

Propostas de resolução da unidade 5 do manual

Página 6

- 1.1. a) Pontos D e F
 b) Pontos A e E
- 1.2. a) $C(-1, -1)$
 b) $A\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$
- 1.3. a) $P\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
 b) $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Página 7

- 2.1. $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{2}} = \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 3^2} = 3\sqrt{3}$
- 2.2. $\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$
- 3.1. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 20$
 Como $\overline{AC} > 0$, $\overline{AC} = \sqrt{20}$.
- 3.2. $\overline{AC} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- 4.1. $\overline{AC} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$
 Seja $x = \overline{AB}$. Então
 $x^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^2 = 4 \times 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$
 Como $x > 0$, $x = 2$.
 $P = 4 \times 2 = 8$

O perímetro do quadrado é 8 cm.

- 4.2. $\overline{AB} = \sqrt{36} = 6$
 $\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 72$
 Como $\overline{AC} > 0$, então
 $\overline{AC} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$
 Seja h a medida da altura do triângulo $[ACE]$
 $h^2 + (3\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 + 18 = 72 \Leftrightarrow h^2 = 54$
 Como $h > 0$, então $h = \sqrt{54} = \sqrt{6 \times 9} = 3\sqrt{6}$
 $A_{[ACE]} = \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{2} = \frac{18\sqrt{12}}{2} = 9\sqrt{3 \times 4} = 18\sqrt{3}$
 A área do triângulo $[ACE]$ é $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Página 8

5.1. $A_{[EFGH]} = \overline{EF} \times \overline{FG} = (1 + \sqrt{10})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$
 $= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{20} =$
 $= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{2 \times 25} - \sqrt{4 \times 5} =$
 $= \sqrt{5} - \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} =$
 $= 4\sqrt{2} - \sqrt{5}$

5.2. $\overline{EG}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2$
 $\Leftrightarrow \overline{EG}^2 = (1 + \sqrt{10})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$
 $\Leftrightarrow \overline{EG}^2 = 1 + 2\sqrt{10} + 10 + 5 - 2\sqrt{10} + 2$
 $\Leftrightarrow \overline{EG}^2 = 18$

Como $\overline{EG} > 0$, $\overline{EG} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}$

6. $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
 $(2x+1)^2 = x^2 + 15^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 225$
 $\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 224 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 2688}}{6}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 52}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-4 - 52}{6} \vee x = \frac{-4 + 52}{6}$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{28}{3} \vee x = 8$

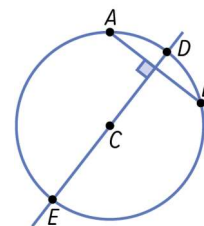
Como $x > 0$, então $x = 8$.

- 7.1. $P(-4, 3)$ e $T(4, -1)$
- 7.2. $Q(-2, 3)$
- 7.3. $U(4, 5)$

Página 9

- 8.1. Sim. A distância do ponto C a qualquer ponto da circunferência é igual ao raio. Então $\overline{AC} = \overline{BC}$. Assim, C é equidistante de A e B , logo pertence à mediatriz de $[AB]$.

- 8.2. Pontos D e E da figura seguinte:



D e E são os pontos da circunferência que estão a igual distância de A e B .



9. Seja ℓ a medida do lado do quadrado e r a medida do raio do círculo.

$$\ell^2 = 4 \Leftrightarrow_{\ell > 0} \ell = 2$$

$$P_{\square} = 4\ell = 4 \times 2 = 8$$

$$2\pi r = 8 \Leftrightarrow r = \frac{8}{2\pi} \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi}$$

$$A_{\circ} = \pi \times \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \pi \times \frac{16}{\pi^2} = \frac{16}{\pi} \approx 5,09$$

A área do círculo é aproximadamente $5,09 \text{ m}^2$.

10. A reta t é perpendicular ao raio $[CP]$ no ponto P , porque é uma reta tangente à circunferência em P . A mediatriz de $[CP]$ é também perpendicular a $[CP]$ no seu ponto médio. Logo, as retas são paralelas porque são ambas perpendiculares a $[CP]$.

Página 10

1. $C(8, 4)$ $R(2, 1)$ $B(6, 1)$
 $U(-1, 2)$ $E(-1, -1)$

- 2.1. Por exemplo:

a) $(-1, 3)$

b) $(3, 1)$

- 2.2. a) A abscissa igual a -1 .
 b) A ordenada igual a 1 .

3. $\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 13$

Como $\overline{BC} > 0$, então $\overline{BC} = \sqrt{13}$

Em metros, $\overline{BC} = \sqrt{13} \times 1200 \approx 4\,327 \text{ m}$

Então, $\overline{BC} \approx 4\,327 \text{ m}$.

Página 11

- 1.1. $A(3, 1)$ $B(0, 2)$ $C(-2, 4)$
 $D(-4, -2)$ $E(2, -3)$

- 1.2. a) $P(-3, 1)$
 b) $P(2, 3)$

- 1.3. $T(-2, 0)$

Página 12

2. $(-2, 2) \rightarrow$ Ponto B $(-3, 0) \rightarrow$ Ponto H
 $(2, -1) \rightarrow$ Ponto D $(2, 4) \rightarrow$ Ponto A
 $(0, 3) \rightarrow$ Ponto G $(-3, -2) \rightarrow$ Ponto C
 $(2, -2) \rightarrow$ Ponto E $(4, 2) \rightarrow$ Ponto F

- 3.1. $P(a, b)$ pertence ao 4.º Q

- 3.2. $P(b, b)$ pertence ao 3.º Q

- 3.3. $P(-a, c)$ pertence ao 2.º Q

- 3.4. Como $0 < c < a$, então $c - a < 0$.

$P(c - a, b)$ pertence ao 3.º Q.

- 3.5. $P(|b|, -a)$ pertence ao 4.º Q

- 3.4. Como $a > 0$ e $b < 0$, então $ab < 0$.

$P(ab, 2c)$ pertence ao 2.º Q

- 3.7. Se $c < a$, então $c - a < 0$. Como $b < 0$, então

$\frac{c - a}{b} > 0$. Assim, $-\frac{b}{c} > 0$

$P\left(\frac{c - a}{b}, -\frac{b}{c}\right)$ pertence ao 1.º Q.

Página 13

1.

A	$(-3, -2)$	$(-3, 2)$	$(3, -2)$	$(3, 2)$
B	$(-2, 1)$	$(-2, -1)$	$(2, 1)$	$(2, -1)$
C	$(0, 2)$	$(0, -2)$	$(0, 2)$	$(0, -2)$
D	$(0, -3)$	$(0, 3)$	$(0, -3)$	$(0, 3)$
E	$(2, -1)$	$(2, 1)$	$(-2, -1)$	$(-2, 1)$
F	$(2, 3)$	$(2, -3)$	$(-2, 3)$	$(-2, -3)$
G	$(3, 0)$	$(3, 0)$	$(-3, 0)$	$(-3, 0)$
P	(a, b)	$(a, -b)$	$(-a, b)$	$(-a, -b)$

- 2.1. $(-3, 4)$

- 2.2. $(0, 5)$

- 2.3. $(3, 2)$

- 3.1. a) $(4, 2)$

b) $(1, 0)$

c) $(7, -2)$



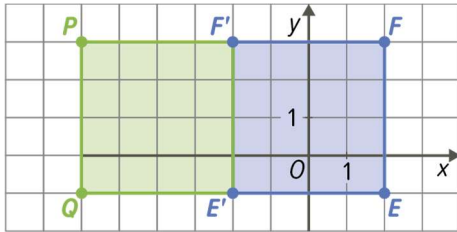
- 3.2. Sejam E' e F' as imagens de E e F , respectivamente, pela reflexão referida. Há duas soluções.

Quadrado 1 - $[EFF'E']$

$$E(2, -1) \quad F(2, 3) \quad F'(-2, 3) \quad E'(-2, -1)$$

Quadrado 2 - $[E'F'PQ]$

$$E'(-2, -1) \quad F'(-2, 3) \quad P(-6, 3) \quad Q(-6, -1)$$



Página 14

1. $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow_{\overline{OB} > 2} \overline{OB} = \sqrt{2}$

Como $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$ então $C(\sqrt{2}, 0)$ e $D(0, \sqrt{2})$.

$$\overline{OE}^2 = \overline{OC}^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{OE}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 \Leftrightarrow_{\overline{OE} > 0} \overline{OE} = \sqrt{3}$$

Como $\overline{OG} = \overline{OE} = \sqrt{3}$, então $G(\sqrt{3}, 0)$ e $H(\sqrt{3}, 1)$.

$$A(1, 2) \quad B(1, 1) \quad C(\sqrt{2}, 0)$$

$$D(0, \sqrt{2}) \quad E(\sqrt{2}, -1) \quad F(-1, -1)$$

$$G(\sqrt{3}, 0) \quad H(\sqrt{3}, 1)$$

2.1. $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad D(1, -2)$

2.2. Atendendo à figura $E(5, -1)$.

2.3. Por exemplo:

a) $P(1, -2)$ b) $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Página 15

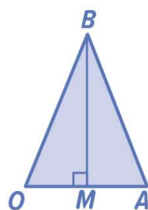
3. Seja $[BM]$ a altura relativa à base $[OA]$.

$$\overline{BM}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OB}^2$$

$$\overline{BM}^2 + 2^2 = \sqrt{29}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 29 - 4 \Leftrightarrow_{\overline{BM} > 0} \overline{BM} = 5$$

Então, $B(2, 5)$.



4.1. $m = -1 \quad A\left(-\frac{1}{3}, 3\right) \quad B(1, -3)$
 $A \in 2.^\circ Q \quad B \in 4.^\circ Q$

4.2. $A\left(\frac{m}{3}, 2-m\right) \quad A \in 2.^\circ Q \vee A \in 3.^\circ Q$

$$\left(\frac{m}{3} < 0 \wedge 2-m > 0\right) \vee \left(\frac{m}{3} < 0 \wedge 2-m < 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m < 0 \wedge -m > -2) \vee (m < 0 \wedge -m < -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m < 0 \wedge m < 2) \vee (m < 0 \wedge m > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m < 0 \vee (m < 0 \wedge m > 2)$$

Como $(m < 0 \wedge m > 2)$ é uma condição impossível, temos:

$$m \in]-\infty, 0[$$

4.3. $m = -3 \quad A(-1, 5) \quad B(-1, -3)$

a) $(-1, 3)$ b) $(1, 5)$

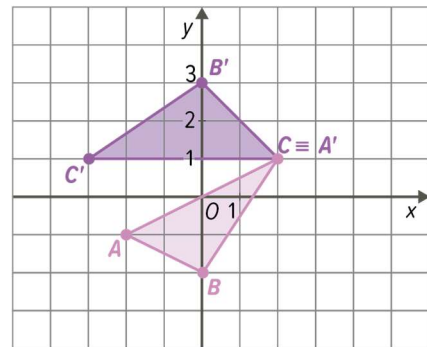
c) $(1, -5)$ d) $(1, -3)$

5.1. O transformado do ponto A é $(-2, 3)$.

O transformado do ponto B é $(0, 4)$.

O transformado do ponto C é $(2, 1)$.

5.2. $A'(2, 1) \quad B'(0, 2) \quad C'(-2, 1)$



$$A_{[A'B'C']} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$$

A medida da área do triângulo $[A'B'C']$ é 2.

Página 16

4.1. $\overline{OA} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad \overline{OA} = \sqrt{10}$

4.2. $\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$$\overline{AB} = \sqrt{58}$$

4.3. $\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$$\overline{AC} = \sqrt{26}$$



$$4.4. \quad \overline{BC} = \sqrt{2^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \quad \overline{BC} = \sqrt{8}$$

$$5.1. \quad \overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

O triângulo $[ABC]$ é escaleno.

$$5.2. \quad \overline{AC} = \sqrt{34}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(1+7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-2+7)^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

a) $\overline{AC} = \overline{CD}$, então o triângulo $[ACD]$ é isósceles.

$$b) \quad \sqrt{68}^2 = \sqrt{34}^2 + \sqrt{34}^2 \Leftrightarrow 68 = 34 + 34 \\ \Leftrightarrow 68 = 68 \quad \text{Verdadeiro}$$

Então, o triângulo $[ACD]$ é retângulo, pois

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$$

Página 17

6.1. M : ponto médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3-2}{2}\right) \text{ ou seja } M\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$6.2. \quad C\left(\frac{0-2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \text{ ou seja } C\left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{0+1}{2}, \frac{0-2}{2}\right) \text{ ou seja } D\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

E : ponto médio de $[CD]$.

$$E\left(\frac{-1+\frac{1}{2}}{2}, \frac{\frac{3}{2}-1}{2}\right) \text{ ou seja } E\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$7.1. \quad A(2, -2) \quad B(4, 1)$$

$$M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-2+1}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(3, -\frac{1}{2}\right)$$

$$7.2. \quad B(4, 1) \quad C(1, 2)$$

$$P\left(\frac{4+1}{2}, \frac{1+2}{2}\right), \text{ ou seja, } P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$D(-3, 0)$$

$$\overline{DP} = \sqrt{\left(-3-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{130}{4}} = \frac{\sqrt{130}}{2}$$

$$7.3. \quad R\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2+0}{2}\right), \text{ ou seja, } R(-1, 1)$$

$$S\left(\frac{2-3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right), \text{ ou seja, } S\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\overline{RS} = \sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\overline{RS} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Página 18

$$6.1. \quad A(-1, 1) \quad B(5, 1) \quad C(5, 3) \quad D(-1, 3)$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{(5+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

A medida das diagonais é $2\sqrt{10}$.

6.2. As diagonais do retângulo interseccionam-se no seu ponto médio.

Seja I o ponto médio das diagonais.

$$I\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ ou seja, } I(2, 2)$$

$$6.3. \quad a) \quad D'(-1, 0) \quad B(5, 1)$$

$$\overline{D'B} = \sqrt{(-1-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{37}$$

$$b) \quad D'(-1, 0) \quad C(5, 3)$$

$$\overline{D'C} = \sqrt{(-1-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$7.1. \quad \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$7.2. \quad a) \quad \overline{AB} = \sqrt{(-4-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{16+16} =$$

$$= \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

b) M : ponto médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{-4}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{ ou seja, } M(-2, 1)$$

$$C(2, 2)$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(2+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$



Página 19

8.1. Seja $A(a_1, a_2)$

$$\left(\frac{a_1+3}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = (1, 1)$$

$$\begin{cases} \frac{a_1+3}{2} = 1 \\ \frac{a_2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+3 = 2 \\ a_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \end{cases} \quad A(-1, 2)$$

8.2. Seja $C(c_1, c_2)$

$$\left(\frac{c_1-1}{2}, \frac{c_2+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{c_1-1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{c_2+2}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 \end{cases} \quad C(2, 5)$$

8.3. $P\left(\frac{2+3}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 9.1. a) Seja $A(a_1, a_2)$

$$\left(\frac{a_1+6}{2}, \frac{a_2+3}{2}\right) = (2, 1)$$

$$\begin{cases} \frac{a_1+6}{2} = 2 \\ \frac{a_2+3}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad A(-2, -1)$$

b) Seja $D(d_1, d_2)$

$$\left(\frac{d_1+4}{2}, \frac{d_2}{2}\right) = (2, 1)$$

$$\begin{cases} \frac{d_1+4}{2} = 2 \\ \frac{d_2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 2 \end{cases} \quad D(0, 2)$$

c) Seja M o ponto médio de $[AD]$

$$M = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

9.2. $\left(k^2 - 4, \frac{k+6}{2}\right) = \left(\frac{6+4}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$k^2 - 4 = 5 \wedge \frac{k+6}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k^2 = 9 \wedge k+6 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k = 3 \vee k = -3) \wedge k = -3 \Leftrightarrow k = -3$$

10.1. $A(-2, 0) \quad C(1, 2) \quad M(1, -1)$ Seja $B(b_1, b_2)$ Sabe-se que M é ponto médio de $[AB]$

$$\begin{cases} \frac{b_1-2}{2} = 1 \\ \frac{b_2}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1-2 = 2 \\ b_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = -2 \end{cases} \quad B(4, -2)$$

 N é ponto médio de $[BC]$

$$N\left(\frac{4+1}{2}, \frac{-2+2}{2}\right), \text{ ou seja, } N\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

 P é ponto médio de $[AC]$

$$P\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right), \text{ ou seja, } P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-2-4)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \\ &= \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\overline{NP} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{10} = 2\overline{NP}$$

10.2. $\overline{BC} = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{10} + 5 + \sqrt{13} \approx 15$$

O perímetro é aproximadamente 15.

11.1. a) $B\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$, ou seja, $B(1, 4)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{Em metros: } \sqrt{10} \times 0,4 \approx 1,26$$

A distância entre A e B é aproximadamente igual a 1,26 m.b) Seja A' a projeção de A sobre o eixo Ox .

$$A'(-2, 0)$$

$$\overline{AA'} = 5$$

$$\text{Em metros: } 5 \times 0,4 = 2$$

A distância de A ao chão da sala é 2 m.11.2. $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ O ponto A vai manter a ordenada e a abcissa

$$\text{passa a ser } -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

As novas coordenadas de A são $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$.



12. $P(a, b) \quad Q(b, a)$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2ab + a^2} = \\ &= \sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \\ &= \sqrt{2(a-b)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(a-b)^2} = \\ &= \sqrt{2} \times |a-b| \end{aligned}$$

Página 20

8. $x = 3 \rightarrow$ reta t

$y = -\sqrt{5} \rightarrow$ reta u

$y = \pi \rightarrow$ reta p

$x = -1 \rightarrow$ reta s

$y = 1 \rightarrow$ reta v

$x = \sqrt{2} \rightarrow$ reta r

9.1. a) $x = -2$

b) $y = -5$

9.2. $r : y = 4$

$s : x = 1$

As retas r e s interseccionam-se no ponto de coordenadas $(1, 4)$.

Página 21

13.1. $r : y = -2$

$Q \in r \wedge Q \in 3.^\circ$ Quadrante

Por exemplo: $Q(-1, -2)$

13.2. $s : x = 3$

$Q \in s \wedge Q \in 1.^\circ$ Quadrante

Por exemplo: $Q(3, 4)$

14.1. a) $y = 2$

b) $x = -3$

14.2. a) A' : simétrico de $A(-3, 2)$ em relação a Ox

$A'(-3, -2)$

Equação da reta que passa em A' e é paralelo ao eixo Ox : $y = -2$

b) B' : simétrico de $B(1, -4)$ em relação a Oy

$B'(-1, -4)$

Equação da reta que passa em B' e é paralelo ao eixo Oy : $x = -1$.

15.1. a) Pontos B e D

b) Pontos A e C

15.2. $A(3, \sqrt{7})$ e $A(3, -\sqrt{2})$

Os pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao segmento de reta $[AC]$ são:

$P_1(3, -1)$, $P_2(3, 0)$, $P_3(3, 1)$ e $P_4(3, 2)$.

Página 22

16.1. Seja r a reta que passa por $B(1, 2)$ e é paralela a Ox , $r : y = 2$.

Se $C\left(0, \frac{1-3k}{5}\right)$ pertence à reta r , então $y = 2$

Assim, tem-se:

$$\frac{1-3k}{5} = 2 \Leftrightarrow 1-3k = 10 \Leftrightarrow -3k = 9 \Leftrightarrow k = -3$$

16.2. $D(k^2 - 3k, 2k - 1)$, $k \in \mathbb{R}$

Como a soma das coordenadas do ponto D é 1, tem-se:

$$k^2 - 3k + 2k - 1 = 1 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -1$$

Se $k = 2$, então $D(-2, 3) \in 2.^\circ$ Q

Se $k = -1$, então $D(4, -3) \in 4.^\circ$ Q

Como $D \in 2.^\circ$ Q, conclui-se que $k = 2$

16.3. $E(k^2 - 5, 2k + 4)$, $k \in \mathbb{R}$

Se E é a projeção ortogonal do ponto $A(-1, -1)$ sobre o eixo Ox , então as coordenadas do ponto E são $(-1, 0)$.

Assim sendo, tem-se:

$$k^2 - 5 = -1 \wedge 2k + 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4 \wedge k = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k = 2 \vee k = -2) \wedge k = -2 \Leftrightarrow k = -2$$

17.1. a) Pontos D e E

b) Por exemplo, os pontos B e D .



17.2. a) $AB: y = 1$

A projeção ortogonal do ponto $C(-4, 4)$

sobre a reta AB é o ponto $C_1(-4, 1)$.

b) $DE: x = -3$

A projeção ortogonal do ponto $C(-4, 4)$

sobre a reta DE é o ponto $C_2(-3, 4)$.

17.3. $C'(-2, 4)$ e $BD: y = 1$

A projeção ortogonal de C' sobre a reta BD é o ponto $C'(-2, 1)$

18.1. Seja s a reta paralela ao eixo Oy e que passa por $A(-3, 2)$.

$$s: x = -3$$

Se $P \in s$, tem-se:

$$2k - 1 = -3 \Leftrightarrow 2k = -2 \Leftrightarrow k = -1$$

18.2. $Ox: y = 0$

Se $P \in Ox$, então tem-se

$$k^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \vee k = \frac{1}{2}$$

18.3. A' : projeção ortogonal de A sobre a reta r .

$$A'(2, 2)$$

P' é a projeção ortogonal de A sobre a reta r se:

$$2k - 1 = 2 \wedge k^2 - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow 2k = 3 \wedge k^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \wedge \left(k = \frac{3}{2} \vee k = -\frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

19. Como as retas de equação $x = 1$ e $y = 3$ são eixos de simetria do quadrado, então o ponto de coordenadas $(1, 3)$ é o centro do quadrado.

Se dois lados do quadrado são paralelos ao eixo Ox , então os outros dois lados são paralelos ao eixo Oy .

19.1. Os quatro vértices pertencem ao 1.º quadrante.

As coordenadas dos vértices do quadrado

podem ser, por exemplo, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

19.2. Apenas um dos vértices pertencem ao 1.º quadrante. As coordenadas dos vértices do quadrado podem ser, por exemplo, $(-3, -1)$, $(5, -1)$, $(5, 7)$ e $(-3, 7)$.

Página 23

10.1. $A(-6, 0)$ e $B(-2, -2)$

$$m = \frac{-2-0}{-2-(-6)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

10.2. $A(0, 2)$ e $B(2, 8)$

$$m = \frac{8-2}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

10.3. $A(-2, -8)$ e $B(6, 4)$

$$m = \frac{4-(-8)}{6-(-2)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

10.4. $A\left(1, \frac{7}{2}\right)$ e $B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$$m = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{7}{2}}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{12}{2}}{-\frac{3}{2}} = 4$$

11. $r: y = mx + b$

A reta r passa pelos pontos $A(4, 1)$ e $B(-2, 4)$.

$$m = \frac{4-1}{-2-4} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Como $A \in r$, tem-se:

$$1 = -\frac{1}{2} \times 4 + b \Leftrightarrow 1 = -2 + b \Leftrightarrow b = 3$$

$$r: y = -\frac{1}{2}x + 3$$

12.1. $r \parallel s$, logo $m_r = m_s$, ou seja, $m_r = 3$

$$r: y = 3x + b$$

Como $P(-1, -2) \in r$, tem-se:

$$-2 = 3 \times (-1) + b \Leftrightarrow -2 = -3 + b \Leftrightarrow b = 1$$

$$r: y = 3x + 1$$

12.2. $r: y = mx - 2$

Como $P(1, 3) \in r$, tem-se:

$$3 = m \times 1 - 2 \Leftrightarrow 3 = m - 2 \Leftrightarrow m = 5$$

$$r: y = 5x - 2$$



Página 24

1. 1.ª etapa

$$M_1\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \text{ ou seja, } M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$M_2\left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+7}{2}\right), \text{ ou seja, } M_2(4, 4)$$

$$M_3\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{4+7}{2}\right), \text{ ou seja, } M_3\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

2.ª etapa

Reta AM_2

$$m = \frac{4-4}{4-(-2)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$AM_2: y = 4$$

Reta BM_3

$$m = \frac{\frac{11}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 5} = \frac{\frac{9}{2}}{-\frac{9}{2}} = -1$$

$$y = -x + b$$

Como $B(5, 1)$ pertence à reta, tem-se:

$$1 = -5 + b \Leftrightarrow b = 6$$

$$BM_3: y = -x + 6$$

Reta CM_1

$$m = \frac{\frac{5}{3} - 7}{\frac{2}{3} - 5} = \frac{-\frac{9}{3}}{-\frac{2}{3}} = 3$$

$$y = 3x + b$$

Como o ponto $C(3, 7)$ pertence à reta, tem-se:

$$7 = 3 \times 3 + b \Leftrightarrow 7 = 9 + b \Leftrightarrow b = -2$$

$$CM_1: y = 3x - 2$$

3.ª etapa

Vamos determinar as coordenadas do ponto de interseção das retas AM_2 e BM_3 .

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 4 = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Em seguida vamos verificar que o ponto de coordenadas $(2, 4)$ pertence à reta CM_1 .

$$4 = 3 \times 2 - 2 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad \text{Proposição verdadeira.}$$

Então, o ponto de coordenadas $(2, 4)$ pertence à reta CM_1 .

4.ª etapa

G: baricentro do triângulo (ponto de interseção das medianas) $G(2, 4)$

2. Sim, o processo do Bernardo resulta.

Conjetura: As coordenadas do baricentro de um triângulo $[ABC]$, dado $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

e $C(x_C, y_C)$ são $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Página 25

20.1. Sejam (x, y) as coordenadas do ponto C.

Como $M\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ é o ponto médio de $[BC]$,

tem-se:

$$\frac{3+x}{2} = \frac{5}{2} \wedge \frac{-2+y}{2} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+x = 5 \wedge -2+y = -2 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 0$$

$$C(2, 0)$$

20.2. A mediana $[AM]$ está contida na reta AM .

$$m_{AM} = \frac{-1+1}{\frac{5}{2}+2} = \frac{0}{\frac{9}{2}} = 0$$

$$AM: y = -1$$

M_1 : ponto médio de $[AB]$.

$$M_1\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right), \text{ ou seja, } M_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

A mediana $[CM_1]$ está contida na reta CM_1 .

$$m_{CM_1} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$$

$$y = x + b$$

Como $C(2, 0)$ pertence à reta CM_1 , tem-se:

$$0 = 2 + b \Leftrightarrow b = -2$$

$$CM_1: y = x - 2$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -1 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$G(1, -1)$$



21.1. Reta AT

$$m = \frac{\frac{5}{2} - (-2)}{-\frac{1}{2} - (-5)} = \frac{\frac{5}{2} + 2}{-\frac{1}{2} + 5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} = 1$$

$$y = x + b$$

Como o ponto $A(-5, -2)$ pertence à reta AT ,

tem-se:

$$-2 = -5 + b \Leftrightarrow -2 + 5 = b \Leftrightarrow b = 3$$

$$AT : y = x + 3$$

21.2. G: baricentro do triângulo $[ABC]$

G é o ponto de interseção das retas BM e AT .

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \frac{1}{2}x + 2 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x + 4 = 2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times (-2) + 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$G(-2, 1)$$

21.3.

$$\overline{AT} = \sqrt{\left(-5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{162}{4}} = \frac{\sqrt{81 \times 2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{GA} = \sqrt{(-2+5)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} =$$

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{2}{3}\overline{AT} = \frac{2}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = \overline{GA}$$

Assim sendo, $\overline{GA} = \frac{2}{3}\overline{AT}$.

22.1. Seja $C(x, y)$

Como $M\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ é o ponto médio de $[BC]$, tem-se:

se:

$$\begin{cases} \frac{3+x}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{0+y}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$C(0, 4)$$

22.2.

$$\overline{GA} = 2\overline{GM} = 2\sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2-2)^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4}} =$$

$$= 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

Opção (A)

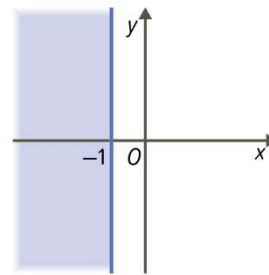
22.3.

$$\overline{GN} = \frac{1}{2}\overline{GB} = \frac{1}{2}\sqrt{(0-3)^2 + (2-0)^2} =$$

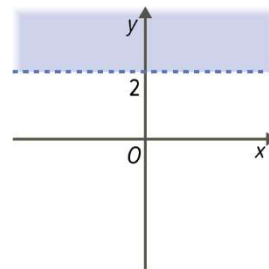
$$= \frac{1}{2}\sqrt{9+4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Página 24

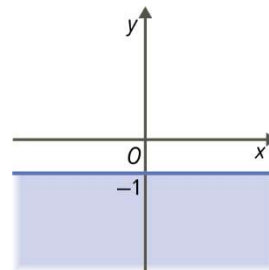
13.1.



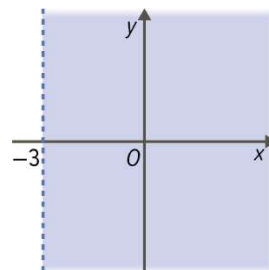
13.2.



13.3.



13.4.



14.1.

$$x \geq -3$$

14.2.

$$y < -1$$

14.3.

$$x < 2$$



Página 27

- 1.1. $y = \frac{7}{3}$
- 1.2. a) Os pontos da figura que estão a oeste do ponto P são os pontos B, H e M .
b) Os pontos que estão a norte do ponto C são os pontos B, E, H e P .
- 1.3. a) $y < \frac{7}{3}$ b) $x > -\frac{5}{2}$
- 2.1. Como a reta PE é paralela ao eixo Ox , então os pontos P e E têm a mesma ordenada.
Assim, tem-se:
 $k^2 - 1 = 2k - 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k - 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$
Se $k = 0$, então $E(1, -1)$. Não é possível pois $E \in 1.^\circ$ quadrante. Então, $k = 2$.
Assim sendo, $E(3, 3)$ e $P(1, 3)$.
- 2.2. Como a reta MH é paralela ao eixo Oy , então os pontos M e H têm a mesma abcissa.
Assim, tem-se: $3m + 2 = m \Leftrightarrow 2m = -2 \Leftrightarrow m = -1$
Conclui-se que $H(-1, 4)$ e $M(-1, -2)$.
- 2.3. Sendo $k = 2$ e $m = -1$, então $C(4, 1)$.
3. $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$ e $T(x, y)$
Como BT é paralela ao eixo Oy , então é definida pela condição $x = -\frac{5}{2}$.
Assim, $T\left(-\frac{5}{2}, y\right)$. Como T está a sul do ponto B e tem ordenada positiva, $0 < y < \frac{7}{3}$
 $T\left(-\frac{5}{2}, y\right)$, sendo $0 < y < \frac{7}{3}$
Os pontos nestas condições, cuja ordenada é um número inteiro são $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$.

Página 28

- 15.1. $y > \frac{x}{2} + 2$
- 15.2. $y \leq \frac{x}{2} + 2$

16.1. $A(4, 1)$ e $B(3, 1)$

$$AB: y = mx + b$$

$$m = \frac{1 - (-1)}{3 - 4} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$y = -2x + b$$

Como o ponto A pertence à reta, tem-se:

$$-1 = -2 \times 4 + b \Leftrightarrow -1 = -8 + b \Leftrightarrow b = 7$$

$$AB: y = -2x + 7$$

O semiplano aberto determinado pela reta é definido pela condição $y > -2x + 7$.

16.2. $s: y = -5x + 2$ e $B(3, 1)$ $B \notin s$

Se $x = 3$, então $y = -5 \times 3 + 2 = -13$

Como $1 > -13$, o ponto B pertence ao semiplano inferior definido pela reta s .Assim sendo, o semiplano fechado determinado pela reta s , ao qual pertence o ponto B , é definido pela condição $y \geq -5x + 2$.

16.3. $P(2k - 1, 4k)$, $k \in \mathbb{R}$

O semiplano inferior aberto definido pela reta s é representado pela condição $y < -5x + 2$. P pertence a esse semiplano se:

$$4k < -5(2k - 1) + 2 \Leftrightarrow 4k < -10k + 5 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14k < 7 \Leftrightarrow k < \frac{1}{2} \quad k \in]-\infty, \frac{1}{2}[$$

Página 29

23.1. Opção (D)

23.2. $y \leq x - 1$

24.1. $AB: y = mx + b$

$$m = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + b$$

Como o ponto $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pertence à reta, tem-se:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{3} \times 1 + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{3} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{5}{6}$$

$$AB: y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$$



24.2. a) $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Como $0 > \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{5}{6}$ é verdadeiro, o ponto P pertence ao semiplano superior aberto determinado pela reta AB .

b) $P(0, -2)$

Como $-2 > \frac{4}{3} \times 0 - \frac{5}{6}$ é verdadeiro, o ponto P pertence ao semiplano inferior aberto determinado pela reta AB .

c) $P\left(4, \frac{9}{2}\right)$

Como $\frac{9}{2} > \frac{4}{3} \times 4 - \frac{5}{6}$ é verdadeiro, o ponto P pertence à reta AB . Assim sendo, o ponto P não pertence a nenhum dos semiplanos abertos determinados pela reta AB .

d) $P(0, 0)$

Como $0 > \frac{4}{3} \times 0 - \frac{5}{6}$ é verdadeiro, o ponto P pertence ao semiplano superior aberto determinado pela reta AB .

24.3. $y \leq \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$

Página 30

25.1. $BC: y = mx + b$ $B(0, 2)$ e $C(4, 0)$

$$m = \frac{0-2}{4-0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Como o ponto $B(0, 2)$ pertence à reta, então $b = 2$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$A(1, -1)$ não pertence à reta BC pois

$$-1 = -\frac{1}{2} \times 1 + 2 \text{ é falso.}$$

Como $-1 < -\frac{1}{2} \times 1 + 2$ é verdadeiro, o ponto A é

solução da condição $y < -\frac{1}{2}x + 2$.

Assim, o semiplano fechado determinado pela reta BC ao qual pertence A é definido por

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 2.$$

25.2. $AC: y = mx + b$

$$A(1, -1) \text{ e } C(4, 0)$$

$$m = \frac{0 - (-1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

Como o ponto $A(1, -1)$ pertence à reta, tem-se:

$$-1 = \frac{1}{3} + b \Leftrightarrow -1 = \frac{1}{3} + b \Leftrightarrow -\frac{4}{3} = b$$

$$AC: y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

O ponto $B(0, 2)$ não pertence à reta AC (pois

$b = -\frac{4}{3}$). Como $2 > \frac{1}{3} \times 0 - \frac{4}{3}$ é verdadeiro, o

ponto B é solução da condição $y > \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

Assim, o semiplano aberto determinado pela reta AC ao qual pertence B é definido por

$$y > \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}.$$

26.1. M é o ponto médio de $[AB]$, sendo $A(-1, 4)$ e $B(2, -1)$.

$$\text{Então, } M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{4-1}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

26.2. a) $AB: y = mx + b$

$$m = \frac{-1-4}{2-(-1)} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{5}{3}x + b$$

Como o ponto $A(-1, 4)$ pertence à reta, tem-se:

$$4 = -\frac{5}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow 4 = \frac{5}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$$

A equação reduzida da reta AB é

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}.$$

b) A reta r passa pelos pontos $C(-2, 0)$ e

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$



$$r: y = mx + b$$

$$m = \frac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{1}{2} - (-2)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + b$$

Como o ponto $C(-2, 0)$ pertence à reta,

tem-se:

$$0 = \frac{3}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{6}{5} + b \Leftrightarrow b = \frac{6}{5}$$

$$r: y = \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}$$

26.3. a) $y < \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}$

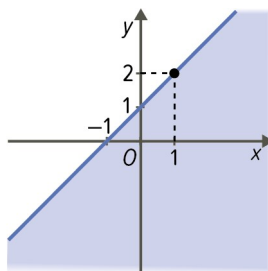
b) $y \geq -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$

c) $y < -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$

(C pertence ao semiplano inferior aberto definido pela reta AB.)

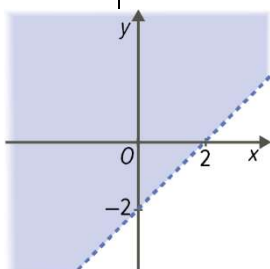
27.1. $y \leq x + 1$

x	y = x + 1
0	1
1	2



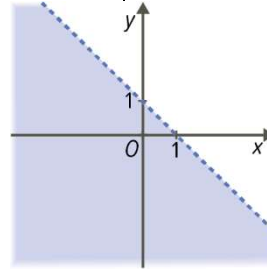
27.2. $y > x - 2$

x	y = x - 2
0	-2
2	0



27.3. $x + y < 1 \Leftrightarrow y < -x + 1$

x	y = -x + 1
0	1
1	0



28. $AB: x + 2y = 6 \Leftrightarrow 2y = -x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 3$

$A \in Ox$, logo $A(x, 0)$.

Como $A \in AB$, então $x + 2 \times 0 = 6$, ou seja,

$$x = 6. \quad A(6, 0)$$

$B \in Oy$ e $B \in AB$, logo $B(0, 3)$.

M: ponto médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(3, \frac{3}{2}\right).$$

OM: $y = mx + b$

$$m = \frac{\frac{3}{2} - 0}{3 - 0} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$b = 0$, pois a reta passa na origem

$$OM: y = \frac{1}{2}x \quad P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \in OM?$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$ é falso, logo o ponto P não pertence à reta OM .

Como $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$, conclui-se que o ponto P

pertence ao semiplano inferior determinado pela reta OM .

Página 31

17.1. $\overline{CA} = \sqrt{(1-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\overline{CB} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Como $\overline{CA} = \overline{CB}$, o ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$.



$$17.2. \quad \overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

Como $\overline{AB} \neq \overline{AD}$, o ponto A não pertence à mediatriz de $[BD]$.

$$18.1. \quad A(0, -2) \text{ e } B(0, 4)$$

Uma equação da mediatriz de $[AB]$: $y = 1$

$$18.2. \quad C(-2, 0) \text{ e } O(0, 0)$$

Uma equação da mediatriz de $[CO]$: $x = -1$

18.3. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AC]$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$4y = 4x \Leftrightarrow y = x$$

18.4. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y = 4x - 12 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Página 32

29.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -8x + 8 \Leftrightarrow y = -2x + 2$$

Equação reduzida da reta r : $y = -2x + 2$

$$29.2. \quad \text{a) } P_1(4, y)$$

$$P_1 \in r, \text{ logo } y = -2 \times 4 + 2 \Leftrightarrow y = -6$$

$$P_1(4, -6)$$

$$\text{b) } P_2(x, 3)$$

$$P_2 \in r, \text{ logo } 3 = -2x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$P_2\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$29.3. \quad r: y = -2x + 2$$

Se $x = 0$, então $y = 2$.

Se $y = 0$, então $0 = -2x + 2$, ou seja, $P_1(4, y)$

$x = 1$.

A reta r interseca os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(1, 0)$.

30.1. Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, então C pertence à mediatriz de $[AB]$. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de mediatriz $[AB]$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$$

$$= x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y = -12x + 32 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 4$$

Equação reduzida da reta r : $y = \frac{3}{2}x - 4$

$$C(4, y): y = \frac{3}{2} \times 4 - 4 \Leftrightarrow y = 2$$

$$C(4, 2)$$

$$30.2. \quad C \in Oy, \text{ logo } C(0, y)$$

r : mediatriz de $[AB]$

$C \in r$, então $y = -4$

$$C(0, -4)$$

$$30.3. \quad C \in Ox, \text{ logo } C(x, 0)$$

$$C \in r, \text{ então } 0 = \frac{3}{2}x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$$



Página 33

31.1. r : mediatriz de $[AB]$

$$r: y = -3x + 1 \quad P(5, y) \in r$$

$$y = -3 \times 5 + 1 \Leftrightarrow y = -14$$

$$P(5, -14)$$

31.2. $P(x, 7) \in r$

$$7 = -3x + 1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$P(-2, 7)$$

32. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[OA]$.

$$\overline{PO} = \overline{PA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow$$

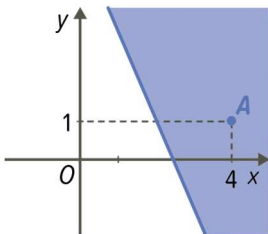
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y = -8x + 17 \Leftrightarrow y = -4x + \frac{17}{2}$$

Equação reduzida da mediatriz de $[OA]$:

$$y = -4x + \frac{17}{2}$$



O ponto A pertence ao semiplano superior aberto definido pela mediatriz de $[OA]$ e é

representado por $y > -4x + \frac{17}{2}$.

33. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[OA]$.

$$\overline{PO} = \overline{PA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = -12x + 45 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{15}{2}$$

A região colorida do plano é definida por

$$y \leq -2x + \frac{15}{2}.$$

34. $AB: y = -\frac{x}{2} + 3$

$$A \in Ox, \text{ logo } A(x, 0)$$

$$A \in AB, \text{ logo } 0 = -\frac{x}{2} + 3 \Leftrightarrow x = 6 \quad A(6, 0)$$

$$B \in Oy \text{ e } B \in AB, \text{ logo } B(0, 3)$$

$$C \in Oy \quad C(0, y)$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(6-0)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 + y^2 = 0 + (3-y)^2 \Leftrightarrow 36 + y^2 = 9 - 6y + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = -27 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{2} \quad C\left(0, \frac{9}{2}\right)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} = \frac{\left(3 + \frac{9}{2}\right) \times 6}{2} = \frac{45}{2}$$

A área do triângulo $[ABC]$ é de $\frac{45}{2}$ u.a.

35.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y = -12x - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 2 \quad \text{Equação da mediatriz de } [AB]$$

Como $-3 < \frac{3}{2} \times 1 + 2$ é verdadeiro, o ponto B

pertence ao semiplano inferior determinado pela mediatriz de $[AB]$.

Assim, o semiplano fechado determinado pela mediatriz de $[AB]$ e ao qual pertence o ponto B

é definido pela condição $y \leq \frac{3}{2}x + 2$.



- 35.2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = (x-3)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y = -4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \quad \text{Equação reduzida de } [BC]$$

Como $0 > -\frac{2}{3} \times 3 - \frac{1}{6}$ é verdadeiro, o ponto C pertence ao semiplano superior determinado pela mediatriz de $[BC]$.

Assim, o semiplano aberto determinado pela mediatriz de $[BC]$ e ao qual pertence o ponto C

é definido pela condição $y > -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$.

35.3.
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ 9x + 12 = -4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ 13x = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{Circuncentro: } \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

36. Como P é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices do triângulo $[ABC]$, então P é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, ou seja, P é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo $[ABC]$.

Para determinar as coordenadas do ponto P basta saber a equação de duas das mediatrizes.

Mediatriz de $[AB]$

Seja $R(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

$$\overline{RA} = \overline{RB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y = -4x + 8 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

Mediatriz de $[BC]$

Seja $S(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

$$\overline{SB} = \overline{SC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 =$$

$$= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10y = -8x + 19 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{19}{10}$$

Ponto P

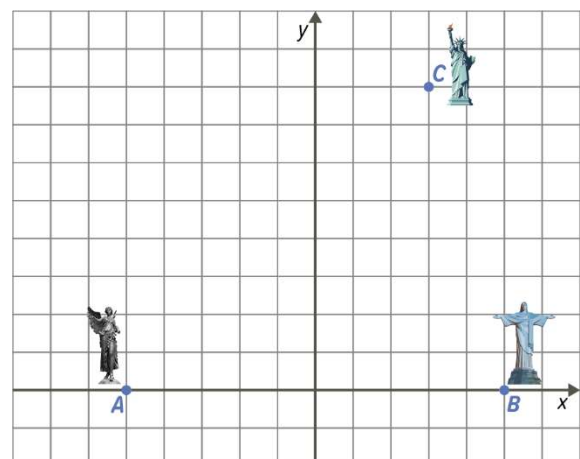
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -\frac{4}{5}x + \frac{19}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{4}{5}x + \frac{19}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ 5x - 10 = -8x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ 13x = 29 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times \frac{29}{13} - 1 \\ x = \frac{29}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{26} \\ x = \frac{29}{13} \end{cases} \quad P\left(\frac{29}{13}, \frac{3}{26}\right)$$

Página 34

1.





2. Relativamente ao referencial de 1., sabe-se que $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(3, 8)$.
3. Como P é equidistante dos pontos A , B e C , sabe-se que P pertence à mediatriz de $[AB]$ e a mediatriz de $[BC]$.

Equação da mediatriz de $[AB]$

$$x = 0$$

Mediatriz de $[BC]$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[BC]$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 =$$

$$= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16y + 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16y = 4x + 48 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 3$$

Ponto P

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{4}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$P(0, 3)$$

4. Sabe-se que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\text{Ora, } \overline{PA} = \sqrt{(0+5)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Como $\overline{AB} = 100$ m, então cada quadrícula (unidade na figura) corresponde a 10 metros.

$$\sqrt{34} \times 10 \text{ m} \approx 58,3 \text{ m}$$

A distância do ponto P a cada um dos outros pontos é, aproximadamente, 58,3 metros.

Página 35

$$19.1. r = \overline{OA} = \sqrt{(0+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$19.2. r = \overline{OC} = \sqrt{(0+3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

A circunferência de centro O e que passa por C é definida pela equação $x^2 + y^2 = 18$.

$$19.3. \overline{OB} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

logo o ponto B pertence à circunferência de centro O e raio 5.

- 20.1. A equação $x^2 + y^2 = 9$ representa a circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio 3.

- 20.2. A equação $(x-5)^2 + y^2 = 8$ representa a circunferência de centro no ponto $C(5, 0)$ e raio $\sqrt{8}$.

- 20.3. A equação $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 16$ representa a circunferência de centro no ponto $C(4, 1)$ e raio 4.

- 20.4. A equação $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ representa a circunferência de centro no ponto $C(-3, 2)$ e raio 1.

- 20.5. A equação $x^2 + (y+1)^2 = 0$ representa o ponto de coordenadas $(0, -1)$.

- 20.6. A equação $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10$ representa a circunferência de centro no ponto $C(-1, -3)$ e raio $\sqrt{10}$.

- 20.7. A equação $x^2 + (y-3)^2 = 2$ representa a circunferência de centro no ponto $C(0, 3)$ e raio $\sqrt{2}$.

- 20.8. A equação $x^2 + (y+1)^2 = -1$ representa o conjunto vazio.

- 21.1. Equação reduzida da circunferência de centro no ponto $A(2, 6)$ e raio 6:

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$$

- 21.2. Equação reduzida da circunferência de centro no ponto $B(-1, 0)$ e raio $\sqrt{5}$:

$$(x+1)^2 + y^2 = 5$$

- 21.3. Equação reduzida da circunferência de centro no ponto $C(3, -2)$ e raio $\sqrt{3}$:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 3$$



Página 36

22. $r = 2$

$$\overline{AM} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > r$$

$$\overline{BM} = \sqrt{(0+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{1+0} = 1 < r$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(-1+1)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{0+4} = 2 = r$$

Os pontos B e C pertencem ao círculo de centro M e raio 2.

23.1. A inequação que define o círculo de centro $A(3, -6)$ e raio 4 é: $(x-3)^2 + (y+6)^2 \leq 16$

23.2. A inequação que define o círculo de centro $B(-1, 2)$ e raio $\sqrt{10}$ é: $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 10$

23.3. $r = \overline{BO} = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

A inequação que define o círculo de centro $B(-1, 2)$ e que passa no ponto O é:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$$

23.4. $r = \overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ A

inequação que define o círculo de centro A e que passa no ponto em B é:

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 \leq 80$$

Página 37

1.1. Circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio 3:

$$x^2 + y^2 = 9$$

1.2. Circunferência de centro $O(0,0)$ e raio 2:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

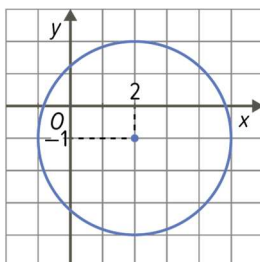
1.3. Circunferência de centro $C(-1, 1)$ e raio 3:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

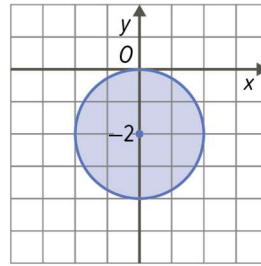
1.4. Circunferência de centro $C(2, 2)$ e raio 2:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

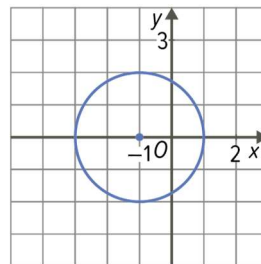
2.1.



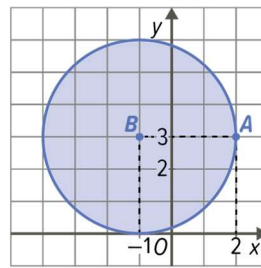
2.2.



2.3.



2.4.



Página 38

Prática

37. $\overline{AM} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = r$

$$\overline{BM} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4 \neq r$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = r$$

Os pontos A e C pertencem à circunferência de centro M e raio $\sqrt{10}$.

38. I: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 1$ Circunferência de centro $(-4, 1)$ e raio 1

II: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 1$ Circunferência de centro $(-4, 1)$ e raio 1

III: $x^2 + y^2 = 4$ Circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio 2.

IV: $x^2 + (y+4)^2 = 2$ Circunferência de centro $(0, -4)$ e raio $\sqrt{2}$



Assim sendo, a correspondência entre as circunferências representadas na figura e as equações dadas é a seguinte:

$$C_1 \rightarrow \text{III} \quad C_2 \rightarrow \text{I} \quad C_3 \rightarrow \text{IV} \quad C_4 \rightarrow \text{II}$$

39.1. Equação reduzida da circunferência de centro

$$C(2, -1) \text{ e raio } 3: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

39.2. Os pontos A e B têm abscissa 1 e pertencem à circunferência

$$(1-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 1 + (y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow y+1 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -1 - \sqrt{8} \vee y = -1 + \sqrt{8}$$

Como $y_A > 0$, então $A(1, -1 + \sqrt{8})$ e

$$B(1, -1 - \sqrt{8}).$$

$$\begin{aligned} \text{39.3. } \overline{AB} &= \sqrt{(1-1)^2 + (-1 + \sqrt{8} - (-1 - \sqrt{8}))^2} = \\ &= \sqrt{0 + (2\sqrt{8})^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{40. } y = x - 2$$

$$x = 0 \quad y = -2 \quad A(0, -2)$$

$$y = 0 \quad 0 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2 \quad B(2, 0)$$

Como A e B são os extremos de um diâmetro da circunferência, então

$$\begin{aligned} r &= \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(0-2)^2 + (-2-0)^2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{4+4}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

O centro C da circunferência é o ponto médio de

$$[AB]. \quad C\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-2+0}{2}\right), \text{ ou seja, } C(1, -1)$$

A equação reduzida dessa circunferência é:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

Página 39

41.1. O centro do círculo é o ponto médio de $[AB]$

$$C\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-6+2}{2}\right), \text{ ou seja, } C(1, -2).$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (-6-2)^2}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{16+64}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{\sqrt{16 \times 5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

A inequação que define o círculo de diâmetro

$$[AB] \text{ é: } (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 20$$

41.2. A projeção ortogonal de $A(3, -6)$ sobre o eixo

Oy é o ponto $A'(0, -6)$.

Assim, o raio do círculo é 3.

A inequação que define o círculo de centro A e

$$\text{tangente ao eixo } Oy \text{ é: } (x-3)^2 + (y+6)^2 \leq 9.$$

41.3. A projeção ortogonal de $B(-1, 2)$ sobre o eixo

Ox é o ponto $B'(-1, 0)$.

Assim, o raio do círculo é 2.

A inequação que define o círculo de centro B e

$$\text{tangente ao eixo } Ox \text{ é: } (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

41.4. A projeção ortogonal de $A(3, -6)$ sobre a reta

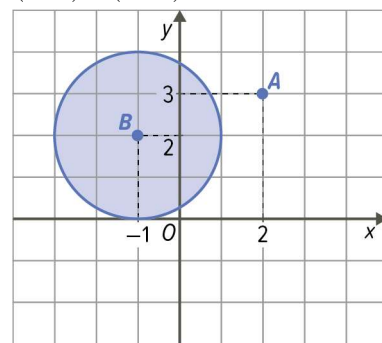
da equação $y = -2$ é o ponto $A''(3, -2)$.

Assim, o raio do círculo é 4.

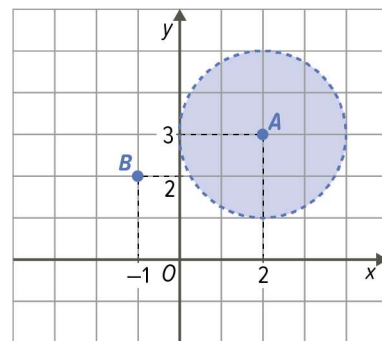
A inequação que define o círculo de centro A e tangente à reta da equação $y = -2$ é:

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 \leq 16$$

$$\text{42.1. } (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 4$$



$$\text{42.2. } (x-2)^2 + (y-3)^2 < 4$$





43. O centro da circunferência é o circuncentro do triângulo $[ABC]$, ou seja, é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.

Mediatriz de $[AB]$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4y = -8x + 4 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Mediatriz de $[AC]$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AC]$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 =$$

$$= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -12x + 16 \Leftrightarrow y = -3x + 4$$

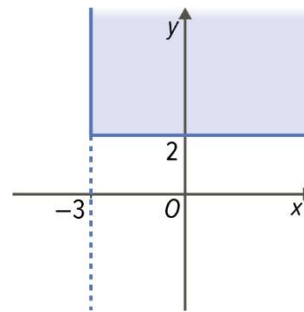
Circuncentro do triângulo

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = -3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

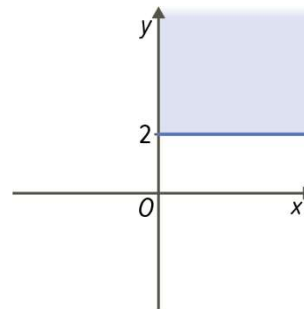
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad T(1, 1)$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

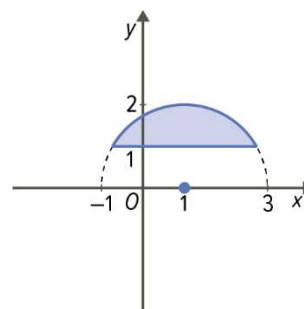
24.2. $x \geq -3 \wedge y \geq 2$



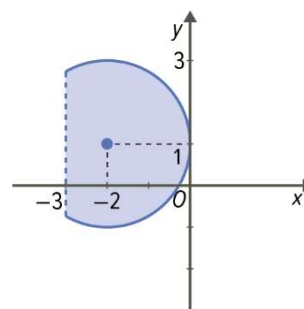
24.3. $y \geq 2 \wedge x \geq 0$



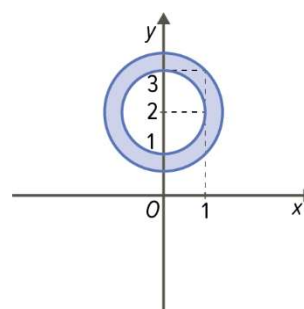
24.4. $(x-1)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 1$



24.5. $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge x > -3$

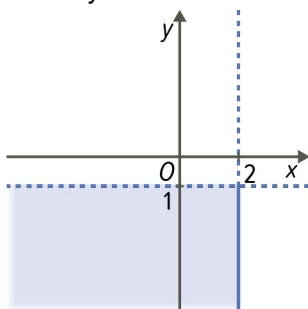


24.6. $1 \leq x^2 + (y-2)^2 \leq 2$



Página 40

24.1. $x \leq 2 \wedge y < -1$

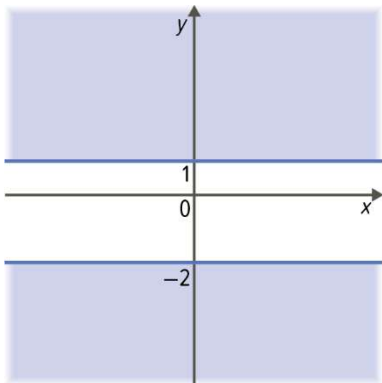




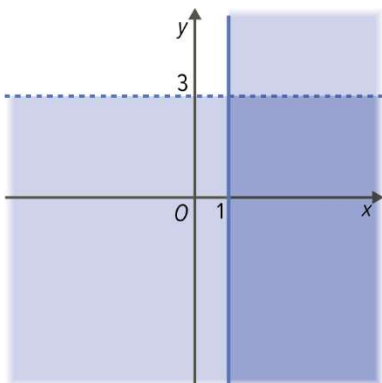
- 25.1. O conjunto de pontos representado na figura é definido por: $x \leq 1 \wedge y > 1$
- 25.2. O conjunto de pontos representado na figura é definido por: $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$
26. O retângulo $[ABCD]$ representado na figura é definido por: $x \geq -2 \wedge y \geq -1 \wedge x \leq 3 \wedge y \leq 2$ ou $-2 \leq x \leq 3 \wedge -1 \leq y \leq 2$

Página 41

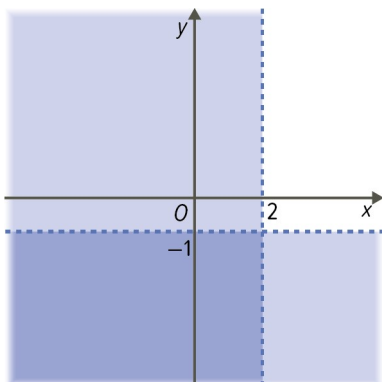
- 27.1. $y \geq 1 \vee y \leq -2$



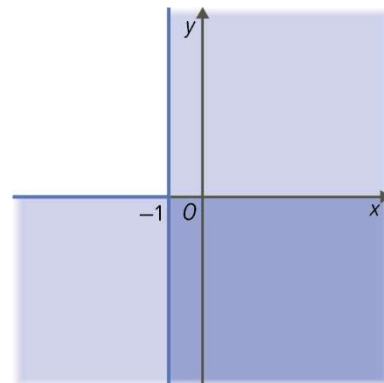
- 27.2. $y < 3 \vee x \geq 1$



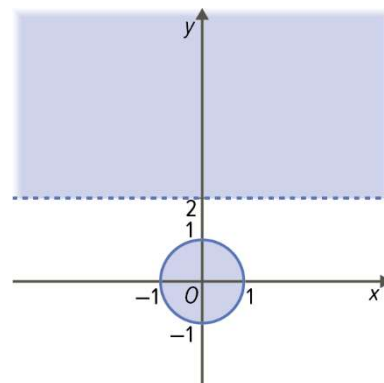
- 27.3. $x < 2 \vee y < -1$



- 27.4. $x \geq -1 \vee y \leq 0$



- 27.5. $x^2 + y^2 \leq 1 \vee y > 2$



- 28.1. O conjunto de pontos representado na figura é definido por: $y \geq x + 2 \vee y \leq 0$

- 28.2. $r = \overline{CO} = \sqrt{(-1+0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

O conjunto de pontos representado na figura é definido por: $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \vee x \geq 1$

Página 42

- 44.1. Sejam $A(-2, 0)$ e $B(0, 2)$

$AB: y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{2-0}{0-(-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$b = 2$$

$$AB: y = x + 2$$

Condição que define a região colorida: $y > x + 2$

- 44.2. $AC \rightarrow y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{2-(-1)}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + b$$



$$C(3, 2) \in AC$$

$$2 = \frac{3}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$AC: y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

Condição que define a região colorida:

$$y \leq \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \wedge y \geq -1 \wedge x \leq 3$$

44.3. $s: y = 2x$

Como $r \parallel s$ e r passa no ponto $(0, 2)$, então

$$r: y = 2x + 2$$

Condição que define a região colorida:

$$y \geq 2x + 2 \vee y < 2x$$

45.1. Por exemplo:

a) $P(-4, 1)$

b) $P(0, 3)$

c) $P(0, 0)$

d) $P\left(2, \frac{5}{2}\right)$

45.2. a) Condição que define $A \cap B$:

$$y \geq \frac{1}{2}x + 2 \wedge y < 2$$

b) Condição que define $A \cup B$:

$$y \geq \frac{1}{2}x + 2 \vee y < 2$$

Página 43

46.1. A região colorida é definida pela condição:

$$1 \leq x^2 + y^2 < 4$$

46.2. A região colorida é definida pela condição:

$$x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 1$$

46.3. A região colorida é definida pela condição:

$$x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 1)$$

47. Raio da circunferência:

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Equação da circunferência: $(x-2)^2 + (y-1)^2 < 5$

r : mediatriz do segmento de reta $[AC]$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de mediatriz

de $[AC]$.

$$\overline{PA} = \overline{PC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2y = -4x + 1 \Leftrightarrow y = 2x - \frac{1}{2}$$

Condição que define a região colorida da figura:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 < 5 \wedge y \geq 2x - \frac{1}{2}$$

48.1. $y > x + 2$

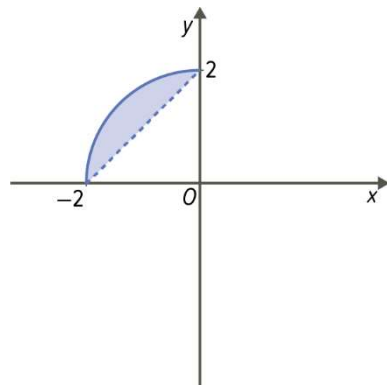
Semi-plano superior aberto definido pela reta

$$y = x + 2.$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Círculo de centro $O(0,0)$ de raio 2.

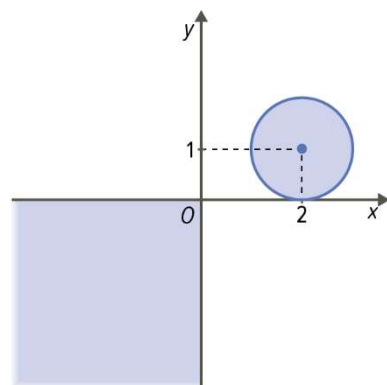
$$y > x + 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$$



48.2. $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4$ Círculo de centro

$C(2, 1)$ e raio 1.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \vee (x \leq 0 \wedge y < 0)$$

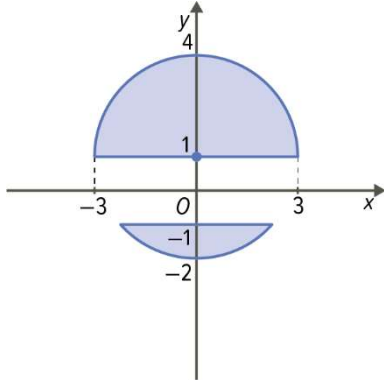




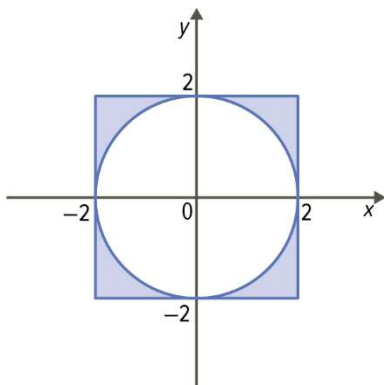
- 49.1. $x^2 + (y-1)^2 \leq 9$ Círculo de centro $C(0, 1)$ e raio 3

$$|y| \geq 1 \wedge x^2 + (y-1)^2 \leq 9$$

$$|y| \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 1 \vee y \leq -1$$



- 49.2. $(|x| \leq 2 \wedge |y| \leq 2) \wedge x^2 + y^2 \geq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2) \wedge x^2 + y^2 \geq 4$



Página 44

1. Por exemplo:
- 1.1. $a = 2$ e $b = -1$
- 1.2. $a = -1$ e $b = 3$
- 1.3. $a = -1$ e $b = -5$
- 1.4. $a = -2$ e $b = -3$
2. $A(9-k^2, 4)$ e $B(1-2k, k-3)$, $k \in \mathbb{R}$
- 2.1. $A \in Oy$
 $x = 0 \Leftrightarrow 9 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 3$
- 2.2. $B \in 2.^\circ Q$
 $x < 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow 1 - 2k < 0 \wedge k - 3 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k > \frac{1}{2} \wedge k > 3 \Leftrightarrow k > 3$
 $k \in]3, +\infty[$

3. $P(a^2 - 10, 3 - a)$, $a \in \mathbb{R}$

$$P \in 3.^\circ Q$$

$$a^2 - 10 < 0 \wedge 3 - a < 0 \Leftrightarrow a^2 < 10 \wedge a > 3$$

Por exemplo, $a = \pi$

- 4.1. O transformado do ponto $A(-3, 0)$ por uma meia-volta de centro O é o ponto de coordenadas $(3, 0)$.
- 4.2. O transformado do ponto $B(2, -1)$ por uma reflexão de eixo Ox é o ponto de coordenadas $(2, 1)$
- 4.3. O transformado do ponto $B(2, -1)$ por uma reflexão de eixo Oy é o ponto de coordenadas $(-2, -1)$.
- 5.1. As coordenadas do transformado de $A(-1, -1)$ pela reflexão de eixo Ox são $(-1, 1)$
- 5.2. As coordenadas do transformado de $P(-2, 3)$ pela reflexão de eixo AB são $(-2, -5)$
- 5.3. As coordenadas do transformado de $B(4, -1)$ pela reflexão de eixo Oy são $(-4, -1)$
- 5.4. As coordenadas do transformado de $P(-2, 3)$ pela meia-volta de centro O são $(2, -3)$.
6. $C(4, -1)$ é o transformado do ponto B por uma reflexão de eixo $x = 1$, logo as coordenadas de B são $B(-2, -1)$.

Como B é o transformado do ponto A por uma meia-volta de centro O , então $A(2, 1)$.

- 7.1. a) $A(-3, 2)$ e $B(-3, -1)$, então
 $\overline{AB} = |2 - (-1)| = 3$
- b) $A(-3, 2)$ e $D(1, 2)$, então $\overline{AD} = |-3 - 1| = 4$
- 7.2. $B(-3, -1)$ e $D(1, 2)$
 $\overline{BD} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
 $P_{[ABD]} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} = 3 + 5 + 4 = 12$
 12 u.c.



7.3. $B(-3, -1) \quad C(2, -2) \quad D(1, 2)$
 $\overline{BC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$$\overline{CD} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17};$$

Como $\overline{BD} = 5$, conclui-se que o triângulo $[BCD]$ é escaleno.

8.1. $\overline{AB} = \sqrt{(-3-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$
 $\overline{AC} = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
 $\overline{BC} = \sqrt{(-5-0)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

Lado menor: $[AC]$ Lado maior: $[AB]$

8.2. a) M : ponto médio de $[AC]$

$$M\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

b) T : ponto médio de $[AB]$

$$T\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ ou seja, } T(1, 2)$$

$$\overline{MT} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+1} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

8.3. $P \in Ox$, logo $P(x, 0)$

$$\begin{aligned} \overline{BP} = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{(5-x)^2 + (3-0)^2} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(5-x)^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow (5-x)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (5-x)^2 = 16 \Leftrightarrow 5-x = 4 \vee 5-x = -4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 9 \end{aligned}$$

Então, $P(1, 0)$ ou $P(9, 0)$.

Página 45

9. Seja $D(d_1, d_2)$

Como P é o ponto médio de $[BD]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{6+d_1}{2}, \frac{2+d_2}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{6+d_1}{2} &= \frac{7}{2} \wedge \frac{2+d_2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d_1 &= 1 \wedge d_2 = -1 \qquad D(1, -1) \end{aligned}$$

Seja $C(c_1, c_2)$, como M é o ponto médio de $[CD]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_1+1}{2}, \frac{c_2-1}{2}\right) &= (4, 2) \Leftrightarrow \frac{c_1+1}{2} = 4 \wedge \frac{c_2-1}{2} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c_1 &= 7 \wedge c_2 = 5 \qquad C(7, 5) \end{aligned}$$

Seja $A(a_1, a_2)$. Como P é o ponto médio de $[AC]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1+7}{2}, \frac{a_2+5}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{a_1+7}{2} = \frac{7}{2} \wedge \frac{a_2+5}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 &= 0 \wedge a_2 = -4 \qquad A(0, -4) \end{aligned}$$

Conclusão: $A(0, -4)$, $B(6, 2)$, $C(7, 5)$ e $D(1, -1)$.

10.1. a) $A(-2, 4)$

Equação da reta paralela a Ox que passa em A : $y = 4$

b) $E(5, 2)$

Equação da reta paralela a Ox que passa em E : $y = 2$

10.2. $C(0, 3)$ e $D(2, -3)$

CD : $y = -3$

10.3. a) $B(-3, 0)$

Equação da reta paralela a Oy que passa em B : $x = -3$

b) $E(5, 2)$

Equação da reta paralela a Oy que passa em E : $x = 5$

10.4. Equação da reta perpendicular a CD e que passa em $A(-2, 4)$: $x = -2$

11.1. $A(-4, 3)$, $B(-4, -2)$ e $C(2, -2)$

11.2. a) EF : $y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{-2-1}{0-(-4)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} \text{ e } b = -2$$

$$EF: y = -\frac{3}{4}x - 2$$

b) DF : $y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{-2-3}{0-2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \text{ e } b = -2$$

$$DF: y = \frac{5}{2}x - 2$$



c) $DE: y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{1-3}{-4-2} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

Como $D(2, 3)$ pertence à reta DE , tem-se:

$$3 = \frac{1}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = \frac{2}{3} + b \Leftrightarrow \frac{7}{3} = b$$

$$DE: y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

11.3. M é o ponto médio de $[DE]$

$$M\left(\frac{2-4}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ ou seja, } M(-1, 2)$$

$FM: y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{2-(-2)}{-1-0} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$b = -2$$

$$FM: y = -4x - 2$$

$$AD: y = 3$$

$$y = -4x - 2 \wedge y = 3 \Leftrightarrow 3 = -4x - 2 \wedge y = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = -5 \wedge y = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \wedge y = 3$$

$$H\left(-\frac{5}{4}, 3\right)$$

12. $B(b_1, b_2)$

Como M é o ponto médio de $[AB]$, tem-se:

$$\left(\frac{-2+b_1}{2}, \frac{1+b_2}{2}\right) = (2, 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2+b_1}{2} = 2 \wedge \frac{1+b_2}{2} = 1 \Leftrightarrow b_1 = 6 \wedge b_2 = 1$$

$$B(6, 1)$$

G : baricentro do triângulo $[ABC]$

$$G\left(\frac{-2+6-1}{3}, \frac{1+1+4}{3}\right), \text{ ou seja, } G(1, 2)$$

Página 46

13.1. $B(x, 6)$

Como B pertence à reta OB , tem-se:

$$6 = 2x \Leftrightarrow x = 3 \quad B(3, 6)$$

$$AC: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$c \in Oy$ logo $C(0, 5)$

Seja $A(a_1, a_2)$. Como M é o ponto médio de

$[AC]$, tem-se:

$$\left(\frac{a_1+0}{2}, \frac{a_2+5}{2}\right) = (2, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1+0}{2} = 2 \\ \frac{a_2+5}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

$A(4, 3)$ e $B(3, 6)$

13.2. $\overline{OA} = \overline{OC} = 5$

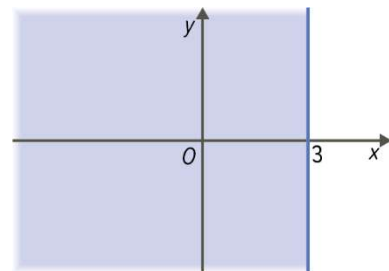
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (6-5)^2} =$$

$$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

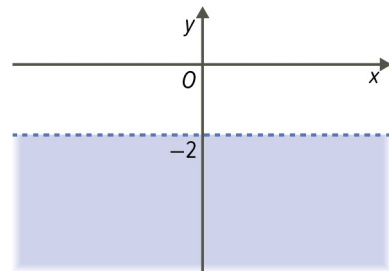
$$P_{[OABC]} = 2\overline{OA} + 2\overline{AB} = 2 \times 5 + 2 \times \sqrt{10} =$$

$$= 10 + 2\sqrt{10}$$

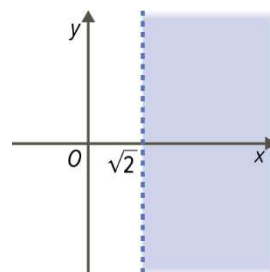
14.1. $x \leq 3$



14.2. $y < -2$



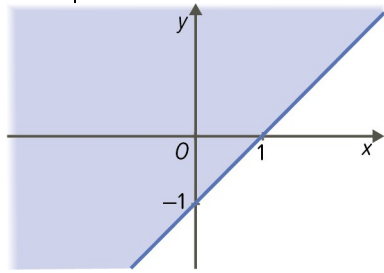
14.3. $x > \sqrt{2}$





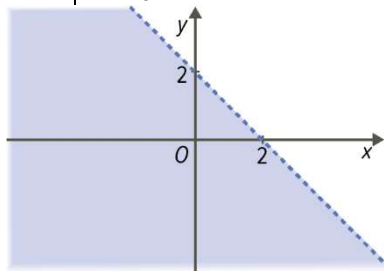
14.4. $y \geq x - 1$

x	$y = x - 1$
0	-1
1	0



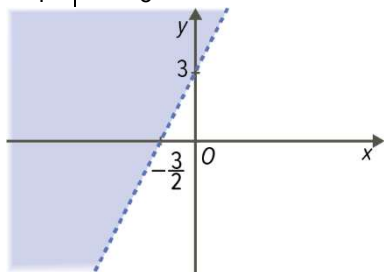
14.5. $y < -x + 2$

x	$y = -x + 2$
0	2
2	0



14.6. $y - 2x > 3 \Leftrightarrow y > 2x + 3$

x	$y = 2x + 3$
0	3
1	5



15.1. Sejam $A(-2, 3)$ e $B(0, -1)$

$AB: y = mx + b$, sendo

$$m = \frac{-1 - 3}{0 - (-2)} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$b = -1$$

$$AB: y = -2x - 1$$

A inequação que define a região sombreada na figura é $y < -2x - 1$.

15.2. $A\left(k + 3, \frac{k}{2}\right), k \in \mathbb{R}$

O ponto A pertence à região sombreada se:

$$\frac{k}{2} < -2(k + 3) - 1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} < -2k - 6 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k < -4k - 14 \Leftrightarrow k < -\frac{14}{5}$$

$$k \in \left] -\infty, -\frac{14}{5} \right[$$

16.1. $c \in r$ e $\overline{CA} = \overline{CB}$. O triângulo $[ABC]$ é isósceles.

16.2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r (mediatriz de $[AB]$).

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6y = -12x + 15 \Leftrightarrow y = 2x - \frac{5}{2}$$

Equação da reta r : $y = 2x - \frac{5}{2}$

16.3. Opção (B)

Se $x = -\frac{1}{2}$, então $y = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{7}{2}$.

17.1. $\overline{CA} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\overline{CB} = \sqrt{(3-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

C está mais próximo de A , porque $\overline{CA} < \overline{CB}$.

17.2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AB]$.

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = -8x + 24 \Leftrightarrow y = -2x + 6$$

Equação da mediatriz de $[AB]$: $y = -2x + 6$

$$C(3, -1)$$

$-1 < -2 \times 3 + 6$ é verdadeiro, logo C pertence ao

semiplano inferior definido pela mediatriz de $[AB]$.

Assim, o semiplano fechado determinado pela mediatriz de $[AB]$, ao qual C pertence, é

definido por $y < -2x + 6$.



18. C é o circuncentro do triângulo $[OAB]$, ou seja, o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo $[OAB]$.

$$O(0, 0) \quad A(-2, 1) \quad B(4, 0)$$

Mediatriz de $[OB]$

$$x = 2$$

Mediatriz de $[OA]$

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer pertence à mediatriz de $[OA]$.

$$\overline{PO} = \overline{PA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4x + 5 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$$

Ponto C

C é o ponto de interseção das retas de equação

$$x = 2 \text{ e } y = 2x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \times 2 + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$C\left(2, \frac{13}{2}\right)$$

Página 47

19. Circunferência c_1

Centro $(5, 3)$ e raio 2

$$c_1: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Circunferência c_2

Centro $(-2, 1)$ e raio 1

$$c_2: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

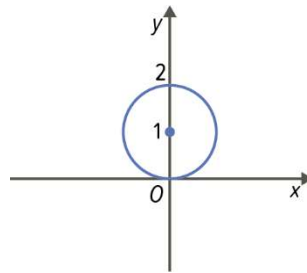
Circunferência c_3

Centro $(2, -2)$ e passa no ponto $O(0, 0)$

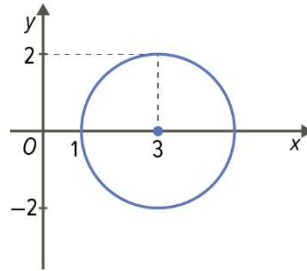
$$r = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$c_3: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

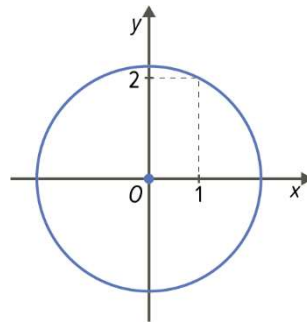
20.1. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ Centro: $(0, 1)$ e raio 1



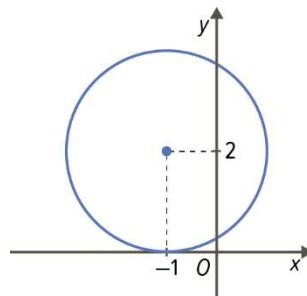
20.2. $(x-3)^2 + y^2 = 4$ Centro: $(3, 0)$ e raio 2



20.3. $x^2 + y^2 = 5$ Centro: $(0, 0)$ e raio $\sqrt{5}$



20.4. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ Centro: $(-1, 2)$ e raio 2



21.1. $r: y = -2x + 6$

$$A \in Ox, \text{ logo } A(x, 0)$$

$$\text{Como } A \in r, \text{ tem-se: } 0 = -2x + 6 \Leftrightarrow x = 3$$

$$A(3, 0)$$

$$B \in Oy \text{ e } B \in r, \text{ logo } B(0, 6)$$

$[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

Sabe-se que o centro da circunferência é o

ponto médio de $[AB]$ e o raio é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$.



Então, $C\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, ou seja, $C\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(3-0)^2 + (0-6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{9+36}}{2} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

Equação reduzida da circunferência:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{45}{4}$$

21.2. $O(0, 0)$

$$\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - 3)^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$$

Verdadeiro, logo o ponto O pertence à circunferência.

22.1. A inequação que define o círculo de centro

$$O(0, 0) \text{ e raio } 3 \text{ é: } x^2 + y^2 \leq 9$$

22.2. A inequação que define o círculo de centro

$$A(1, 3) \text{ e raio } 2 \text{ é: } (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 4$$

22.3. A inequação que define o círculo de centro

$$B(-2, -1) \text{ e raio } \sqrt{7} \text{ é: } (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 7$$

23.1. Círculo de diâmetro $[AB]$, sendo $A(-4, 3)$ e

$$B(2, -1)$$

O centro do círculo é o ponto médio de $[AB]$.

$$C\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{ ou seja, } C(-1, 1)$$

r : raio do círculo

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-4-2)^2 + (3+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+16}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 13}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

A inequação que define o círculo de diâmetro

$$[AB] \text{ é: } (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 13$$

23.2. Por exemplo:

a) $P(1, 2)$

b) $P(-2, 3)$

c) $P(-1, -1)$

d) $P(1, -1)$

24.1. $r: y = \frac{x}{2} + 2$

Seja C o centro desse circunferência.

Como $C \in r$, então $C\left(x, \frac{x}{2} + 2\right)$.

$$C \in 1.^\circ Q, \text{ logo } x > 0 \wedge \frac{x}{2} + 2 > 0$$

$$x > 0 \wedge \frac{x}{2} + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > -4 \Leftrightarrow x > 0$$

Então, $C\left(x, \frac{x}{2} + 2\right)$ sendo $x > 0$

Seja C_1 a projeção ortogonal de C sobre o eixo

Ox e C_2 a projeção ortogonal de C sobre o eixo

Oy .

Ora, $C_1(x, 0)$ e $C_2\left(0, \frac{x}{2} + 2\right)$

Como a circunferência é tangente a Ox e a Oy ,

$$r = \overline{CC_1} = \frac{x}{2} + 2 \text{ e } r = \overline{CC_2} = x.$$

$$\text{Então, têm-se: } \frac{x}{2} + 2 = x \Leftrightarrow x + 4 = 2x \Leftrightarrow x = 4$$

$$C(4, 4) \text{ e } r = 4$$

24.2. $r: y = \frac{x}{2} + 2$

Seja C' o centro desse círculo.

Como $C' \in r$, então $C'\left(x, \frac{x}{2} + 2\right)$.

$$C' \in 2.^\circ Q, \text{ logo } x < 0 \wedge \frac{x}{2} + 2 > 0.$$

$$x < 0 \wedge \frac{x}{2} + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x > -4 \Leftrightarrow x \in]-4, 0[$$

Assim sendo, $C'\left(x, \frac{x}{2} + 2\right)$, $-4 < x < 0$.

Seja C_3 a projeção ortogonal de C sobre o eixo

Ox e C_4 a projeção ortogonal de C sobre o eixo

Oy .

Ora, $C_3(x, 0)$ e $C_4\left(0, \frac{x}{2} + 2\right)$

Como o círculo é tangente a Ox e a Oy , sabe-se

$$\text{que: } r = \overline{C'C_3} = \left|\frac{x}{2} + 2\right|_{-4 < x < 0} = \frac{x}{2} + 2 \text{ e}$$

$$r = \overline{CC_4} = |x|_{-4 < x < 0} = -x$$

Então, tem-se:

$$\frac{x}{2} + 2 = -x \Leftrightarrow x + 4 = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$C'\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ e } r = \frac{4}{3}$$



Página 48

25.1. A região colorida, incluindo a fronteira, é definida pela condição $y \leq x - 3 \wedge y \geq 0$.

25.2. Os pontos A, B, C, D e E têm todos ordenada positiva. Então, para sabermos se pertencem à região colorida, temos de verificar se satisfazem a condição $y \leq x - 3$.

$$A(2, 3): 3 \leq 2 - 3 \quad \text{Falso}$$

$$B(4, 5): 5 \leq 4 - 3 \quad \text{Falso}$$

$$C(5, 3): 3 \leq 5 - 3 \quad \text{Falso}$$

$$D(7, 3): 3 \leq 7 - 3 \quad \text{Verdadeiro}$$

$$E(3, 7): 7 \leq 3 - 3 \quad \text{Falso}$$

Dos pontos dados, o único que pertence à região colorida é o ponto D .

25.3. a) $P(6, k+2)$, $k \in \mathbb{R}$ pertence à região

colorida se:

$$k+2 \leq 6-3 \wedge k+2 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 1 \wedge k \geq -2$$

$$k \in [-2, 1]$$

b) $P(1-k, -k)$, $k \in \mathbb{R}$ pertence à região

colorida se:

$$-k \leq 1-k-3 \wedge -k \geq 0 \Leftrightarrow 0k \leq -2 \wedge k \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k \in \{ \} \wedge k \in]-\infty, 0]$$

$$k \in \{ \}$$

Não existe nenhum valor de k para o qual o ponto P pertença à região colorida.

26.1. Por exemplo:

a) $P(5, 3)$

b) $P(2, -1)$

c) $P(1, 4)$

26.2. a) Condição que define o conjunto $A \cap B$:

$$y \leq x - 2 \wedge y \geq 2$$

b) Condição que define o conjunto $A \cup B$:

$$y \leq x - 2 \vee y \geq 2$$

27. $y = -\frac{2}{3}x + 2$

$$A, B \in r \quad A \in Ox \quad B \in Oy$$

$$x = 0 \quad y = 2 \quad B(0, 2)$$

$$y = 0 \quad 0 = -\frac{2}{3}x + 2 \quad A(3, 0)$$

Como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, C

é o ponto médio de $[AB]$ e $r = \frac{\overline{AB}}{2}$, então

$$C\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right), \text{ ou seja, } C\left(\frac{3}{2}, 1\right).$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(3-0)^2 + (0-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{9+4}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Equação da circunferência de diâmetro $[AB]$:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{13}{4}$$

A região colorida da figura é definida pela condição:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 \leq \frac{13}{4} \wedge y \geq -\frac{2}{3}x + 2$$

28.1. Como a circunferência de centro C é definida

pela equação $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$, então

$$C(-2, 1)$$

A circunferência de centro O passa pelo ponto

C , logo o seu raio é dado por \overline{CO} .

$$r = \overline{CO} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Equação reduzida da circunferência de centro

$$O: x^2 + y^2 = 5$$

28.2. A região colorida da figura, incluindo a fronteira, é definida pela condição:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 13 \wedge x^2 + y^2 \leq 5$$

29. Equação da circunferência:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10.$$

$B(x, 0)$, $x > 0$ pois B pertence ao semieixo

positivo das abcissas. Como B pertence à circunferência, tem-se:

$$(x-1)^2 + (0+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 3 \vee x-1 = -3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

Logo $B(4, 0)$.

A e C são pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy , sendo $y_A < y_C$.

$Oy: x = 0$



$$(0-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+1 = 3 \vee y+1 = -3 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -4$$

Então, $A(0, -4)$ e $C(0, 2)$.

Equação da reta BC

$$y = mx + b, \text{ sendo } m = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2} \text{ e } b = -2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Equação da reta AB

$$y = mx + b, \text{ sendo } m = \frac{0-(-4)}{4-0} = 1 \text{ e } b = -4$$

$$y = x - 4$$

A região colorida da figura é definida pela condição:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 10 \wedge \left(y \geq -\frac{1}{2}x + 2 \vee y \leq x - 4 \right)$$

Página 49

30.1. $(6, 1)$

30.2. a) O retângulo $[OABC]$ é definido pela condição: $0 \leq x \leq 15 \wedge 0 \leq y \leq 10$

b) O retângulo branco é definido pela condição: $5 \leq x \leq 10 \wedge 0 \leq y \leq 10$

c) O retângulo vermelho é definido pela condição: $10 \leq x \leq 15 \wedge 0 \leq y \leq 10$

31.1. $r = \frac{3}{10} \overline{AB} = \frac{3}{10} \times 20 = 6$

31.2. O centro do círculo vermelho é o ponto de interseção das diagonais do retângulo, ou seja, o ponto de coordenadas $(15, 10)$.

O raio do círculo vermelho é 6.

Assim, o círculo vermelho é representado pela condição $(x-15)^2 + (y-10)^2 \leq 36$

32.1. Condição que define a região branca:

$$2 \leq (x+1)^2 + y^2 \leq 8$$

A região branca é uma coroa circular de centro $C(-1, 0)$ e raios $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$.

O círculo vermelho tem centro $C(-1, 0)$ e raio $\sqrt{2}$.

Condição que define o círculo vermelho:

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 2$$

$$P\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\overline{PC} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como $\overline{PC} \leq \sqrt{2}$, conclui-se que o ponto P de

coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ pertence ao círculo

vermelho.

32.2. A região do plano não pertence à representação das é definida pela condição: $(x+1)^2 + y^2 > 8$

Página 50

1.1. a) Se P é o simétrico de $A(-2, -1)$ em relação a Ox , então $P(-2, 1)$.

Opção **(A)**

b) Se P é o transformado de $B(4, -2)$ por uma meia-volta de centro O , então $P(-4, 2)$

Opção **(B)**.

c) Se P é o ponto médio de $[AC]$, então

$$P\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right), \text{ ou seja, } P(-1, 1).$$

Opção **(D)**

1.2. A reta paralela a Ox que contém o ponto $B(4, -2)$ é definida pela equação $y = -2$.

Opção **(B)**

2. $A = \{(x, y) : x < 2\}$ e $B = \{(x, y) : y \geq -3\}$, então $A \cap B = \{(x, y) : x < 2 \wedge y \geq -3\}$.

Os pontos de coordenadas $(2, -3)$ e $(3, -1)$

não pertencem a $A \cap B$ pois não têm abscissa inferior a 2.

O ponto de coordenadas $(1, -5)$ não pertence a $A \cap B$ porque a sua ordenada é inferior a -3 .

O ponto que pertence a $A \cap B$ é $(-4, 5)$

Opção **(C)**

3. A região colorida da figura é definida pela condição $y < -x + 3 \wedge y \geq 0$.

Dos pontos dados, só o ponto de coordenadas $(-1, 3)$ pertence à região colorida pois

$3 < -(-1) + 3 \wedge 3 \geq 0$ é verdadeira.

Opção **(C)**



4. Equação da mediatriz de $[AB]$: $y = -\frac{x}{2} + 3$
- Se $x = 2$, então $y = -\frac{2}{2} + 3$, ou seja, $y = 2$.
 - Se $x = -4$, então $y = -\frac{-4}{2} + 3$, ou seja, $y = 5$.
 - Se $x = -6$, então $y = -\frac{-6}{2} + 3$, ou seja, $y = 6$.

Opção (A)

5. Equação da circunferência: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$

Centro: $C(-2, 2)$ Raio: $r = \sqrt{2}$

Opção (B)

Página 51

1. O semiplano representado na figura é definido pela condição $y \leq -1$.

Assim sendo, o ponto $P\left(-3, 2 - \frac{k}{3}\right)$ pertence a

esse plano se: $2 - \frac{k}{3} \leq -1 \Leftrightarrow 6 - k \leq -3 \Leftrightarrow k \geq 9$

$k \in [9, +\infty[$

2. $\overline{AC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{34})^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AB}, \text{ porque } [ABCD] \text{ é um quadrado.} \\ \Leftrightarrow 34 &= 2\overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 17 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

A medida do lado do quadrado $[ABCD]$ é $\sqrt{17}$ u.c.

- 3.1. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mediatriz de $[AC]$, então $\overline{PA} = \overline{PC}$.

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{PC} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 &= \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -10y + 6y &= -2x - 2x + 9 - 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y &= -4x - 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= x + 4 \\ r: y &= x + 4 \end{aligned}$$

- 3.2. $r = \overline{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Equação reduzida da circunferência:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$$

4. Etapa I:

- Circunferência menor: centro $O(0, 0)$ e raio $\overline{OA} = 2$.

Equação da circunferência menor:

$$x^2 + y^2 = 4$$

- Circunferência maior: centro $O(0, 0)$ e

raio $\overline{OB} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}$

Equação da circunferência menor:

$$x^2 + y^2 = 8$$

Etapa II: $OB: y = mx + b$

$m = \frac{2-0}{2-0} = 1$ e $b = 0$ (a reta passa na origem do referencial)

$OB: y = x$

Etapa III:

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 8 \wedge y \leq x \wedge x \geq 0$$

Página 52

1. $A'(2, 2)$, $B'(2, 7)$ e $C'(5, 4)$

2.1. $A(2, 2, 3)$

2.2. $B(2, 7, 3)$

2.3. $C(5, 4, 3)$

2.4. $A'(2, 2, 0)$

2.5. $B'(2, 7, 0)$

2.6. $C'(5, 4, 0)$

2.7. $D(5; 4; 2, 2)$, pois

$$\overline{C'D} = \overline{C'C} - \overline{CD} = 3 - 0,8 = 2,2$$

Página 53

29.1. a) Os pontos A e C têm a mesma abscissa.

b) Os pontos C e D têm a mesma ordenada.

c) Os pontos A e B têm a mesma cota.

29.2. $A(3, 0, 3)$, $B(2, 2, 3)$, $C(3, 3, 2)$ e $D(1, 3, 1)$



Página 54

4. Situação I

As coordenadas dos vértices do cubo são:

$$(0, 0, 0), (6, 0, 0), (6, 6, 0), (0, 6, 0), \\ (0, 0, 6), (6, 0, 6), (6, 6, 6) \text{ e } (0, 6, 6)$$

Situação II

As coordenadas dos vértices do cubo são:

$$(3, -3, 0), (3, 3, 0), (-3, 3, 0), (-3, -3, 0), \\ (3, -3, 6), (3, 3, 6), (-3, 3, 6) \text{ e } (-3, -3, 6)$$

Situação III

As coordenadas dos vértices do cubo são:

$$(3, -3, -3), (3, 3, -3), (-3, 3, -3), \\ (-3, -3, -3), (3, -3, 3), (3, 3, 3), (-3, 3, 3) \\ \text{ e } (-3, -3, 3)$$

Página 55

30.1. O ponto D pertence ao eixo Ox pois $y_D = 0$ e $z_D = 0$.

30.2. O ponto A pertence ao plano xOy pois $z_A = 0$.

30.3. O ponto G pertence ao eixo Oy pois $x_G = 0$ e $z_G = 0$.

30.4. O ponto B pertence ao plano xOz pois $y_B = 0$.

30.5. O ponto F pertence ao plano yOz pois $x_F = 0$.

30.6. O ponto C pertence ao eixo Oz pois $x_C = 0$ e $y_C = 0$.

31.1. $P(0, k-1, k+2), k \in \mathbb{R}$

$$P \in Oz \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=0 \wedge k-1=0 \Leftrightarrow k=1$$

$$P(0, 0, 3)$$

31.2. $P(0, k-1, k+2), k \in \mathbb{R}$

$$P \in Oy \Leftrightarrow x=0 \wedge z=0$$

$$\Leftrightarrow 0=0 \wedge k+2=0 \Leftrightarrow k=-2$$

$$P(0, -3, 0)$$

32.1. $P(3, 2+k, k^2-4), k \in \mathbb{R}$

$$P \in Ox \Leftrightarrow y=0 \wedge z=0$$

$$\Leftrightarrow 2+k=0 \wedge k^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-2 \wedge k^2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-2 \wedge (k=2 \vee k=-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-2$$

32.2. $P(3, 2+k, k^2-4), k \in \mathbb{R}$

$$P \in xOy \Leftrightarrow z=0 \Leftrightarrow k^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=2 \vee k=-2$$

Página 56

33.1. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(-3, 2, 1)$ sobre o eixo Oy são $(0, 2, 0)$.

33.2. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $B(1, 5, -2)$ sobre o eixo xOy são $(1, 5, 0)$.

33.3. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $C(4, 0, 0)$ sobre o eixo Ox são $(4, 0, 0)$

33.4. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $B(1, 5, -2)$ sobre o eixo yOz são $(0, 5, -2)$.

33.5. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(-3, 2, 1)$ sobre o eixo Oz são $(0, 0, 1)$

33.6. As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $B(1, 5, -2)$ sobre o plano xOz são $(1, 0, -2)$.

34.1. P_1 : projeção ortogonal de $P(-2, 3, 4)$ sobre o plano xOy .

As coordenadas do ponto P_1 são $(-2, 3, 0)$.

34.2. P_2 : projeção ortogonal de $P(-2, 3, 4)$ sobre o plano yOz .

As coordenadas do ponto P_2 são $(0, 3, 4)$.

34.3. P_3 : projeção ortogonal de $P(-2, 3, 4)$ sobre o plano xOz .

As coordenadas do ponto P_3 são $(-2, 0, 4)$.

Página 57

1.1. $A(0, 0, 8), B(6, 0, 8), C(6, 4, 8), D(0, 4, 8),$
 $E(0, 4, 0), F(6, 0, 0), G(6, 4, 0)$ e $O(0, 0, 0)$.

1.2. $A(6, 0, 0), B(6, 4, 0), C(0, 4, 0),$
 $D(0, 4, -8), E(0, 0, -8), F(6, 0, -8),$
 $G(6, 4, -2)$ e $O(0, 0, 0)$.



- 1.3.** $A(0, 4, 0)$, $B(-6, 4, 0)$, $C(-6, 0, 0)$,
 $D(-6, 0, 8)$, $E(0, 0, 8)$, $F(0, 4, 8)$,
 $G(-6, 4, 8)$ e $O(0, 0, 0)$.
- 1.4.** $A(0, -4, 0)$, $B(6, -4, 0)$, $C(6, 0, 0)$,
 $D(6, 0, 8)$, $E(0, 0, 8)$, $F(0, -4, 8)$,
 $G(6, -4, 8)$ e $O(0, 0, 0)$.
- 1.5.** $A(-6, 0, 0)$, $B(-6, -4, 0)$, $C(0, -4, 0)$,
 $D(0, -4, -8)$, $E(0, 0, -8)$, $F(-6, 0, -8)$,
 $G(-6, -4, -8)$ e $O(0, 0, 0)$.
- 1.6.** $A(-6, 0, 0)$, $B(-6, -4, 0)$, $C(0, -4, 0)$,
 $D(0, -4, 8)$, $E(0, 0, -8)$, $F(-6, 0, 8)$,
 $G(-6, -4, -8)$ e $O(0, 0, 0)$.
- 2.1.** O ponto $P(4, 0, 3)$ pertence à aresta $[AF]$.
- 2.2.** O ponto $P(4, 5, 6)$ pertence à aresta $[FG]$.
- 2.3.** O ponto $P(1, 8, 6)$ pertence à aresta $[DG]$.
- 2.4.** O ponto $P(0, 1, 6)$ pertence à aresta $[DE]$.
- 2.5.** O ponto $P(0, 4, 0)$ pertence à aresta $[OC]$.
- 2.6.** O ponto $P(2, 8, 0)$ pertence à aresta $[BC]$.

Página 58

- 35.1.** O ponto $A(-3, 2, -1)$ pertence ao 6.º octante porque tem abcissa negativa, ordenada positiva e cota negativa.
 O ponto $B(2, -1, 4)$ pertence ao 4.º octante porque tem abcissa positiva, ordenada negativa e cota positiva.
 O ponto $C(-1, -2, 3)$ pertence ao 3.º octante porque tem abcissa negativa, ordenada negativa e cota positiva.
 O ponto $D(5, 1, -3)$ pertence ao 5.º octante porque tem abcissa positiva, ordenada positiva e cota negativa.
 O ponto $E(4, -2, -1)$ pertence ao 8.º octante porque tem abcissa positiva, ordenada negativa e cota negativa.

O ponto $F(-7, 2, -2)$ pertence ao 6.º octante porque tem abcissa negativa, ordenada positiva e cota negativa.

35.2. Por exemplo:

a) $P(1, 2, 3)$ e $T(-4, -1, -2)$

Ora, $z_P + z_T = 3 + (-2) = 1 > 0$

b) $P(1, 2, 3)$ e $T(-5, -2, -1)$

Ora, $y_P + y_T = 2 + (-2) = 0$

c) $P(1, 2, 3)$ e $T(-1, -6, -1)$

Ora, $|y_P| = |1| = 1$ e $|y_T| = |-1| = 1$

36. $P(-3, k-1, 4-k)$, $k \in \mathbb{R}$

36.1. a) Se $k = 3$, então $P(-3, 2, 1)$.

Assim sendo, o ponto P pertence ao 2.º octante.

b) Se $k = -2$, então $P(-3, -3, 6)$

Assim sendo, o ponto P pertence ao 3.º octante.

c) Se $k = -1$, então $P(-3, -2, 5)$

Assim sendo, o ponto P pertence ao 3.º octante.

d) Se $k = -6$, então $P(-3, -7, 10)$

Assim sendo, o ponto P pertence ao 3.º octante.

36.2. $D \in 2.º \text{ octante} \Leftrightarrow x < 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$

$\Leftrightarrow -3 < 0 \wedge k-1 > 0 \wedge 4-k > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k > 1 \wedge k < 4$

$k \in]1, 4[$

Página 59

1.1. Situação I

a) $R(18, 18, 0)$, $S(14, 18, 18)$ e

$T(0, 32, 18)$

b) As coordenadas da projeção ortogonal de

$S(14, 18, 18)$ sobre o plano yOz são

$(0, 18, 18)$.

1.2. Situação II

a) $F(14, 14, 0)$, $G(0, -18, 0)$ e

$H(18, -18, 22)$



- b) O ponto H pertence ao 4.º octante porque tem abcissa positiva, ordenada negativa e cota positiva.

1.3. Situação III

- a) $M(0, 0, -18)$, $P(-14, 0, 4)$ e $Q(4, -18, 4)$
- b) As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P(-14, 0, 4)$ sobre o eixo Ox são $(-14, 0, 0)$.

- 2.1. $A(x, 0, 0)$ porque A pertence ao eixo Ox .

$\overline{AB} = 16$ e o triângulo $[AOB]$ é retângulo em O .

Assim:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 \Leftrightarrow \overline{BO} = \overline{AO}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BO} = \overline{AO} \quad 16^2 = 2\overline{AO}^2 \Leftrightarrow 128 = \overline{AO}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AO} = \sqrt{128} \Leftrightarrow \overline{AO} = 8\sqrt{2}$$

Logo, $A(8\sqrt{2}, 0, 0)$.

- 2.2. $B(0, 8\sqrt{2}, 0)$, $C(-8\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -8\sqrt{2}, 0)$,
 $E(0, -8\sqrt{2}, 18)$, $F(8\sqrt{2}, 0, 18)$,
 $G(0, 8\sqrt{2}, 18)$ e $H(-8\sqrt{2}, 0, 18)$.

Página 60

50. $B(0, 3, 0)$, $C(-2, 3, 0)$, $D(-2, -3, 0)$,
 $E(0, -3, 4)$, $F(0, 3, 4)$ e $H(-2, -3, 4)$.

- 51.1. a) $A(1, 1, -1)$ e $B(1, -1, 1)$
- b) As coordenadas da projeção ortogonal de $B(1, -1, 1)$ sobre o plano xOy são $(1, -1, 0)$.
- c) As coordenadas da projeção ortogonal de $A(1, 1, -1)$ sobre o plano xOz são $(1, 0, -1)$.
- d) As coordenadas da projeção ortogonal de $A(1, 1, -1)$ sobre o plano yOz são $(0, 1, -1)$.

- 51.2. Como $C(-2, 0, 1)$, então tem-se:

$$a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(a - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 4$$

$$a = 0 \vee a = 4$$

Página 61

- 52.1. a) O ponto que pertence ao 6.º octante é o E_x uma vez que tem abcissa negativa, ordenada positiva e cota negativa.
- b) Os pontos que pertencem ao plano yOz são D e F porque têm abcissa nula.
- c) O ponto que pertence ao eixo Oy é o F porque tem abcissa e ordenada nulas.
- d) O ponto que pertence ao 2.º octante é o A , uma vez que tem abcissa negativa, ordenada positiva e cota positiva.
- 52.2. a) As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $C(5, -1, -6)$ sobre o plano xOy são $(5, -1, 0)$.
- b) As coordenadas da projeção ortogonal do ponto $B(3, 0, 7)$ sobre o eixo Oz são $(0, 0, 7)$.

53.1. $R\left(\frac{35}{2}, 28, 0\right)$ $S\left(-\frac{35}{2}, 28, 8\right)$

$T\left(\frac{35}{2}, 0, 8\right)$

53.2. $R\left(\frac{35}{2}, 14, 0\right)$ $S\left(-\frac{35}{2}, -14, 8\right)$

$T\left(\frac{35}{2}, -14, 8\right)$

54. $P(6 - 2k, k + 4, 2k)$, $k \in \mathbb{R}$

- 54.1. a) Se $k = 4$ então $P(-2, 8, 8)$
 Assim sendo, o ponto P pertence ao 2.º octante.
- b) Se $k = -1$ então $P(8, 3, -2)$.
 Assim sendo, o ponto P pertence ao 5.º octante.
- c) Se $k = -5$ então $P(16, -1, -10)$.
 Assim sendo, o ponto P pertence ao 8.º octante.



54.2. a) P pertence ao 1.º octante se:

$$\begin{aligned} x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6 - 2k > 0 \wedge k + 4 > 0 \wedge 2k > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k < 3 \wedge k > -4 \wedge k > 0 &\Leftrightarrow 0 < k < 3 \\ k \in]0, 3[& \end{aligned}$$

b) P pertence ao 5.º octante se:

$$\begin{aligned} x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6 - 2k > 0 \wedge k + 4 > 0 \wedge 2k < 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k < 3 \wedge k > -4 \wedge k < 0 &\Leftrightarrow -4 < k < 0 \\ k \in]-4, 0[& \end{aligned}$$

54.3. P pertence ao 3.º octante se:

$$\begin{aligned} x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6 - 2k < 0 \wedge k + 4 < 0 \wedge 2k > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k > 3 \wedge k < -4 \wedge k > 0 & \end{aligned}$$

Condição impossível

Então, conclui-se que não existe nenhum valor de k para o qual o ponto P pertence ao 3.º octante.

55. $P(a, a - 2, 1 - a)$, $a \in \mathbb{R}$

55.1. a) Se a soma das coordenadas do ponto P é igual a -3 , tem-se:

$$a + a - 2 + 1 - a = -3 \Leftrightarrow a = -2$$

Logo, $P(-2, -4, 3)$. Assim sendo, o ponto P pertence ao 3.º octante.

b) Se a soma das coordenadas do ponto P é igual a 2, tem-se:

$$\begin{aligned} a + a - 2 + 1 - a &= 2 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

Logo, $P(3, 1, -2)$.

Assim sendo, o ponto P pertence ao 5.º octante.

55.2. Se a ordenada do ponto P é igual ao produto da abscissa pela cota, tem-se:

$$a - 2 = a(1 - a) \Leftrightarrow a - 2 = a - a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2}$$

$$a = \sqrt{2} \rightarrow P(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 2, 1 - \sqrt{2}) \in 8.º \text{ octante.}$$

$$a = -\sqrt{2} \rightarrow P(-\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 2, 1 + \sqrt{2}) \in 3.º \text{ octante.}$$

Conclusão: O ponto P pertence ao 3.º octante ou ao 8.º octante

Página 62

$$\begin{aligned} 37.1. \overline{AO} &= \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2 + (-3-0)^2} = \\ &= \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BO} &= \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2 + (-1-0)^2} = \\ &= \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CO} &= \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-0)^2 + (0-0)^2} = \\ &= \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

O ponto que está mais afastado da origem é o A .

$$\begin{aligned} 37.2. \overline{AP} &= \sqrt{(-1-2)^2 + (1-0)^2 + (-3-1)^2} = \\ &= \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BP} &= \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2 + (-1-1)^2} = \\ &= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-0)^2 + (0-1)^2} = \\ &= \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

O ponto que está mais próximo do ponto P é o B .

$$\begin{aligned} 38.1. \overline{AB} &= \sqrt{(3-2)^2 + (1+3)^2 + (-2+1)^2} = \\ &= \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, o perímetro de cada face é dado por:
 $P = 3\overline{AB} = 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 38.2. \overline{PA} &= \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2 + (3+2)^2} = \\ &= \sqrt{16+0+25} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2 + (3+1)^2} = \\ &= \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

Como $\overline{PA} = \overline{PB}$, P está a igual distância de A e de B .

P não coincide com o ponto C , pois $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ e $\overline{PA} \neq 3\sqrt{2}$.

Página 63

$$39. A(1, -2, 4), B(-3, 4, 0) \text{ e } O(0, 0, 0).$$

39.1. a) Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$M\left(\frac{1-3}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{4+0}{2}\right), \text{ ou seja,}$$

$$M(-1, 1, 2).$$



b) Seja M o ponto médio de $[AD]$.

$$M\left(\frac{1+0}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(\frac{1}{2}, -1, 2\right)$$

c) Seja M o ponto médio de $[BO]$.

$$M\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(-\frac{3}{2}, 2, 0\right)$$

39.2. a) Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto C .

Como A é o ponto médio de $[OC]$, tem-se:

$$\frac{0+a}{2} = 1 \wedge \frac{0+b}{2} = -2 \wedge \frac{0+c}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \wedge b = -4 \wedge c = 8$$

Logo, $C(2, -4, 8)$.

b) Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto C .

Como B é o ponto médio de $[AC]$, tem-se:

$$\frac{1+a}{2} = -3 \wedge \frac{-2+b}{2} = 4 \wedge \frac{4+c}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -7 \wedge b = 10 \wedge c = -4$$

$C(-7, 10, -4)$

40. $A(4, 0, -2)$ e $C(2, 1, -1)$

40.1. Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{-2-1}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

40.2. Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto D .

Como B é o ponto médio de $[AD]$, tem-se:

$$\frac{4+a}{2} = -1 \wedge \frac{0+b}{2} = 2 \wedge \frac{-2+c}{2} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -6 \wedge b = 4 \wedge c = -2$$

$D(-6, 4, -2)$

Página 64

$$\begin{aligned} 56.1. \quad \overline{AB} &= \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2 + (-2-3)^2} = \\ &= \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} \text{ u.c} \end{aligned}$$

56.2. C : projeção ortogonal de $B(2, -1, 3)$ sobre o eixo Ox .

Então, $C(2, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(-1-2)^2 + (3-0)^2 + (-2-0)^2} = \\ &= \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

56.3. D : projeção ortogonal de $A(-1, 3, -2)$ sobre o plano xOz .

Então, $D(-1, 0, -2)$.

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \sqrt{(2+1)^2 + (-1-0)^2 + (3+2)^2} = \\ &= \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

57.1. $A \in 6.^\circ$ octante $B \in 4.^\circ$ octante

57.2. $C(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}^-$

$$\overline{AC} = \sqrt{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2-x)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4+4x+x^2+4+9} = \sqrt{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4+4x+x^2+4+9 = 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4 \times 1 \times (-5)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$$

Como $x \in \mathbb{R}^-$, então $x = -5$.

Assim, $C(-5, 0, 0)$

57.3. $D(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}^+$

$$\overline{BD} = \sqrt{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (-3-0)^2 + (4-z)^2} = \sqrt{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+9+16-8z+z^2} = \sqrt{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{z^2-8z+26} = \sqrt{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2-8z+26 = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2-8z-9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{8 \pm \sqrt{64-4 \times 1 \times (-9)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 9 \vee z = -1$$

Como $z \in \mathbb{R}^+$, então $z = 9$.

Assim, $D(0, 0, 9)$.

Página 65

58. As coordenadas dos pontos A e B são do tipo $(x, 0, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$\overline{CA} = \overline{CB} = 3$, logo tem-se:



$$\sqrt{(-3-x)^2 + (2-0)^2 + (1-0)^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9+6x+x^2+4+1} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+6x+14} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+14=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4 \times 1 \times 5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$$

Sendo $A(-1, 0, 0)$ e $B(-5, 0, 0)$, então

$$\overline{AB} = 4.$$

Logo, $P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{CA} + \overline{CB} = 4 + 3 + 3 = 10$ u.c.

$$59.1. \overline{AP} = \sqrt{(0+2)^2 + (0-1)^2 + (-2-3)^2} =$$

$$= \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(2+2)^2 + (3-1)^2 + (4-3)^2} =$$

$$= \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(-4+2)^2 + (1-1)^2 + (7-3)^2} =$$

$$= \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20}$$

O vértice que está mais afastado do ponto P é o A e o que está mais próximo do ponto P é o C .

$$59.2. \overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-3)^2 + (-2-4)^2} =$$

$$= \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$A_{\text{face do cubo}} = 7^2 = 49$$

$$A_{\text{total}} = 6 \times 49 = 294 \text{ u.a.}$$

60.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$M\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{1-6}{2}, \frac{5+3}{2}\right), \text{ ou seja,}$$

$$M\left(-2, -\frac{5}{2}, 4\right).$$

60.2. Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto C .

Como A é o ponto médio de $[BC]$, tem-se:

$$\frac{-1+a}{2} = -3 \wedge \frac{-6+b}{2} = 1 \wedge \frac{3+c}{2} = 5$$

$$\Leftrightarrow a = -5 \wedge b = 8 \wedge c = 7$$

$$C(-5, 8, 7)$$

60.3. Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto D .

Como B é o ponto médio de $[AD]$, tem-se:

$$\frac{-3+a}{2} = -1 \wedge \frac{1+b}{2} = -6 \wedge \frac{5+c}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \wedge b = -13 \wedge c = 1$$

$$D(1, -13, 1)$$

61.1. $\overline{OA} = 8$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 10 = \frac{640}{3} \text{ u.v.}$$

61.2. $A(8, 0, 0)$ $B(8, 8, 0)$ $C(0, 8, 0)$

F é o ponto médio de $[BC]$, logo

$$F\left(\frac{8+0}{2}, \frac{8+8}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ ou seja, } F(4, 8, 0)$$

E é o ponto médio de $[AB]$, logo

$$E\left(\frac{8+8}{2}, \frac{0+8}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

Ou seja, $E(8, 4, 0)$

$$\overline{EF} = \sqrt{(8-4)^2 + (4-8)^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$\overline{ET} = \overline{EF} = 4\sqrt{2}$ porque $[DEFGRSTU]$ é um cubo.

Então, $T(8, 4, -4\sqrt{2})$.

61.3. $P_{\text{face cubo}} = 4\overline{EF} = 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ u.c.

62. Sendo A' o ponto do plano xOy mais próximo de A , então A' é a projeção ortogonal de A sobre o plano xOy .

$$A'(-3, 2, 0)$$

Sendo B' o ponto do plano xOz mais próximo de B , então B' é a projeção ortogonal de B sobre o plano xOz , $B'(-1, 0, 3)$.

Seja M o ponto médio de $[A'B']$.

$$\text{Então, } M\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right), \text{ ou seja,}$$

$$M\left(-2, 1, \frac{3}{2}\right).$$



Página 66

- 41.1. $z = -4$
 41.2. $x = -1$
 41.3. $y = 3$
 42.1. $B(15, 10, 0)$, $C(0, 10, 0)$ e $E(15, 10, 12)$
 42.2. a) $y = 10$
 b) $z = 16$

Página 67

- 43.1. $B(3, -5, -3)$, $C(3, 5, -3)$, $D(3, 5, 3)$,
 $E(-3, 5, 3)$ e $H(-3, -5, 3)$
 43.2. a) $x = 3$
 b) $z = 3$
 43.3. a) $x = 3 \wedge y = -5$
 b) $y = 5 \wedge z = 3$
 c) $x = 3 \wedge z = -3$

Página 68

- 63.1. a) $z = 5$
 b) $y = 3$
 c) $x = 3$
 63.2. a) $x = 6 \wedge y = 0$
 b) $y = 6 \wedge z = 0$
 c) $x = 3 \wedge z = 5$

Página 69

- 64.1. $A(4, 0, 0)$, $B(4, 0, -4)$, $E(0, 4, -4)$,
 $F(0, -4, 4)$, $G(4, 0, 4)$ e $H(4, -8, 0)$.
 64.2. a) $z = -4$
 b) $x = 4$
 c) $y = 4$
 64.3. a) $y = 4 \wedge z = -4$
 b) $x = 4 \wedge z = -4$
 c) $y = 4 \wedge x = 4$
 64.4. a) $x = 4 \wedge y = 0$
 b) $x = 4 \wedge y = 0 \wedge -4 \leq z \leq 0$
 65.1. a) $z = 6$
 b) $y = 4$
 65.2. a) $y = 4 \wedge x = 3$

b) $y = 4 \wedge z = 6$

- 65.3. Por exemplo:
 a) $P(2, 4, 5)$
 b) $P(0, 4, 3)$

66.1. $\overline{AB} = \frac{16}{4} = 4$

Pelo Teorema de Pitágoras,

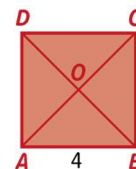
$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 16 + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{2 \times 16} \Leftrightarrow \overline{BD} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Então, } \overline{OB} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

O plano é representado pela equação $y = 2\sqrt{2}$.



- 66.2. V : volume

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \overline{OV}$$

$$A_{\text{base}} = 4^2 = 16$$

$$\frac{1}{3} \times 16 \times \overline{OV} = 32 \Leftrightarrow \overline{OV} = \frac{96}{16} \Leftrightarrow \overline{OV} = 6$$

$$V(0, 0, -6)$$

Página 70

44.1. $\overline{AS} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (-2-3)^2} =$
 $= \sqrt{4 + 4 + 25} = \sqrt{33}$

$$\overline{BS} = \sqrt{(3+1)^2 + (1-2)^2 + (-1-3)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$$

Como $\overline{AS} = \overline{BS}$, S pertence ao plano medidor de $[AB]$.

44.2. $\overline{AT} = \sqrt{(1+4)^2 + (0-3)^2 + (-2-1)^2} =$
 $= \sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{43}$

$$\overline{BT} = \sqrt{(3+4)^2 + (1-3)^2 + (-1-1)^2} =$$

$$= \sqrt{49 + 4 + 4} = \sqrt{57}$$

Como $\overline{AT} \neq \overline{BT}$, T não pertence ao plano medidor de $[AB]$.

- 45.1. $(2, 0, 0)$; $x = 2$



45.2. a) $B(4, 6, 0)$ $A(4, 0, 0)$

$y = 3$ é uma equação do plano mediador de $[AB]$.

b) $F(4, 0, 5)$

$$z = \frac{5}{2}$$

Página 71

1. $x = 3$

2. M : ponto médio de $[OC]$.

$$M\left(0, 0, \frac{5}{2}\right) \quad C(0, 0, 5)$$

3. Seja $B(b_1, b_2, b_3)$

$$(3, 4, 0) = \left(\frac{6+b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6+b_1}{2} = 3 \\ \frac{b_2}{2} = 4 \\ \frac{b_3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+b_1 = 6 \\ b_2 = 8 \\ b_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 8 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

$$B(0, 8, 0)$$

4.1. $3(-1) - 4 \times 1 + 7 = 0$, logo $(-1, 1, 5)$ é equidistante de A e B , pois pertence ao seu plano mediador.

Opção (C)

4.2. $3x - 4y + 7 = 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4y = -7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}$$

$$\left(0, \frac{7}{4}, 0\right)$$

Opção (D)

5. $F(0, 0, 5)$

$$\overline{AP} = \overline{CP}, \text{ sendo } P(x, y, z)$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-5)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 10z + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x + 10z = -11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x - 10z = 11$$

Página 72

67.1. $\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (1-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Sim. } \overline{AC} = \overline{BC}$$

67.2. $\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{26}$

$$\overline{BC} = 3$$

$$\overline{AC} \neq \overline{BC}$$

O ponto B não pertence ao plano mediador de $[AB]$.

68. O ponto de interseção de $[RS]$ com o seu plano mediador é o seu ponto médio.

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (2, 1, 1)$$

Opção (A)

69.1. Seja $P(x, y, z)$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 =$$

$$= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x + 8y - 4z = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + z = -2$$

69.2. a) Se $x = 1, 2 - 2y + z = -2 \Leftrightarrow z = 2y - 4$.

Se, por exemplo, $y = 1$ tem-se $z = -2$.

Por exemplo, $P(1, 1, -2)$ pertence a α .

b) Se $y = 0, 2x + z = -2 \Leftrightarrow z = -2x - 2$

Se, por exemplo, $x = 1, z = -4$.

Por exemplo, $P(1, 0, -4)$ pertence a α .

c) Se $z = -2, 2x - 2y - 2 = -2 \Leftrightarrow x = y$

Por exemplo, $P(1, 1, -2)$ pertence a α .

69.3. $\alpha \cap Oz$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0, -2)$$



$$\alpha \cap Ox$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(-1, 0, 0)$$

$$\alpha \cap Oy$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(0, 1, 0)$$

$(0, 0, -2)$, $(-1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são os pontos de interseção de α com os eixos Oz , Ox e Oy , respectivamente.

Página 73

1.1. $F(8, 0, 8)$ $G(8, 8, 8)$

Plano medidor de $[FG]$: $y = 4$

1.2. $P(6, 0, 8)$ $E(0, 0, 8)$

Plano medidor de $[PE]$: $x = 3$

1.3. $B(8, 8, 0)$ $R(8, 8, 2)$

Plano medidor de $[BR]$: $z = 1$

1.4. $R(8, 8, 2)$ $S(2, 8, 8)$

Seja $P(x, y, z)$.

$$\overline{RP} = \overline{SP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2 + (z-8)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 4x + 4 + z^2 - 16z + 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x + 12z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - z = 0$$

2.1. $E(0, 0, 8)$ $R(8, 8, 2)$

Seja $P(x, y, z)$.

$$\overline{EP} = \overline{RP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64 =$$

$$= x^2 - 16x + 64 + y^2 - 16y + 64 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x + 16y - 12z - 68 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 3z - 17 = 0$$

$$\alpha: 4x + 4y - 3z - 17 = 0$$

2.2. $\alpha \cap Ox$

$$4x + 4y - 3z - 17 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{17}{4} \wedge y = 0 \wedge z = 0$$

$$\left(\frac{17}{4}, 0, 0\right)$$

$$\alpha \cap Oy$$

$$4x + 4y - 3z - 17 = 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{17}{4}$$

$$\left(0, \frac{17}{4}, 0\right)$$

$$\alpha \cap Oz$$

$$4x + 4y - 3z - 17 = 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{17}{3}$$

$$\left(0, 0, -\frac{17}{3}\right)$$

$\left(\frac{17}{4}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{17}{4}, 0\right)$ e $\left(0, 0, -\frac{17}{3}\right)$ são os pontos de interseção de α com Ox , Oy e Oz , respectivamente.

2.3. $[DG]: y = 8 \wedge z = 8 \wedge 0 \leq x \leq 8$

$$\alpha: 4x + 4y - 3z - 17 = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 4y - 3z - 17 = 0 \\ y = 8 \\ z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 32 - 24 - 17 = 0 \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = 8 \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq \frac{9}{4} \leq 8$$

Então, $H\left(\frac{9}{4}, 8, 0\right)$.



3. $C(0, 8, 0)$ $Q(8, 0, 6)$

Seja $P(x, y, z)$.

$$\overline{CP} = \overline{QP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + (z-6)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16y + 64 + z^2 =$$

$$= x^2 - 16x + 64 + y^2 + z^2 - 12z + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x - 16y + 12z = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4y + 3z = 9$$

$$4x - 4y + 3z = 9 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \quad T\left(\frac{9}{4}, 0, 0\right)$$

$$4x - 4y + 3z = 9 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{9}{4} \quad U\left(0, -\frac{9}{4}, 0\right)$$

$$4x - 4y + 3z = 9 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 3 \quad V(0, 0, 3)$$

$$\overline{UV} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$$

$$\overline{TV} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + (-3)^2} = \frac{15}{4}$$

Como $\overline{UV} = \overline{TV}$, o triângulo $[TUV]$ é isósceles.

Página 74

46.1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$

46.2. $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + (-1-4)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{33}$

$$x^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 33$$

46.3. M : ponto médio de $[AB]$ (centro da circunferência)

$$M\left(\frac{0-2}{2}, \frac{4+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right), \text{ isto é, } M\left(-1, \frac{5}{2}, 1\right).$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (4-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = 29$$

47.1. Centro $(0, 0, 0)$ $r = 6$

47.2. Centro $(5, 1, -2)$ $r = 2$

47.3. Centro $(0, 2, -1)$ $r = \sqrt{3}$

47.4. Centro $(1, 0, -1)$ $r = 3$

48.1. Centro $(0, -1, -2)$ $r = 3$

48.2. a) $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + (-2+1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} =$
 $= \sqrt{9} = 3$

b) $\overline{BC} = \sqrt{4^2 + (1+1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{1+4+1} =$
 $= \sqrt{6} \neq 3$

Página 75

49.1. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$

49.2. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$

49.3. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 1$

50.1. Centro $(5, 2, -1)$ $r = 2$

50.2. Plano xOz

51.1. $r = |-2-1| = 3; (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 9$

51.2. $r = |-1+5| = 4;$
 $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$

51.3. $r = |3-1| = 2; (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 4$

Página 76

70.1. Centro $(2, -1, 3)$ $r = 6$

70.2. Centro $(-1, 0, 3)$ $r = 2\sqrt{2}$

70.3. Centro $(-5, 3, -1)$ $r = \sqrt{5}$

70.4. Centro $(1, -3, 0)$ $r = \sqrt{15}$

71.1. $(-3+1)^2 + 3^2 + (-1-1)^2 = 4+9+4 = 17$

Sim

71.2. $(-2+1)^2 + 3^2 + (4-1)^2 = 1+9+9 = 19 \neq 17$

Não

71.3. $(-1+1)^2 + (1+3)^2 + (2-1)^2 = 16+1 = 17$

Sim

72.1. $\overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 36$$



$$72.2. \quad r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$C\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$73.1. \quad \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9 = 25 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

A superfície esférica interseca o eixo Ox nos pontos $(4, 0, 0)$ e $(-4, 0, 0)$.

$$73.2. \quad \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 25 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-3 = 5 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-3 = -5 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

A superfície esférica interseca o eixo Oy nos pontos $(0, 8, 0)$ e $(0, -2, 0)$.

$$73.3. \quad \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 25 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + z^2 = 25 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 16 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} z = -4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

A superfície esférica interseca o eixo Oz nos pontos $(0, 0, 4)$ e $(0, 0, -4)$.

Página 77

$$74. \quad \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y-2)^2 = 4 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 = 3 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2 = \sqrt{3} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-2 = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{3} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 - \sqrt{3} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$A(0, 2 + \sqrt{3}, 0) \quad B(0, 2 - \sqrt{3}, 0)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{3}$$

Seja C o centro:

$$C\left(0, \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2}, 0\right) = (0, 2, 0)$$

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$$

$A(0, 2 + \sqrt{3}, 0)$ e $B(0, 2 - \sqrt{3}, 0)$ não são soluções do sistema.

$$75.1. \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4 + (z-3)^2 = 9 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z-3)^2 = 4 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-3 = 2 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} z-3 = -2 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad A(0, 0, 5) \text{ e } B(0, 0, 1).$$

$$75.2. \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y-2)^2 + 9 = 9 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 = -1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Condição impossível.



$$75.3. \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

O único ponto de interseção da superfície esférica com o plano xOy é o ponto $(1, 2, 0)$.

$$76.1. r = 3 \quad A(3, -3, 3)$$

$$76.2. \text{ a) } z = 3$$

$$\text{ b) } y = -3$$

$$\text{ c) } x = 3$$

$$77.1. C(1, -2, -1); r = 5$$

$$z = -1 + 5 \Leftrightarrow z = 4$$

$$z = -1 - 5 \Leftrightarrow z = -6$$

Planos de equação $z = 4$ e $z = -6$.

$$77.2. y = -2 + 5 \Leftrightarrow y = 3$$

$$y = -2 - 5 \Leftrightarrow y = -7$$

Planos de equação $y = 3$ e $y = -7$.

Página 78

$$1.1. C(0, 0, 0) \quad r = 4$$

$$1.2. y = a, a \in \mathbb{Z}$$

Planos tangentes são: $y = -4$ e $y = 4$

(só intersectam num ponto)

Então $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

$$1.3. \text{ Para } a = 3, r = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Centro $(0, 3, 0)$ e $r = \sqrt{7}$

$$\text{ Para } a = 2, r = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$$

Centro $(0, 2, 0)$ e $r = \sqrt{12}$

$$\text{ Para } a = 1, r = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

Centro $(0, 1, 0)$ e $r = \sqrt{15}$

Para $a = 0$, centro $(0, 0, 0)$ e $r = 4$

Para $a = -1$, centro $(0, -1, 0)$ e $r = \sqrt{15}$

Para $a = -2$, centro $(0, -2, 0)$ e $r = \sqrt{12}$

Para $a = -3$, centro $(0, -3, 0)$ e $r = \sqrt{7}$

$$2. C(0, 0, 3)$$

$$r = 3$$

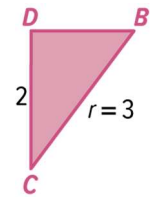
$$D(0, 0, 5)$$

$$\overline{CD} = 2$$

$$\overline{CB} = 3$$

$$\overline{DB}^2 + 2^2 = 3^2 \Leftrightarrow \overline{DB}^2 = 9 - 4 \Leftrightarrow \overline{DB} = \sqrt{5}$$

$$P = 2\pi\sqrt{5} \approx 14,05$$



Página 79

$$52.1. (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 \leq 4$$

$$52.2. x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \leq 8$$

$$52.3. (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9$$

$$53.1. \text{ Centro } (0, -2, 1) \text{ e } r = \sqrt{5}$$

$$53.2. 1 + 2^2 + (2-1)^2 = 1 + 4 + 1 = 6 > 5$$

Então P não pertence à esfera.

$$(-1)^2 + (-1+2)^2 + (2-1)^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \leq 5$$

Então Q pertence à esfera.

$$1^2 + (-2+2)^2 + (2-1)^2 = 1 + 0 + 1 = 2 \leq 5$$

Então R pertence à esfera.

$$54.1. (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 \leq 16$$

$$54.2. (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 \leq 1$$

$$54.3. (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 \leq 4$$

Página 80

$$78.1. C(0, 1, -2); r = \sqrt{3}$$

$$78.2. 0 + (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 > 3$$

Então a origem do referencial não pertence à esfera.

$$78.3. \text{ a) } 1^2 + (3-1)^2 + (-1+2)^2 = 1 + 4 + 1 = 6 > 3$$

Logo o ponto A não pertence à esfera.

$$\text{ b) } (-1)^2 + (-1)^2 + (-3+2)^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

B pertence à superfície esférica.

$$79.1. (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \leq 4$$

$$79.2. (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \leq 9$$



79.3. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \leq 1$

80.1. $r = |5-3| = 2$. Então, $r = 2$.

80.2. $r = |3-2| = 1$. Então, $r = 1$.

80.3. $r = |-4+1| = |-3| = 3$. Então, $r = 3$.

81.1. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$. O raio da esfera é $\sqrt{12}$.

$$A(0, \sqrt{12}, 0)$$

81.2. $2^2 + 1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 + 1 + \frac{25}{4} = \frac{45}{4} < 12$.

$$\left(2, 1, \frac{5}{2}\right) \text{ pertence ao } 1.^\circ \text{ octante.}$$

Então $\left(2, 1, \frac{5}{2}\right)$ pertence à parte retirada.

Opção (A)

81.3. Trata-se de um círculo centrado na origem e de raio $\sqrt{12}$.

$$\text{Área} = \pi \times (\sqrt{12})^2 = 12\pi \text{ u.a.}$$

82. $\alpha: y = 3$

$$\beta: z = 5$$

$$C(a, b, c) \in 3.^\circ \text{ octante.}$$

Então $a < 0 \wedge b < 0 \wedge c > 0$.

Se $b = -1$, $r = 4$:

Então $c = 5 - 4 \vee c = 5 + 4$

$$c = 1 \vee c = 9$$

Por exemplo, $C(-1, -1, 1)$

Página 81

1. Situação I: $T(30, 30, 0)$

Situação II: Seja b a ordenada de T .

$$b^2 + b^2 = 60 \Leftrightarrow 2b^2 = 3600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 1800 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{2 \times 900}$$

Como $b > 0$, $b = 30\sqrt{2}$.

$$T(0, 30\sqrt{2}, 20)$$

Situação III: $T(60, 60, 20)$

2. Situação I: $C(0, 0, 30)$

Situação II: $C(0, 0, 50)$

Situação III: $C(30, 30, 50)$

3. Situação I: $x^2 + y^2 + (z-30)^2 \leq 900$

Situação II: $x^2 + y^2 + (z-50)^2 \leq 900$

Situação III:

$$(x-30)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 \leq 900$$

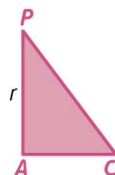
Página 82

1. Se o plano não intersesta a esfera: conjunto vazio.

Se o plano é tangente à esfera: um ponto.

Se o plano intersesta a esfera: círculo.

2.1. $A(2, 0, 0)$



Seja r o raio do círculo que resulta da interseção de α com a esfera.

$$r^2 + 2^2 = 13 \Leftrightarrow_{r>0} r = \sqrt{9} \Leftrightarrow r = 3$$

$$\text{Área do círculo: } \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ u.a.}$$

2.2. $\sqrt{8^2} + r^2 = 12 \Leftrightarrow r^2 = 12 - 8 \Leftrightarrow_{r>0} r = 2$

$$\text{Área do círculo } \pi \times 2^2 = 4\pi \text{ u.a.}$$

$$A(0, 0, \sqrt{8})$$

2.3. $\sqrt{3^2} + r^2 = 12 \Leftrightarrow r^2 = 12 - 3 \Leftrightarrow_{r>0} r = 3$

$$\text{Área do círculo } \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ u.a.}$$

$$A(0, \sqrt{3}, 0)$$

3.1. $C(3, -1, -1)$

$$D(3, -1, 1)$$

3.2. $\overline{CD} = 2$

$$r^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow r^2 = 9 - 4 \Leftrightarrow_{r>0} r = \sqrt{5}$$

3.3. Área do círculo: $\pi \times \sqrt{5}^2 = 5\pi$ u.a.

Página 83

1.1. $\overline{TS} =$

$$= \sqrt{2 \ 405 \ 046,32^2 + 139 \ 463 \ 889,12^2 + 60 \ 456 \ 760,70^2}$$

$$\approx 152 \ 022 \ 960,5$$



$$1.2. \quad \overline{TL} = \\ = \sqrt{(-205\ 846,64)^2 + 302\ 935,81^2 + 170\ 219,02^2} \\ \approx 403\ 878,02$$

$$2.1. \quad \overline{TS} = \\ = \sqrt{32\ 517\ 104,25^2 + (-131\ 626\ 934,40)^2 + (-57\ 058\ 708)^2} \\ \approx 147\ 101\ 013,2$$

$$2.2. \quad \overline{TL} = \sqrt{393\ 728,54^2 + 73\ 968,97^2 + 25\ 750,84^2} \\ \approx 401\ 443,24$$

Página 84

$$1. \quad A(1, -1, 0) \quad B(1, 1, 0) \quad C(-1, 1, 0) \\ D(-1, -1, 0) \quad E(1, -1, 2) \quad F(1, 1, 2) \\ G(-1, 1, 2) \quad H(-1, -1, 2)$$

- 2.1. a) Ponto E b) Pontos B e D
c) Ponto B d) Pontos A e C

2.2. $(0, -2, 2)$

$$3.1. \quad 2k = -(k+1) \Leftrightarrow 2k = -k-1 \Leftrightarrow 3k = -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$P\left(-\frac{1}{3}+1, 2+\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \text{ ou seja, } P\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$3.2. \quad k+1 > 0 \wedge 2-k > 0 \wedge 2k < 0 \\ \Leftrightarrow k > -1 \wedge k < 2 \wedge k < 0 \\ \Leftrightarrow k \in]-1, 0[$$

Opção (A)

$$4.1. \quad \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2 + (-1-3)^2} \\ = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-2)^2 + (-1+4)^2} \\ = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB}$$

O ponto C está mais afastado de A do que o ponto B .

4.2. M : ponto médio de $[BC]$

$$M\left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{3-4}{2}\right), \text{ ou seja, } M\left(0, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

Como a abcissa é 0, M pertence ao plano yOz .

$$5. \quad B(x, 0, 0) \\ \left(\frac{x-1}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (2, 1, -1)$$

$$\text{Então, } \frac{x-1}{2} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

6. $V(0, 0, z)$

$$\overline{AB}^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 6\sqrt{2}$$

$$V = 168 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(6\sqrt{2})^2 \times z = 168 \Leftrightarrow 24z = 168 \Leftrightarrow z = 7$$

$$M\left(3, 3, \frac{7}{2}\right)$$

$$7. \quad \overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50}$$

Seja x a medida do lado.

$$\overline{AB}^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 50 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$$

$$P = 4 \times 5 = 20$$

$$P = 20 \text{ u.c.}$$

Página 85

$$8.1. \quad \overline{BG} = \sqrt{(6-4)^2 + (6-4)^2 + 20^2} = \sqrt{4+4+400} \\ = \sqrt{408}$$

$$P_{[ABGF]} = 8+12+2\sqrt{408} \approx 60,40$$

O perímetro é, aproximadamente, 60,40 cm.

$$8.2. \quad V = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 60 - \frac{1}{3} \times 8^2 \times 40 = 2880 - \frac{2560}{3} \\ = \frac{6080}{3} \approx 2026,67$$

O volume é aproximadamente igual a 2026,67 cm^3 .

9.1. $z = -4$

9.2. $x = -1$

9.3. $y = 3$

10.1. $A(2, 2, -2); B(-2, 0, 4); C(2, -2, 4);$
 $D(2, -2, 0)$

10.2. a) $(2, 0, 4)$

b) $(4, -2, 4)$

c) $(2, 3, 4)$



11.1. $[GH]: z = 6 \wedge y = 2 \wedge -2 \leq x \leq 2$

$P \in [GH]$ e tem abscissa negativa: então

$P(x, 2, 6)$, sendo $-2 \leq x < 0$

$$\overline{VP} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2^2 + (6-9)^2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 + 9 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

Como $x < 0$, então $x = -\sqrt{3}$

$$P(-\sqrt{3}, 2, 6)$$

11.2. $[AF]: x = 2 \wedge y = -2 \wedge 0 \leq z \leq 6$

$P \in [AF]: P(2, -2, z)$

$$\overline{VP} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (z-9)^2} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4 + (z-9)^2 = 49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-9)^2 = 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z-9 = \sqrt{41} \vee z-9 = -\sqrt{41} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 9 + \sqrt{41} \vee z = 9 - \sqrt{41}$$

Como $0 \leq z \leq 6$, então $z = 9 - \sqrt{41}$

$$P(2, -2, 9 - \sqrt{41})$$

Página 86

12.1. $(-2, 2, 2)$

12.2. $(5, -3, 4)$

13.1. $y = 4 \wedge z = 3$

13.2. $x = 2 \wedge z = 3$

13.3. $x = 2 \wedge y = 4$

14.1. a) $z = -4$

b) $y = 3$

c) $y = 3$

d) $x = -1$

14.2. $r: y = 3 \wedge z = -4$

Opção (C)

15.1. a) Por exemplo: $T(4, 3, 9)$

b) Por exemplo: $T(0, 5, 8)$

15.2. a) $(0, 3, 8)$

b) É o próprio ponto A de coordenadas $(4, 3, 0)$.

15.3. O simétrico de E relativamente ao plano de

equação $y = -1$ é $(4, -5, 8)$.

$$k^2 - 9 = -5 \wedge k^2 + 2k = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4 \wedge k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k = 2 \vee k = -2) \wedge \left(k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (k = 2 \vee k = -2) \wedge (k = 2 \vee k = -4)$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

Página 87

16.1. $T(7, 3, 5)$

16.2. $S\left(\frac{3}{2}, 0, 5\right)$

16.3. a) $y = 9 \wedge 0 \leq x \leq 7 \wedge 0 \leq z \leq 5$

b) $x = 7 \wedge y = 9 \wedge 0 \leq z \leq 5$

c) $y = 9 \wedge z = 5$

d) $x = 7 \wedge z = 5$

16.4. $0 \leq \frac{2-5k}{3} \leq 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2-5k}{3} \geq 0 \wedge \frac{2-5k}{3} \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-5k \geq 0 \wedge 2-5k \leq 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{2}{5} \wedge k \geq -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in \left[-5, \frac{2}{5} \right]$$

17.1. $P(x, y, z) \quad \overline{AP} = \overline{BP}$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 4z + 4 =$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4y + 6z = 1 \Leftrightarrow 2x - 2y + 3z = \frac{1}{2}$$

17.2. Eixo Ox :

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{4}, 0, 0 \right)$$



Eixo Oy:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \left(0, -\frac{1}{4}, 0\right)$$

Eixo Oz:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{6} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \left(0, 0, \frac{1}{6}\right)$$

18.1. a) $z = 2$ b) $x = 4$

18.2. a) Plano medidor de $[OE]$: $z = 2$

Por exemplo: $(-2, 3, 2)$

b) Plano medidor de $[BC]$: $x = 4$

Por exemplo: $(4, -3, -2)$

19.1. $A(2, -1, 2)$ $B(-2, 3, -3)$ $P(x, y, z)$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} &= \\ &= \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 &= \\ &= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8x + 8y - 10z - 13 = 0 \end{aligned}$$

19.2. $\begin{cases} -8x + 8y - 10z - 13 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{8} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$C\left(0, \frac{13}{8}, 0\right)$$

Página 88

20. $A(4,0,0)$, $D(0,4,4)$, $G(4,4,4)$, $M(2,4,4)$

20.1. Seja $P(x, y, z)$ um ponto do plano medidor de $[AM]$.

$$\overline{PA} = \overline{PM} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} &= \\ &= \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 &= \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 8z + 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x + 8y + 8z = 20 &\Leftrightarrow -x + 2y + 2z = 5 \end{aligned}$$

20.2. $T(1, 3, k-2)$

$$-1 + 2 \times 3 + 2(k-2) = 5 \Leftrightarrow -1 + 6 + 2k - 4 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2k = 4 \Leftrightarrow k = 2$$

20.3. $[BG]: x = 4 \wedge y = 4 \wedge 0 \leq z \leq 4$

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 8 + 2z = 5 \\ x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$S\left(4, 4, \frac{1}{2}\right)$$

21.1. O ponto de interseção de α com $[AB]$ é o ponto médio de $[AB]$.

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (1, -1, -1)$$

21.2. a) $P(1, -1, -1)$

$$\overline{AP} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

Como $\overline{AP} = \overline{BP}$, conclui-se que $P \in \alpha$.

b) $P(-3, 0, 2)$

$$\overline{AP} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{56}$$

Como $\overline{AP} \neq \overline{BP}$, conclui-se que $P \notin \alpha$.

c) $P(2, 1, 3)$

$$\overline{AP} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

Como $\overline{AP} = \overline{BP}$, conclui-se que $P \in \alpha$.

22.1. $A(1, 0, -1)$; $B(-1, 2, 1)$; $C(0, 0, 3)$;

$$D(-1, 0, 3)$$

22.2. a) $z = \frac{3}{2}$

b) $x = -\frac{1}{2}$



22.3. $P(x, y, z)$

$$\begin{aligned}\overline{BP} &= \overline{DP} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} &= \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 &= \\ &= (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 &= y^2 + z^2 - 6z + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4z = 4y + 4 \Leftrightarrow z &= y + 1\end{aligned}$$

23.1. Seja $P(x, y, z)$

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{BP} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2} &= \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 &= \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 - 3z + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3x + 4y + 5z &= -2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x - 4y - 5z &= 2\end{aligned}$$

23.2. $3(m-1) - 4m - 5 = 2 \Leftrightarrow 3m - 3 - 4m - 5 = 2$

$$\Leftrightarrow -m = 10 \Leftrightarrow m = -10$$

Página 89

24.1. $O(0, 0, 0)$, $A(8, 0, 0)$, $B(8, 8, 0)$, $C(0, 8, 0)$,
 $D(0, 8, 8)$, $E(0, 0, 8)$, $F(8, 0, 8)$, $S(8, 4, 11)$

24.2. a) $A_{[ABGSF]} = 8^2 + \frac{8 \times (-11 - 8)}{2} = 52$

$$A = 52 \text{ u.a.}$$

b) $V = 8^3 + \frac{8 \times 3}{2} \times 8 = 608$

$$V = 608 \text{ u.v.}$$

24.3. Plano medidor de $[BC]: x = 4$

$$RS: y = 4 \wedge z = 11$$

Trata-se do ponto $(4, 4, 11)$.

24.4. a) Seja $P(x, y, z)$

$$\begin{aligned}\overline{FP} &= \overline{SP} \Leftrightarrow \\ \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + (z-8)^2} &= \\ &= \sqrt{(x-8)^2 + (y-4)^2 + (z-11)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 16z + 64 &= \\ &= y^2 - 8y + 16 + z^2 - 22z + 121 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8y + 6z - 73 &= 0\end{aligned}$$

b) $[BG]: x = 8 \wedge y = 8 \wedge 0 \leq z \leq 8$

$$\begin{cases} 8y + 6z - 73 = 0 \\ x = 8 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 + 6z - 73 = 0 \\ x = 8 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} \\ x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$$

O ponto de interseção tem coordenadas

$$\left(8, 8, \frac{3}{2}\right).$$

25. Seja $P(x, y, z)$.

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{BP} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 &= \\ &= (x-b)^2 + (y-a)^2 + (z-c)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 &= \\ &= x^2 - 2bx + b^2 + y^2 - 2ay + a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2bx - 2ax = 2by - 2ay \Leftrightarrow bx - ax &= by - ay \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (b-a)x = (b-a)y\end{aligned}$$

Dividindo por $b-a$, que é diferente de zero, tem-se: $x = y$.

26.1. $A(4, 0, 6)$, $C(0, 4, 6)$, $E(0, 2, 0)$

26.2. a) $\overline{BF}^2 = 2^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BF} = \sqrt{40} \Leftrightarrow \overline{BF} = 2\sqrt{10}$

$$A_{[BFEC]} = 4 \times 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$$

$$A_{\text{lateral}} = 4^2 + 2 \times 8\sqrt{10} = 16 + 16\sqrt{10} \text{ u.a.}$$

b) $V_{\text{prisma}} = A_{[ABF]} \times \overline{BC} = \frac{4 \times 6}{2} \times 4 = 48 \text{ u.a.}$



26.3. a) Sendo $P(x, y, z)$

$$\overline{DP} = \overline{FP} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (z-6)^2} &= \\ &= \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36 &= \\ &= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x + 4y - 12z &= -16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + y - 3z &= -4 \Leftrightarrow -2x - y + 3z = 4 \end{aligned}$$

b) $AB: x = 4 \wedge z = 6$

$$\begin{cases} -2x - y + 3z = 4 \\ x = 4 \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 - y + 18 = 4 \\ x = 4 \\ z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \\ z = 6 \end{cases} \quad (4, 6, 6)$$

O ponto de interseção é $(4, 6, 6)$.

c) $BC: y = 4 \wedge z = 6$

$$\begin{cases} y = 4 \\ z = 6 \\ -2x - y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 6 \\ -2x = 4 + 4 - 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 6 \\ x = 5 \end{cases} \quad T(5, 4, 6)$$

Plano paralelo a yOz e que passa por T :

$$x = 5.$$

d) Seja $P(a, a, a)$

$$-2a - a + 3a = 4 \Leftrightarrow 0 = 4 \quad \text{Impossível}$$

Não existe!

Página 90

27.1. Seja D o centro da superfície esférica

$$D(-1, -3, 1).$$

$$\text{Raio: } \sqrt{17}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-3+1)^2 + (0+3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{17}$$

Sim, A pertence.

27.2. $\overline{BD} = \sqrt{(-2+1)^2 + (0+3)^2 + (4-1)^2} =$
 $= \sqrt{19} \neq \sqrt{17}$

Não, B não pertence.

27.3. $\overline{CD} = \sqrt{(-1+1)^2 + (1+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{17}$

Sim, C pertence.

28. C : centro r : raio

28.1. $C(1, -2, 0) \quad r = \sqrt{5}$

28.2. $C(0, 4, -1) \quad r = 5$

28.3. $C(2, -1, 1) \quad r = \sqrt{6}$

28.4. $C(-3, 1, -2) \quad r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

29.1. $\overline{OB} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 21$$

29.2. $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-1-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 48$$

29.3. $1 = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

M : ponto médio de $[AC]$

$$M\left(\frac{0-4}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{ ou seja, } M(-2, 1, 1)$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$$

29.4. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 16$

30.1. $C(1, -3, -2)$

Seja r o raio.

$$r = 3. \text{ Então } k = 9.$$

30.2. $r = |-1+2| = 1. \text{ Então } k = 1.$

30.3. $r = |5-1| = 4. \text{ Então } k = 16.$

31.1. a) $y = -5; y = 5$

b) $z = -2; z = 8$

c) $x = -4; x = 6$

31.2. A e B são pontos do tipo $(x, 0, 0)$.

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4 \vee x-1 = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -3$$

Seja $A(-3, 0, 0)$ e $B(5, 0, 0)$

Ponto médio de $[AB]$: $\left(\frac{-3+5}{2}, 0, 0\right)$, ou seja

$$(1, 0, 0).$$



32.1. $A(0, y, 0), y > 0$

$$0^2 + y^2 + (0-9)^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{19}$$

r : raio de base

$$r = \overline{OA} = \sqrt{19}$$

$$A_{\text{base}} = 19\pi \text{ u.a.}$$

32.2. $B(0, y, 13), y > 0$

$$0^2 + y^2 + (13-9)^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 84 \Leftrightarrow y = \sqrt{84}$$

$$A_{\text{sup. líquida}} = 84\pi \approx 263,9 \text{ u.a.}$$

Página 91

33.1. $C(1, -3, 0) \quad r = 3$

33.2. a) $\overline{AC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{16} = 4 > 3$

A não pertence à esfera.

b) $\overline{BC} = \sqrt{(4-1)^2 + (-3+3)^2} = 3$

B pertence à superfície da esfera.

33.3. A esfera é tangente ao plano xOz .

34.1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 \leq 7$

34.2. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \leq 4$

34.3. $(x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 16$

$$r = |1+3| = 4$$

35.1. Seja C o centro e r o raio.

$$C(0, -2, 1) \quad r = \sqrt{5}$$

35.2. $\overline{CP} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6} > \sqrt{5}$

P não pertence à esfera.

$$\overline{CQ} = \sqrt{1^2 + (-2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3} \leq \sqrt{5}$$

Q pertence à esfera.

$$\overline{CR} = \sqrt{(-1)^2 + (-2+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2} \leq \sqrt{5}$$

R pertence à esfera.

35.3. a) $z = 1 + \sqrt{5}; z = 1 - \sqrt{5}$

b) $y = -2 + \sqrt{5}; y = -2 - \sqrt{5}$

c) $x = -\sqrt{5}; x = \sqrt{5}$

36. Volume da esfera dada: $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3$

Seja r o raio na nova esfera.

Pretende-se

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 8 \times (\sqrt{3})^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8 \times (\sqrt{3})^3}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \times \sqrt{3} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3} \text{ u.c.}$$

O raio da nova esfera será o dobro do raio da esfera dada, ou seja, $2\sqrt{3}$.

37. A interseção é um círculo que passa pelo centro da esfera.

$$\text{Perímetro: } 2\pi \times 3 \approx 18,85$$

Opção (D)

38.1. $V_{\text{paralelepípedo}} = 5 \times 8 \times 3 = 120$

r : raio da esfera

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 120 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 360 \Leftrightarrow r^3 = \frac{90}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{90}{\pi}}$$

Tomando $r \approx 3,06$.

$$(x-5)^2 + (y-8)^2 + (z-3)^2 \leq 3,06^2$$

38.2. $M(0, 4, 3) \quad \overline{MD} = 4 \quad \overline{GD} = 5$

$$V_{[\text{BCNPGDMQ}]} = 0,3 \times V_{\text{paralelepípedo}} = 0,3 \times 120 = 36$$

$$A_{[\text{GDMQ}]} \times 3 = 36 \Leftrightarrow A_{[\text{GDMQ}]} = 12$$

Seja $\overline{GQ} = x$.

$$\frac{4+x}{2} \times 5 = 12 \Leftrightarrow 20+5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

Seja R a projeção ortogonal de Q sobre DM .

$$\overline{RM} = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2$$

$$\overline{MQ}^2 = 3,2^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{MQ}^2 = 35,24 \Leftrightarrow \overline{MQ} = \sqrt{35,24}$$

$$A_{[\text{MNPQ}]} = 3\sqrt{35,24} \approx 17,8 \text{ u.a.}$$



Página 92

1. Opção (B) $(-1, -3, 2)$
- 2.1. Opção (A) $z = 3$
- 2.2. O ponto C é a projeção ortogonal de V sobre o plano de equação $y = 3$.
 $C(2, 3, 3)$
 Opção (D)
- 3.1. Opção (B)
- 3.2. Ponto médio de $[CG]$: $\left(1, 2, \frac{3}{2}\right)$, ou seja,
 $(1; 2; 1,5)$.
 Opção (A)
4. $C(-1, 0, 1)$; $r = 2$
 Opção (C)
5. $r = \sqrt{10}$.
 O centro pertence ao plano de equação $x = -1$.
 $A = \pi \times \sqrt{10}^2 = 10\pi \approx 31$
 Opção (D)

Página 93

- 1.1. $C(x, y, z)$
 $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{-1+z}{2}\right) = (1, 0, -2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 1 \\ \frac{2+y}{2} = 0 \\ \frac{-1+z}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases} \quad C(5, -2, -3)$$
- 1.2. M: ponto médio de $[AB]$
 $M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)$ ou seja $M\left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right)$
 $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-3-1)^2 + 2^2 + (-1+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$
 $(x+1)^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$
- 1.3. $P(x, y, z)$
 $\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} =$
 $= \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 4y - 2z + 9 = 0$$

2.1. $C(-2, 6, 4)$

2.2. $x = 2 \wedge y = 6$

2.3. $z = 2$

2.4. $P(x, y, z)$

$$\overline{AP} = \overline{VP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 + z^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x - 12y + 4z + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x - 3y + z + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x - 3y + z + 9 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$R(0, 3, 0)$$

3. $V = \pi \times 4^2 \times 5 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 4^3$

$$V = 80\pi + \frac{128\pi}{3} = \frac{368\pi}{3} \approx 385 \text{ u.v.}$$