

Sejam (x, y) as coordenadas de B .

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}\right) = (3, 0)$$

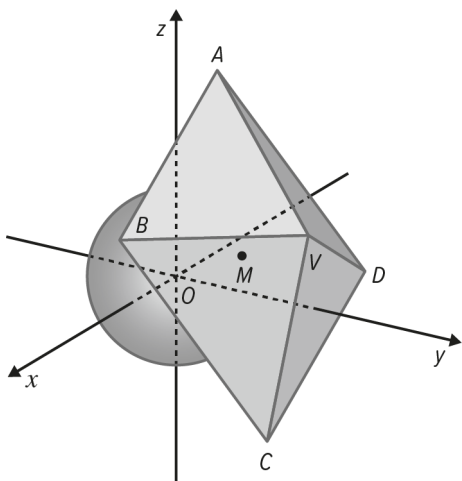
Daqui resulta:

$$\frac{x+1}{2} = 3 \wedge \frac{y+2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 5 \wedge y = -2$$

O ponto B tem coordenadas $(5, -2)$

$C(1, 2)$ e $B(5, -2)$

7.1. $A(-2, 0, 5)$ e $C(2, 4, -3)$



M é o ponto médio de $[AC]$:

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (0, 2, 1)$$

As coordenadas de M são $(0, 2, 1)$

Raio da superfície esférica:

$$\overline{OM} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Equação da superfície esférica: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$

7.2. O ponto V tem coordenadas do tipo: $(x, y, 2)$ e pertence à reta de equação

$$(x, y, z) = (0, 4, 7) + k(-1, 0, 5), k \in \mathbb{R}$$

Logo: $(x, y, 2) = (0, 4, 7) + k(-1, 0, 5), k \in \mathbb{R}$

Daqui resulta:

$$\begin{cases} 0 - k = x \\ 4 + 0 = y \\ 7 + 5k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = 4 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ k = -1 \end{cases}$$

O vértice V tem coordenadas $(1, 4, 2)$

Altura da pirâmide é dada por

$$\overline{VM} = \sqrt{(1-0)^2 + (4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6}$$

A altura da pirâmide é igual a $\sqrt{6}$

7.3. $A(-2, 0, 5)$ e $C(2, 4, -3)$

$$\overline{AC} = C - A = (4, 4, -8)$$

Uma equação vetorial da reta AC :

$$(x, y, z) = (-2, 0, 5) + k(4, 4, -8), k \in \mathbb{R}$$

A interseção desta reta com o plano xOy é um ponto do tipo $(x, y, 0)$

$$(x, y, 0) = (-2, 0, 5) + k(4, 4, -8), k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 0 + 4k \\ 0 = 5 - 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 4k \\ k = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ k = \frac{5}{8} \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$.