

Proposta de resoluções da unidade 4 do manual

Página 56

- 1.1. h não é uma função porque, por exemplo, ao elemento 2 do conjunto de partida correspondem dois elementos distintos.
- 1.2. a) A imagem de 1 por f é 1.
 b) O objeto que tem imagem 0 por i é o -1 .
 c) $g(1) = 3$
 d) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$
- 1.3. a) $i(-3) = 2 \times (-3) + 2 = -4$
 $i(3) = 2 \times 3 + 2 = 8$
 b) $i(x) = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x + 2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$

Página 57

- 2.1. Declive: $\frac{1}{2}$; ordenada na origem: 2
- 2.2. $(0, 2)$
- 2.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$
 A reta intersecta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-4, 0)$.
- 3.1. Equação da reta: $y = ax + b$
 $a = -3$ porque retas paralelas têm o mesmo declive e $b = 5$.
 $y = -3x + 5$ e $g(x) = -3x + 5$
- 3.2. Neste caso, $a = -3$ e $b = 2$
 Então, $g(x) = -3x - 2$
4. A reta r tem declive negativo, logo corresponde ao gráfico da função g .
 A reta t tem declive positivo e ordenada na origem 3, logo corresponde ao gráfico da função h .
 As retas s e u têm declive positivo e ordenada na origem -2 . Como o declive da reta s é maior do que o declive da reta u , então as retas s e u correspondem aos gráficos das funções i e f , respetivamente.
 Conclusão:
 Reta $r \rightarrow$ função g
 Reta $s \rightarrow$ função i
 Reta $t \rightarrow$ função h
 Reta $u \rightarrow$ função f

Página 58

5. A parábola de cor vermelha tem concavidade voltada para baixo, logo $a < 0$.
 As parábolas de cor verde e azul têm concavidade voltada para cima, logo $a > 0$.
 Sabe-se, ainda, que quanto maior for o valor absoluto de a , menor é a abertura da parábola. Então, a associação entre as cores e as funções é a seguinte:
 vermelho $\rightarrow g$, azul $\rightarrow f$, verde $\rightarrow h$.
6. A correspondência entre as funções e as representações gráficas é:

Função	f	g	h	i
Representação gráfica	II	IV	III	I

Porque se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima, se $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo e quanto maior for o valor absoluto de a , menor é a abertura da parábola.

Página 59

- 7.1. $A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC} = x \times 2x = 2x^2$
 Então, $f(x) = 2x^2$, sendo $x \in [1, 2]$.
- 7.2. $a = f(1) = 2 \times 1^2 = 2$
 $b = f(2) = 2 \times 2^2 = 8$
 $R(1, 2)$ e $S(2, 8)$
 Ponto R : Quando o retângulo tem 1 cm de largura, a área é igual a 2 cm².
 Ponto S : Quando o retângulo tem 2 cm de largura, a área é igual a 8 cm².
- 7.3. Sabe-se que $f(x) = 2x^2$, sendo $x \in [1, 2]$.
 Assim, x não pode tomar os valores 3 e $\frac{1}{2}$.
 $f(1, 2) = 2 \times 1,2^2 = 2,88$
 $f(1, 4) = 2 \times 1,4^2 = 3,92$
 A opção correta é a (C).
8. $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $f(2) = -1 \Leftrightarrow a \times 2^2 = -1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow a = -0,25$
 $f(x) = -0,25x^2$
 A opção correta é a (D).

Página 60

- Modelo real: 6.º dia
Modelo SIR: 7.º dia
 - Ao 9.º dia, o número de infetados segundo o modelo real era 189 e segundo o modelo SIR era 102.
A diferença entre os números de infetados, dados pelos modelos, ao 9.º dia é 82.
- 3.1. $f(7) = 256$ e $g(4) = 45$
- 3.2. $g(7) - f(7) = 386 - 256 = 130$
- No contexto apresentado, significa que ao 7.º dia, o número real de infetados era menor (menos 130 alunos) do que o esperado pelo modelo SIR.

Página 61

- 1.1. $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{29}$

Número	2	3	5	$\sqrt{29}$
Quadrado	4	9	25	29

Domínio: $\{2, 3, 5, \sqrt{29}\}$

Contradomínio: $\{4, 9, 25, 29\}$

- 1.2. O inverso de 2 é $\frac{1}{2}$.

O inverso de 0,4 é $\frac{10}{4}$, ou seja, $\frac{5}{2}$.

O inverso de 4 é $\frac{1}{4}$.

Número	2	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$
Inverso	$\frac{1}{2}$	0,4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$

Domínio: $\left\{2, \frac{5}{2}, 4, \frac{9}{2}\right\}$

Contradomínio: $\left\{\frac{1}{2}, 0,4, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}\right\}$

2. A amplitude térmica é a diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima.
 x : representa o dia
 $f(x)$: representa a amplitude térmica no dia x

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	4	3	6	9

Página 62

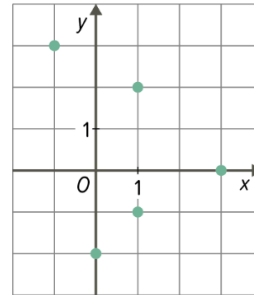
- 3.1.

x	-1	0	1	3
$f(x)$	3	-2	2	0

- 3.2. a) $f(3) = 0$

b) $f(-1) = 3$

- 3.3.



A correspondência não é uma função porque o elemento 1 tem duas correspondências (-1 e 2).

Página 63

4.1. $f(x) = x + 10$

4.2. $h(x) = x^2 - 3$

5.1. $T(3) = 2 + 1,5 \times 3 = 6,5$

Se forem percorridos 3 km, o cliente terá de pagar 6,50 €.

5.2. $T(x) = 2 + 1,5x$

Página 64

1.1. $g(-10) = 2 \times (-10) - 3 = -23$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = -2$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \times \frac{2}{3} - 3 = \frac{4}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$g(1) = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$g(4) = 2 \times 4 - 3 = 5$$

x	-10	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	4
$g(x)$	-23	-2	$-\frac{5}{3}$	-1	5

1.2. $g(x) = 2x - 3$

2.1. Esta correspondência é uma função porque a cada um dos dias do mês de janeiro faz corresponder um e um só número de dias completos que faltam para que o mês termine.

2.2. $d(1) = 31 - 1 = 30$

$d(7) = 31 - 7 = 24$

$d(31) = 31 - 31 = 0$

$d(1) = 30, d(7) = 24$ e $d(31) = 0$

2.3. $d(x) = 31 - x$

2.4. $d(x) = 7 \Leftrightarrow 31 - x = 7 \Leftrightarrow x = 24$

No dia 24 do mês de janeiro faltam sete dias para que o mês termine.

3.1. A correspondência é uma função porque a cada hora corresponde uma e uma só temperatura.

3.2. $f(14) = 37,4$

Às 14 horas desse dia, a temperatura da Lara era 37,4 °C.

3.3. A Lara tomou medicação duas vezes (às 8 h e às 16 h).

Página 65

4.1. 4 euros

4.2. $g(2) = 3$

Se alugarmos o caiaque durante 2 horas, o valor a pagar é 3 euros.

4.3. $g(2,5) - g(1) = 4 - 2 = 2$

A diferença entre os preços pagos pelos dois amigos foi 2 euros.

5.1. Se o desconto aplicado é 10% , então o valor pago corresponde a 90% do preço inicial do artigo.

$16 \times 0,9 = 14,4$

$27 : 0,9 = 30$

$20 \times 0,9 = 18$

$37,8 : 0,9 = 42$

$35 \times 0,9 = 31,5$

Preço inicial (€)	16	20	30	35	42
Preço final (€)	14,4	18	27	31,5	37,8

5.2. $p(x) = 0,9x$

6.1. É a diferença entre o número de imigrantes e o número de emigrantes nesse ano em Portugal.

6.2. a) O saldo migratório foi mínimo no ano de 1969.

b) O saldo migratório foi máximo no ano de 1975.

Página 66

1.1. $f(7) = -0,01 \times 7^3 + 3 \times 7 = 17,57$

17,57 centenas de litros = 1757 litros

1.2. $f(8) = -0,01 \times 8^3 + 3 \times 8 = 18,88$

18,88 centenas de litros = 1888 litros

1.3. $f(14) = -0,01 \times 14^3 + 3 \times 14 = 14,56$

14,56 centenas de litros = 1456 litros

2. Por observação gráfica, constata-se que o azeite que havia em maior quantidade em armazém era o azeite cujo preço por litro era de 10 € .

3. $f(15) = -0,01 \times 15^3 + 3 \times 15 = 11,25$

11,25 centenas de litros = 1125 litros

Em armazém havia 1125 litros de azeite da variedade mais cara.

4.

x Preço/L	f(x) N.º de centenas de litros em armazém
7	17,57
8	18,88
10	20,00
12	18,72
14	14,56
15	11,25

Página 67

6.1. $D_f = \left\{-2, 0, \frac{1}{3}, 5\right\}$; $D'_f = \{-3, 0, 5\}$

6.2. Não. O conjunto de chegada é o conjunto

$B = \{-3, 0, 4, 5\}$.

6.3. A imagem do objeto 0 é 5 .

6.4. O objeto cuja imagem é 0 é $\frac{1}{3}$.

6.5. $f\left(\frac{1}{3}\right) - f(5) = 0 - (-3) = 3$

7.1. $g(-10) = (-10)^2 = 100$

$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$

$$7.2. \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad g(4) = 4^2 = 16$$

$$D'_g = \left\{ \frac{1}{4}, 2, 16, 100 \right\}$$

Página 68

8.1. A correspondência é uma função porque a cada valor do tempo corresponde um e um só valor da altura.

8.2. $h(1) = 8$

Significa que 1 segundo após ter sido atirado, o brinquedo encontrava-se a 8 metros do solo.

8.3. O brinquedo atingiu a altura máxima de 9 metros, 2 segundos após ter sido lançado.

8.4. O brinquedo demorou 5 segundos a cair ao chão.

Página 69

1.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{16}x^2 + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-80}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} \vee x = -\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$$

$$A(-4, 0) \quad \text{e} \quad B(4, 0)$$

$$D'_g = [-4, 4]$$

1.2. $g(0) = -\frac{5}{16} \times 0^2 + 5 = 5 \quad C(0, 5)$

$$D'_g = [0, 5]$$

2.1. $f(10) = -0,025 \times 10^2 + 0,2 \times 10 + 3 = 2,5$

$$f(0) = -0,025 \times 0^2 + 0,2 \times 0 + 3 = 3$$

$$A(10; 2,5) \quad \text{e} \quad B(0, 3)$$

$y_A = 2,5$: Quando foi lançada a bola, esta encontrava-se a 2,5 m do solo.

$y_B = 3$: O cesto está a 3 m de altura do solo.

2.2. $f(4) = -0,025 \times 4^2 + 0,2 \times 4 + 3 = 3,4$

$$D'_f = [2,5; 3,4]$$

Página 70

7.1. $f(2) = -\frac{3}{2} \times 2 + 2 = -3 + 2 = -1$

$$g(1) = 2 \times 1 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$f(2) - g(1) = -2$$

7.2. $f(-1) = -\frac{3}{2} \times (-1) + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$

$$g(2) = 2 \times 2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

$$\frac{f(-1) + g(2)}{3} = \frac{\frac{7}{2} + 0}{3} = \frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{7}{6}$$

7.3. $g(3) = 2 \times 3 - 3^2 = 6 - 9 = -3$

$$f(x) = g(3) \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 2 = -3$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4 = -6 \Leftrightarrow -3x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

8.1. g é uma função porque a cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B .

8.2. $D_g = \{-2, 1, 0, 3\}$; $D'_g = \left\{-5, \frac{1}{2}, 3\right\}$

Conjunto de chegada: $B = \left\{-5, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$

8.3. Os objetos -2 e 3 têm a mesma imagem: 3

8.4. O objeto cuja imagem não é um número inteiro é o 0 (zero).

9.1. $f(0) = f(1) = 0$ porque não há número inteiro positivo inferior a 0 ou a 1 .

$f(2) = 1$ porque só há um número inteiro positivo inferior a 2 (o 1)

$f(3) = 2$ porque só há dois números inteiros positivos inferiores a 3 (o 1 e o 2)

$f(4) = 3$ porque só há três números inteiros positivos inferiores a 4 (1 , 2 e 3)

$f(5) = 4$ porque só há quatro números inteiros positivos inferiores a 5 (1 , 2 , 3 e 4)

$$D'_f = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

9.2. A afirmação é falsa porque $f(0) = f(1) = 0$, ou seja, 0 e 1 são objetos diferentes e têm a mesma imagem: 0 .

Página 71

10.1. $365 - f(m) = 334 \Leftrightarrow f(m) = 31$

A equação tem sete soluções pois há 7 meses do ano que têm 31 dias.

10.2. $365 - f(m) = 337 \Leftrightarrow f(m) = 28$

A equação tem uma solução porque um ano comum só tem 1 mês com 28 dias (mês de fevereiro)

11.1. $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$D'_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

11.2. a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 3$ C.S. = $\{3\}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$ C.S. = $\{-1, 2\}$

c) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$ C.S. = $\{0, 5\}$

d) $f(x) \leq 2$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4 \vee x = 5$

C.S. = $\{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

12.1. $D_g = [-3, 4]$ e $D'_g = [-2, 2]$

12.2. a) $g(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [-3, 0]$ C.S. = $[-3, 0]$

b) $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$ C.S. = $[-3, 1[$

c) $g(x) < 2 \Leftrightarrow x \in]0, 4]$ C.S. = $]0, 4]$

d) $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$ C.S. = $[1, 4]$

Página 72

1.1. a) $D_f = [0, 24]$ e $D'_f = [0; 13,8]$

b) $D_g = [0, 24]$ e $D'_g = [0, 9]$

1.2. a) Por observação gráfica, sabe-se que $f(12) < g(12)$. Assim, se o gerador tiver de funcionar 12 horas consecutivas, fica mais barato utilizar o combustível A.

b) Por observação gráfica, sabe-se que $f(17) > g(17)$. Logo, fica mais barato utilizar o combustível B se o gerador tiver de funcionar 17 horas consecutivas.

1.3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 14,4 \vee x = 0$

$0,4 \text{ h} = 0,4 \times 60 \text{ min} = 24 \text{ min}$

Se o gerador funcionar 14 horas e 24 minutos consecutivas, o consumo é o mesmo nos dois tipos de combustível.

2.2. $f(20) = 8$ $8 \times 4,5 = 36$

$g(20) = 5,76$ $5,76 \times 4,5 = 25,92$

Poupança: $36 - 25,92 = 10,08$ € (10 euros e 8 cêntimos)

Página 73

1. Opção (A)

A opção (B) está incorreta pois $f(-3) - 1 \neq 2f(2)$.

$f(-3) - 1 = 11 - 1 = 10$ e $2f(2) = 2 \times 7 = 14$

A opção (C) está incorreta pois $6 \in D'_f$ e 6 não é um número primo.

2. A representação gráfica que corresponde à função d é a (A).

Não é a opção (B) nem a opção (C), pois a distância do ponto M ao ponto P é constante e igual a 4 metros (raio da circunferência interior).

Página 74

1.1.

x	-2	-1	0	2
$g(x)$	5	2	1	5

1.2. Opção (D)

$(-2)^2 + 1 = 5$; $(-1)^2 + 1 = 2$; $0^2 + 1 = 1$; $2^2 + 1 = 5$

2.1. O período de rega durou 8 horas.

2.2. $f(0) = 400$ e $f(8) = 600$

Início: 400 litros Fim: 600 litros

2.3. Por observação gráfica, estima-se que após 5 horas de rega havia, aproximadamente, 350 litros de água no depósito.

2.4. A quantidade de água no depósito foi mínima após terem decorridos 4 horas de rega.

3.1. Não. Basta observar que $2012 < 2013$ e $f(2013) < f(2012)$.

3.2. De 2009 a 2018, a função atingiu o valor máximo em 2012.

3.3. $f(2012) - f(2010) > 0$ porque $f(2012) > f(2010)$

3.4. A função atingiu o valor mínimo no ano 2014, logo $f(2014) - f(x) \leq 0$, para qualquer $x \in D_f$.

3.5. A inequação $f(x) < 6250$ tem sete soluções pois nos anos de 2009, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 e 2018 o número de estrangeiros no município de Coimbra era inferior a 6250.

4.1. $f(-2) = -(-2)^2 = -4$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

$f(1) = -1^2 = -1$ $f(2) = -2^2 = -4$

$D'_f = \left\{-4, -1, -\frac{1}{4}\right\}$

4.2. $f(-2) = 2 \times (-2) - 1 = -5$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -2$$

$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1 \quad f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

Máximo de f : 3; mínimo de f : -5.

4.3. Opção (C), porque a função f a cada objeto x faz corresponder o seu valor absoluto.

Página 75

5. $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$g(\sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

Como $\frac{1}{3} \in D'_g$, então considera-se que $g(a) = \frac{1}{3}$

$$g(a) = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-a}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3a = 2$$

$$\Leftrightarrow -3a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

6.1. A representação gráfica (C).

6.2. (A): A distância do ponto P ao ponto O não é constante.

(B): A distância do ponto P ao ponto O nunca é superior a a .

(C): Quando o ponto P coincide com o ponto A , a sua distância ao ponto O é igual a a (e não é zero).

7.1. $D_T = [0, 10]$; $D'_T = [4, 12]$

7.2. A equação $T(t) = 6$ tem duas soluções.

Uma das soluções é 8.

7.3. a) A equação $T(t) = k$ tem uma só solução quando, por exemplo, $k = 10$.

b) A equação $T(t) = k$ tem duas soluções quando, por exemplo, $k = 7$.

c) A equação $T(t) = k$ é impossível quando, por exemplo, $k = 2$.

8.1. $-3 \notin D'_f$, porque a equação $f(x) = -3$ é impossível.

8.2. a) Não porque, por exemplo, a equação $f(x) = 2$ tem mais do que uma solução.

b) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Possíveis domínios de f :

$$D_1 = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}; D_2 = \{-2, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1\};$$

$$D_3 = \{-2; -1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 1, 2\}$$

Página 76

9. Desconto: 40% Valor a pagar: 60%

$$f(x) = 0,6x$$

$$f(25) = 0,6 \times 25 = 15.$$

$$f(x) = 33 \Leftrightarrow 0,6x = 33 \Leftrightarrow x = \frac{33}{0,6} \Leftrightarrow x = 55$$

$$f(x) = 64,5 \Leftrightarrow 0,6x = 64,5 \Leftrightarrow x = \frac{64,5}{0,6} \Leftrightarrow x = 107,5$$

x	25	55	107,5
$f(x)$	15	33	64,5

10.1. Percentagem do aumento:

$$\frac{f(2023) - f(2022)}{f(2022)} \times 100 = \frac{760 - 705}{705} \times 100 \approx 7,8014$$

A percentagem indicada é um valor aproximado por defeito.

10.2. $\frac{f(2020) - f(2019)}{f(2019)} \times 100 = \frac{635 - 600}{600} \times 100 \approx 5,8$

No contexto apresentado, significa que o aumento do salário mínimo nacional de 2019 para 2020 foi, aproximadamente, 5,8%.

11.1. $x > 0 \wedge 3 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 3$

$$D_f =]0, 3[$$

11.2. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

12.1. A área de cada base da peça é máxima quando $a = 2$.

$$f(2) = \pi \times 5^2 - \pi \times 1^2 = 25\pi - \pi = 24\pi \approx 75,4$$

Máximo de $f \approx 75,4 \text{ cm}^2$

12.2. O volume da peça é mínimo quando $b = 6$.

$$g(6) = \pi \times 5^2 \times 20 - \pi \times 3^2 \times 20 = 500\pi - 180\pi = 320\pi \approx 1005,31$$

Mínimo de g é aproximadamente $1005,31 \text{ cm}^3$.

Página 77

13.1. a) $250 \times 0,87098 = 217,745 \text{ GBP}$

b) $180 \times 1,14813 = 206,6634 \text{ EUR}$

13.2. $f(x) = 1,14813x$

14.1. $38,61 \times 1,813 = 69,99993$ (valor exato)

O Vasco pagou um valor aproximado por excesso, pois pagou um valor superior ao valor exato.

14.2. $f(x) = 1,813x$

Por exemplo:

a) $a = 10$

Valor a pagar: $f(10) = 18,13 \text{ €}$

b) $a = 18$

$f(18) = 1,813 \times 18 = 32,634 \text{ €}$

Valor a pagar: $32,63 \text{ €}$

c) $a = 25,9$

$f(25,9) = 1,813 \times 25,9 = 46,9567 \text{ €}$

Valor a pagar: $46,96 \text{ €}$

15.1. $A_{\square} = x \Leftrightarrow l_{\square}^2 = x \Leftrightarrow l_{\square} = \sqrt{x}$

$$P_{\square} = 4l_{\square} = 4 \times \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$$

$$h(x) = 4\sqrt{x}$$

15.2. $a = h(4) = 4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$

$$b = h(16) = 4\sqrt{16} = 4 \times 4 = 16$$

$[a, b] = [8, 16]$: Valores do perímetro do quadrado.

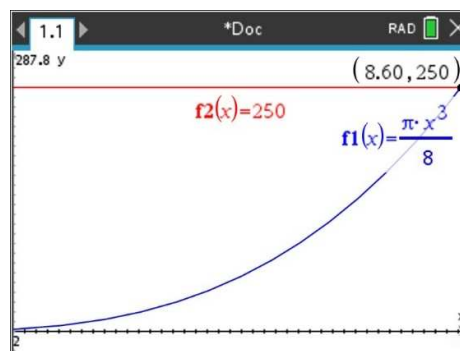
16.1. Seja r o raio da base do cone e h a sua altura.

Se $x = 2$, então $r = 1$ e $h = \frac{3 \times 2}{2} = 3$.

$$f(2) = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 3 = \pi$$

16.2. $f(x) = 250 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times \frac{3x}{2} = 250$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x^3}{8} = 250 \Leftrightarrow x \approx 8,60$$



Página 78

1.1. $f(-2) = 1$; $f(0) = 2$; $0 \in D_f$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

A opção correta é a (D)

1.2. A opção correta é a (A)

-1 , 0 e 1 já pertenciam ao domínio da função f .

$$2.1. f(-1) = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(3) = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$D'_f = \left\{-1, -\frac{1}{4}, 1\right\}$$

A opção correta é a (D).

2.2. $f(3) - f(1) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

A opção correta é a (C).

3.1. A variável dependente é a temperatura da substância

A opção correta é a (A).

3.2. A experiência decorreu durante 15 minutos.

A opção correta é a (D).

3.3. A temperatura inicial é $3,5 \text{ °C}$.

A equação que traduz a situação é: $f(x) = 3,5$

A opção correta é a (A).

3.4. A temperatura da substância foi negativa entre os 7 e os 12 minutos, ou seja, durante 5 minutos.

A opção correta é a (B).

Página 79

1.1. $f(-2) = (-2)^2 - (-2) = 4 + 2 = 6$

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(0) = 0^2 - 0 = 0$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(3) = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

-2 e 3; -1 e 2; 0 e 1.

2.1. $f(15) = 400 + 80 \times 15 = 400 + 1200 = 1600$

Se, num mês, o vendedor efetuar 15 vendas, então o seu vencimento será 1600 €.

2.2. $f(x) = 400 + 80x$

$$f(x) = 2480 \Leftrightarrow 400 + 80x = 2480$$

$$\Leftrightarrow 80x = 2080 \Leftrightarrow x = \frac{2080}{80} \Leftrightarrow x = 26$$

26 representa o número de vendas que é necessário fazer num mês para que o vendedor tenha um vencimento de 2480 €.

3.1. $D_h = [0; 1,5]$

3.2. $h(0) = -5 \times 0^2 + 5,5 \times 0 + 3 = 3$

Quando saltou, a nadadora encontra-se a 3 m de altura.

3.3. $h(0,55) = -5 \times 0,55^2 + 5,5 \times 0,55 + 3 = 4,5125$

Significado: 0,55 segundos após ter saltado, a nadadora encontrava-se a 4,5125 m de altura.

3.4. -0,4 é solução da equação mas não é solução do problema porque -0,4 não pertence ao domínio da função h .

4.1. Para que haja lucro, o número de peças produzidas e vendidas devem ser superior a 2 centenas, ou seja, 200.

4.2. 100 peças = 1 centena de peças $\rightarrow x = 1$

$$g(1) - f(1) = 1,5 - 2 = -0,5$$

$$0,5 \times 10 = 5$$

Se forem produzidas e vendidas 100 peças, o prejuízo é de 5 euros.

4.3. 300 peças = 3 centena de peças $\rightarrow x = 3$

$$g(3) - f(3) = 7,5 - 6 = 1,5$$

$$1,5 \times 10 = 15$$

Se forem produzidas e vendidas 300 peças, o lucro é 15 euros.

Página 80

1. $a < b$

2.1. Se $b = \frac{1}{175}$, então a distância de travagem em piso molhado é dada por $d_t = \frac{1}{175} v^2$.

$$v = 100 \text{ km/h} \quad d_t = \frac{1}{175} \times 100^2 \approx 57 \text{ m}$$

A distância de travagem é, aproximadamente, 57 metros.

2.2. $v = 120 \text{ km/h}$

Distância de travagem em piso molhado:

$$d_t = \frac{1}{175} \times 120^2 \approx 82,29 \text{ m}$$

Distância de travagem em piso seco:

$$d_t = \frac{1}{200} \times 120^2 \approx 72 \text{ m}$$

$$82,29 - 72 = 10,29 \approx 10 \text{ m}$$

A distância de travagem em piso molhado é, aproximadamente, 10 m superior à distância de travagem em piso seco.

Página 81

9.1. f não representa uma função afim porque não é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

9.2. g representa uma função afim porque é do tipo $g(x) = ax + b$, sendo $a = 4$ e $b = -1$.

9.3. h representa uma função afim porque é do tipo $h(x) = ax + b$, em que $a = \pi$ e $b = \frac{1}{3}$.

9.4. i representa uma função afim porque é do tipo $i(x) = ax + b$, em que $a = -\frac{2}{3}$ e $b = 0$.

9.5. j não representa uma função afim porque não é uma função do tipo $j(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

9.6. k representa uma função afim porque é do tipo $k(x) = ax + b$, sendo $a = 0$ e $b = 4$.

10.

Função	Declive	Ordenada na origem
g	4	-1
h	π	$\frac{1}{3}$
i	$-\frac{2}{3}$	0
k	0	4

11.1. Se a representação gráfica de uma função afim é uma reta paralela ao eixo Ox , então $a = 0$.

Por exemplo: $f(x) = 2$.

11.2. Se a representação gráfica de uma função afim é uma reta que interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 4)$, então $b = 4$.

Por exemplo: $f(x) = 3x + 4$

11.3. Se a representação gráfica de uma função afim é uma reta de declive -6 , então $a = -6$:

Por exemplo: $f(x) = -6x - 1$

12.1. $f(x) = 2x - 8$

$$\bullet f(0) = 2 \times 0 - 8 = 0 - 8 = -8$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenadas: $(0, -8)$ e $(4, 0)$.

12.2. $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

$$\bullet g(0) = -\frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3$$

$$\bullet g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenadas: $(0, 3)$ e $(6, 0)$.

12.3. $h(x) = 4x$

$$\bullet h(0) = 4 \times 0 = 0$$

$$\bullet h(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenadas: $(0, 0)$

12.4. $i(x) = 6$

O gráfico de i interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 6)$ e não interseca o eixo Ox .

12.5. $j(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$$\bullet j(6) = -\frac{1}{6}$$

$$\bullet j(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenadas $(0, -\frac{1}{6})$ e $(\frac{1}{4}, 0)$.

Página 82

13. $\bullet g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad A(4, 0)$$

$$\bullet g(0) = \frac{1}{2} \times 0 - 2 = -2 \quad B(0, -2)$$

$$\bullet g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = -\frac{7}{3} \quad C\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

$$\bullet g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 6 \quad D(6, 1)$$

$A(4, 0)$, $B(0, -2)$, $C\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ e $D(6, 1)$

14.1. $g(x) = ax + b$

$b = 3$ porque o ponto de coordenadas $(0, 3)$

pertence ao gráfico de g .

$$g(x) = ax + 3$$

$g(1) = 0$ porque o ponto de coordenadas $(1, 0)$

pertence ao gráfico de g .

$$g(1) = 0 \Leftrightarrow a \times 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

Assim, $g(x) = -3x + 3$.

14.2. $g\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \times \frac{1}{2} + 3 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Logo, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pertence

ao gráfico de g pois $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

14.3. $f(x) = ax + b$

Os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(-2, 0)$

pertencem ao gráfico de f , logo $f(0) = 1$ e

$$f(-2) = 0.$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 1 \\ a \times (-2) + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

$$14.4. f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Como $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$, o ponto de coordenadas

$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ não pertence ao gráfico de f .

$$15. f(x) = ax + b, \text{ em que } b = 10$$

$f(-1) = 2$ porque o ponto de coordenadas

$(-1, 2)$ pertence ao gráfico de f .

$$f(-1) = 2 \Leftrightarrow a \times (-1) + 10 = 2 \Leftrightarrow a = 8$$

Assim, $f(x) = 8x + 10$.

$$\bullet f(x) = 10 \qquad A(0, 10)$$

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow 8x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{10}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \qquad B\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

O gráfico de f interseca os eixos coordenadas

nos pontos de coordenadas $(0, 10)$ e $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.

Página 83

16.

f	g	h	i	j
$y = 2x + 2$	$y = -2$	$y = -\frac{1}{2}x$	$y = -2x - 2$	$y = x - 2$

$$17.1. g(x) = ax + b$$

Os pontos $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pertencem ao

gráfico da função g , logo $g(1) = \frac{1}{2}$ e

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} g(1) = \frac{1}{2} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} - a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 - 2a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} - 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim, $g(x) = x - \frac{1}{2}$.

$$17.2. g(x) = ax + b$$

Os pontos $A(1, -1)$ e $B\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ pertencem ao

gráfico da função g , logo $g(1) = -1$ e

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = 2.$$

$$\begin{cases} g(1) = -1 \\ g\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ \frac{1}{4}a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - a \\ \frac{1}{4}a - 1 - a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 4 - 4a = 8 \\ -3a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases}$$

Assim, $g(x) = -4x + 3$.

$$17.3. g(x) = ax + b$$

Os pontos $A(-2, 3)$ e $B(4, 6)$ pertencem ao

gráfico da função g , logo $g(-2) = 3$ e $g(4) = 6$.

$$\begin{cases} g(-2) = 3 \\ g(4) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 3 \\ 4a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + 2a \\ 4a + 3 + 2a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 3 \\ b = 3 + 2 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}$$

Assim, $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

18. • Ponto A

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 3 = -\frac{3}{2}x + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 6 = -3x + 10 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \times 1 + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \qquad A\left(1, \frac{7}{2}\right)$$

• Ponto B

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \qquad B(-6, 0)$$

• Ponto C

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \qquad C\left(\frac{10}{3}, 0\right)$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{BC} \times Y_A}{2} = \frac{\left(\frac{10}{3} + 6\right) \times \frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{28}{3} \times \frac{7}{2}}{2} = \frac{49}{3}$$

A área é $\frac{49}{3}$ u.a.

13.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Zero da função: 9

13.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

Zero da função: -5

13.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 = 0$ impossível

A função f não tem zeros.

13.4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

Zero da função: -6

13.5. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

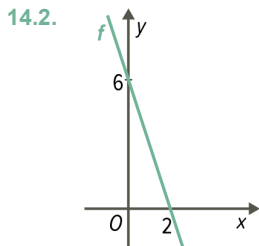
Zero da função: 0

13.6. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow -6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Zero da função: $\frac{1}{6}$

14.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$

Zero da função: 2

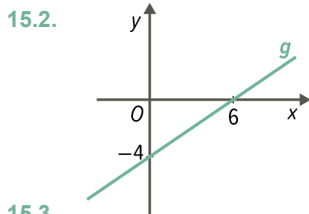


14.3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

15.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Zero da função: 6



15.3.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

16.1. Como $-\frac{1}{2}$ é zero de h , então $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a - 6 = 0 \Leftrightarrow -a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -12$$

16.2.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-

17.1. $f(x) = 3x - 1$

f é uma função afim e $a > 0$ (pois $a = 3$), logo a função f é crescente.

17.2. $f(x) = 7 - x$

f é uma função afim e $a < 0$ (pois $a = -1$), logo a função f é decrescente.

17.3. $f(x) = 2 \rightarrow$ A função f é constante.

17.4. $f(x) = \frac{1}{5}x + 8$

f é uma função afim e $a > 0$ (pois $a = \frac{1}{5}$), logo

a função f é crescente.

17.5. $f(x) = -3x$

f é uma função afim e $a < 0$ (pois $a = -3$), logo a função f é decrescente.

17.6. $f(x) = \frac{5}{3} - \frac{1}{7}x$

f é uma função afim e $a < 0$ (pois $a = -\frac{1}{7}$),

logo a função f é decrescente.

18. $f(x) = ax + b$

Como f é decrescente, $a < 0$.

$b = -5$ pois a representação gráfica é uma reta que interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -5)$.

Por exemplo, $f(x) = -4x - 5$.

19.1. j é crescente se $-3a + 6 > 0$.

$$-3a + 6 > 0 \Leftrightarrow -3a > -6 \Leftrightarrow a < 2$$

$$a \in]-\infty, 2[$$

19.2. j é decrescente se $-3a + 6 < 0$.

$$-3a + 6 < 0 \Leftrightarrow -3a < -6 \Leftrightarrow a > 2$$

$$a \in]2, +\infty[$$

19.3. -1 é zero de $f \Leftrightarrow f(-1) = 0$

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow (-3a+6) \times (-1) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a - 6 - 8 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{14}{3}$$

20. Se $a \in \mathbb{R}$, então:

$$a^2 \geq 0$$

$$a^2 + 3 \geq 0 \text{ para qualquer valor de } a.$$

O coeficiente de x é sempre positivo, logo a função é crescente.

Página 86

19.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Zero da função: $-\frac{3}{2}$

19.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{15}$

Zero da função: $\frac{1}{15}$

19.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Zero da função: $\frac{1}{3}$

20. 2 é zero da função f , logo exclui-se a opção (A).

f é decrescente, logo o declive é negativo.

Assim, a opção correta é a (D).

21. A opção correta é a (C).

(A): opção errada, porque a ordenada na origem é negativa e, neste caso, $b = 2$.

(B) e (D): opções erradas porque o declive é positivo (pois f é crescente) e, nestes casos,

$$a = -1.$$

22. $f(x) = ax + b$

$f(-4) = 0$ porque -4 é zero da função f .

$$f(-4) = 0 \Leftrightarrow -4a + b = 0 \Leftrightarrow -4a = -b \Leftrightarrow a = \frac{b}{4}$$

Sabe-se que o produto da ordenada na origem da reta r pelo seu declive é igual a 1 , ou seja,

$$b \times a = 1.$$

$$\Leftrightarrow b \times \frac{b}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2 \vee b = -2$$

Se $b = 2$, então $a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Se $b = -2$, então $a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Existem duas funções nas condições pedidas:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 2 \text{ e } f_2(x) = -\frac{1}{2}x - 2.$$

23. A opção correta é a (A) pois uma função afim é crescente se o declive for positivo.

Página 87

24.1. a) $y + 2x = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$

Retas paralelas têm o mesmo declive.

Então, o gráfico de f é uma reta paralela à reta

definida por $y = -2x + 1$ se $\frac{-1+3k}{2} = -2$

$$\frac{-1+3k}{2} = -2 \Leftrightarrow -1+3k = -4 \Leftrightarrow 3k = -3 \Leftrightarrow k = -1$$

b) O ponto de coordenadas $(-1, 4)$ pertence ao gráfico de f se $f(-1) = 4$.

$$f(-1) = 4 \Leftrightarrow -6 + \frac{-1+3k}{2} \times (-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow -6 + \frac{1-3k}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{1-3k}{2} = 10 \Leftrightarrow 1-3k = 20$$

$$\Leftrightarrow -3k = 19 \Leftrightarrow k = -\frac{19}{3}$$

c) A função f é crescente quando $\frac{-1+3k}{2} > 0$.

$$\frac{-1+3k}{2} > 0 \Leftrightarrow -1+3k > 0 \Leftrightarrow 3k > 1 \Leftrightarrow k > \frac{1}{3}$$

$$k \in \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$$

24.2. Se $k = -1$, então

$$f(x) = -6 + \frac{-1+3 \times (-1)}{2} x, \text{ ou seja,}$$

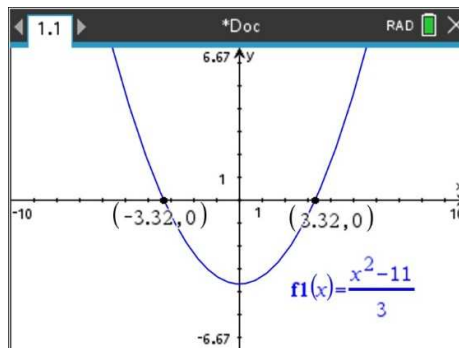
$$f(x) = -2x - 6.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

25. A função f é decrescente para

$$k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$



26.1. $f(x) = 1 + 0,15x$ e $g(x) = 0,20x$

26.2. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 1 + 0,15x < 0,20x \Leftrightarrow 1 < 0,05x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 20$

É mais vantajoso alugar a trotineta à empresa A se o tempo de aluguer for superior a 20 minutos.

Página 88

1.1. Tempo gasto no percurso entre A e B:

9 : 16 : 40

-9 : 15 : 10

0 : 01 : 30

1 minuto e 30 segundos = 1,5 minutos =

$= 1,5 \times \frac{1}{60} \text{ h} = 0,025 \text{ h}$

1.2. $\overline{AB} = 1600 \text{ m} = 1,6 \text{ km}$ $d = 1,6 \text{ km}$

$v_m = \frac{1,6}{0,025} = 64 \text{ km/h}$

No percurso entre os radares A e B, a velocidade média (64 km/h) foi inferior à velocidade máxima permitida (70 km/h).

2. Tempo gasto no percurso entre os dois radares:

45 segundos

45 segundos = $45 \times \frac{1}{60}$ minutos = 0,75 minutos =

$= 0,75 \times \frac{1}{60} \text{ h} = 0,0125 \text{ h}$

$v_m = \frac{2}{0,0125} = 160 \text{ km/h}$

Como $150 \text{ km/h} < v_m < 180 \text{ km/h}$, de acordo com a tabela, o automobilista cometeu uma infração GRAVE.

Página 89

21.1. $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$

As representações gráficas de f e g são simétricas em relação ao eixo Ox .

21.2. $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

Como $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, então $A\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

$B\left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

Como $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, então $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

21.3. $C\left(-\frac{3}{2}, g\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ e $D\left(\frac{3}{2}, g\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

$g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

Então, $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e $D\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

21.4. $\overline{AB} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ e $\overline{AD} = 2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

$P_{[ABCD]} = 2\overline{AB} \times 2\overline{AD} = 2 \times 3 + 2 \times \frac{9}{2} = 6 + 9 = 15$

$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{AD} = 3 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

Página 90

1.2.

t	$f(t)$	$g(t)$	$\frac{g(t)}{f(t)}$	$h(t)$	$\frac{h(t)}{f(t)}$
-2	4	8	2	2	0,5
-1,2	1,44	2,88	2	0,72	0,5
1	1	2	2	0,5	0,5
1,2	1,44	2,88	2	0,72	0,5
1,4	1,96	3,92	2	0,98	0,5
...

1.3. Se $i(x) = af(x)$ e $f(x) = x^2$, então é

$i(x) = ax^2$.

As coordenadas de um ponto do gráfico de i são (x, ax^2) .

Página 91

22.1. O gráfico da função f , sendo $f(x) = 5x^2$, é a imagem do gráfico da função $y = x^2$ por uma dilatação vertical de coeficiente 5.

22.2. O gráfico da função f , sendo $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, é a imagem do gráfico da função $y = x^2$ por uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{3}$.

22.3. O gráfico da função f , sendo $f(x) = \frac{2}{7}x^2$, é a imagem dos gráficos da função $y = x^2$ por uma contração vertical de coeficiente $\frac{2}{7}$.

22.3. O gráfico da função f , sendo $f(x) = \frac{7}{2}x^2$, é a imagem dos gráficos da função $y = \frac{7}{2}x^2$ por uma dilatação vertical de coeficiente $\frac{7}{2}$.

23.1. $g(x) = (-6k+13)x^2$
 O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ por uma contração vertical se $0 < -6k+13 < 1$.
 $0 < -6k+13 < 1 \Leftrightarrow -6k+13 > 0 \wedge -6k+13 < 1 \Leftrightarrow k < \frac{13}{6} \wedge k > 2$
 Então, $k \in \left] 2, \frac{13}{6} \right[$.

23.2. O contradomínio de g é $]-\infty, 0]$ se $-6k+13 < 0$
 $-6k+13 < 0 \Leftrightarrow k > \frac{13}{6}$
 Então, $k \in \left] \frac{13}{6}, +\infty \right[$.

24. $g(x) = ax^2$, sendo $a \in \mathbb{R}^+$.
 Se o ponto de coordenadas $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ pertence ao gráfico de g , então $g(-3) = \frac{3}{2}$.
 $g(-3) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a \times (-3)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 9a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$
 Como $0 < \frac{1}{6} < 1$, então o gráfico de g é imagem do gráfico de $y = x^2$ por uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{6}$.

Página 92

25. $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$, $h(x) = 3x^2$,
 $i(x) = -\frac{2}{7}x^2$ e $j(x) = -\frac{9}{5}x^2$

- O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f por uma reflexão em relação ao eixo Ox .
- O gráfico de h obtém-se a partir do gráfico de f por uma dilatação vertical de coeficiente 3 .
- O gráfico de i obtém-se a partir do gráfico de f por uma contração vertical de coeficiente $\frac{2}{7}$, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Ox .
- O gráfico de j obtém-se a partir do gráfico de f por uma dilatação vertical de coeficiente $\frac{9}{5}$, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Ox .

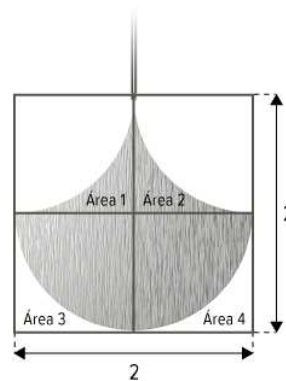
A função que satisfaz o pedido é a função j , representada na opção (D). O coeficiente de dilatação é $\frac{9}{5}$.

26.1. Sendo g uma função quadrática cujo gráfico se obtém do que representa a função definida por $y = x^2$ através de uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{3}$, seguida de uma reflexão de eixo Ox , então $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$.

26.2. $g(-1) = -\frac{1}{3} \times (-1)^2 = -\frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{3}$
 $g(3) = -\frac{1}{3} \times 3^2 = -\frac{1}{3} \times 9 = -3$
 Assim, $g(-1) + g(3) = -\frac{1}{3} + (-3) = -\frac{10}{3}$.

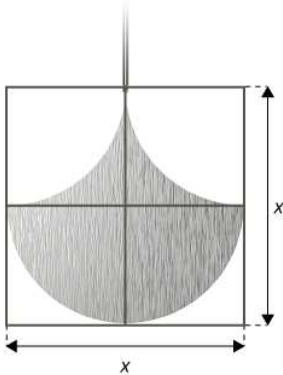
Página 93

1. $A_{\text{colorida}} = A_{\text{semi círculo}} + A_1 + A_2 = A_{\text{semi círculo}} + A_4 + A_3 =$
 $A_{\square} = 2 \times 1 = 2 \text{ u.a.}$



2.1. De forma análoga à de 1., conclui-se que

$$f(x) = x \times \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^2, \text{ sendo } x > 0.$$



2.2. A representação gráfica que corresponde à função f é a (C).

(A) não é a opção certa, porque $f(1) = \frac{1}{2}$ e,

nesta representação gráfica, $f(1) = 1$.

(B) não é a opção certa, porque $D_f =]0, +\infty[$ e, nesta representação gráfica, $D = \mathbb{R}$.

Página 94

27.1. $f(x) = -4x^2$

Vértice: $O(0, 0)$

Eixo de simetria: Oy

27.2. $D_f =]-\infty, 0]$

27.3. Se $x \in]-\infty, 0]$, então f é crescente.

Se $x \in [0, +\infty[$, então f é decrescente.

27.4. O gráfico de f é uma dilatação vertical de coeficiente 4 do gráfico da função definida por $y = x^2$, seguida de uma reflexão de eixo Ox .

28.1. $f(x) = ax^2$, com $a > 0$.

$$f(2) = 7 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 7 \Leftrightarrow 4a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{4}$$

Assim, $f(x) = \frac{7}{4}x^2$.

28.2. $g(x) = ax^2$, com $a < 0$.

$$g(-3) = -2 \Leftrightarrow a \times (-3)^2 = -2 \Leftrightarrow 9a = -2$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{9}$$

Assim, $g(x) = -\frac{2}{9}x^2$.

28.3. $h(x) = ax^2$, com $a > 0$.

$$h(-4) = 1 \Leftrightarrow a \times (-4)^2 = 1 \Leftrightarrow 16a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$$

$$h(x) = \frac{1}{16}x^2$$

Página 95

29.1. $g(x) = ax^2$, com $a < 0$.

O ponto $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ pertence à parábola, logo

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4}a = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a = -2$$

29.2. $g(x) = -2x^2$

$$g(-2) = -2 \times (-2)^2 = -2 \times 4 = -8$$

As coordenadas do ponto da parábola com abscissa -2 são $(-2, -8)$.

29.3. $g(x) = -4 \Leftrightarrow -2x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

As coordenadas dos pontos da parábola com ordenada -4 são $(\sqrt{2}, -4)$ e $(-\sqrt{2}, -4)$.

30. $j(x) = \frac{1}{4}x^2$

$$j(2) = \frac{1}{4} \times 2^2 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$j(-1) = \frac{1}{4} \times (-1)^2 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$j(-2) = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

A opção correta é a (B).

31.1. $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$.

O ponto $(2, -6)$ pertence à parábola, logo

$$f(2) = -6.$$

$$f(2) = -6 \Leftrightarrow 4a = -6 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

31.2. $f(-1) = -\frac{3}{2} \times (-1)^2 = -\frac{3}{2}$ $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

31.3. $-\frac{3}{2}x^2 = -24 \Leftrightarrow x^2 = 24 \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$
 $x > 0$

32. $f(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Então, $A(-2, -2)$ e $B(2, -2)$.

$$A_{\triangle OAB} = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = \overline{AB} = 4$$

A área é 4 u.a.

33. $f(x) = ax^2$, com $a < 0$.

O ponto P pertence ao gráfico de f , então $P(x, f(x))$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = f(x) \\ x \times f(x) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = ax^2 \\ x \times ax^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - ax^2 = 0 \\ ax^3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - ax) = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee 1 - ax = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1}{a} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a \times 0 = 4 \\ \text{impossível} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ a \times \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ a \times \frac{1}{a^3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \frac{1}{a^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ a^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ a^2 = \frac{1}{4} \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Página 96

27. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ **Vértice:** $V_1\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$g(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ **Vértice:** $V_2\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

$f(x) = (x+3)^2$ **Vértice:** $V_3(-3, 0)$

Então, $f \rightarrow \text{II}$, $g \rightarrow \text{III}$ e $h \rightarrow \text{I}$.

28.1. O gráfico da função f definida por

$f(x) = (x-7)^2$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ através de uma translação de vetor $\vec{u}(7, 0)$.

Vértice: $(7, 0)$

28.2. O gráfico da função g definida por

$g(x) = (x - \sqrt{5})^2$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ através de uma translação de vetor $\vec{u}(\sqrt{5}, 0)$.

Vértice: $(\sqrt{5}, 0)$

28.3. O gráfico da função h definida por

$h(x) = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2$ obtém-se a partir do gráfico da

função $y = x^2$ através de uma translação de

vetor $\vec{u}\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

Vértice: $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

28.4. O gráfico da função i definida por $i(x) = (x-b)^2$

sendo b um número real, obtém-se a partir do gráfico da função $y = x^2$ através de uma translação de vetor $\vec{u}(b, 0)$.

Vértice: $(b, 0)$

Página 97

29.1. $f(x) = a(x-h)^2$, com $a > 0$.

Como $V = (1, 0)$, então $f(x) = a(x-1)^2$.

$f(0) = 2 \Leftrightarrow a(0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow a = 2$

Assim, $f(x) = 2(x-1)^2$.

29.2. $f(x) = a(x-h)^2$, com $a > 0$.

Como $V = (-1, 0)$, então $f(x) = a(x+1)^2$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow a(0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$

Assim, $f(x) = (x+1)^2$.

29.3. $f(x) = a(x-h)^2$, com $a < 0$.

Como $V = (2, 0)$, então $f(x) = a(x-2)^2$

$f(-1) = -3 \Leftrightarrow a(-1-2)^2 = -3 \Leftrightarrow 9a = -3$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

Assim, $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2$.

Página 98

34.1. $f(x) = (x-4)^2$ **Vértice:** $V(4, 0)$

34.2. $f(x) = (x + \sqrt{2})^2$ **Vértice:** $V(-\sqrt{2}, 0)$

34.3. $f(x) = \left(x + \frac{4}{5}\right)^2$ **Vértice:** $V\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

35.1. Como o gráfico da função g é a imagem do gráfico de f , definida por $f(x) = x^2$, que aplica a origem do referencial no ponto de coordenadas $(7, 0)$, então $g(x) = (x-7)^2$.

35.2. O eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função g é uma reta paralela ao eixo Oy e que passa pelo ponto de coordenadas $(7, 0)$.

Todos os pontos dessa reta têm abscissa 7.

Assim sendo, dos pontos indicados, o que pertence ao eixo de simetria é o que tem coordenadas $(7, 5)$.

A opção correta é a opção **(C)**

36.1. Sabe-se, através do quadro de variação da função g , que -3 é minimizante da função g .

Assim, conclui-se que $h = -3$ e $g(x) = (x+3)^2$.

36.2. $g(1) = (1+3)^2 = 4^2 = 16$

$g(0) = (0+3)^2 = 3^2 = 9$

$g(-5) = (-5+3)^2 = (-2)^2 = 4$

Assim, o ponto que pertence ao gráfico de g é o ponto de coordenadas $(-5, 4)$.

A opção correta é a **(A)**.

Página 99

37.1. $g(x) = (x-h)^2$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} - h\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - h = 1 \vee \frac{3}{2} - h = -1$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4 \times 1 \times (-3+h) > 0$

Como $h > \frac{3}{2}$, conclui-se que $h = \frac{5}{2}$.

Então $g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

A opção correta é a **(C)**

37.2. $i(x) = (x-h)^2$

$i(-6) = 4 \Leftrightarrow (-6-h)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6-h = 2 \vee -6-h = -2 \Leftrightarrow h = -8 \vee h = -4$

Como $h > -6$, conclui-se que $h = -4$.

Então, $i(x) = (x+4)^2$.

38.1. $h = -4$, logo $f(x) = a(x+4)^2$.

$f(0) = -2 \Leftrightarrow a(0+4)^2 = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$

$a = -\frac{1}{8}$ e $h = -4$

38.2. $D'_f =]-\infty, 0]$

38.3. Quadro de variação:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	0	\searrow

Intervalos de monotonia:

f é crescente em $]-\infty, -4]$ e f é decrescente em $[-4, +\infty[$.

39.1. Função f

$\bullet D_f = \mathbb{R} \quad \bullet D'_f = [0, +\infty[$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow

Mínimo: 0

Função g

$\bullet D_g = \mathbb{R} \quad \bullet D'_g =]-\infty, 0]$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	\nearrow	0	\searrow

Máximo: 0

39.2. $f(x) = a(x-h)^2$, com $a > 0$.

Como $V(2, 0)$, então $f(x) = a(x-2)^2$.

$f(0) = 2 \Leftrightarrow a(0-2)^2 = 2 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

$g(x) = a(x-h)^2$, com $a < 0$.

Como $V = (-1, 0)$, então $g(x) = a(x+1)^2$.

$g(-3) = -4 \Leftrightarrow a(-3+1)^2 = -4 \Leftrightarrow a = -1$.

Assim, $g(x) = -(x+1)^2$.

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$ e $g(x) = -(x+1)^2$

Página 100

30.

Parábola	Vértice	N.º de zeros
$y = x^2 + 7$	$(0, 7)$	0
$y = x^2 - 8$	$(0, -8)$	2
$y = x^2 - \frac{1}{2}$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$	2
$y = x^2 + \sqrt{3}$	$(0, \sqrt{3})$	0

- $x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -7$ Equação impossível
- $x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$
- $x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$
- $x^2 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\sqrt{3}$ Equação impossível

31.1. O gráfico da função f , definida por $f(x) = x^2 + 6$, obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = x^2$, através de uma translação de vetor $\vec{u}(0, 6)$.

Coordenadas do vértice: $(0, 6)$

$$D'_f = [6, +\infty[$$

31.2. O gráfico da função g , definida por $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = x^2$ através de uma translação de vetor $\vec{u}(0, -\frac{1}{2})$.

Coordenadas do vértice: $(0, -\frac{1}{2})$

$$D'_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

31.3. O gráfico da função h , definida por $h(x) = x^2 - 7$, obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = x^2$ através de uma translação de vetor $\vec{u}(0, -7)$.

Coordenadas do vértice: $(0, -7)$

$$D'_h = [-7, +\infty[$$

31.4. O gráfico da função i , definida por $i(x) = 11 + x^2$, obtém-se a partir do gráfico da função definida por $y = x^2$ através de uma translação de vetor $\vec{u}(0, 11)$

Coordenadas do vértice: $(0, 11)$

$$D'_i = [11, +\infty[$$

32. $f(x) = ax^2 + k$, $a > 0$

$$V\left(0, -\frac{7}{5}\right), \text{ logo } k = -\frac{7}{5}.$$

Como $a > 0$, a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para cima.

$$\text{Então, } D'_f = \left[-\frac{7}{5}, +\infty\right[.$$

33.1. $f(x) = x^2 + k$ e $D'_f = [-9, +\infty[$

Então, $k = -9$.

33.2. Tabela de variação da função f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	-9	\nearrow

33.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

Zeros: -3 e 3

33.4. Tabela de sinais da função f :

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

34.1. $y = ax^2 + k$, com $a > 0$.

Como $V(0, 2)$, então $y = ax^2 + 2$.

O ponto de coordenadas $(2, 4)$ pertence ao gráfico, logo:

$$4 = a \times 2^2 + 2 \Leftrightarrow 4 = 4a + 2 \Leftrightarrow -4a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Assim, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+$	

34.2. $y = ax^2 + k$, com $a < 0$

Como $V(0, 5)$, então $y = ax^2 + 5$.

O ponto de coordenadas $(3, 0)$ pertence ao gráfico de f , logo:

$$0 = a \times 3^2 + 5 \Leftrightarrow 0 = 9a + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{9}$$

Assim, $y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$.

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

1. $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f =]-\infty, 8]$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Zeros: -2 e 2

3.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

A função f é positiva em $]-2, 2[$ e negativa em

$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

4.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	8	\searrow

A função f é crescente em $]-\infty, 0]$ e

decrecente em $[0, +\infty[$.

Página 103

40.1. $f(x) = x^2 + 8$ Vértice: $(0, 8)$

40.2. $g(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ Vértice: $(0, -\frac{4}{3})$

40.3. $h(x) = x^2 - \pi$ Vértice: $(0, -\pi)$

40.4. $i(x) = x^2 + \frac{9}{5}$ Vértice: $(0, \frac{9}{5})$

41.1. Por observação gráfica, pode-se identificar as

coordenadas dos vértices de cada uma das parábolas

$$g \rightarrow (0, 2); h \rightarrow (0, -4); i \rightarrow (-3, 0);$$

$$j \rightarrow (4, 0)$$

Como as parábolas se obtiveram a partir do gráfico da função f , definida por $f(x) = x^2$,

através de translações que aplicam a origem do referencial no vértice de cada uma das parábolas, conclui-se que:

$$g(x) = x^2 + 2; h(x) = x^2 - 4; i(x) = (x+3)^2$$

$$j(x) = (x-4)^2$$

41.2. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

O gráfico de h interseca o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

42.1. $g(x) = x^2 - \frac{9}{4}$

$$c = -\frac{9}{4}; \text{ coordenadas do vértice: } (0, -\frac{9}{4})$$

42.2. a e b são os zeros da função g .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{3}{2} \text{ e } b = \frac{3}{2};$$

$$\text{Produto dos zeros da função } g: -\frac{9}{4}$$

42.3.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+

Página 104

43.1. $g(x) = ax^2 + k, a \neq 0$

$$D_g' =]-\infty, \frac{25}{2}], \text{ logo } a < 0 \text{ e } k = \frac{25}{2}.$$

$$\text{Assim, } g(x) = ax^2 + \frac{25}{2}, \text{ sendo } a < 0.$$

Como o ponto de coordenadas $(-\frac{3}{2}, 8)$ pertence

ao gráfico da função g , então $g(-\frac{3}{2}) = 8$

$$g(-\frac{3}{2}) = 8 \Leftrightarrow a \times (-\frac{3}{2})^2 + \frac{25}{2} = 8 \Leftrightarrow \frac{9}{4}a + \frac{25}{2} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9a + 50 = 32 \Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{Então, } g(x) = -2x^2 + \frac{25}{2}.$$

43.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + \frac{25}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{5}{2} \text{ Zeros de } g: -\frac{5}{2} \text{ e } \frac{5}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0	-

44.1. Sendo $f(x) = (x+3)^2, g(x) = -(x-1)^2$ e

$$f(x) = -x^2 + 4, A, B \text{ e } C \text{ os vértices das}$$

parábolas representativas das funções f, g e h .

Assim, $A(-3, 0), B(1, 0)$ e $C(0, 4)$.

44.2. $A_{ABC} = \frac{AB \times OC}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$

A área é 8 u.a.

45.1. $f(x) = ax^2 + k, \text{ com } a \neq 0$

$$\text{Vértice: } (0, k)$$

Sabe-se que a ordenada do vértice é -6 , ou

seja, $k = -6$.

Como $f(2) = -8$, então conclui-se que $a < 0$.

$$\text{Logo, } D'_f =]-\infty, -6[.$$

45.2. $k = -6$ logo $f(x) = ax^2 - 6$.

$$f(2) = -8 \Leftrightarrow ax^2 - 6 = -8 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Assim, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ e } k = -6; \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6$$

46.1. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e têm ordenada 4 , as suas abscissas são as

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

soluções da equação $f(x) = 4$.

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Como $b < a$, conclui-se que $a = 2$ e $b = -2$.

46.2. O gráfico de g é a imagem do gráfico de f através da translação que aplica a origem do referencial no ponto de coordenadas $(0, -9)$.

$$g(x) = x^2 - 9$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Zeros de g : -3 e 3 .

46.3. $A_{ABCD} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times 4 = \frac{6+4}{2} \times 4 = 20$

A área é igual a 20 u.a.

Página 105

47.1. Sendo $g(x) = x^2 + 10 - 2k$, então

$$D_g' = [10 - 2k, +\infty[$$

$$D_g' = [-4, +\infty[\text{ se: } 10 - 2k = -4 \Leftrightarrow k = 7$$

47.2. O vértice é o ponto de coordenadas $(0, 5)$ se:

$$10 - 2k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$$

47.3. A função tem apenas um zero se:

$$10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$$

47.4. A função não tem zeros se

$$10 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < 5$$

$$k \in]-\infty, 5[$$

48.1. $f(x) = x^2$ e $g(x) = -f(x) + 4$

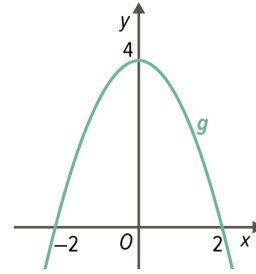
A parábola que representa f sofre uma reflexão de eixo Ox seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0, 4)$ para se transformar na que representa g .

48.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Zeros: -2 e 2

48.3.



49. $f(x) = ax^2$, com $a < 0$.

$$f(2) = -12 \Leftrightarrow ax^2 = -12 \Leftrightarrow 4a = -12 \Leftrightarrow a = -3$$

Assim, $f(x) = -3x^2$.

$$B(-1, f(-1)) \text{ e } f(-1) = -3 \times (-1)^2 = -3 \times 1 = -3$$

Então, $B(-1, -3)$.

$C(-1, 0)$ e $D(2, 0)$

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{CD} = \frac{12+3}{2} \times 3 = \frac{15}{2} \times 3 = \frac{45}{2}$$

A área é $\frac{45}{2}$ u.a.

50. $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$P(x, g(x))$, com $x > 0$, logo

$$P\left(x, \frac{1}{2}x^2\right), \quad x > 0 \quad O(x, 0), \quad x > 0$$

$$A_{OPQ} = 54 \Leftrightarrow \frac{\overline{OQ} \times \overline{PQ}}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{x \times \frac{1}{2}x^2}{2} = 54 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}x^3}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 = 54 \Leftrightarrow x^3 = 216 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{216}$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

$$g(6) = \frac{1}{2} \times 6^2 = \frac{1}{2} \times 36 = 18 \quad P(6, 18)$$

Página 106

35.1. $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$ Vértice: $(1, 2)$

35.2. $f(x) = 8x^2$ Vértice: $(0, 0)$

35.3. $f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^2 - 8$ Vértice: $(-1, -8)$

35.4. $f(x) = \frac{4}{3}(x-2)^2 - 1$ Vértice: (2, -1)

35.5. $f(x) = 4(x+6)^2$ Vértice: (-6, 0)

35.6. $f(x) = \frac{1}{7}x^2 - 5$ Vértice: (0, -5)

36. Como o vértice da parábola tem coordenadas (2, -3), então sabe-se que:

$$g(x) = a(x-2)^2 - 3$$

$$g(0) = 2 \Leftrightarrow a(0-2)^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow 4a - 3 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4} \quad g(x) = \frac{5}{4}(x-2)^2 - 3$$

Página 107

37.1. a) Vértice: (-3, 8).

b) O sentido da concavidade é voltada para baixo porque $a < 0$ ($a = -2$).

c) $f(0) = -2(0+3)^2 + 8 = -2 \times 9 + 8 = -18 + 8 = -10$

A parábola que representa a função f interseca o eixo Oy no ponto de coordenadas (0, -10).

37.2 $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x+3)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -2(x+3)^2 = -8$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 4 \Leftrightarrow x+3 = \sqrt{4} \vee x+3 = -\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 2 \vee x+3 = -2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$$

Zeros: -5 e -1

37.3. $D'_f =]-\infty, 8]$

37.4. Quadro de sinais de f :

x	$-\infty$	-5		-1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

Quadro de variação de f :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	8	\searrow

38.1. (a) $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ Vértice: (-1, -2)

$$h(x) = -2(x-1)^2 - 3 \quad \text{Vértice: (1, -3)}$$

(b) Concavidade de g voltada para cima.

Concavidade de h voltada para baixo.

(c) g interseca o eixo das ordenadas

em $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

h interseca o eixo das ordenadas em (0, -5).

38.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{4} \vee x+1 = -\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 2 \vee x+1 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Zeros de g : -3 e 1

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x-1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -2(x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 = -\frac{3}{2}}_{\text{Equação impossível}} \quad \text{A função } h \text{ não tem zeros.}$$

38.3. $D'_g = [-2, +\infty[; D'_h =]-\infty, -3]$

38.4. Quadro de sinais de g :

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+

Quadro de variação de g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	\searrow	-2	\nearrow

Quadro de sinais de h :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	-	

Quadro de variação de h :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	\nearrow	-3	\searrow

39.1. $f(-1) = 0$ e Vértice: (2, 4)

Os zeros da função f são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola (reta paralela a Oy e que passa no ponto (2, 4)).

Seja V o ponto que pertence ao eixo Ox e tem a mesma abscissa que V .

Sendo $A(-1, 0)$, então $\overline{V'A} = 3$.

Assim, o outro zero de f é 2+3, ou seja, 5.

39.2. Como $V(2, 4)$, então $f(x) = a(x-2)^2 + 4$

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow a(-1-2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{9}$$

$$\text{Assim, } f(x) = -\frac{4}{9}(x-2)^2 + 4$$

39.3. O máximo de f é $f(2)$, ou seja, 4.

Página 108

40.1. $f(x) = 6(x-7)^2 - 12$

Como $a > 0$ ($a = 6$) e $k < 0$ ($k = -12$), a função f tem dois zeros.

40.2. $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$

Como $a < 0$ ($a = -2$) e $k > 0$ ($k = 8$), a função f tem dois zeros.

40.3. $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Como $a > 0$ ($a = 2$) e $k = 0$, a função f tem um só zero.

40.4. $f(x) = -3(x+1)^2 - 9$

Como $a < 0$ ($a = -3$) e $k < 0$ ($k = -9$), a função f não tem zeros.

40.5. $f(x) = (x+1)^2$

Como $a > 0$ ($a = 1$) e $k = 0$, a função f tem um só zero.

40.6. $f(x) = x^2 - \frac{4}{9}$

Como $a > 0$ ($a = 1$) e $k < 0$ ($k = -\frac{4}{9}$), a função f tem dois zeros.

41.1.

	Função f	Função g	Função h	Função j
Vértice	$(-6, 1)$	$(5, -18)$	$(-3, 0)$	$(0, 8)$
Eixo de simetria	Reta paralela a Oy e que passa por $(-6, 1)$	Reta paralela a Oy e que passa por $(5, -18)$	Reta paralela a Oy e que passa por $(-3, 0)$	Eixo Oy

41.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+6)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+6 = 1 \vee x+6 = -1 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -7$

Zeros de f : -7 e -5

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-5)^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-5 = 3 \vee x-5 = -3 \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 2$

Zeros de g : 2 e 8

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Zero de h : -3

$j(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -4}_{\text{equação impossível}}$

A função j não tem zeros.

42.1. Como 3 é o mínimo, $D'f = [3, +\infty[$.

Logo, a função f não tem zeros.

42.2. A abscissa do vértice é 1 porque o eixo de simetria da parábola que representa a função f e a reta paralela a Oy e que contém o ponto $(1, 5)$.

A ordenada do vértice é 3 porque 3 é o mínimo de f .

Vértice: $(1, 3)$

$f(x) = a(x-1)^2 + 3$, com $a \neq 0$.

Então, três possíveis expressões analíticas para f são, por exemplo: $f(x) = (x-1)^2 + 3$,

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ e $f(x) = 5(x-1)^2 + 3$.

Página 109

1. As parábolas que correspondem a funções que não têm zeros são P_3 , P_6 , P_7 e P_8 .

2. A função que tem um único zero e é negativo, é a f_2 .

$f_2(x) = (x+5)^2$

Zeros: -5

3. Por exemplo, P_3 e P_7 .

4. A parábola é a P_8 , cujo vértice é $(8, 1)$.

Como as parábolas têm todas a mesma abertura e $f(x) = x^2$, então $f_8(x) = (x-8)^2 + 1$.

$f_8(5) = (5-8)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

A imagem de 5 pela função f_8 é 10 .

5. A função que corresponde ao quadro de variação apresentada f_9 .

Como o vértice é o ponto de coordenadas $(5, -4)$ e $a = 1$ (pois as parábolas têm todas a mesma abertura), então $f_9(x) = (x-5)^2 - 4$.

6. A parábola correspondente à função que tem dois zeros simétricos é a P_4 .

$f_4(x) = x^2 - 5$

$f_4(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

Zeros: $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

7. A parábola correspondente à função que tem dois zeros negativos é a P_5 .

Vértice: $(-3, -3)$

$$f_5(x) = (x+3)^2 - 3$$

$$f_5(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 = \sqrt{3} \vee x+3 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

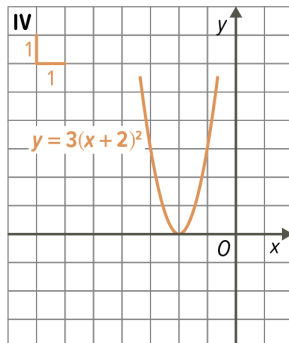
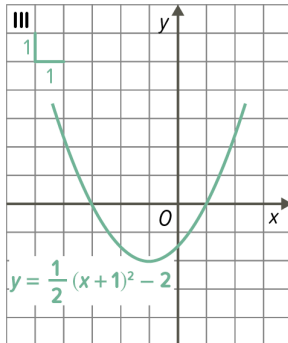
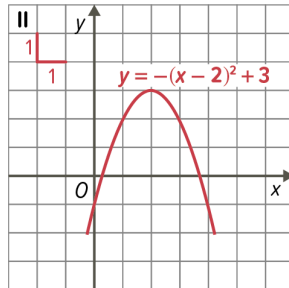
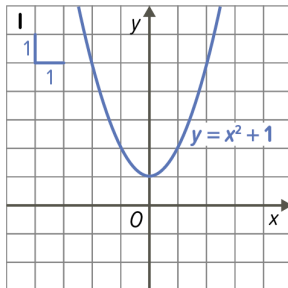
$$\Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{3} \vee x = -3 - \sqrt{3}$$

$$\text{Soma dos zeros de } f_5: (-3 + \sqrt{3}) + (-3 - \sqrt{3}) = -6$$

Página 110

1. I: $D' = [1, +\infty[$ II: $D' =]-\infty, 3]$
 III: $D' = [-2, +\infty[$ IV: $D' = [0, +\infty[$

2.



3. I: $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 = -1}_{\text{equação impossível}}$

O gráfico intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não intersesta o eixo Ox .

Quadro de sinais:

x	$-\infty$	$+\infty$
y	+	

$$\text{II: } f(0) = -(0-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$-(x-2)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \sqrt{3} \vee x-2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

O gráfico intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e o eixo Ox nos pontos

de coordenadas $(2 - \sqrt{3}, 0)$ e $(2 + \sqrt{3}, 0)$.

Quadro de sinais (referencial II):

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$		$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
y	-	0	+	0	-

$$\text{III: } f(0) = \frac{1}{2}(0+1)^2 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = 2 \vee x+1 = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

O gráfico intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -\frac{3}{2})$ e o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e $(1, 0)$.

Quadro de sinais (referencial III):

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
y	+	0	-	0	+

$$\text{IV: } f(0) = 3(0+2)^2 = 3 \times 4 = 12$$

$$3(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

O gráfico intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 12)$ e o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-2, 0)$.

Quadro de sinais (referencial IV):

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	+	0	+

Página 111

1. Sabe-se que $f(x) = 2x^2$ e as parábolas têm todas a mesma abertura. Então, $a = 2$ ou $a = -2$, consoante a concavidade está voltada para cima (P_1 e P_6) ou para baixo (P_2, P_3, P_4, P_5 e P_7).

$$V_1(4, 2), \text{ logo } f_1(x) = 2(x-4)^2 + 2;$$

$$D'_{f_1} = [2, +\infty[.$$

$$V_2(6, 0), \text{ logo } f_2(x) = -2(x-6)^2;$$

$$D'_{f_2} =]-\infty, 0].$$

$$V_3(0, -4), \text{ logo } f_3(x) = -2x^2 - 4;$$

$$D'_{f_3} =]-\infty, -4].$$

$$V_4(2, 1), \text{ logo } f_4(x) = -2(x-2)^2 + 1;$$

$$D'_{f_4} =]-\infty, 1].$$

$$V_5(-4, 5), \text{ logo } f_5(x) = -2(x+4)^2 + 5;$$

$$D'_{f_5} =]-\infty, 5] .$$

$$V_6(-3, -2), \text{ logo } f_6(x) = 2(x+3)^2 - 2;$$

$$D'_{f_6} = [-2, +\infty[.$$

$$V_7(-5, -3), \text{ logo } f_7(x) = -2(x+5)^2 - 3;$$

$$D'_{f_7} =]-\infty, -3] .$$

2.1. $f_4(x) = -7$

$$\Leftrightarrow -2(x-2)^2 + 1 = -7 \Leftrightarrow -2(x-2)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x-2 = 2 \vee x-2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0 \quad \text{C.S.} = \{0, 4\}$$

2.2. $f_4(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -2(x-2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x-2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Zeros de } f_4: 2 - \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ e } 2 + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Soma dos zeros de f_4 :

$$\left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(2 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2 + 2 = 4$$

2.3. Quadro de sinais de f_4 :

x	$-\infty$	$2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$		$2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f_4(x)$	-	0	+	0	-

Quadro de variação de f_4 :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f_4(x)$	\nearrow	1	\searrow

Página 112

51. (A): V

(B): F

(C): V

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

$$\bullet \text{ Produto dos zeros: } \sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) = -6$$

$$\bullet \text{ Soma dos zeros: } \sqrt{6} + (-\sqrt{6}) = 0$$

52.1. $f(0) = 2 \Leftrightarrow 2(0-h)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0-h)^2 = 1 \Leftrightarrow h = 1 \vee h = -1$$

52.2. $g(x) = -(x+3)^2 + k$

Como $a < 0$ ($a = -1$), a função h não tem zeros

se $k < 0$.

$$k \in]-\infty, 0[$$

53.1. Vértice: (2, 12)

Eixo de simetria: reta paralela ao eixo Oy e que passa por (2, 12) .

53.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x-2)^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-2 = 2 \vee x-2 = -2 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0$$

Zeros: 0 e 4

53.3. Quadro de variação da função f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	12	\searrow

Quadro de sinais da função f :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

54.1. $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$ Vértice: (1, -4)

A opção correta é a (A).

54.2. $g(x) = -(x+2)^2 + 5$ $D'_g =]-\infty, 5]$

A opção correta é a (A).

55. Como o eixo de simetria é uma reta paralela ao

eixo Oy e que intersecta Ox n o ponto de

coordenadas (3, 0), então $h = 3$.

$$f(x) = (x-3)^2 + k$$

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow (0-3)^2 + k = 2 \Leftrightarrow 9 + k = 2 \Leftrightarrow k = -7$$

Vértice: (3, -7)

Página 113

56.1. $V(-4, -2)$, logo $f(x) = a(x+4)^2 - 2$

Como a parábola passa no ponto (0, 0) , tem-se:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a(0+4)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 16a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\text{Assim, } f(x) = \frac{1}{8}(x+4)^2 - 2 .$$

56.2. $V(1, 3)$, logo $g(x) = a(x-1)^2 + 3$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence à parábola, tem-se:

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow a(0-1)^2 + 3 = 1 \Leftrightarrow a + 3 = 1 \Leftrightarrow a = -2$$

Assim, $g(x) = -2(x-1)^2 + 3$.

56.3. $V(2, -3)$, logo $h(x) = a(x-2)^2 - 3$.

Como o ponto de coordenadas $(1, -1)$ pertence à parábola, tem-se:

$$h(1) = -1 \Leftrightarrow a(1-2)^2 - 3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - 3 = -1 \Leftrightarrow a = 2$$

Logo, $h(x) = 2(x-2)^2 - 3$.

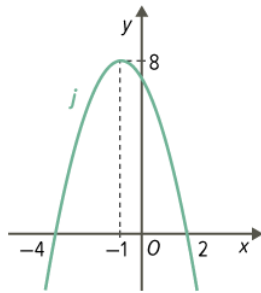
57.1. Como os zeros são simétricos em relação ao eixo de simetria e são -4 e 2 , então o eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função f é a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto de coordenadas $\left(\frac{-4+2}{2}, 0\right)$,

ou seja, $(-1, 0)$.

$Y_v = 8$ porque o máximo da função j é 8 .

Coordenadas do vértice: $(-1, 8)$

57.2.



Intervalos de monotonia:

j é crescente em $]-\infty, -1]$ e é decrescente em

$[-1, +\infty[$.

57.3. $j(-2) - j(0) = 0$ porque os pontos de coordenadas $(-2, j(-4))$ e $(0, j(0))$ são simétricos em relação ao eixo de simetria.

57.4. $j(x) = a(x+1)^2 + 8$

$$j(2) = 0 \Leftrightarrow a(2+1)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 9a + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{8}{9}$$

Então, $j(x) = -\frac{8}{9}(x+1)^2 + 8$

$$j(3) = -\frac{8}{9}(3+1)^2 + 8 = -\frac{8}{9} \times 16 + 8 = -\frac{56}{9}$$

$$j(0) = -\frac{8}{9}(0+1)^2 + 8 = -\frac{8}{9} + 8 = -\frac{64}{9}$$

Assim,

$$-j(3) + 3j(0) = \frac{56}{9} + 3 \times \frac{64}{9} = \frac{56}{9} + \frac{192}{9} = \frac{248}{9}$$

Página 114

58. $g(x) = a(x-2)^2 + a, a \neq 0$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-2)^2 + a = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2 = 1}_{\text{equação impossível}}$$

A função g não tem zeros.

A opção correta é a **(B)**.

59.1. $P(1; f(1))$ com $f(1) = -0,52 \times 1^2 + 5 = 4,48$.

Então, $P(1; 4,48)$.

59.2. Vértice da parábola que contém o gráfico de f : $(0, 5)$.

59.3. O vértice V tem abscissa 4,3 e ordenada 5 porque o gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação paralela ao eixo de Ox . Assim, $V(4,3; 5)$.

59.4. O vetor da translação é $\vec{u}(4,3; 0)$.

Logo, o domínio da função g é

$$[-2 + 4,3; 2 + 4,3[, \text{ ou seja, } D_g = [2,3; 6,3[$$

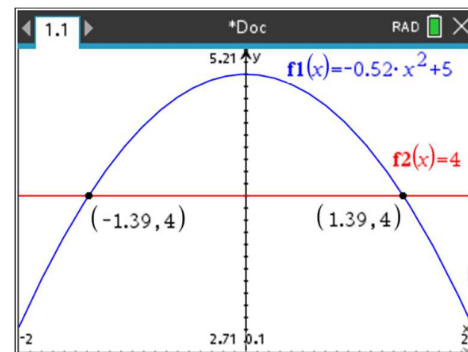
59.5. $g(x) = -0,52(x-4,3)^2 + 5$

59.6. Máximo: 5

Mínimo: $f(2) = -0,52 \times 2^2 + 5 = 2,92$

$$D'_g = D'_f = [2,92; 5]$$

59.7. a)



$$f(x) = 4 \Leftrightarrow x \approx 1,4 \vee x \approx -1,4$$

- b) O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f for uma translação de vetor $\vec{u}(4,3;0)$

Como $f(x) = 4 \Leftrightarrow x \approx 1,4 \vee x \approx -1,4$, então

$$g(x) = 4 \Leftrightarrow x \approx 1,4 + 4,3 \vee x \approx -1,4 + 4,3$$

$$\Leftrightarrow x \approx 5,7 \vee x \approx 2,9$$

As abcissas dos pontos do gráfico de g , arredondadas às décimas, que têm ordenada u são 5,7 e 2,9.

Página 115

$$43.1. f(x) = (x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x + 1 - 3 = x^2 + 2x - 2$$

$$43.2. f(x) = -2(x-1)^2 + 1 = -2(x^2 - 2x + 1) \\ = -2x^2 + 4x - 1$$

$$43.3. f(x) = -(x-3)^2 + \frac{5}{2} = -(x^2 - 6x + 9) + \frac{5}{2} \\ = -x^2 + 6x - \frac{13}{2}$$

$$43.4. f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 2 \\ = 4x^2 + 4x - 1$$

$$44.1. f(x) = x^2 + 4x - 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 3 \\ = (x+2)^2 - 7$$

$$44.2. f(x) = -2x^2 - 4x = -2(x^2 + 2x) = \\ = -2(x^2 + 2x + 1 - 1) = -2(x+1)^2 + 2$$

$$44.3. f(x) = 2x^2 - 12x + 7 = 2(x^2 - 6x) + 7 \\ = 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 7 = 2(x-3)^2 - 18 + 7 \\ = 2(x-3)^2 - 11$$

$$44.4. f(x) = -x^2 + 3x - 1 = -(x^2 - 3x) - 1 \\ = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 1 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - 1 \\ = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$44.5. f(x) = -3x^2 + 6x = -3(x^2 - 2x) \\ = -3(x^2 - 2x + 1 - 1) = -3(x-1)^2 + 3$$

$$44.6. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x = \frac{1}{2}(x^2 - 8x) \\ = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 16) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 8$$

Página 116

$$1. a) f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \\ = (x-1)^2 - 4 \\ \text{Vértice: } (1, -4)$$

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-1 = 2 \vee x-1 = -2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \\ \text{Zeros de } f: -1 \text{ e } 3$$

$$2.1. g(x) = -2x^2 + x - 1 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) - 1 = \\ = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) - 1 = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} - 1 = \\ = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$$

$$\text{Vértice de } g: \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{7}{16}$$

Impossível

A função g não tem zeros.

$$j(x) = x^2 + 4x - 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 5 \\ = (x+2)^2 - 9$$

$$\text{Vértice de } j: (-2, -9)$$

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+2 = 3 \vee x+2 = -3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$$

Zeros de j : -5 e 1

$$2.2. \bullet g(x) = g(0) \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(-2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$A(0, 1) \text{ e } B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.

Os pontos do eixo de simetria têm abcissa igual a $\frac{1}{4}$.

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 1 = -2 \times \frac{1}{16} + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} = \frac{9}{8}$$

$$\text{Vértice de } g: \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$$

$$\bullet j(x) = j(0) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$

Sejam $A(0, -5)$ e $B(-4, -5)$.

Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.

Os pontos do eixo de simetria têm abscissa igual a -2 .

$$j(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$$

Vértice de j : $(-2, -9)$

Página 117

$$\begin{aligned} 60.1. f(x) &= 2x^2 - (x+1)^2 = 2x^2 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 = (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Vértice: $(1, -2)$

$$\begin{aligned} 60.2. f(x) &= (x-2)^2 + 3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \\ &= x^2 - 4x + 4 + 3x + 1 = x^2 - x + 5 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{19}{4} \end{aligned}$$

Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4} \right)$

$$\begin{aligned} 60.3. f(x) &= x + \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 = x + x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2x + \frac{1}{4} \\ &= x^2 + 2x + 1 - 1 + \frac{1}{4} = (x+1)^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vértice: $\left(-1, -\frac{3}{4} \right)$

$$\begin{aligned} 60.4. f(x) &= 4(x-1)^2 + 3 = 4(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 4x^2 - 8x + 7 \end{aligned}$$

Vértice: $(1, 3)$

61. Função f

$$V(-1, -2), \text{ logo, } f(x) = a(x+1)^2 - 2$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a(1+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 2 = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Função g

$$V(-1, 3), \text{ logo, } g(x) = a(x+1)^2 + 3$$

$$g(0) = 2 \Leftrightarrow a(0+1)^2 + 3 = 2 \Leftrightarrow a + 3 = 2 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x+1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = \\ &= -x^2 - 2x - 1 + 3 = -x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Função h

$$V(2, 1), \text{ logo, } h(x) = a(x-2)^2 + 1$$

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow a(0-2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 1 = \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 + 1 = -\frac{1}{4}x^2 + x \end{aligned}$$

Página 118

$$62.1. f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \quad \text{Vértice: } (3, 0)$$

$$\begin{aligned} 62.2. f(x) &= x^2 - 8x + 7 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 7 \\ &= (x-4)^2 - 9 \quad \text{Vértice: } (4, -9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 62.3. f(x) &= x^2 + 4x - 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 1 \\ &= (x+2)^2 - 5 \quad \text{Vértice: } (-2, -5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 62.4. f(x) &= x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 \\ &= (x-2)^2 - 1 \quad \text{Vértice: } (2, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 62.5. f(x) &= x^2 - 10x - 3 = x^2 - 10x + 25 - 25 - 3 \\ &= (x-5)^2 - 28 \quad \text{Vértice: } (5, -28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 62.6. f(x) &= x^2 + 6x = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x+3)^2 - 9 \\ \text{Vértice: } &(-3, -9) \end{aligned}$$

$$63.1. f(x) = -(x+5)^2 + 4$$

As coordenadas do vértice da parábola são $(-5, 4)$ e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para baixo. Então, o máximo da função f é 4.

$$\begin{aligned} 63.2. f(x) &= x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2 \\ \text{As coordenadas do vértice da parábola são} & \\ (1, 2) \text{ e a parábola representativa da função } f & \\ \text{tem a concavidade voltada para cima.} & \\ \text{Então, o mínimo da função } f \text{ é } 2. & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 63.3. f(x) &= 2x^2 - 20x + 1 = 2(x^2 - 10x) + 1 \\ &= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 1 = 2(x-5)^2 - 50 + 1 \\ &= 2(x-5)^2 - 49 \end{aligned}$$

As coordenadas do vértice da parábola são $(5, -49)$ e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para cima. Então, o mínimo da função f é -49 .

63.4. $f(x) = -3x^2 - 24x = -3(x^2 + 8x)$
 $= -3(x^2 + 8x + 16 - 16) = -3(x + 4)^2 + 48$
 As coordenadas do vértice da parábola são $(-4, 48)$ e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para baixo.
 Então, o máximo da função f é 48.

63.5. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x = \frac{1}{2}(x^2 - 12x)$
 $= \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36 - 36) = \frac{1}{2}(x - 6)^2 - 18$
 As coordenadas do vértice da parábola são $(6, -18)$ e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para cima.
 Então, o mínimo da função f é -18 .

63.6. $f(x) = -0,1x^2 + x - 0,1 = -0,1(x^2 - 10x) - 0,1 =$
 $= -0,1(x^2 - 10x + 25 - 25) - 0,1$
 $= -0,1(x - 5)^2 + 2,5 - 0,1 = -0,1(x - 5)^2 + 2,4$
 As coordenadas do vértice da parábola são $(5; 2,4)$ e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para baixo.
 Então, o máximo da função f é 2,4.

64. Como $D'_g =]-\infty, 6]$ e g é crescente em $]-\infty, 2]$ e decrescente $[2, +\infty[$, então o vértice da parábola representativa de f e g tem coordenadas $(2, 6)$.

Assim, $g(x) = a(x - 2)^2 + 6$.
 $g(-1) = 0 \Leftrightarrow a(-1 - 2)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 9a = -6$
 $\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$

Então, $g(x) = -\frac{2}{3}(x - 2)^2 + 6$
 $= -\frac{2}{3}(x^2 - 4x + 4) + 6 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{10}{3}$

65.1. $j(x) = x^2 + bx + 1, b \in \mathbb{R}$
 $j(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + 1 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4 - b^2}{4}$
 Vértice: $\left(-\frac{b}{2}, \frac{4 - b^2}{4}\right)$

Se a abcissa do vértice da parábola que representa o gráfico da função j é -5 , então
 $-\frac{b}{2} = -5 \Leftrightarrow b = 10$.

65.2. Vértice: $\left(-\frac{b}{2}, \frac{4 - b^2}{4}\right)$
 Se o contradomínio da função j é $[-3, +\infty[$, então a ordenada do vértice da parábola que representa a função j é -3 , ou seja,
 $\frac{4 - b^2}{4} = -3 \Leftrightarrow 4 - b^2 = -12$
 $\Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = 4 \vee b = -4$

Página 119

66.1. $T(0, 10)$ e $S(5, 0)$
 $ST: y = ax + 10$
 S pertence à reta ST , logo tem-se:
 $0 = 5a + 10 \Leftrightarrow a = -2$
 $ST: y = -2x + 10$

Então, $A(a, -2a + 10); a \in]0, 5[$

66.2. $f(a) = a \times (-2a) + 10 = -2a^2 + 10a, a \in]0, 5[$

66.3. $f(a) = -2a^2 + 10a = -2(a^2 - 5a)$
 $= -2\left(a^2 - 5a + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) = -2\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$

A área do retângulo é máxima quando $a = \frac{5}{2}$.

$a = \frac{5}{2} \rightarrow A\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

A medida máxima da área dos retângulos é $\frac{25}{2}$

e, nesse caso, as dimensões do retângulo são $\frac{5}{2}$ e 5.

Página 120

1. $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
 $\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2.1. $x^2 - 4x + 3 = 0$ $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+2}{2} \vee x = \frac{4-2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

C.S. = $\{1, 3\}$

2.2. $2x^2 + 3x - 5 = 0$ $a = 2$, $b = 3$ e $c = -5$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-5)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+7}{4} \vee x = \frac{-3-7}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{5}{2}$$

C.S. = $\left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$

2.3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times 1}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+0}{8} \vee x = \frac{4-0}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

C.S. = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2.4. $-3x^2 + 4x - 1 = 0$ $a = -3$, $b = 4$ e $c = -1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-3) \times (-1)}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4+2}{-6} \vee x = \frac{-4-2}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 1$$

C.S. = $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$

Página 121

45.1. $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$

C.S. = $\{0, 5\}$

45.2. $-3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \vee -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

C.S. = $\{0, 2\}$

45.3. $-\frac{1}{2}x + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2} + 4x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -\frac{1}{2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{8}$$

C.S. = $\left\{0, \frac{1}{8}\right\}$

45.4. $3x - (x+1)^2 = -1 - x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x - (x^2 + 2x + 1) = -1 - x$$

$$\Leftrightarrow 3x - x^2 - 2x - 1 + 1 + x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

C.S. = $\{0, 2\}$

46.1. $x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6+8}{2} \vee x = \frac{-6-8}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -7$$

C.S. = $\{-7, 1\}$

46.2. $-2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-2) \times (-2)}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-4} \Leftrightarrow x = 1$$

C.S. = $\{1\}$

46.3. $3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-2)}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-1+5}{6} \vee x = \frac{-1-5}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = -1$$

C.S. = $\left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$

46.4. $2x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 2}}{4}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4} \quad \text{Equação impossível}$$

C.S. = $\{ \}$

46.5. $\frac{x+2}{2} - x^2 = -x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + 2 - 2x^2 = -2x \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-2) \times 2}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{-4} \vee x = \frac{-3-5}{-4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

C.S. = $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

$$46.6. (2x-3)^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 24x + 18 - x = 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 23x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 4 \times 8 \times 15}}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{23+7}{16} \vee x = \frac{23-7}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{8} \vee x = 1 \quad \text{C.S.} = \left\{1, \frac{15}{8}\right\}$$

$$46.7. -\frac{x(x+1)}{3} - x = 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2+x}{3} - x = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x - 3x = 3 \Leftrightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+2}{-2} \vee x = \frac{4-2}{-2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-3, -1\}$$

$$46.8. x - \frac{(x-1)^2}{2} = 2x^2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{x^2 - 2x + 1}{2} = 2x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-5) \times 5}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{116}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 + 2\sqrt{29}}{-10} \vee x = \frac{-4 - 2\sqrt{29}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{29}}{5} \vee x = \frac{2 + \sqrt{29}}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{2 - \sqrt{29}}{5}, \frac{2 + \sqrt{29}}{5}\right\}$$

47. Sejam x e $x+1$ dois números naturais consecutivos.

$$x(x+1) = 156$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 156 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-156)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1+25}{2} \vee x = \frac{-1-25}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \vee x = -13$$

Como x é um número natural, conclui-se que

$$x = 12$$

Então, os números são 12 e 13.

$$48.1. 2x^2 + 4x + k = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

A equação tem apenas uma solução se

$$b^2 - 4ac = 0, \text{ logo:}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow 16 - 4 \times 2 \times k = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

48.2. A equação tem duas soluções distintas se

$$b^2 - 4ac > 0.$$

$$b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 4 \times 2 \times k > 0 \Leftrightarrow 16 - 8k > 0$$

$$\Leftrightarrow -8k > -16 \Leftrightarrow k < 2$$

$$k \in]-\infty, 2[$$

48.3. A equação não tem solução se $b^2 - 4ac < 0$

$$b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 16 - 4 \times 2 \times k < 0 \Leftrightarrow 16 - 8k < 0$$

$$\Leftrightarrow -8k < -16 \Leftrightarrow k > 2$$

$$k \in]2, +\infty[$$

Página 122

1.1. Como $D_f = [-2, 2]$ e $g(x) = f(x-4)$, então

$$D_g = [-2+4, 2+4], \text{ ou seja, } D_g = [2, 6]$$

1.2. $g(x) = f(x-4) = -0,25(x-4)^2$

$$= -\frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$$

1.3. $g(1) = -\frac{1}{4} \times 1^2 + 2 \times 1 - 4 = -\frac{1}{4} + 2 - 4$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{2}{(x^4)} = -\frac{9}{4}$$

Então, o ponto $A\left(1, -\frac{9}{4}\right)$ pertence ao gráfico

de g pois $g(1) = -\frac{9}{4}$.

1.4. $g(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 16 = -1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-1) \times (-15)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-8+2}{-2} \vee x = \frac{-8-2}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5 \quad 3 \in D_g \text{ e } 5 \in D_g$$

As coordenadas dos pontos do gráfico de g que têm ordenada $-\frac{1}{4}$ são $\left(3, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(5, -\frac{1}{4}\right)$.

2.1. $j(x) = f(x-8)$ e $D_f = [-2, 2]$ então

$$D_j = [-2+8, 2+8], \text{ ou seja, } D_j = [6, 10].$$

2.2. a) $j(x) = k, k \in \mathbb{R}$

$$j(x) = k \Leftrightarrow -0,25(x-8)^2 = k$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x^2 - 16x + 64) = k$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} + 4x - 16 = k$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 16x - 64 = 4k$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 16x - 64 - 4k = 0$$

A equação é possível, com duas soluções distintas, se $\Delta > 0$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 256 - 4 \times (-1) \times (-64 - 4k) > 0$$

$$\Leftrightarrow 256 - 256 - 16k > 0 \Leftrightarrow k < 0$$

$$k < 0 \wedge k \geq -1 \Leftrightarrow k \in [-1, 0[$$

b) A equação $j(x) = k$ é impossível se

$$k > 0 \vee k < -1 \text{ pois } D'j = [-1, 0].$$

$$k \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$\bullet \Delta = 25 - 4 \times 2 \times (-12) = 121$$

• Como Δ não é nulo nem é negativo, conclui-se que a equação tem duas soluções:

$$x = \frac{-5 + \sqrt{121}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{121}}{4}, \text{ ou seja,}$$

$$x = \frac{3}{2} \vee x = -4$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -4, \frac{3}{2} \right\}$$

2.3. $8x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow 8x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\bullet a = 8, b = -4 \text{ e } c = 1$$

$$\bullet \Delta = 16 - 4 \times 8 \times 1 = -32$$

• Como $\Delta < 0$, conclui-se que a equação não tem soluções.

$$\text{C.S.} = \{ \}$$

3.

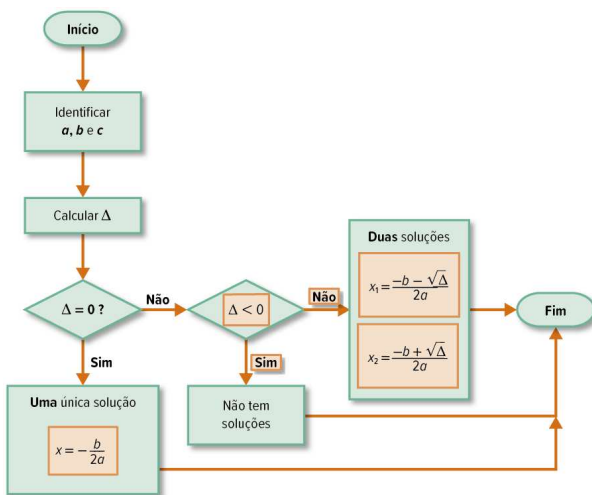
```

1 | a=float(input("a= "))
2 | b=float(input("b= "))
3 | c=float(input("c= "))
4 |
5 | import math
6 |
7 | delta=b**2-4*a*c
8 |
9 | if delta<0:
10 |     print("Equação impossível - não tem soluções.")
11 | elif delta == 0:
12 |     x=-b/(2*a)
13 |     print("A equação tem uma única solução", " x=", x)
14 | else:
15 |     x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
16 |     x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
17 |     print("A equação tem duas soluções: ", " x1=", x1, " ou x2=", x2)
18 |

```

Página 123

1.



2.1. $x^2 - 14x + 49 = 0$

$$\bullet a = 1, b = -14 \text{ e } c = -49$$

$$\bullet \Delta = 196 - 4 \times 1 \times 49 = 0$$

• A equação tem uma única solução:

$$x = -\frac{-14}{2} = 7$$

$$\text{C.S.} = \{7\}$$

2.2. $2x^2 + 5x - 12 = 0$

$$\bullet a = 2, b = 5 \text{ e } c = -12$$

Página 124

67.1. $x^2 + 3x - 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 29$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções distintas.

67.2. $3x^2 + 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 3 \times 5 = -60$$

Como $\Delta < 0$, a equação tem zero soluções (é impossível).

67.3. $12x - 36 - x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 36 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4 \times (-1) \times (-36) = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem apenas uma solução.

67.4. $-x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-2) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -11$$

Como $\Delta < 0$, a equação tem zero soluções (é impossível).

$$67.5. \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Delta = 9 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1 = 7$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções distintas.

$$67.6. -x + 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 2 \times 3 = -23$$

Como $\Delta < 0$, a equação tem zero soluções (é impossível).

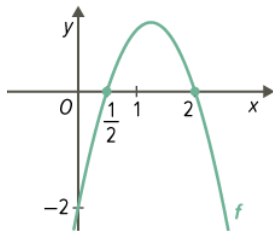
$$68.1. f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-2) \times (-2)}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-5+3}{-4} \vee x = \frac{-5-3}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2 \quad \text{Zeros: } \frac{1}{2} \text{ e } 2.$$

68.2.



x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$69.1. x(2x-1) = 4x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 4x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+7}{4} \vee x = \frac{5-7}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2}, 3 \right\}$$

$$69.2. 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{4} \vee x = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$69.3. -(x^2+1) = 2 - \frac{x(3-x)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 1 = 2 - \frac{3x - x^2}{2} \Leftrightarrow -2x^2 - 2 = 4 - 3x + x^2$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times (-2)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{-2} \quad \text{Equação impossível}$$

$$\text{C.S.} = \{ \}$$

$$69.4. -2x + \frac{1}{2}(x-1)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow -2x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) = -4$$

$$\Leftrightarrow -2x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = -4$$

$$\Leftrightarrow -4x + x^2 - 2x + 1 = -8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

Página 125

$$70.1. \bullet x > 0 \wedge x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\bullet A = 35 \Leftrightarrow x(x+2) = 35 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-35)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+12}{2} \vee x = \frac{-2-12}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -7$$

Como $x > 0$, conclui-se que $x = 5$.

$$P = 2 \times 5 + 2 \times 7 = 10 + 14 = 24$$

$$70.2. \bullet x > 0 \wedge 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\bullet A = 36 \Leftrightarrow x(2x+1) = 36 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-36)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+17}{4} \vee x = \frac{-1-17}{4} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -\frac{9}{2}$$

Como $x > 0$, conclui-se que $x = 4$.

$$P = 2 \times 4 + 2 \times (2 \times 4 + 1) = 26$$

70.3. • $x > 0 \wedge 5 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 5 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

• $A = 6 \Leftrightarrow x(5 - x) = 6 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 6$

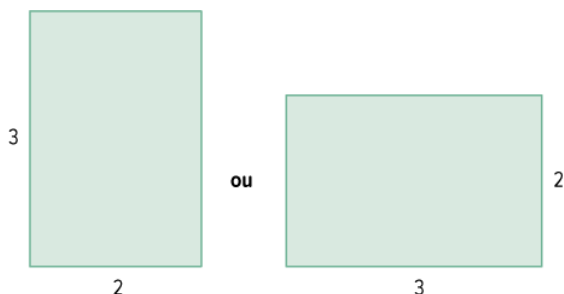
$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-1) \times (-6)}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 + 1}{-2} \vee x = \frac{-5 - 1}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

Como $0 < x < 5$, conclui-se que $x = 2 \vee x = 3$.



$P = 2 \times 2 + 2 \times 3 = 10$

71. x : menor dos dois números inteiros (Maria)

$x + 2$: maior dos dois números inteiros (Vasco)

$x(x + 2) = 168 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 168 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-168)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{676}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 + 26}{2} \vee x = \frac{-2 - 26}{2}$

$\Leftrightarrow x = 12 \vee x = -14$

O Vasco pensou no número 14.

72.1. $h(x) = x^2 + kx + 4$, $k \in \mathbb{R}$

A função h tem um e um só zero quando $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = 4 \vee k = -4$

72.2. Sendo $k = -5$, então $h(x) = x^2 - 5x + 4$

a) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$x = \frac{5 + 3}{2} \vee x = \frac{5 - 3}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 1$

Zeros de h : 1 e 4.

b) $h(x) = 10 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 10 \Leftrightarrow$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 + 7}{2} \vee x = \frac{5 - 7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -1$

As coordenadas dos pontos do gráfico de h que têm ordenada 10 são $(-1, 10)$ e $(6, 10)$.

73.1. $f(x) = h(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4 = -x + \frac{13}{4}$

$\Leftrightarrow -4x^2 + 16 = -4x + 13 \Leftrightarrow -4x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-4) \times 3}}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 + 8}{-8} \vee x = \frac{-4 - 8}{-8} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$

Como a abcissa do ponto A é negativa, conclui-

se que $x_A = -\frac{1}{2}$ e $x_B = \frac{3}{2}$.

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{13}{4} = \frac{15}{4}$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{13}{4} = \frac{7}{4}$

Assim, $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ e $B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

73.2. $A_{[BACD]} = \frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2} \times \overline{CD} = \frac{15 + 7}{2} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{22}{2} \times 2 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

A área é $\frac{11}{2}$ u.a.

Página 126

74. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f , então $A(x_A, x_A + 3)$ e $B(x_B, x_B + 3)$.

O produto das duas coordenadas é 10, logo:

$x(x + 3) = 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + 7}{2} \vee x = \frac{-3 - 7}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -5$

Como $x_A < x_B$, conclui-se que

$x_A = -5$ e $x_B = 2$

Assim, $A(-5, -2)$ e $B(2, 5)$.

75.1. $A(x, f(x)) : x > 0$

$$f(x) - x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+4}{2} \vee x = \frac{2-4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Como $x_A > 0$, conclui-se que $x_A = 3$.

$$f(3) = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2} \quad \text{Então, } A\left(3, \frac{9}{2}\right).$$

75.2. Como os pontos B e C pertencem ao gráfico de f , as suas coordenadas são da forma

$$(x, f(x))$$

$$f(x) - x = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+6}{2} \vee x = \frac{2-6}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

Como $x_C < x_B$, conclui-se que

$$x_C = -2 \text{ e } x_B = 4$$

Então, $C(-2, f(-2))$ e $B(4, f(4))$.

$$f(-2) = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$f(4) = \frac{1}{2} \times 4^2 = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

$B(4, 8)$ e $C(-2, 2)$

76.1. $A_{[ABFE]} = A_{[ABCD]} - A_{[AED]} - A_{[CEF]} =$

$$= 12 \times 8 - \frac{x \times 8}{2} - \frac{(12-x) \times (8-x)}{2} =$$

$$= 96 - 4x - \frac{96 - 12x - 8x + x^2}{2} =$$

$$= 96 - 4x - 48 + 10x - \frac{1}{2}x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 48, \text{ sendo } x \in]0, 8[$$

76.2. $A(x) = 58 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 48 = 58$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-10)}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-1} \Leftrightarrow x = \frac{-6+4}{-1} \vee x = \frac{-6-4}{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 10$$

Como $x \in]0, 8[$, conclui-se que $x = 2$.

77.1. $f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Como $x_B > 0$, conclui-se que $x_B = 4$.

77.2. $A_{[ABC]} = 12 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \times \overline{CC'}}{2} = 12$

C' : projeção ortogonal de C sobre AB

$$\Leftrightarrow \frac{4 \times (y_C - 3)}{2} = 12 \Leftrightarrow y_C - 3 = 6$$

$$\Leftrightarrow y_C = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-6)}}{2 \times \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 4 \vee x = 2 - 4 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -2$$

Como $x_C < 0$, conclui-se que $x_C = -2$.

Logo, $C(-2, 9)$.

Página 127

78. $f(x) = x^2 + 2x - 3 + k, k \in \mathbb{R}$.

78.1. A função f tem dois zeros se $\Delta > 0$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4 \times 1 \times (-3 + k) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 12 - 4k > 0 \Leftrightarrow -4k > -16 \Leftrightarrow k < 4$$

f tem dois zeros quando $k \in]-\infty, 4[$.

78.2. A função f tem um zero se $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 \times 1 \times (-3 + k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 12 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

f tem um zero quando $k = 4$.

78.3. A função f não tem zeros se $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4 \times 1 \times (-3 + k) < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 12 - 4k < 0 \Leftrightarrow -4k < -16 \Leftrightarrow k > 4$$

$$\Leftrightarrow -4k < -16 \Leftrightarrow k > 4$$

f não tem zeros quando $k \in]4, +\infty[$.

78.4. A função f tem contradomínio \mathbb{R}_0^+ se f tiver um único zero.

Como calculado em 78.2., f tem um único zero quando $k = 4$.

78.5. $f(x) = x^2 + 2x - 3 + k = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 + k$
 $= (x+1)^2 - 4 + k$

Vértice: $(-1, -4+k)$ e $a > 0$

A função f tem contradomínio $[-2, +\infty[$ se

$$-4 + k = -2$$

$$-4 + k = -2 \Leftrightarrow k = 2$$

f tem contradomínio $[-2, +\infty[$ se $k = 2$.

79. $f(x) = -x^2 - 4x - \frac{7}{4}$

Pontos A e B :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x - \frac{7}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{7}{4}\right)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{4+3}{-2} \vee x = \frac{4-3}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Então, $A\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ e $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Ponto C :

$$f(x) = -x^2 - 4x - \frac{7}{4} = -(x^2 + 4x) - \frac{7}{4}$$

$$= -(x^2 + 4x + 4 - 4) - \frac{7}{4} = -(x+2)^2 + 4 - \frac{7}{4}$$

$$= -(x+2)^2 + \frac{9}{4}$$

C é o vértice da parábola representativa da função f .

Logo, $C\left(-2, \frac{9}{4}\right)$.

Ponto D : $D(0, f(0))$

$$f(0) = -0^2 - 4 \times 0 - \frac{7}{4} = -\frac{7}{4}$$

Então, $D\left(0, -\frac{7}{4}\right)$.

80.1. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) - 3 =$

$$= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16}\right) - 3 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{50}{16} - 3 =$$

$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

$$D'_f = \left[-\frac{49}{8}, +\infty\right[; \text{Mínimo de } f: -\frac{49}{8}$$

80.2. Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox e C o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy .

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+7}{4} \vee x = \frac{5-7}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $B(3, 0)$

$$\bullet f(0) = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 - 3 = -3 \quad C(0, -3)$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OC}}{2} = \frac{\left(3 + \frac{1}{2}\right) \times 3}{2} = \frac{\frac{7}{2} \times 3}{2} = \frac{21}{4}$$

A área é de $\frac{21}{4}$ u.a.

81. $A_{\text{sombreada}} = A_{|BHF|} + A_{|FGDE|} = x(10-x) + x(10-x)$

$$= 10x - x^2 + 10x - x^2 = -2x^2 + 20x$$

$$f(x) = -2x^2 + 20x = -2(x^2 - 10x) =$$

$$= -2(x^2 - 10x + 25 - 25) = -2(x-5)^2 + 50$$

Vértice: $(5, 50)$

A área da região sombreada é máxima quando $x = 5$ e o valor dessa área é 50 u.a..

Página 128

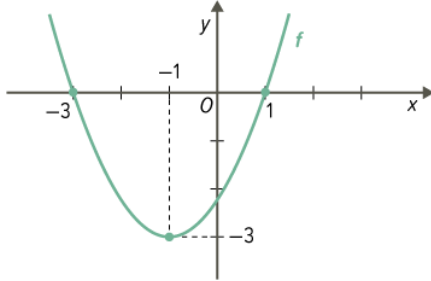
49.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+4}{2} \vee x = \frac{-2-4}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Zeros de f : -3 e 1 .

49.2. Esboço da parábola que representa graficamente a função f :



- a) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 1[$
 C.S. = $] -3, 1[$
- b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$
 C.S. = $] -\infty, -3[\cup]1, +\infty[$
- c) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$
 C.S. = $[-3, 1]$
- d) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$
 C.S. = $] -\infty, -3] \cup]1, +\infty[$

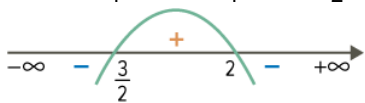
50.1. $-2x^2 + 7x - 6 < 0$

Zeros:

$$-2x^2 + 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times (-2) \times (-6)}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7+1}{-4} \vee x = \frac{-7-1}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 2$$



$$-2x^2 + 7x - 6 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]2, +\infty[$$

50.2. $x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

50.3. $2(x-1)^2 \leq 7x-7 \Leftrightarrow 2(x^2-2x+1) \leq 7x-7$

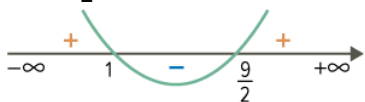
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 - 7x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 9 \leq 0$$

Zeros:

$$2x^2 - 11x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \times 2 \times 9}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{11+7}{4} \vee x = \frac{11-7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \vee x = 1$$



$$2(x-1)^2 \leq 7x-7 \Leftrightarrow x \in \left[1, \frac{9}{2}\right]$$

50.4. $x(4-x) < 16-4x \Leftrightarrow 4x-x^2-16+4x < 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 16 < 0$$

Zeros:

$$-x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow -(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$



$$2(x-1)^2 \leq 7x-7 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

50.5. $x(2-x) < 3 \Leftrightarrow 2x-x^2-3 < 0$

Zeros:

$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{-2} \quad \text{Equação impossível}$$



$$x(2-x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

50.6. $-2+x > \frac{1}{2}(x+1)^2 \Leftrightarrow -2+x > \frac{1}{2}(x^2+2x+1)$

$$\Leftrightarrow -2+x > \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -4+2x > x^2+2x+1 \Leftrightarrow -x^2-5 > 0$$

Zeros:

$$-x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=-5 \quad \text{Equação impossível}$$



$$-2+x > \frac{1}{2}(x+1)^2 \Leftrightarrow x \in \{ \}$$

50.7. $1-\frac{x+2}{3} > x^2-3 \Leftrightarrow 3-x-2 > 3x^2-9$

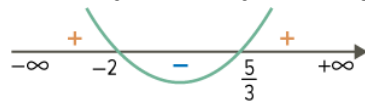
$$\Leftrightarrow -3x^2-x+10 > 0 \Leftrightarrow 3x^2+x-10 < 0$$

Zeros:

$$3x^2 + x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-10)}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+11}{6} \vee x = \frac{-1-11}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = -2$$



$$1-\frac{x+2}{3} > x^2-3 \Leftrightarrow x \in]-2, \frac{5}{3}[$$

50.8. $\frac{(2x-3)^2}{2} + x \geq -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x + 9}{2} + x \geq -\frac{1}{2}x + 1$

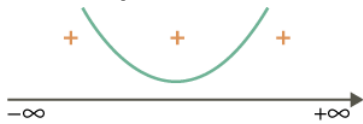
$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 + 2x \geq -x + 2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 7 \geq 0$

Zeros:

$4x^2 - 9x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 4 \times 7}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{-31}}{8}$ Equação impossível



$\frac{(2x-3)^2}{2} + x \geq -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Página 129

51.1. $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0$

Zeros:

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$



$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

51.2. $f(x) < 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 < 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Zeros:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2+4}{2} \vee x = \frac{2-4}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$



$f(x) < 6 \Leftrightarrow x \in]-1, 3[$

52. Q(-2, 0) e R(2, 0)

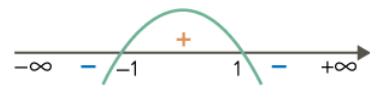
P(x, f(x)), com $x \in]-2, 2[$

$A_{|PQR|} < 6 \Leftrightarrow \frac{4 \times f(x)}{2} < 6 \Leftrightarrow 2f(x) < 6$

$\Leftrightarrow f(x) < 3 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 3 \Leftrightarrow -x^2 + 1 < 0$

Zeros:

$-x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$



$A_{|POR|} < 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\wedge x \in]-2, 2[$

$\Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]1, 2[$

53.1. $h(t) = 0 \Leftrightarrow -0,5t^2 + 3t + 3,5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-0,5) \times 3,5}}{2 \times (-0,5)} \Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{-1}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-3+4}{-1} \vee t = \frac{-3-4}{-1} \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 7$

Como $t \geq 0$, conclui-se que $t = 7$.

O objeto demorou 7 segundos a cair ao chão.

53.2. $h(t) > 6 \Leftrightarrow -0,5t^2 + 3t + 3,5 > 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,5t^2 + 3t - 2,5 > 0$

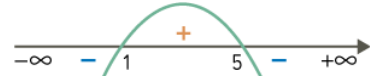
Zeros:

$-0,5t^2 + 3t - 2,5 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-0,5) \times (-2,5)}}{2 \times (-0,5)}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{4}}{-1} \Leftrightarrow t = \frac{-3+2}{-1} \vee t = \frac{-3-2}{-1}$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 5$



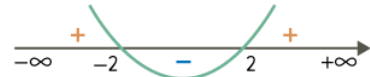
$h(t) > 6 \Leftrightarrow t \in]1, 5[\wedge t \in [0, 7] \Leftrightarrow t \in]1, 5[$

Página 130

82.1. $x^2 - 4 > 0$

Zeros:

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$



$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

82.2. $x^2 + x - 2 \leq 0$

Zeros:

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{2} \vee x = \frac{-1-3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$



$x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 1]$

82.3. $x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$

Zeros:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$



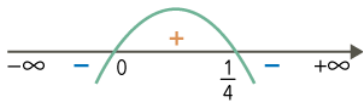
$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

82.4. $\frac{x}{2} < 2x^2 \Leftrightarrow x < 4x^2 \Leftrightarrow -4x^2 + x < 0$

Zeros:

$$-4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(-4x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{4}$$



$$\frac{x}{2} < 2x^2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{4}, +\infty[$$

82.5. $x^2 < 2x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$

Zeros:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2+4}{2} \vee x = \frac{2-4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$



$$x^2 < 2x+3 \Leftrightarrow x \in]-1, 3[$$

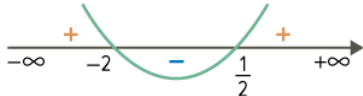
82.6. $x^2 + \frac{3x}{2} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 > 0$

Zeros:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3+5}{4} \vee x = \frac{-3-5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$$



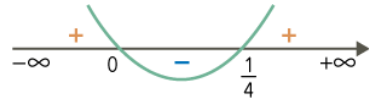
$$x^2 + \frac{3x}{2} > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

83.1. a) $f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - x < 0$

Zeros:

$$4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(4x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{4}$$



$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{4}[$$

b) $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{x}{2} \geq 2 \times 1^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

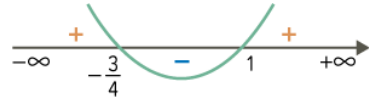
$$\Leftrightarrow 2x^2 - \frac{x}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 \geq 0$$

Zeros:

$$4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 4 \times (-3)}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1+7}{8} \vee x = \frac{1-7}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{3}{4}$$



$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [1, +\infty[$$

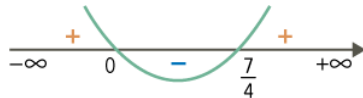
83.2. $f(x) \leq 3x \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{x}{2} \leq 3x \Leftrightarrow 4x^2 - x \leq 6x$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 7x \leq 0$$

Zeros:

$$4x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(4x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x-7 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{7}{4}$$



$$f(x) \leq 3x \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{7}{4}\right]$$

Logo, as soluções inteiras da inequação

$$f(x) \leq 3x \text{ são } 0 \text{ e } 1.$$

84.1. Por exemplo:

a) $P(4, 0)$ b) $P\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ c) $P(2, 1)$

84.2. $P(x, f(x))$ e $f(x) = -\frac{x}{2} + 2$

$$x \times f(x) > -6 \Leftrightarrow x\left(-\frac{x}{2} + 2\right) > -6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x > -6 \Leftrightarrow -x^2 + 4x > -12$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 12 > 0$$

Zeros:

$$-x^2 + 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times 12}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 + 8}{-2} \vee x = \frac{-4 - 8}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$$



$$x \times f(x) > -6 \Leftrightarrow x \in]-2, 6[$$

85.1. $x > 0 \wedge x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x > 0$

• $P < 30 \Leftrightarrow 2(x+2) + 2x < 30 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 + 2x < 30 \Leftrightarrow 4x < 26 \Leftrightarrow x < \frac{13}{2}$$

Como $x > 0$, conclui-se que $x \in]0, \frac{13}{2}[$.

85.2. $A(x) \leq 24 \Leftrightarrow x(x+2) \leq 24 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \leq 0$

Zeros:

$$x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 10}{2} \vee x = \frac{-2 - 10}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -6$$



$$A(x) \leq 24 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in [-6, 4] \wedge x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow x \in]0, 4]$$

85.3. $A(x) < 84 \Leftrightarrow x(x+2) < 84 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 84 \leq 0$

Zeros:

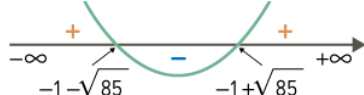
$$x^2 + 2x - 84 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-84)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{340}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 2\sqrt{85}}{2} \vee x = \frac{-2 - 2\sqrt{85}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{85} \vee x = -1 - \sqrt{85}$$



$$A(x) < 84 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1 - \sqrt{85}, -1 + \sqrt{85}[\wedge x \in]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, -1 + \sqrt{85}[$$

Como $-1 + \sqrt{85} \approx 8,22$, conclui-se que o maior valor inteiro de x para o qual a medida da área do retângulo é menor do que 84 é o 8.

Página 131

86.1. $h(t) = -5t^2 + 30t + 1 = -5(t^2 - 6t) + 1$

$$= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 1 = -5(t-3)^2 + 45 + 1$$

$$= -5(t-3)^2 + 46$$

Vértice: (3, 46)

Concavidade voltada para baixo

O máximo da função h é 46, ou seja, a altura máxima atingida pelo projétil foi 46 metros.

86.2. $h(t) > 26 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t + 1 > 26$

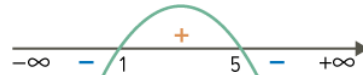
$$\Leftrightarrow -5t^2 + 30t - 25 > 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 5 > 0$$

Zeros:

$$t^2 + 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-6 + 4}{-2} \vee t = \frac{-6 - 4}{-2} \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 5$$



Assim, $t^2 + 6t - 5 > 0 \wedge t \geq 0 \Leftrightarrow t \in]1, 5[$

87.1. $A(x, 0)$ e $B(x, f(x))$, sendo $x \in]0, 2[$

$$P(x) = 2(2x) + 2f(x) = 4x + 2(-x^2 + 4) = -2x^2 + 4x + 8$$

87.2. $P(x) > 2 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 8 > 2$

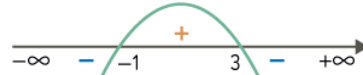
$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 6 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 > 0$$

Zeros:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 3}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 + 4}{-2} \vee x = \frac{-2 - 4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$



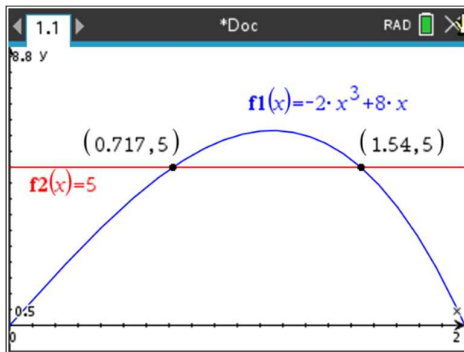
$$P(x) > 2 \wedge x \in]0, 2[\Leftrightarrow x \in]-1, 3[\wedge x \in]0, 2[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, 2[$$

$$87.3. A(x) = 5 \Leftrightarrow 2x \times f(x) = 5 \Leftrightarrow 2x \times (-x^2 + 4) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^3 + 8x = 5$$

$$x \in]0, 2[$$



$$A(x) = 5 \Leftrightarrow x \approx 0,7 \vee x \approx 1,5$$

$$88. \text{ Vértice: } (2, -3) \quad f(x) = a(x-2)^2 - 3$$

$$f(1) = -2 \Leftrightarrow a(1-2)^2 - 3 = -2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Então, } f(x) = (x-2)^2 - 3.$$

$$f(x) < 6 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 3 < 6$$

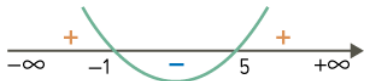
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 3 - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$$

Zeros:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+6}{2} \vee x = \frac{4-6}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$



$$f(x) < 6 \Leftrightarrow x \in]-1, 5[$$

$$]-1, 5[\cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Soma das soluções inteiras da equação:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

89.1. 1.ª situação: A e B têm abscissa 0

$$\overline{AB} = f(0) - g(0) = 3 - 0 = 3$$

2.ª situação: A e B têm abscissa 2

$$\overline{AB} = f(2) - g(2) = 2^2 + 3 - \left(-\frac{2^2}{2} + 2 \times 2\right) =$$

$$= 7 - (-2 + 4) = 7 - 2 = 5$$

Se a abscissa for 0, então $\overline{AB} = 3$.

Se a abscissa for 2, então $\overline{AB} = 5$.

$$89.2. \overline{AB} < \frac{5}{2} \wedge x \in [0, 2]$$

$$\overline{AB} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow f(x) - g(x) < \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) < \frac{5}{2}$$

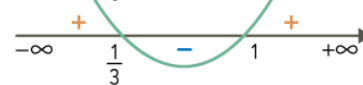
$$\Leftrightarrow x^2 + 3 + \frac{x^2}{2} - 2x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 6 + x^2 - 4x < 5$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 < 0$$

Zeros:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3 \times 1}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{3}$$



$$\overline{AB} < \frac{5}{2} \wedge x \in [0, 2] \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{3}, 1 \right[\wedge x \in [0, 2]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{3}, 1 \right[$$

Página 132

$$1.1. f(x) = 2x + b$$

$$f(3) = -1 \Leftrightarrow 2 \times 3 + b = -1 \Leftrightarrow b = -7$$

Assim, $f(x) = 2x - 7$.

$$1.2. f(x) = ax + 1$$

$$f(3) = -1 \Leftrightarrow a \times 3 + 1 = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Assim, $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$.

$$1.3. f(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} f(3) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - 3a \\ a - 1 - 3a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Assim, $f(x) = -x + 2$.

$$1.4. f(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} f(3) = -1 \\ f(5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = -1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - 3a \\ 5a - 1 - 3a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{5}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

2.1. $f(12) = 0,25 \times 12 + 5 = 3 + 5 = 8$

Significa que 12 segundos após a abertura da torneira, o recipiente tem água até 8 cm de altura.

2.2. $f(t) = 15 \Leftrightarrow 0,25t + 5 = 15 \Leftrightarrow 0,25t = 10$

$\Leftrightarrow t = \frac{10}{0,25} \Leftrightarrow t = 40$

Para encher o recipiente são necessários 40 segundos.

3.1. $A(-1, f(-1))$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$, logo $A(-1, 1)$.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Como $x_B > 0$, conclui-se que $B(2, 4)$.

$g(x) = ax + b$

$\begin{cases} g(-1) = 1 \\ g(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + a \\ 2a + 1 + a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 3a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

Assim, $g(x) = x + 2$.

3.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Zero de f : 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

4. $f(x) = ax^2$, $a > 0$

$f(-1) = 3 \Leftrightarrow a(-1)^2 = 3 \Leftrightarrow a = 3$

Assim, $f(x) = 3x^2$.

$g(x) = ax^2$; $a < 0$

$g(2) = -2 \Leftrightarrow a \times 2^2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Então, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Página 133

5.1. Vértice: $(1, 0)$ $y = a(x-1)^2 + 0$

Como o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence ao gráfico, tem-se:

$2 = a(0-1)^2 \Leftrightarrow 2 = a$

Assim, $y = 2(x-1)^2$.

5.2. Vértice: $(-2, 0)$ $y = a(x+2)^2 + 0$

Como o ponto de coordenadas $(1, -\frac{9}{2})$

pertence ao gráfico, tem-se:

$-\frac{9}{2} = a(1+2)^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} = 9a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Assim, $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$.

5.3. Vértice: $(-1, 0)$ $y = a(x+1)^2 + 0$

Como o ponto de coordenadas $(-3, 4)$ pertence ao gráfico, tem-se:

$4 = a(-3+1)^2 \Leftrightarrow 4 = 4a \Leftrightarrow a = 1$

Assim, $y = (x+1)^2$.

6.1. $g(x) = -x^2 + 6x - 7 = -(x^2 + 6x) - 7$

$= -(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) - 7 = -((x-3)^2 - 9) - 7$
 $= -(x-3)^2 + 2$

$D'_g =]-\infty, 2]$; $V(3, 2)$

6.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-3)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -(x-3)^2 = -2$

$\Leftrightarrow x-3 = \sqrt{2} \vee x-3 = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2} \vee x = 3 - \sqrt{2}$

Zeros de g : $3 - \sqrt{2}$ e $3 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$3 - \sqrt{2}$		$3 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0	-

6.3. a) $2k-1=2 \Leftrightarrow 2k=3 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$

b) $2k-1 < 2 \Leftrightarrow 2k < 3 \Leftrightarrow k < \frac{3}{2}$

7.1. a) $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ Vértice: $(3, 1)$

b) $g(x) = -3(x+1)^2 + 2$ Vértice: $(-1, 2)$

7.2. $D'_f = [1, +\infty[$; $D'_g =]-\infty, 2]$

8.1. $f(x) = -(x-2)^2 + 1$

Vértice: $(2, 1)$

Concavidade: voltada para baixo

Logo, $D'_f =]-\infty, 1]$.

8.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2 = 1 \vee x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

- 8.3. $g(x) = f(x) + k \Leftrightarrow g(x) = -(x-2)^2 + 1 + k$
 $D'_g =]-\infty, 1+k]$
- a) A função g não tem zeros se $1+k < 0$, ou seja, $k < -1$.
 $k \in]-\infty, -1[$
- b) A função g tem um só zero se $1+k = 0$, ou seja, $k = -1$.
- c) A função g tem dois zeros se $1+k > 0$, ou seja, $k > -1$.
- 0 é um dos zeros da função g se $g(0) = 0$.
 $g(0) = 0 \Leftrightarrow -(0-2)^2 + 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 3$
 $k > -1 \wedge k = 3 \Leftrightarrow k = 3$

9. Vértice: (2, 4)
- $f(x) = a(x-2)^2 + 4, a < 0$
- $f(0) = 0 \Leftrightarrow a(0-2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -1$
- $f(x) = -(x-2)^2 + 4 = -(x^2 - 4x + 4) + 4 =$
 $= -x^2 + 4x - 4 + 4 = -x^2 + 4x$

Página 134

- 10.1. $f(x) = 2(x-1)^2 - 8$
- Vértice (1, -8) e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para cima pois $a > 0$.
- Logo, $D'_f = [-8, +\infty[$.
- Mínimo de f : -8
- f é decrescente em $]-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty[$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x-1 = 2 \vee x-1 = -2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$
- Zeros de f : -1 e 3

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+

- 10.2. $f(x) = -3(x+2)^2$
- Vértice (-2, 0) e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para baixo pois $a < 0$.

Então, $D'_f =]-\infty, 0]$.

- Máximo de f : 0
- f é crescente em $]-\infty, -2]$ e decrescente em $[-2, +\infty[$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -2$
- Zero de f : -2

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

- 10.3. $f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 5$
- Vértice $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$ e a parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para baixo pois $a < 0$.
- Então, $D'_f =]-\infty, -5]$.

- Máximo de f : -5
- f é crescente em $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ e decrescente em $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.
- f não tem zeros.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

- 11.1. $-0,1x^2 + 0,9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$
 $A(-3, 0)$ e $B(3, 0)$, logo $\overline{AB} = 6$.
- 11.2. Se $x = 0$, então $y = -0,1 \times 0^2 + 0,9 = 0,9$.
 $C(0, 0,9)$, logo $\overline{OC} = 0,9$.
- 11.3. $r = \frac{\overline{AB}}{2} = 3$ $P_{\text{circunferência}} = 2\pi \times 3 = 6\pi \approx 18,85$

- 12.1. $g(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 - 1 + 5$
 $= (x-1)^2 + 4$
- Vértice: (1, 4)
- Eixo de simetria: reta paralela a Oy e que passa no ponto de coordenadas (1, 4).

12.2. $g(x) = x^2 + 5x = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

Eixo de simetria: reta paralela a Oy e que passa no ponto de coordenadas $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

12.3. $g(x) = x^2 + 10x - 3 = x^2 + 10x + 25 - 25 - 3 = (x+5)^2 - 28$

Vértice: $(-5, -28)$

Eixo de simetria: reta paralela a Oy e que passa no ponto de coordenadas $(-5, -28)$.

12.4. $g(x) = 2x^2 + 4x - 1 = 2(x^2 + 2x) - 1 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 1 = 2(x+1)^2 - 2 - 1 = 2(x+1)^2 - 3$

Vértice: $(-1, -3)$

Eixo de simetria: reta paralela a Oy e que passa no ponto de coordenadas $(-1, -3)$.

13.1. $f(x) = x^2 + 6x + k, k \in \mathbb{R}$

Sendo $k = 5$, então $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

$f(x) = x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$ Vértice: $(-3, 4)$

Quadro de variação:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	4	\nearrow

Intervalos de monotonia: f é decrescente $]-\infty, -3]$ e crescente em $[-3, +\infty[$.

13.2. $f(x) = x^2 + 6x + k, k \in \mathbb{R}$

f não admite zeros se $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 - 4 \times 1 \times k < 0 \Leftrightarrow 36 - 4k < 0 \Leftrightarrow -4k < -36 \Leftrightarrow k > 9$

f não admite zeros quando $k \in]9, +\infty[$.

14. $A_{\text{triângulo}} = \frac{(x+2) \times \frac{3x}{2}}{2} = \frac{3x^2 + 6x}{4}$

$A_{\text{trapézio}} = \frac{2x+x}{2} \times 3 = \frac{3x}{2} \times 3 = \frac{9x}{2}$

$A_{\text{triângulo}} > A_{\text{trapézio}} \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6x}{4} > \frac{9x}{2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x > 18x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x > 0$

Zeros:

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$



$x^2 - 4x > 0 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[\wedge x \in]0, +\infty[$

$\Leftrightarrow x \in]4, +\infty[$

15.1. $f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x) + 5$

$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 5 = -(x-2)^2 + 4 + 5$

$= -(x-2)^2 + 9$

A parábola representativa da função f tem a concavidade voltada para baixo e o vértice tem coordenadas $(2, 9)$, então $D'_f =]-\infty, 9]$.

15.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2 = 3 \vee x-2 = -3 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$

Zeros de f : -1 e 5

Quadro de sinais:

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

15.3. a) $f(x) \geq -7 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 \geq -7$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 12 \geq 0$

Zeros:

$-x^2 + 4x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times 12}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 + 8}{-2} \vee x = \frac{-4 - 8}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$



$f(x) \geq -7 \Leftrightarrow x \in [-2, 6]$

b) $f(x) < 5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 < 5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x < 0$

Zeros:

$-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$



$f(x) < 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$.

16. • $x - 3 > 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 3 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 3$

• $f(x) = (x-3)^2 + (2x)^2 = x^2 - 6x + 9 + 4x^2 = 5x^2 - 6x + 9$

• $f(x) < 41 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 9 < 41$

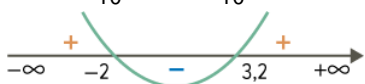
$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x - 32 < 0$

• Zeros:

$5x^2 - 6x - 32 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 5 \times (-32)}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{676}}{10}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6+26}{10} \vee x = \frac{6-26}{10} \Leftrightarrow x = 3,2 \vee x = -2$



$5x^2 - 6x - 32 < 0 \wedge x > 3$

$\Leftrightarrow x \in]-2; 3,2[\wedge x \in]3; +\infty[\Leftrightarrow x \in]3; 3,2[$

17.1. $A(x, 0)$, $0 < x < 2$ $D(x, f(x))$, $0 < x < 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

$\overline{OA} = x$ e sabe-se que 4 é zero de f , então

$\overline{AB} = 4 - 2x$.

Assim sendo, $P(x) = 2(4 - 2x) + 2f(x) =$

$= 8 - 4x + 2(-x^2 + 4x) = 8 - 4x - 2x^2 + 8x$

$= -2x^2 + 4x + 8$

17.2. $P(x) \leq 9,5 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 8 \leq 9,5$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 1,5 \leq 0$

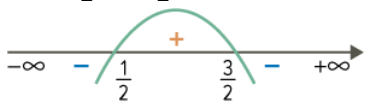
Zeros:

$-2x^2 + 4x - 1,5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-2) \times (-1,5)}}{-4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{-4+2}{-4} \vee x = \frac{-4-2}{-4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$



$P(x) \leq 9,5 \wedge x \in]0, 2[$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[\wedge x \in]0, 2[$

$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2[$

18.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -0,1x^2 + 0,8x = 0$

$\Leftrightarrow x(-0,1x+0,8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -0,1x+0,8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

$\overline{OB} = 8$, logo o comprimento do vão da ponte é de 16 m (8×2).

18.2. $f(x) = -0,1x^2 + 0,8x = -0,1(x^2 - 8x) =$

$= -0,1(x^2 - 8x + 16 - 16) = 0,1(x-4)^2 + 1,6$

Vértice: $V(4; 16)$

$\overline{AV} = 1,6$ e $1,6 \times 2 = 3,2$, logo o comprimento

da flecha da ponte é de 3,2 m.

18.3. $2,4 : 2 = 1,2$

Pretende-se resolver a condição $f(x) \geq 1,2$.

$f(x) \geq 1,2 \Leftrightarrow -0,1x^2 + 0,8x \geq 1,2$

$\Leftrightarrow -0,1x^2 + 0,8x - 1,2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 \geq 0$

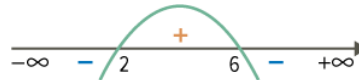
Zeros:

$-x^2 + 8x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-1) \times (-12)}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-8+4}{-2} \vee x = \frac{-8-4}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$



$f(x) \geq 1,2 \Rightarrow x \in [2, 6]$

19.1. $g(x) = (10-x)(4+x) = 40 + 10x - 4x - x^2$

$= -x^2 + 6x + 40$

$x > 0 \wedge 10 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 10$

19.2. $g(x) > 45 \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 40 > 45$

$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 > 0$

Zeros:

$-x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-6+4}{-2} \vee x = \frac{-6-4}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$



$-x^2 + 6x - 5 > 0 \wedge 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow x \in]1, 5[\wedge x \in]0, 10[\Leftrightarrow x \in]1, 5[$

1.1. A opção correta é a **(B)** porque $f(1) = 0$.

1.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

A opção correta é a **(D)**.

2. f é uma função afim e $f(x) < 0$, para

$x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$, então f é crescente.

A opção falsa é a **(D)**.

3. $f(x) = (x-2)^2 \rightarrow D'_f = [0, +\infty[$

$f(x) = -x^2 - 2 \rightarrow D'_f =]-\infty, -2]$

$f(x) = x^2 - 2 \rightarrow D'_f = [-2, +\infty[$

$f(x) = (x-2)^2 + 2 \rightarrow D'_f = [2, +\infty[$

A opção certa é a **(C)**.

4.1. $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ Vértice: (2, 4)

A opção certa é a **(B)**.

4.2. $f(4) = -(4-2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$, logo 4 é um dos zeros de f .

A opção certa é a **(D)**.

5. Vértice: (2, 0) $f(x) = a(x-2)^2$, $a < 0$

$f(0) = -2 \Leftrightarrow a(0-2)^2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -2$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

A opção certa é a **(B)**.

1. Declive da reta: $a = \frac{4-0}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$

Retas paralelas têm o mesmo declive.

Assim: $\frac{k-2}{3} = 4 \Leftrightarrow k-2 = 12 \Leftrightarrow k = 14$

2.1. Vértice: (1, -2)

Logo, $f(x) = a(x-1)^2 - 2$, com $a > 0$.

$f(3) = 0 \Leftrightarrow a(3-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$.

2.2. Como g é crescente em $]-\infty, -2]$ e decrescente em $[-2, +\infty[$ e $D'_g =]-\infty, 4]$, conclui-se que as coordenadas do vértice da parábola representativa da função g são (-2, 4).

$g(x) = a(x+2)^2 + 4$

Como $g(0) = 2$, tem-se:

$a(0+2)^2 + 4 \Leftrightarrow 4a + 4 = 2 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4 = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 4 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 + 4 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

3.1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x = x \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Como a abscissa do ponto T é positiva, conclui-se que $t = 3$. $g(3) = 3$, logo $T(3, 3)$.

3.2. $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x \geq 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0$

Zeros:

$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4+2}{-2} \vee x = \frac{-4-2}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$ $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow x \in [1, 3]$

3.3. a) $P(x, 0)$; $x \in]0, 3[$

$B(x, g(x))$; $x \in]0, 3[$

$C(x, f(x))$; $x \in]0, 3[$

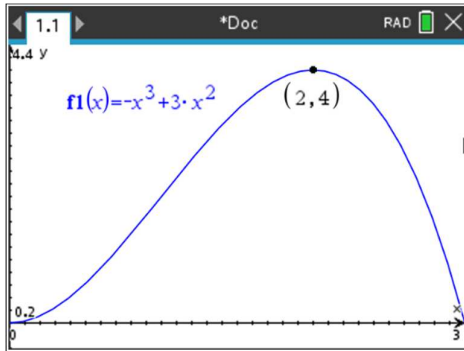
$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC}$

$\overline{AB} = x$

$\overline{BC} = f(x) - g(x) = -x^2 + 4x - x = -x^2 + 3x$

Então, $h(x) = x(-x^2 + 3x) = -x^3 + 3x^2$

b) $h(x) = -x^3 + 3x^2; x \in]0, 3[$



A área do retângulo $[ABCD]$ é máxima quando $x = 2$.

Página 138

1. Consumo: 12 m^3

$$\begin{cases} 5 \times 0,60 = 3,00 \\ 7 \times 0,75 = 5,25 \end{cases}$$

Custo, em euros: $3,00 + 5,25 = 8,25$
2. Consumo: 20 m^3

$$\begin{cases} 5 \times 0,60 = 3,00 \\ 10 \times 0,75 = 7,50 \\ 5 \times 1,80 = 9,00 \end{cases}$$

Custo, em euros: $3,00 + 7,50 + 9,00 = 19,50$
3. Consumo: 28 m^3

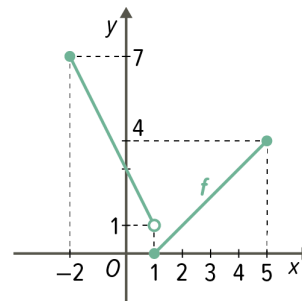
$$\begin{cases} 5 \times 0,60 = 3,00 \\ 10 \times 0,75 = 7,50 \\ 10 \times 1,80 = 18,00 \\ 3 \times 2,00 = 6,00 \end{cases}$$

Custo, em euros:
 $3,00 + 7,50 + 18,00 + 6,00 = 34,50$

Página 139

- 54.1. $D_f = [-2, 1[\cup]1, 5] = [-2, 5]$
- 54.2. a) $f(0) = -2 \times 0 + 3 = 3$
- b) $f(1) = 1 - 1 = 0$
- c) $f(4) = 4 - 1 = 3$
- d) $f(-1) = -2 \times (-1) + 3 = 5$
- e) $f(3) = 3 - 1 = 2$
- f) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = 6$

54.3.



54.4. $D'_f = [0, 7]$

- 55.1. a) Duração: 40 segundos
Custo: 0,25 €
- b) Duração: 1 minuto e 13 segundos
Custo: $0,25 + 13 \times 0,01 = 0,38$
- c) Duração: 2 minutos (1 minuto + 60 segundos)
Custo: $0,25 + 60 \times 0,01 = 0,85$
- d) Duração: 3 minutos e 37 segundos (1 minuto + 157 segundos)
Custo: $0,25 + 157 \times 0,01 = 1,82$
- 55.2. $f(x) = \begin{cases} 0,25 & \text{se } 0 < x \leq 60 \\ -0,35 + 0,01x & \text{se } x > 60 \end{cases}$
- Cálculos auxiliares:
 Se $x > 60$, então $y = 0,23 + (x - 60) \times 0,01$
 $y = 0,25 + 0,01x - 0,6 = -0,35 + 0,01x$

Página 140

- 1.1. Hugo \rightarrow Modalidade A
 Valor das vendas: 4700 €
 Vencimento: $820 + 0,04 \times 4700 = 1008$ €
- 1.2. Valor das vendas: 5000 €
 Vencimento: $820 + 0,04 \times 5000 = 1020$ €
- 1.3. Valor das vendas: 6850 €
 Vencimento: $820 + 0,04 \times 6850 = 1194$ €
2. $h(x) = \begin{cases} 820 + 0,04x & \text{se } 0 \leq x \leq 5000 \\ 920 + 0,04x & \text{se } x > 5000 \end{cases}$
- 3.1. Sónia \rightarrow Modalidade B
 Valor das vendas: 3500 €
 Vencimento: $820 + 0,04 \times 3500 = 960$ €
- 3.2. Valor das vendas: 5000 €
 Vencimento: $820 + 0,04 \times 5000 = 1020$ €
- 3.3. Valor das vendas: 8200 €
 Vencimento:
 $820 + 0,04 \times 5000 + 0,06 \times (8200 - 5000) =$
 $= 1020 + 0,06 \times 3200 = 1212$ €

$$4. \quad s(x) = \begin{cases} 820 + 0,04x & \text{se } 0 \leq x \leq 5000 \\ 1020 + (x - 5000) \times 0,06 & \text{se } x > 5000 \end{cases}$$

5. Valor das vendas: 11 000€

$$x = 11000$$

$$h(11000) = 920 + 0,04 \times 11000 = 1360 \text{ €}$$

$$s(11000) = 1020 + (11000 - 5000) \times 0,06 = 1380 \text{ €}$$

O vendedor que teve maior vencimento nesse mês foi a Sónia.

Página 141

56.1. • Se $-4 \leq x < 0$, então $y = ax + b$.

$$\begin{cases} -2 = a \times (-4) + b \\ 3 = a \times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -4a + 3 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

Assim, para $x \in [-4, 0[$, $f(x) = \frac{5}{4}x + 3$.

• Se $0 \leq x \leq 3$, então $y = ax + b$.

$$\begin{cases} 1 = a \times 0 + b \\ 0 = a \times 3 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 0 = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, para $x \in [0, 3]$, $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

• Conclusão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}x + 3 & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{3}x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

56.2. • Se $-4 \leq x \leq 2$, então $y = ax + b$

$$\begin{cases} 3 = a \times (-4) + b \\ 0 = a \times (-2) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -4a + b \\ 0 = -2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + 4a \\ 0 = -2a + 3 + 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Para $x \in [-4, -2]$, $g(x) = -\frac{3}{2}x - 3$

• Se $0 < x < 1$, então $g(x) = 2$.

• Se $x \geq 1$, então $y = ax + b$.

$$\begin{cases} 2 = a \times 1 + b \\ 0 = a \times 3 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ 0 = 3a + 2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Assim, para $x \in [1, +\infty[$, $g(x) = -x + 3$.

• Conclusão:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 3 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ -x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$57.1. \quad D_f = [-4, 3] \quad D'_f = [-2, 3[$$

57.2. A equação $f(x) = 1$ tem duas soluções porque a reta de equação $y = 1$ interseca o gráfico de f em dois pontos.

$$57.3. \quad \text{a) } f(-1) = -\frac{5}{4} \times (-1) + 3 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{1} = \frac{7}{4}$$

$$\text{b) } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{1} = \frac{5}{6}$$

$$58.1. \quad D_g = [-4, -2] \cup [0, +\infty[; \quad D'_g =]-\infty, 3]$$

$$58.2. \quad \text{a) } g(-3) = -\frac{3}{2} \times (-3) - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } g\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$\text{c) } g(5) = -5 + 3 = -2$$

Página 142

$$90.1. \quad D_f =]-2, 1] \cup]1, 3[\cup [3, +\infty[=]-2, +\infty[$$

$$90.2. \quad \text{a) } f(4) = 10 - 2 \times 4 = 2$$

$$\text{b) } f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{c) } f(3) = 10 - 2 \times 3 = 4$$

$$\text{d) } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

91.1. • Se $-2 \leq x \leq 0$, então $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 3 = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

Assim, se $-2 \leq x \leq 0$ então $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$.

• Se $0 < x \leq 2$, então $f(x) = 3$.

• Se $2 < x \leq 5$, então $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(5) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 5a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2a \\ 5a + 3 - 2a = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{17}{3} \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Assim, se $2 < x \leq 5$, então $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$.

• Conclui-se que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 & \text{se } x \in [-2, 0] \\ 3 & \text{se } x \in]0, 2] \\ -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3} & \text{se } x \in]2, 5] \end{cases}$$

91.2. a) $f(-2) + f(0) - f(\sqrt{2}) = 0 + 3 - 3 = 0$

b) $f(-1) + f(4) = \frac{3}{2} \times (-1) + 3 - \frac{4}{3} \times (4) + \frac{17}{3} = -\frac{3}{2} + 3 - \frac{16}{3} + \frac{17}{3} = -\frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Página 143

92.1. Por exemplo:

a) A equação $f(x) = k$ é impossível se $k = 6$.

b) A equação $f(x) = k$ tem exatamente uma só solução se $k = 1$.

c) A equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções se $k = 2,5$.

d) A equação $f(x) = k$ tem uma infinidade de soluções se $k = 2$.

92.2. • Se $-2 \leq x \leq 0$, então $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-2) + b = -1 \\ a \times 0 + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 4 \end{cases}$$

Assim, se $-2 \leq x \leq 0$ então $f(x) = \frac{5}{2}x + 4$.

• Se $0 < x \leq 2$, então $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 4 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ 2a + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

Assim, se $0 < x \leq 2$ então $f(x) = -x + 4$.

• Se $2 < x \leq 5$, então $f(x) = 2$.

Conclusão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 4 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -x + 4 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

92.3. $f(-1) = \frac{5}{2} \times (-1) + 4 = -\frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2}$ $f(0) = 4$

$f(1) = -1 + 4 = 3$ $f(\pi) = 2$

Então, $f(-1) - f(0) \times f(1) + f(\pi) = \frac{3}{2} - 4 \times 3 + 2 = \frac{3}{2} - 12 + 2 = \frac{3}{2} - 10 = -\frac{17}{2}$

93.1. $D_h =]-\infty, 3]$ e $D'_h =]-\infty, 1[$

93.2. A equação $h(x) = k$ tem exatamente uma solução, ou seja, a reta de equação $y = k$ intersesta o gráfico de h num único ponto, se $k \in]-\infty, -5[\cup]0, 1[$

A opção correta é a (C).

93.3. • Se $x < -1$, então $h(x) = ax + b$.

Pontos: $(-2, -5)$ e $(-1, 1)$

$$\begin{cases} -2a + b = -5 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 + 2a \\ -a - 5 + 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 6 \end{cases}$$

Assim, se $x < -1$ então $h(x) = 6x + 7$.

• Se $-1 \leq x \leq 3$, então $h(x) = a(x-1)^2 - 5$.

$h(3) = 0 \Leftrightarrow a(3-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$

Assim, se $-1 \leq x \leq 3$ então $h(x) = \frac{5}{4}(x-1)^2 - 5$

Conclusão:

$$h(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x < -1 \\ \frac{5}{4}(x-1)^2 - 5 & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

94.1. • Se $0 \leq x \leq 3$, então $f(x) = 3$.

• Se $3 \leq x \leq 7$, então $f(x) = a(x-5)^2 + 1$.

$f(3) = 3 \Leftrightarrow a(3-5)^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow 4a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Assim, se $3 \leq x \leq 7$, então

$f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 1$.

Conclusão:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x-5)^2 + 1 & \text{se } 3 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

94.2. $f(x) = \frac{17}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-5)^2 + 1 = \frac{17}{8}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-5)^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow (x-5)^2 = \frac{9}{4}$
 $\Leftrightarrow x-5 = \frac{3}{2} \vee x-5 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2} \vee x = \frac{7}{2}$
 $x \in \left\{ \frac{7}{2}, \frac{13}{2} \right\}$

Os pontos do gráfico de f cuja distância ao eixo Ox é $\frac{17}{8}$ são os pontos de abscissas $\frac{7}{2}$ e $\frac{13}{2}$.

Página 144

59.1. Interseção com o eixo Oy :

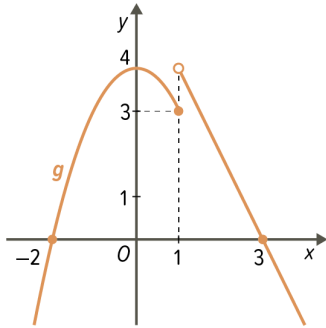
Ponto de coordenadas $(0, g(0)) = (0, 4)$

59.2. Interseção com o eixo Ox :

$g(x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-x^2 + 4 = 0 \wedge x \leq 1) \vee (-2x + 6 = 0 \wedge x > 1)$
 $\Leftrightarrow (x^2 = 4 \wedge x \leq 1) \vee (x = 3 \wedge x > 1)$
 $\Leftrightarrow ((x = 2 \vee x = -2) \wedge x \leq 1) \vee (x = 3 \wedge x > 1)$
 $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

O gráfico de g interseca o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(3, 0)$.

59.3.



59.4. $D'_g =]-\infty, 4]$

60.1. Quadro de sinais da função f :

x	$-\infty$	-2		6
$f(x)$	$-$	0	$+$	0

Cálculo auxiliar (determinação do zero da função, que é negativo)

Se $x \leq 4$, então $f(x) = a(x-2)^2 + 6$.

$f(0) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a(0-2)^2 + 6 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4a = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{8}$

Logo, se $x \leq 4$ então $f(x) = -\frac{3}{8}(x-2)^2 + 6$.

$f(x) = 0 \wedge x \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{3}{8}(x-2)^2 + 6 = 0 \wedge x \leq 4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 16 \wedge x \leq 4$

$\Leftrightarrow ((x-2) = 4 \vee (x-2) = -4) \wedge x \leq 4$

$\Leftrightarrow ((x = 6 \vee x = -2) \wedge x \leq 4) \Leftrightarrow x = -2$

60.2. a) A equação $f(x) = k$ tem uma só solução se

$k \in]-\infty, 0[\cup \{6\}$.

b) A equação $f(x) = k$ tem três soluções se

$k \in \left[\frac{9}{2}, 6 \right[$.

Página 145

1. $f(3) = 0,25(3-1)^2 + 2,75 = 3,75$

$f(6) = -0,25 \times 6 + 6 = 4,5$

Às 3 horas a temperatura era $3,75^\circ\text{C}$ e às 6 horas era $4,5^\circ\text{C}$.

2.1. Vértice: $(1; 2,75)$ $D'_f = [2,75; 5]$

2.2. Amplitude = $5 - 2,75 = 2,25^\circ\text{C}$

3. $f(x) = 4,8 \Leftrightarrow x = 3,864 \vee x = 4,8$

por observação gráfica do modelo apresentado

$4,8 - 3,864 = 0,936$ h

$0,936 \times 60 \text{ min} \approx 56 \text{ min}$

Entre esses dois instantes, decorreram, aproximadamente, 56 minutos.

Página 146

95.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} = 0 \wedge x \in [-2, 2] \right) \vee \left(-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \wedge x \in]2, +\infty[\right)$

$\Leftrightarrow (x = 0 \wedge x \in [-2, 2]) \vee (x = 6 \wedge x \in]2, +\infty[)$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

Zeros de f : 0 e 6

95.2. $f(x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} = 3 \wedge x \in [-2, 2] \right) \vee \left(-\frac{1}{2}x + 3 = 3 \wedge x \in]2, +\infty[\right)$

$\Leftrightarrow (x^2 = 6 \wedge x \in [-2, 2]) \vee (x = 0 \wedge x \in]2, +\infty[)$

Nota: $0 \notin]2, +\infty[$

$\Leftrightarrow (x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}) \wedge x \in [-2, 2]$

$3 \notin D'_f$, pois $\sqrt{6} \notin [-2, 2]$ e $-\sqrt{6} \notin [-2, 2]$.

96.1. Quadro de sinais da função j :

x	$-\infty$	-4		0		2	$+\infty$
$j(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	0	$-$

96.2. Por observação gráfica, ou por leitura do quadro de sinais, conclui-se que:

$$j(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 4] \cup]0, 2]$$

96.3. Se $x > 0$, então $j(x) = ax + b$.

Pontos: $(0, 2)$ e $(2, 0)$

$$\begin{cases} ax + 0 + b = 2 \\ ax + 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 2a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Assim, se $x > 0$, $j(x) = -x + 2$.

$$j(x) \leq -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (j(x) \leq -6 \wedge x \leq 0) \vee (-x + 2 \leq -6 \wedge x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x = -1)}_{(*)} \vee (-x \leq -8 \wedge x > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x = -1) \vee (x \geq 8 \wedge x > 0) \Leftrightarrow (x = -1) \vee (x \geq 8)$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [8, +\infty[$$

(*) por observação gráfica

Página 147

97.1. $D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 2[\cup]2, 4[=]-\infty, 4[$

97.2. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (-x + 5 = 0 \wedge x < -3) \vee$
 $\vee \left(2x \times \frac{1}{4} = 0 \wedge -3 \leq x < 2 \right) \vee$
 $\vee (9 - x^2 = 0 \wedge 2 \leq x \leq 4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x = 5 \wedge x < -3) \vee \left(x = \frac{1}{8} \wedge -3 \leq x < 2 \right) \vee$$

$$\vee (x^2 = 9 \wedge 2 \leq x \leq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \vee ((x = 3 \vee x = -3) \wedge 2 \leq x \leq 4)$$

Nota: $5 \notin]-\infty, -3[$ e $-3 \notin]2, 4[$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \vee x = 3$$

Zeros de f : $\frac{1}{8}$ e 3

b) $f(x) = 5 \Leftrightarrow (-x + 5 = 5 \wedge x < -3) \vee$
 $\vee \left(2x \times \frac{1}{4} = 5 \wedge -3 \leq x < 2 \right) \vee$
 $\vee (9 - x^2 = 5 \wedge 2 \leq x \leq 4)$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \wedge x < -3) \vee \left(x = \frac{21}{8} \wedge -3 \leq x < 2 \right) \vee$$

$$\vee ((x = 2 \vee x = -2) \wedge 2 \leq x \leq 4)$$

Nota: $0 \notin]-\infty, -3[$, $\frac{21}{8} \notin]-3, 2[$ e $-2 \notin]2, 4[$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Há apenas um objeto cuja imagem por f é 5 : é o 2 .

98.1. $D_h =]-\infty, 3[$; $D'_h =]-2, +\infty[$

98.2. Quadro de sinais da função h :

x	$-\infty$	-1		0		3
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0

98.3. a) Como $D'_h =]-2, +\infty[$, sabe-se que a equação $h(x) = b$ é impossível quando $b \in]-\infty, -2]$.

b) Por observação gráfica, sabe-se que a equação $h(x) = b$ tem três soluções quando $b \in [0, 1[$.

99.1. $a > 0$

• $x < 0$:

A equação $f(x) = 2$ é impossível pois

$$x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (1 \notin]-\infty, 0[)$$

$$a \in]4, +\infty[$$

• $x \geq 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + \frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow ax = 2 - \frac{a}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 - a}{2a}$$

A equação é impossível se $\frac{4 - a}{2a} < 0$.

• Como $a > 0$, então $2a > 0$.

$$\frac{4 - a}{2a} < 0 \Leftrightarrow 4 - a < 0 \Leftrightarrow -a < -4 \Leftrightarrow a > 4$$

Assim, a equação, quando $a > 0$, é impossível se $a \in]4, +\infty[$.

99.2. $a < 0$

• $f(x) = 2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x < 0$ impossível

• $f(x) = 2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 - a}{2a} \wedge x \geq 0$ impossível

(*) Número negativo. Se $a < 0$,

então $4 - a > 0 \wedge 2a < 0$. Assim, $\frac{4 - a}{2a} < 0$.

Conclusão: se $a < 0$, a equação $f(x) = 2$ é impossível.

100.1. • Se $0 \leq x \leq 150\,000$, então

$$s(x) = 850 + 0,02x$$

• Se $x > 150\,000$, então

$$\begin{aligned} s(x) &= 3850 + 0,025(x - 150\,000) = \\ &= 3850 + 0,025x - 3750 = \\ &= 0,025x + 100 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares: $s(150\,000) = 3850$

Conclui-se que:

$$s(x) = \begin{cases} 850 + 0,02x & \text{se } 0 \leq x \leq 150\,000 \\ 0,025x + 100 & \text{se } x > 150\,000 \end{cases}$$

100.2. $s(85\,000) = 850 + 0,02 \times 85\,000 = 2550$

Significado: Se, num mês, o José efetuar vendas num valor de 85 000 €, então o seu salário bruto, nesse mês, será 2550 €.

100.3. $s(x) > 4000 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0,025x + 100 &> 4000 \wedge x > 150\,000 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x > 156\,000 \wedge x > 150\,000 &\Leftrightarrow x > 156\,000 \end{aligned}$$

Então, $a = 156\,000$.

Página 148

1.1. $10\,000 = \underbrace{7479}_{\text{limite do 1.º escalão}} + \underbrace{2521}_{\text{entra no 2.º escalão}}$

Taxa média do 1.º escalão: 14,5%

Taxa normal do 2.º escalão: 21%

IRS anual: $0,145 \times 7479 + 0,21 \times 2521 = 1613,87$ €

1.2. $32\,500 = \underbrace{26\,355}_{\text{limite do 5.º escalão}} + \underbrace{6145}_{\text{entra no 6.º escalão}}$

Taxa média do 5.º escalão: 24,48%

Taxa normal do 6.º escalão: 37%

IRS anual:

$$0,2448 \times 26\,355 + 0,37 \times 6145 \approx 8725,35 \text{ €}$$

1.3. $85\,000 = \underbrace{78\,834}_{\text{limite do 8.º escalão}} + \underbrace{6166}_{\text{entra no 9.º escalão}}$

Taxa média do 8.º escalão: 36,67%

Taxa normal do 9.º escalão: 48%

IRS anual:

$$0,3667 \times 78\,834 + 0,48 \times 6166 \approx 31\,868,11 \text{ €}$$

2.1. $f(x) = \begin{cases} 0,35x - 2771,73 & \text{se } 25\,000 \leq x \leq 26\,355 \\ 0,37x - 3299,65 & \text{se } 26\,355 < x \leq 30\,000 \end{cases}$

Cálculos auxiliares:

$$25\,000 \leq x \leq 26\,355$$

$$x = \underbrace{20\,700}_{\text{limite do 4.º escalão}} + \underbrace{(x - 20\,700)}_{\text{entra no 5.º escalão}}$$

Taxa média do 4.º escalão: 24,61%

Taxa normal do 5.º escalão: 35%

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,2161 \times 20\,700 + 0,35(x - 20\,700) = \\ &= 4473,27 + 0,35x - 7245 = 0,35x - 2771,73 \end{aligned}$$

$26355 < x \leq 30\,000$

$$x = \underbrace{26\,355}_{\text{limite do 5.º escalão}} + \underbrace{(x - 26\,355)}_{\text{entra no 6.º escalão}}$$

Taxa média do 5.º escalão: 24,48%

Taxa normal do 6.º escalão: 37%

Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,2448 \times 26355 + 0,37(x - 26355) = \\ &= 6451,70 + 0,35x - 9751,35 = \\ &= 0,37x - 3299,65 \end{aligned}$$

2.2. $f(30\,000) - f(25\,000) =$

$$\begin{aligned} &= 0,37 \times 30\,000 - 3299,65 - \\ &\quad - (0,35 \times 25\,000 - 2771,73) = \\ &= 7800,35 - 5978,27 = 1822,08 \end{aligned}$$

Representa o valor a mais do IRS que o Lucas terá de pagar se o seu vencimento coletável passar de 25 000 € para 30 000 €.

Página 149

61.1. $f(-3) = |-3| = 3$

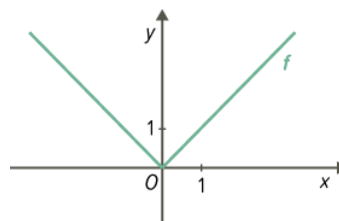
61.2. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

61.3. $f(0) = |0| = 0$

61.4. $f(-\sqrt{3}) = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

61.5. $f(1,4) = |1,4| = 1,4$

62.1.



f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

62.2. $D'_f = [0, +\infty[$, logo o mínimo de f é zero.

- 62.3. a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ C.S. = \mathbb{R}
 b) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$ C.S. = $\{0\}$
 c) $f(x) < -2 \Leftrightarrow x \in \{ \}$ C.S. = $\{ \}$

63.1.

```
x=float(input('x= '))
def modulo (x):
    if x<0:
        return -x
    else:
        return x
print('o módulo de ',x,'é ', modulo(x))
```

- 63.2. $f(-7) = 7$ $f(-5,2) = 5,2$
 $f(0,85) = 0,85$ $f(0) = 0$
 $f(-1,8) = 1,8$

Página 150

64.1. $f(x) = |x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & \text{se } x-5 < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x+5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

64.2. $f(x) = \left| x - \frac{3}{2} \right| = \begin{cases} x - \frac{3}{2} & \text{se } x - \frac{3}{2} \geq 0 \\ -\left(x - \frac{3}{2}\right) & \text{se } x - \frac{3}{2} < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ -x + \frac{3}{2} & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

64.3. $f(x) = |3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & \text{se } 3x-6 \geq 0 \\ -(3x-6) & \text{se } 3x-6 < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x-6 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x+6 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

64.4. $f(x) = |3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{se } 3-2x \geq 0 \\ -(3-2x) & \text{se } 3-2x < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{se } x \leq \frac{3}{2} \\ -3+2x & \text{se } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

64.5. $f(x) = -|x-5| = \begin{cases} -(x-5) & \text{se } x-5 \geq 0 \\ -[-(x-5)] & \text{se } x-5 < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{se } x \geq 5 \\ x-5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

65. $g(x) = x^2 - x - 2$ e $h(x) = |g(x)|$
 $h(x) = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{se } x^2 - x - 2 \geq 0 \\ -(x^2 - x - 2) & \text{se } x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{se } x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\\ -x^2 + x + 2 & \text{se } x \in]-1, 2[\end{cases}$$

Página 151

1.1. a) **Processo 1**

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow (x-3 = 25 \wedge x \geq 3) \vee (-x+3 = 25 \wedge x < 3)$$

$$\Leftrightarrow (x = 28 \wedge x \geq 3) \vee (x = -22 \wedge x < 3) \\ \Leftrightarrow x = 28 \vee x = -22$$

Processo 2

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow |x-3| = 25 \Leftrightarrow x-3 = 25 \vee x-3 = -25 \\ \Leftrightarrow x = 28 \vee x = -22$$

Resposta: os objetos cuja imagem f é 25 são -22 e 28.

b) **Processo 1**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3 = 0 \wedge x \geq 3) \vee (-x+3 = 0 \wedge x < 3)$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \wedge x \geq 3) \vee \underbrace{(x = 3 \wedge x < 3)}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 3$$

Processo 2

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Resposta: o objeto cuja imagem por f é 0 é o 3.

c) **Processo 1**

$$f(x) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(x-3 = \frac{7}{2} \wedge x \geq 3 \right) \vee \left(x-3 = \frac{7}{2} \wedge x < 3 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{13}{2} \wedge x \geq 3 \right) \vee \left(x = -\frac{1}{2} \wedge x < 3 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Resposta: os objetos cuja imagem por f é

$$\frac{7}{2} \text{ são } -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{13}{2} .$$

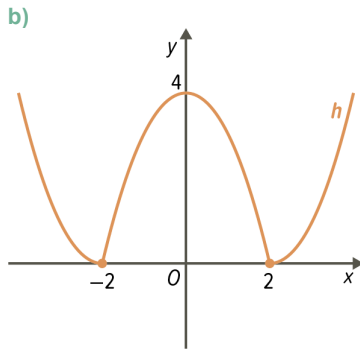
1.2. $k \in \mathbb{R}^-$ $k \notin D'_f$, porque $D'_f = [0, +\infty[$.

2.1. Quadro de sinais:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2.2. a) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ -x^2 + 4 & \text{se } x \in]-2, 2[\end{cases}$



c) $D'_h = [0, +\infty[$

d) Quadro de sinais da função h :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

Página 152

101.1. $h(-4) = 2|-4| - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$

101.2. $h\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left|\frac{1}{4}\right| - 3 = 2 \times \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

101.3. $h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left|-\frac{1}{2}\right| - 3 = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$

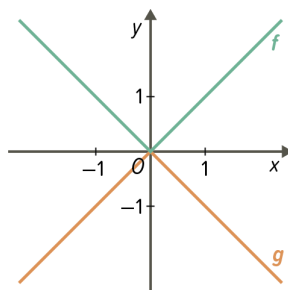
102.1. $f(3) = |3| = 3$ e $g(3) = -|3| - 3$

102.2. $f(-5) = |-5| = 5$ e $g(-5) = -|-5| = -5$

102.3. $f(a) = |a|$ e $g(a) = -|a|$

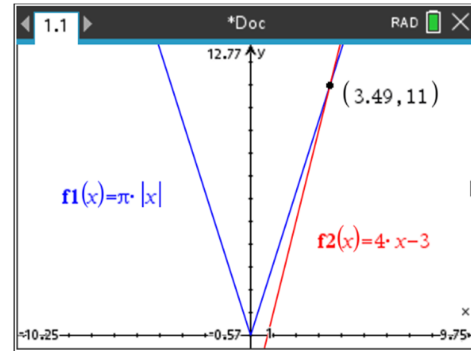
$f(a)$ e $g(a)$ são simétricos.

102.4. A representação gráfica de g é uma reflexão da de f em relação ao eixo Ox .



Página 153

103. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \pi|x| = 4x - 3$



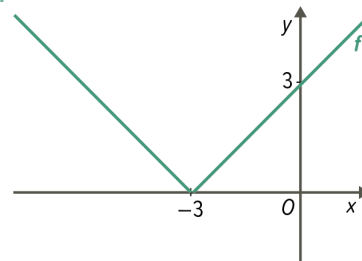
$x \approx 3,49$ e $y \approx 10,98$

Coordenadas do ponto de interseção:
(3,49 ; 10,98)

104.1. $f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{se } x+3 < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$

104.2.



104.3. $D'_f = [0, +\infty[$

105.1. $|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & \text{se } x-5 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow |x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x+5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

$f(x) = -|x-5| + 4 = \begin{cases} -(x-5) + 4 & \text{se } x \geq 5 \\ -(-x+5) + 4 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} -x+9 & \text{se } x \geq 5 \\ x-1 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

105.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x+9=0 \wedge x \geq 5) \vee (x-1=0 \wedge x < 5)$

$\Leftrightarrow (x=9 \wedge x \geq 5) \vee (x=1 \wedge x < 5)$

$\Leftrightarrow x=9 \vee x=1$

Zeros de f : 1 e 9

105.3. $f(x) = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x+9=8 \wedge x \geq 5) \vee (x-1=8 \wedge x < 5)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x=1 \wedge x \geq 5)}_{\text{condição impossível}} \vee \underbrace{(x=9 \wedge x < 5)}_{\text{condição impossível}} \Leftrightarrow x = \{ \}$

Conclusão: 8 não pertence ao contradomínio da função f .

106. $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$f(x) = |-x| + 3 = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x + 3 = x^2 - 1 \wedge x \geq 0) \vee$$

$$\vee (x + 3 = x^2 - 1 \wedge x < 0)$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 - x + 4 = 0 \wedge x \geq 0) \vee$$

$$\vee (-x^2 + x + 4 = 0 \wedge x < 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{-2} \wedge x \geq 0 \right) \vee$$

$$\vee \left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{-2} \wedge x < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{-2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{-2} \right) \wedge x \geq 0 \right) \vee$$

$$\vee \left(\left(x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-2} \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-2} \right) \wedge x < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{-2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{17}}{-2}$$

As abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos são $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ e $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Página 154

- 1.1. $f\left(\frac{5}{2}\right) - f(1) = 5 - 5 = 0$
- 1.2. $f(10) - 2f(4) = 2 \times 10 + 1 - 2(2 \times 4 + 1) = 21 - 2 \times 9 = 3$
- 1.3. $\sqrt{f(12) - 44} = \sqrt{12^2 - 44} = \sqrt{144 - 44} = 10$
- 2.1. a) $f(2) = 2^2 = 4$
 b) $f(3) = 3^2 = 9$
 c) $f(4,2) = 3^2 + (4,2 - 3) \times 1 = 9 + 1,2 = 10,2$
- 2.2. • Se $x \in]0, 3]$, então $f(x) = x^2$.
 • Se $x \in]3, 5]$, então
 $f(x) = 3^2 + (x - 3) \times 1 = 9 + x - 3 = x + 6$.
 Assim:
 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in]0, 3] \\ x + 6 & \text{se } x \in]3, 5] \end{cases}$
- 3.1. a) Delocação: 5 km
 Preço: $20 + 2,5 \times 5 = 32,50$ €

b) Delocação: 32 km (20 km + 12 km)

Preço: $20 + 2,5 \times 20 + 1,80 \times 12 = 20 + 50 + 21,60 = 91,60$ €

- 3.2. • Se $x \in]0, 20]$, então $f(x) = 20 + 2,50x$
 • Se $x \in]20, +\infty[$, então
 $f(x) = 20 + 2,50 \times 20 + 1,80 \times (x - 20) = 20 + 50 + 1,80x - 36 = 1,80x + 34$
 Assim: $f(x) = \begin{cases} 20 + 2,50x & \text{se } 0 < x \leq 20 \\ 34 + 1,80x & \text{se } x > 20 \end{cases}$

3.3. $f(48) = 34 + 1,80 \times 48 = 120,40$

No contexto apresentado, $f(48) = 120,40$, significa que o valor a pagar por um serviço da empresa de mudanças que envolva uma deslocação de 48 km é 120,40 €.

- 4.1. a) 6 L de mistura
 Quantidade do produto A é dada por $\frac{1}{3} \times 6$, ou seja, 2 L.
 Quantidade do produto B é dada por $\frac{2}{3} \times 6$, ou seja, 4 L.
 Preço de 6 L de mistura é dado por $2 \times 4 + 4 \times 7 = 36$, ou seja, 36 €.
- b) 12 L de mistura
 O preço de 10 L é dado por $\left(\frac{1}{3} \times 10\right) \times 4 + \left(\frac{2}{3} \times 10\right) \times 7 = 60$, ou seja, 60 €.
 Há 2 L de mistura que excede os 10 L.
 O preço desses 2 L é dado por $\left(\frac{1}{3} \times 2\right) \times 3 + \left(\frac{2}{3} \times 2\right) \times 6 = 10$, ou seja, 10 €.
 O preço, em euros, de 12 L de mistura é dado por $60 + 10 = 72$, ou seja, 70 €.

4.2. a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} \times 4 + \frac{2x}{3} \times 7 & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ f(10) + \frac{(x-10)}{3} \times 3 + \frac{2(x-10)}{3} \times 6 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Simplificando tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{18x}{3} & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 60 + 5x - 50 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 10 + 5x & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

b) Se o preço foi 85 €, então a quantidade de mistura foi superior a 10 L.

Se $x > 10$, então sabe-se que

$$f(x) = 85 \Leftrightarrow 10 + 5x = 85 \Leftrightarrow x = 15$$

A quantidade de mistura era 15 L, sendo um terço do produto A e dois terços do produto B.

A quantidade do produto A foi 5 L e a do produto B, 10 L.

Página 155

5.1. a) $D_f = [-2, 3]$

b) $D_f = [1, 5[$

c) A função não tem zeros.

Número de zeros: 0

d) Mínimo da função: 1

e) A equação $f(x) = \frac{3}{2}$ tem duas soluções

5.2. • Se $-2 \leq x \leq 0$, então $f(x) = 3$.

• Se $0 < x \leq 3$, então $f(x) = a(x-2)^2 + 1$.

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow a(3-2)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Assim, $0 < x \leq 3$, $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

Conclusão:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ (x-2)^2 + 1 & \text{se } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

6.1. Sejam $A(-4, 1)$ e $B(2, -3)$.

$$AB: y = ax + b$$

$$a = \frac{-3-1}{2-(-4)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

Como o ponto A pertence à reta, tem-se:

$$1 = -\frac{2}{3} \times (-4) + b \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{3} = b \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = b$$

Assim, se $x \leq 2$, então $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

O outro zero de g é $-\frac{5}{2}$.

6.2. Quadro de sinais:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		4	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+

6.3. Seja $C(4, 0)$. Sabe-se que $B(2, -3)$.

$$BC: y = ax + b$$

$$a = \frac{0-(-3)}{4-2} = \frac{3}{2} \quad y = \frac{3}{2}x + b$$

Como o ponto C pertence à reta, tem-se:

$$0 = \frac{3}{2} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -6 \quad y = \frac{3}{2}x - 6$$

Se $x > 2$, então $g(x) = \frac{3}{2}x - 6$.

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{3}{2}x - 6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

6.4. $g(x) = 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 5 \wedge x \leq 2 \right) \vee \left(\frac{3}{2}x - 6 = 5 \wedge x > 2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (-2x - 5 = 15 \wedge x \leq 2) \vee (3x - 12 = 10 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow (x = -10 \wedge x \leq 2) \vee \left(x = \frac{22}{3} \wedge x > 2 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = -10 \vee x = \frac{22}{3}$$

$$x \in \left\{ -10, \frac{22}{3} \right\}$$

7.1. $D_f =]-\infty, 2] \cup]2, +\infty[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

7.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2 = 0 \wedge x \leq 2 \right) \vee (-x + 6 = 0 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 = -4 \wedge x \leq 2)}_{\text{equação impossível}} \vee (x = 6 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Zero de f : 6

7.3. a) $f(x) = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2 = 4 \wedge x \leq 2 \right) \vee (-x + 6 = 4 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 4 \wedge x \leq 2) \vee (x = 2 \wedge x > 2)$$

Nota: $2 \notin]-2, +\infty[$

$$\Leftrightarrow ((x = 2 \vee x = -2) \wedge x \leq 2)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

b) $f(x) = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2 = 6 \wedge x \leq 2 \right) \vee (-x + 6 = 6 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 8 \wedge x \leq 2) \vee (x = 0 \wedge x > 2)$$

Nota: $0 \notin]-2, +\infty[$

$$\Leftrightarrow ((x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}) \wedge x \leq 2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{8}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f(x) = 3 &\Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2 = 3 \wedge x \leq 2 \right) \vee (-x + 6 = 3 \wedge x > 2) \\
 &\Leftrightarrow (x^2 = 2 \wedge x \leq 2) \vee (x = 3 \wedge x > 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left((x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \wedge x \leq 2 \right) \vee x = 3 \\
 &\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 3
 \end{aligned}$$

7.4. a) $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2 \leq 1 \wedge x \leq 2 \right) \vee (-x + 6 \leq 1 \wedge x > 2) \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 \leq -2 \wedge x \leq 2)}_{\text{equação impossível}} \vee (x \geq 5 \wedge x > 2) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \geq 5 \\
 &\Leftrightarrow x \in [5, +\infty[
 \end{aligned}$$

b) $f(x) > \frac{13}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{2} + 2 > \frac{13}{2} \wedge x \leq 2 \right) \vee \left(-x + 6 > \frac{13}{2} \wedge x > 2 \right) \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 9 > 0 \wedge x \leq 2) \vee \underbrace{\left(x < -\frac{1}{2} \wedge x > 2 \right)}_{\text{condição impossível}}
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:
 $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[\wedge x \leq 2) \\
 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[
 \end{aligned}$$

8.1. $N(4) = 152 \times 4 - 88 = 520$

No total, foram vendidos 520 bilhetes

8.2. $N(1) = 54 \times 1^2 = 54 \rightarrow$ Número de bilhetes

vendidos na 1.ª hora

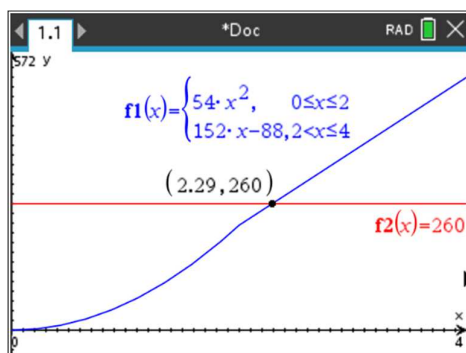
$$N(2) = 54 \times 2^2 = 216$$

$$N(2) - N(1) = 216 - 54 = 162 \rightarrow$$
 Número de

bilhetes vendidos na 2.ª hora

Foram vendidos mais bilhetes durante a 2.ª hora (162) do que durante a 1.ª hora (54).

8.3. $N(x) = 0,5 \times 520 \Leftrightarrow N(x) = 260$



$x \approx 2,29$ h

$$0,29 \times 60 \approx 17 \text{ min}$$

Até que fossem vendidos 50% dos bilhetes, demorou, aproximadamente, 2 horas e 17 minutos.

Página 156

9. $f(1) = |1| = 1$; $f(-1) = |-1| = 1$; $f(0) = |0| = 0$
 Assim as coordenadas de um ponto do gráfico de f são $(-1, 1)$.

A opção correta é a (C).

10.1. Sendo $g(x) = |f(x)|$, então

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Logo, a representação gráfica que corresponde à função g é a B.

10.2. Sendo $g(x) = -f(x)$, então a representação gráfica que corresponde à função f é a C visto que o gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f através de uma reflexão de eixo Ox .

11. $f(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 1 - x \geq 0 \\ -1 + x & \text{se } 1 - x < 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ -1 + x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

A opção correta é a (C).

12.1. $f(x) = |x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x - 5 \geq 0 \\ -x + 5 & \text{se } x - 5 < 0 \end{cases}$
 $f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

12.2. $f(x) = |4 - x| = \begin{cases} 4 - x & \text{se } 4 - x \leq 0 \\ -4 + x & \text{se } 4 - x > 0 \end{cases}$
 $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se } x \leq 4 \\ -4 + x & \text{se } x > 4 \end{cases}$

12.3. $f(x) = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 2x + 1 \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{se } 2x + 1 < 0 \end{cases}$
 $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

13. $A(0, f(0))$

$$f(0) = |3 \times 0 - 5| = |-5| = 5 \quad \text{Assim, } A(0, 5)$$

$$f(0) = |3x - 5| = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Assim, $B\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

$$14.1. |2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } 2x+3 \geq 0 \\ -(2x+3) & \text{se } 2x+3 < 0 \end{cases}$$

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-3 & \text{se } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Então:

$$f(x) = |2x+3| - 7 = \begin{cases} 2x+3-7 & \text{se } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-3-7 & \text{se } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{se } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-10 & \text{se } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$14.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-4=0 \wedge x \geq -\frac{3}{2} \right) \vee \left(-2x-10=0 \wedge x < -\frac{3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2 \wedge x \geq -\frac{3}{2} \right) \vee \left(x=-5 \wedge x < -\frac{3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-5$$

Zeros de f : -5 e 2

Página 157

15.1. Quadro de sinais da função g :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

15.2. 2 é um zero de g , logo $g(2) = 0$.

$$g(2) = 0 \Leftrightarrow k \times |2| + 1 = 0 \Leftrightarrow 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

15.3. $x \geq 0$ $g(x) = ax + b$

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 1 \\ a \times 2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Então, } g(x) = -\frac{1}{2}x + 1.$$

$$x \leq 0 \quad g(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 1 \\ a \times (-2) + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Então, } g(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Conclusão:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

15.4. Se o ponto de coordenadas $(7, b)$ pertence ao gráfico de g , então $g(7) = b$.

$$g(7) = -\frac{1}{2} \times |7| + 1 = -\frac{1}{2} \times 7 + 1 = -\frac{7}{2} + 1 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Então, } b = -\frac{5}{2}.$$

$$16.1. f(x) = |x-2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{se } x+2 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

16.2. a) Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f e têm ordenada 3 .

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2=3 \wedge x \geq -2) \vee (-x-2=3 \wedge x < -2)$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \wedge x \geq -2) \vee (x=-5 \wedge x < -2)$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-5$$

Como a abscissa do ponto A é inferior à abscissa do ponto B , conclui-se que $x_A = -5$ e $x_B = 1$.

b) O ponto C pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox , logo tem ordenada nula.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2=0 \wedge x \geq -2) \vee (-x-2=0 \wedge x < -2)$$

$$\Leftrightarrow (x=-2 \wedge x \geq -2) \vee \underbrace{(x=-2 \wedge x < -2)}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Então, $C(-2, 0)$.

$$17.1. |2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & \text{se } 2x-6 \geq 0 \\ -(2x-6) & \text{se } 2x-6 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x+6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Então,

$$f(x) = |2x-6| - 3 = \begin{cases} 2x-6-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x+6-3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-9 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

17.2. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x - 9 = 0 \wedge x \geq 3) \vee (-2x + 3 = 0 \wedge x < 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{9}{2} \wedge x \geq 3 \right) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge x < 3 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

Como a abscissa do ponto A é inferior à abscissa do ponto B , conclui-se que $x_A = \frac{3}{2}$

e $x_B = \frac{9}{2}$.

Então, $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

b) $C(0, f(0))$ e $f(0) = -2 \times 0 + 3 = 3$, logo $C(0, 3)$

c) O ponto D tem ordenada -3 e pertence ao gráfico de f .

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - 9 = -3 \wedge x \geq 3) \vee (-2x + 3 = -3 \wedge x < 3)$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \wedge x \geq 3) \vee \underbrace{(x = 3 \wedge x < 3)}_{\text{equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Então, $D(3, -3)$.

18.1. • $f(x) = 3 - |1 - 2x|$

$$|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{se } 1 - 2x \geq 0 \\ -(1 - 2x) & \text{se } 1 - 2x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - 2x & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ -1 + 2x & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = 3 - |1 - 2x| = \begin{cases} 3 - (1 - 2x) & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - (-1 + 2x) & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 2x & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

• $g(x) = |x - 5|$

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x - 5 \geq 0 \\ -(x - 5) & \text{se } x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

18.2. **Ponto A**: tem ordenada 2 e pertence ao gráfico de f .

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 + 2x = 2 \wedge x \leq \frac{1}{2} \right) \vee \left(4 - 2x = 2 \wedge x > \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \wedge x \leq \frac{1}{2} \right) \vee \left(x = 1 \wedge x > \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Como $x_A > 0$, conclui-se que $A(1, 2)$.

Ponto B: pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox (ordenada é 0)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 + 2x = 0 \wedge x \leq \frac{1}{2} \right) \vee \left(4 - 2x = 0 \wedge x > \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -1 \wedge x \leq \frac{1}{2} \right) \vee \left(x = 2 \wedge x > \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Como $x_B > 0$, conclui-se que $B(2, 0)$.

Ponto C: pertence ao gráfico de g e ao eixo Ox (ordenada é 0)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5 = 0 \wedge x \geq 5) \vee (-x + 5 = 0 \wedge x < 5)$$

$$\Leftrightarrow (x = 5 \wedge x \geq 5) \vee \underbrace{(x = 5 \wedge x < 5)}_{\text{condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Então, $B(5, 0)$.

Ponto D: tem ordenada 2 e pertence ao gráfico de g .

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5 = 2 \wedge x \geq 5) \vee (-x + 5 = 2 \wedge x < 5)$$

$$\Leftrightarrow (x = 7 \wedge x \geq 5) \vee (x = 3 \wedge x < 5)$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = 3$$

Como $x_D > x_C$, conclui-se que $D(7, 2)$.

Assim tem-se:

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times h$$

$$= \frac{(7-1) + (5-2)}{2} \times 2 = 9$$

A área é igual a 9 u.a.

$$19.1. |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = |2x+1| - x = \begin{cases} 2x+1-x & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1-x & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -3x-1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$19.2. g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1=0 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \right) \vee \left(-3x-1=0 \wedge x < -\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=-1 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \right) \vee \left(x=-\frac{1}{3} \wedge x < -\frac{1}{2} \right)$$

Condições impossíveis.

A função de g não tem zeros.

Página 158

$$1.1. D_f =]-\infty, 0[\cup [0, 6] =]-\infty, 6]$$

A opção correta é a (C).

$$1.2. f(0) - f(1) = 0 + 2 - (2 \times (-1) - 1) = 2 - (-3) = 5$$

A opção correta é a (A).

$$1.3. f(x) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-1=4 \wedge x < 0) \vee (x+2=4 \wedge 0 \leq x \leq 6)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{5}{2} \wedge x < 0 \right) \vee (x=2 \wedge 0 \leq x \leq 6)$$

$$\text{Nota: } \frac{5}{2} \notin]-\infty, 0[$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

A opção correta é a (B).

$$2.1. \text{ A equação } f(x) = k, \text{ sendo } k \in]-4, -3[,$$

tem duas soluções porque, quando

$$k \in]-4, -3[, \text{ a reta } y = k \text{ interseca o gráfico}$$

de f duas vezes.

A opção correta é a (B).

2.2. Por observação gráfica, sabe-se que:

$$C: 4 \leq x \leq 6 \text{ e } B: -3$$

Como o vértice da parábola tem coordenadas

$(0, 4)$, então uma possibilidade certa é

$$A: x^2 - 4$$

A opção correta é a (C).

$$2.3. f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4 = -3 \wedge -3 \leq x \leq 1) \vee 1 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 1 \wedge -3 \leq x \leq 1) \vee 1 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow ((x=1 \vee x=-1) \wedge -3 \leq x \leq 1) \vee 1 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee 1 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee 1 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [1, 4[$$

A opção correta é a (C).

$$3. f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases} \stackrel{\text{pois } f(-1)=0}{=} \begin{cases} x+1 & \text{se } x > -1 \\ -x-1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

A opção correta é a (C).

Página 159

$$1.1. \bullet \text{ Se } x \leq 4, \text{ então } f(x) = a(x-2)^2 + 4.$$

$$f(4) = 3 \Leftrightarrow a(4-2)^2 + 4 = 3 \Leftrightarrow 4a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Assim, se } x \leq 4, f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4.$$

$$\bullet \text{ Se } 4 < x \leq 10, \text{ então } f(x) = ax + b.$$

$$a = \frac{-3-3}{10-4} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$f(x) = -x + b$$

$$f(10) = -3 \Leftrightarrow -10 + b = -3 \Leftrightarrow b = 7$$

$$\text{Assim, se } 4 < x \leq 10, f(x) = -x + 7.$$

Conclusão:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 & \text{se } x \leq 4 \\ -x + 7 & \text{se } 4 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$1.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 = 0 \wedge x \leq 4 \right) \vee$$

$$\vee (-x + 7 = 0 \wedge 4 < x \leq 10)$$

$$\Leftrightarrow \left((x-2)^2 = 16 \wedge x \leq 4 \right) \vee (x=7 \wedge 4 < x \leq 10)$$

$$\Leftrightarrow \left((x-2=4 \vee x-2=-4) \wedge x \leq 4 \right) \vee x=7$$

$$\Leftrightarrow \left((x=6 \vee x=-2) \wedge x \leq 4 \right) \vee x=7$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=7$$

Zeros de f : -2 e 7

1.3. Por observação gráfica, conclui-se que a equação $f(x) = k$ tem uma única solução se $k \in]-\infty, -3[\cup \{4\}$.

2.1. Distância: 25 km = 20 km + 5 km
Custo: $10 + 1,5 \times 20 + 0,80 \times 5 = 44$
O custo é 44 €.

2.2. • Se $0 < x \leq 20$, então $f(x) = 10 + 1,50x$.

• Se $x > 20$, então

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 + 1,50 \times 20 + 0,80 \times (x - 20) = \\ &= 10 + 30 + 0,80x - 16 = 24 + 0,80x \end{aligned}$$

Assim:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 1,50x & \text{se } 0 < x \leq 20 \\ 24 + 0,80x & \text{se } x > 20 \end{cases}$$

2.3. Se num serviço, o preço a pagar pelo cliente foi 52 €, então a distância era superior a 20 km.

$$f(x) = 52 \Leftrightarrow 24 + 0,80x = 52 \Leftrightarrow x = 35$$

A distância percorrida nessa mudança foi 35 km.

3.1. $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{se } x+3 < 0 \end{cases}$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Então:

$$f(x) = |x+3| - 1 = \begin{cases} x+3-1 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3-1 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-4 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

3.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+2=0 \wedge x \geq -3) \vee (-x-4=0 \wedge x < -3)$$

$$\Leftrightarrow (x=-2 \wedge x \geq -3) \vee (x=-4 \wedge x < -3)$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -4$$

Como $x_A < x_B$, então $x_A = -4$ e $x_B = -2$.

Logo, $A(-4, 0)$ e $B(-2, 0)$.