Proposta de resolução da unidade 3 do manual

Página 6

1.1. Triângulo equilátero e acutângulo

1.2. $\hat{\gamma} = \frac{180}{3} = 60º$ $B\hat{A}C = C\hat{B}A = \hat{\gamma} = 60º$

$\hat{\beta} = 180º - 60º = 120º$ $\hat{\alpha} = 180º - 60º = 120º$

Assim, $\hat{\gamma} = 60º$ e $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 120º$.

Página 7

2.1. O lado $[BD]$ é comum aos dois triângulos;

$\overline{AB} = \overline{BC}$ pois B é ponto médio de $[AC]$;

$C\hat{B}D = D\hat{B}A = 90º$

Pelo critério LAL de congruência de triângulos, por exemplo, se conclui que os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são congruentes.

2.2. $x = 5$ cm $y = 2$ cm

3.1. O ângulo DAE é comum aos dois triângulos e $C\hat{B}A = E\hat{D}A = 90º$.

Pelo critério AA de semelhança de triângulos, conclui-se que os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são semelhantes.

3.2. $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{3} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{30}{6} \Leftrightarrow \overline{DE} = 5$

Então, $\overline{DE} = 5$

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{6,7} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{67}{6}$

$\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = \frac{67}{6} - 6,7 \approx 4,5$

Então, $\overline{CE} \approx 4,5$ cm

Página 8

1. O lado $[PM]$ é comum aos triângulos $[AMP]$ e $[PMB]$.

$\overline{AM} = \overline{MB}$, pois M é ponto médio de $[AB]$.

$P\hat{M}A = B\hat{M}P = 90º$

Pelo critério LAL de congruência de triângulos conclui-se que os triângulos $[AMP]$ e $[PMB]$ são congruentes.

2. Como os triângulos $[AMP]$ e $[PMB]$ são congruentes, os lados que se opõem aos ângulos retos são congruentes. Assim, $\overline{AM} = \overline{MB}$, pelo que o triângulo $[ABP]$ é isósceles.

Página 9

1. Como o ponto A é o pé da perpendicular traçada de B para VT, então $V\hat{A}B = 90º$, pelo que o triângulo $[ABV]$ é retângulo em A.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras,

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

Seja C o pé da perpendicular traçada de B para VR. Então, $B\hat{C}V = 90º$.

Relativamente aos triângulos $[ABV]$ e $[CBV]$, sabe-se que, de um para o outro:

- $B\hat{V}A = C\hat{V}B$ (pois $\dot{V}B$ é bissetriz do ângulo RVT);
- $V\hat{A}B = B\hat{C}V = 90º$;
- $A\hat{B}V = V\hat{B}C$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180º$.

Como $[VB]$ é um lado comum dos triângulos $[ABV]$ e $[CBV]$, pode-se então concluir, pelo critério ALA de congruência de triângulos, que estes triângulos são congruentes.

Assim, tem-se que $\overline{BC} = \overline{BA} = 3$ unidades, isto é, a distância de B à reta VR é 3 unidades.

2.1. Por construção, tem-se $\overline{VC} = \overline{VD}$ e $\overline{CP} = \overline{DP}$.

Como $[VP]$ é um lado comum dos triângulos $[VPC]$ e $[VDP]$, pelo critério LLL da igualdade de triângulos, conclui-se que $[VPC]$ e $[VDP]$ são iguais.

2.2. Como $\overline{CP} = \overline{DP}$ e a lados iguais se opõem ângulos iguais, então $P\hat{V}C = D\hat{V}P$.

Página 10

1.1. **1.º** Os ângulos VDP e PCV são ambos ângulos retos.

2.º $A\hat{V}P = P\hat{V}B$, porque $\dot{V}P$ é a bissetriz do ângulo AVB.

3.º Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180º$, conclui-se que as amplitudes dos ângulos DPV e VPC também são iguais.

4.º Como $[VP]$ é um lado comum aos dois triângulos, pelo critério ALA de congruência de triângulos, conclui-se que estes são congruentes.

1.2. Como os triângulos $[CVP]$ e $[VPD]$ são congruentes e $A\hat{V}P = P\hat{V}B$, conclui-se que $\overline{CP} = \overline{DP}$.

2. **1.º** Sendo E e F os pés das perpendiculares traçadas de S sobre VA e VB, respetivamente, sabe-se que $[FVS]$ e $[ESV]$ são triângulos retângulos e $\overline{SE} = \overline{SF}$.

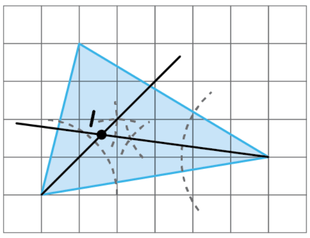
2.º Como $[VS]$ é um lado comum aos triângulos, pelo Teorema de Pitágoras, conclui-se que $\overline{VE} = \overline{VF}$.

3.º O caso LLL de igualdade de triângulos permite concluir que os triângulos $[FVS]$ e $[ESV]$ são congruentes. Assim, os ângulos EVS e SVF são iguais pois opõem-se a lados iguais.

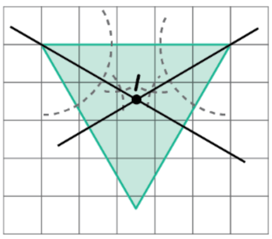
Desta forma se pode concluir que $\dot{V}S$ é a bissetriz do ângulo AVB.

Página 11

3.1. Para dois dos ângulos internos do triângulo, traçam-se as respetivas bissetrizes.



3.2. Para dois dos ângulos internos do triângulo, traçam-se as respetivas bissetrizes.



4. $C\hat{B}A = 180^\circ - \left(B\hat{A}C + A\hat{C}B\right)$

$= 180^\circ - \left(120^\circ + 35^\circ\right) = 25^\circ$

$I\hat{B}A = C\hat{B}I = \dfrac{25^\circ}{2} = 12{,}5^\circ$

$B\hat{A}I = I\hat{A}C = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

$A\hat{C}I = I\hat{C}B = \dfrac{35^\circ}{2} = 17{,}5^\circ$

Triângulo $[ABI]$:

$I\hat{B}A = 12{,}5^\circ$; $B\hat{A}I = 60^\circ$

$A\hat{I}B = 180^\circ - \left(12{,}5 + 60^\circ\right) = 107{,}5^\circ$

Triângulo $[BCI]$: $C\hat{B}I = 12{,}5^\circ$; $I\hat{C}B = 17{,}5^\circ$

$B\hat{I}C = 180^\circ - \left(12{,}5^\circ + 17{,}5^\circ\right) = 150^\circ$

Triângulo $[CAI]$:

$I\hat{A}C = 60^\circ$; $A\hat{C}I = 17{,}5^\circ$

$C\hat{I}A = 180^\circ - \left(60^\circ + 17{,}5^\circ\right) = 102{,}5^\circ$

Página 12

O incentro de qualquer triângulo pertence ao triângulo medial, isto é, ao triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo inicial $[ABC]$.

Página 13

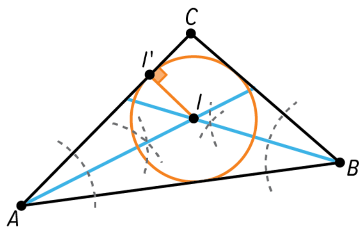
5.1. Ponto R, porque é o ponto de interseção das bissetrizes do triângulo.

5.2. Circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$

Para a construir, basta traçar a perpendicular a um dos lados do triângulo que passa pelo ponto R e obter o ponto onde interseta esse lado do triângulo.

Em seguida, traçar a circunferência de centro R e que passa pelo ponto obtido.

6.1. e **6.2.**



Traçaram-se duas bissetrizes de dois ângulos interiores do triângulo, obtendo-se o ponto de interseção .

Traçou-se uma perpendicular a um dos lados do triângulo que passa por I obtendo-se o pé dessa perpendicular que se designa por I'.

A circunferência tem centro I e passa por I'.

6.3. Ao cuidado do aluno.

7. Seja $[ABC]$ o triângulo e r o raio da circunferência nele inscrita, em centímetros.

$$\frac{\overline{AB}\times r}{2}+\frac{\overline{BC}\times r}{2}+\frac{\overline{AC}\times r}{2}=96$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)=96 \quad \Leftrightarrow \frac{r}{2}\times 48=96$$

$$\Leftrightarrow 24r=96 \quad \Leftrightarrow r=\frac{96}{24} \quad \Leftrightarrow r=4$$

O raio da circunferência inscrita é 4 cm .

Página 14

1.1. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=12^2+5^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=169 \underset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AB}=13$$

1.2. Os triângulos $[IEB]$ e $[DBI]$ são congruentes pois:

- $\overline{IE}=\overline{ID}$
- $[IB]$ é um lado comum;
- $E\hat{B}I=I\hat{B}D$ e $I\hat{E}B=I\hat{D}B=90º$, logo $B\hat{I}E=B\hat{I}D$.

Pelo critério ALA conclui-se que os triângulos são congruentes.

Como a ângulos iguais opõem lados iguais, conclui-se $\overline{BE}=\overline{BD}$.

Utilizando o mesmo raciocínio para os triângulos $[AIE]$ e $[AFI]$, conclui-se que $\overline{AE}=\overline{AF}$.

1.3. $[CDIF]$ é um quadrado. Logo,

$$\overline{BD}=5-r \ ; \quad \overline{AF}=12-r$$

1.4. $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}$

Atendendo a que $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{AC}-r$ e que $\overline{EB}=\overline{BD}=\overline{BC}-r$

Tem-se $\overline{AB}=\overline{AC}-r+\overline{BC}-r$

$$\Leftrightarrow 2r=\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB} \quad \Leftrightarrow r=\frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$$

1.5. $c=\overline{AE}+\overline{EB} \Leftrightarrow c=\overline{AF}+\overline{BD} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow c=b-r+a-r \Leftrightarrow 2r=a+b-c \Leftrightarrow r=\frac{a+b-c}{2}$$

2.1. $\overline{AM}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{12}{2}=6$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{CM}^2+\overline{AM}^2=\overline{AC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CM}^2=10^2-6^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CM}^2=64$$

$$\underset{\overline{CM}>0}{\Leftrightarrow} \overline{CM}=8$$

2.2. $A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{CM}}{2}=\frac{12\times 8}{2}=48$

A área do triângulo $[ABC]$ é de 48 u.a.

2.3. $r=\overline{IM}$ é o raio da circunferência inscrita.

$$\frac{\overline{AB}\times r}{2}+2\times\frac{\overline{BC}\times r}{2}=48 \Leftrightarrow 6r+10r=48$$

$$\Leftrightarrow 16r=48 \Leftrightarrow r=\frac{48}{16} \Leftrightarrow r=3$$

A medida do raio é 3 u.c.

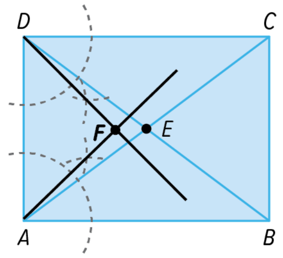
Página 15

1.1. A afirmação é falsa.

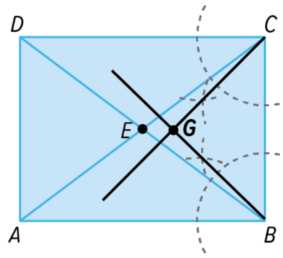
O ponto E não é equidistante dos lados do ângulo BAD , logo não pertence à bissetriz do ângulo.

A distância de E a AB é 3 cm e a distância de E a AD é 4 cm . O mesmo acontece em relação ao ângulo ADC .

1.2. a)



b)



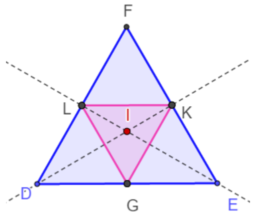
1.3. A distância de F a AD , AB e DC é a mesma, ou seja, $\frac{\overline{AD}}{2}$. Então, essa distância é 3 cm . Também a distância de D a DC , BC e AB é 3 cm .

$$\overline{FG}=\overline{AB}-(3+3)=8-6=2$$

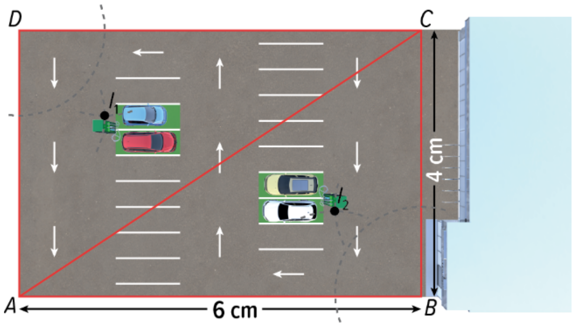
O comprimento de $[FG]$ é 2 cm .

2.1. Ponto S . Opção **(D)**

2.2. Os incentros são coincidentes.

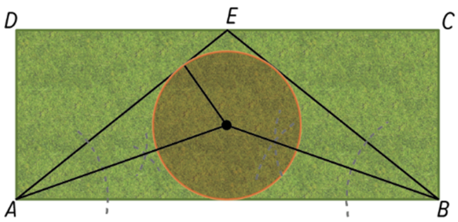


3. I_1 e I_2 são os incentros dos triângulos $[ACD]$ e $[ABC]$.



Página 16

4.



5. Seja r o raio da circunferência.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9^2 + 12^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 225 \underset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = 15$$

Área: $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \dfrac{9 \times 12}{2} = 54$

$$\frac{\overline{AC} \times r}{2} + \frac{\overline{AB} \times r}{2} + \frac{\overline{BC} \times r}{2} = 54$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}r + \frac{15}{2}r + \frac{12}{2}r = 54$$

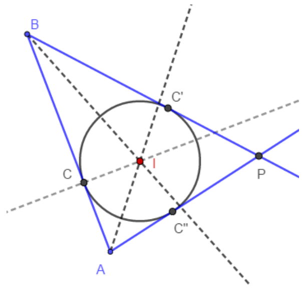
$$\Leftrightarrow \frac{36}{2}r = 54 \Leftrightarrow 18r = 54 \Leftrightarrow r = 3$$

$P \rightarrow$ comprimento da circunferência

$P = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$

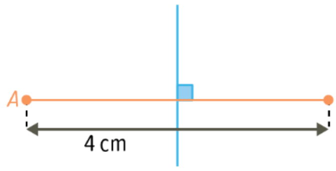
O comprimento da circunferência, em centímetros, é 6π cm .

6.



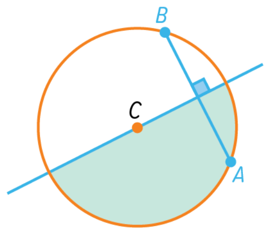
Página 17

8.

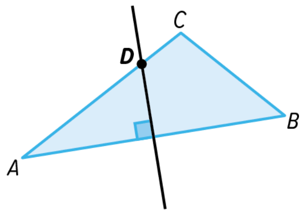


9.1. Como C é centro da circunferência, $[CA]$ e $[CB]$ são raios da circunferência. Então, $\overline{CA} = \overline{CB}$, sendo um ponto equidistante de A e de B. Assim, o ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$.

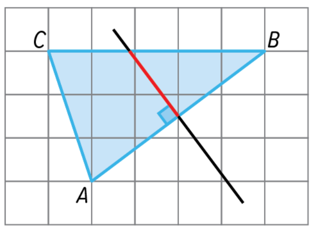
9.2. Basta traçar a mediatriz do segmento $[AB]$.



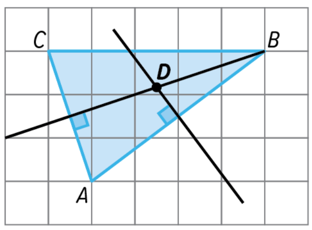
10.



11.1.



11.2. Ponto D

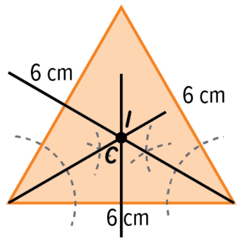


12.1. $x \rightarrow$ medida de cada lado, em centímetros

$x = \frac{18}{3} = 6$

Cada lado mede 6 cm.

12.2. e 12.3. O circuncentro e o incentro coincidem.



Página 19

Triângulo	Acutângulo	Retângulo	Obtusângulo
Localização do ponto *C*	Interior do triângulo	Ponto médio da hipotenusa	Exterior do triângulo

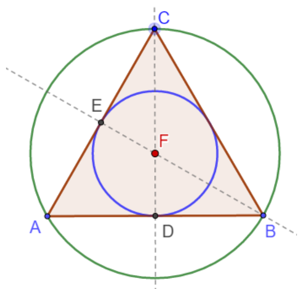
Página 20

13. Pontos F, E e B pois pertencem a uma mesma circunferência de que C é centro (circunferência circunscrita no triângulo).

14. O João representou um triângulo obtusângulo, a Maria representou um triângulo retângulo. Então, o João representou o triângulo $[LMN]$, a Maria representou o triângulo $[JKL]$ e o António o triângulo $[OPQ]$.

Página 21

1. Triângulo isósceles porque C pertence à mediatriz de $[AB]$, logo $\overline{AC} = \overline{BC}$.
2. Circuncentro do triângulo
3. Incentro do triângulo
4. O circuncentro e o incentro estão sempre sobre a mediatriz de $[AB]$.
5. Os pontos coincidem quando o triângulo é equilátero.
6.



7.
- F é o circuncentro porque é o ponto de interseção das mediatrizes do triângulo.
- C pertence à mediatriz de $[AB]$ porque o triângulo é equilátero, sendo $\overline{AC} = \overline{BC}$.
- A amplitude dos ângulos internos é $60º$.

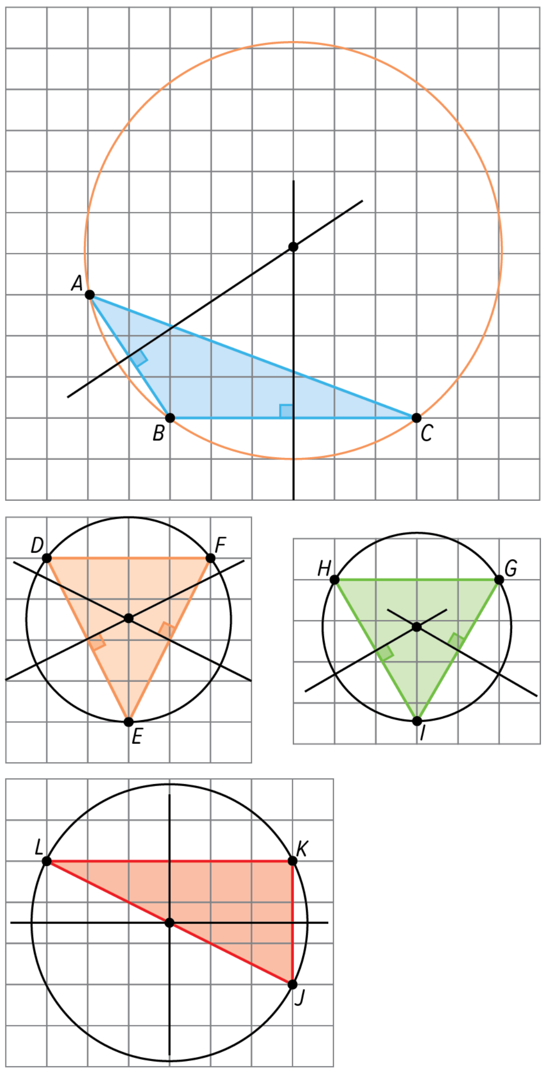
  $A\hat{C}D = 180º - C\hat{D}A - D\hat{A}C$

  $A\hat{C}D = 180º - 90º - 60º = 30º$
- A semirreta $\dot{C}D$ dividiu o ângulo ACB em dois ângulos de amplitude igual a $30º$, logo é a bissetriz do ângulo.
- $\dot{C}D$ é a bissetriz do ângulo ACB. Da memsa forma se conclui que $\dot{B}E$ é a bissetriz do ângulo CBA.

Então, o ponto F é o incentro do triângulo $[ABC]$ uma vez que é o ponto de interseção das bissetrizes dos seus ângulos.

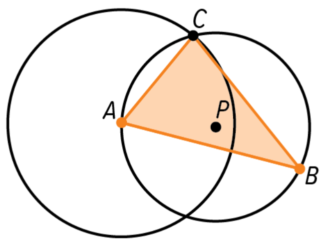
Página 22

7.



Página 23

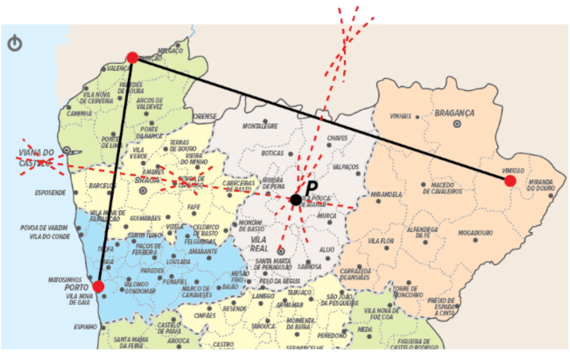
8.



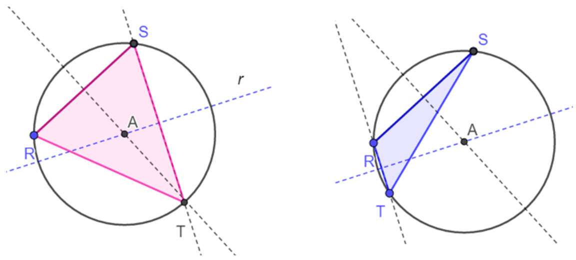
Reduzido a 50%

9.1. Sejam A: Porto; B: Monção; C: Vimioso
Traçar o triângulo $[ABC]$ e as mediatrizes de dois dos seus lados.
O ponto de interseção das mediatrizes é o circuncentro e é equidistante de A, B e C.

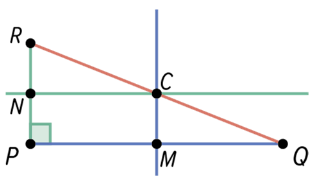
9.2.



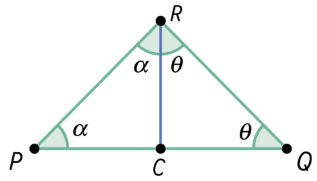
10. Duas soluções



11.1. Seja $[PQR]$ um triângulo retângulo e N e M os pontos médios dos catetos $[PR]$ e $[PQ]$, respetivamente.
A mediatriz de $[RP]$ é paralela à reta PQ e interseta a hipotenusa no seu ponto médio, C, pois os triângulos $[NCR]$ e $[PQR]$ são semelhantes. O mesmo acontece em relação à mediatriz do segmento $[PQ]$.
Então, o ponto C é o ponto de interseção das mediatrizes dos catetos e é o ponto médio da hipotenusa do triângulo.



11.2. Seja $[PQR]$ um triângulo e C o circuncentro.



Se $C \in [PQ]$, então $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR}$, sendo C o ponto médio de $[PQ]$.
Assim, os triângulos $[PCR]$ e $[CQR]$ são isósceles.
Sejam $C\hat{P}R = P\hat{R}C = \alpha$ e $R\hat{Q}C = C\hat{R}Q = \theta$

Então: $\alpha + (\alpha + \theta) = 180º$

$\Leftrightarrow 2\alpha + 2\theta = 180º$

$\Leftrightarrow \alpha + \theta = 90º$

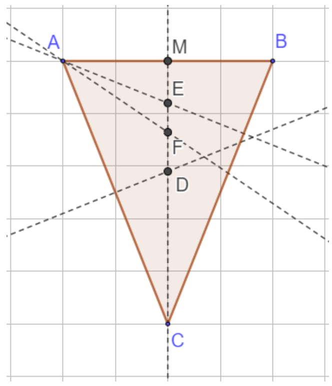
Assim, $P\hat{R}Q = \alpha + \theta = 90º$

Logo, o triângulo $[PQR]$ é retângulo.

Página 24

15.1. a) Verdadeira b) Falsa
c) Verdadeira d) Verdadeira

15.2. D: circuncentro; E: ortocentro; F: incentro



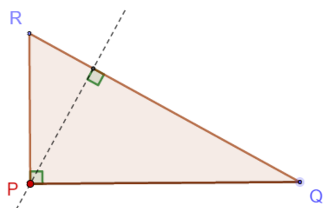
Página 25

1.º caso: Triângulo isósceles

1. O ortocentro pertence à mediatriz de $[AB]$.
2. Quando o triângulo isósceles é obtusângulo, o ortocentro é exterior ao triângulo.

2.º caso: Triângulo retângulo

1. O ortocentro é o ponto P.



2. O ortocentro de um triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto.

Caso geral:

Triângulo	Acutângulo	Retângulo	Obtusângulo
Isósceles	Interior	Vértice do ângulo reto	Exterior
Escaleno	Interior	Vértice do ângulo reto	Exterior
Equilátero	Interior		

Página 26

12.1. Ortocentro: E ; circuncentro : D

12.2. r , s e t representam as mediatrizes dos lados do triângulo $[ABC]$.

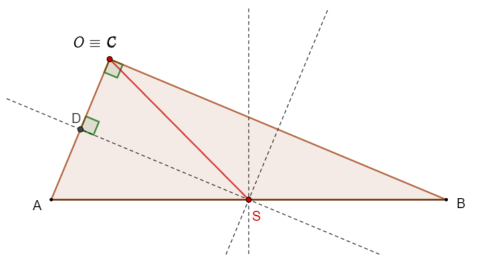
12.3. Representam as alturas do triângulo

12.4. As retas DI e EJ são paralelas uma vez que são ambas perpendicularwes ao lado $[BC]$ (mediatriz e altura relativa a esse lado).
O mesmo acontece com as retas JD e EI relativamente ao lado $[AC]$.

13.1. $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 + 12^2 = 13^2$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = 5$

13.2. O ponto O coincide com o ponto C , uma vez que o triângulo é retângulo, e assim duas alturas coincidem com os catetos que se intersetam em C . O circuncentro S é o ponto médio da hipotenusa.



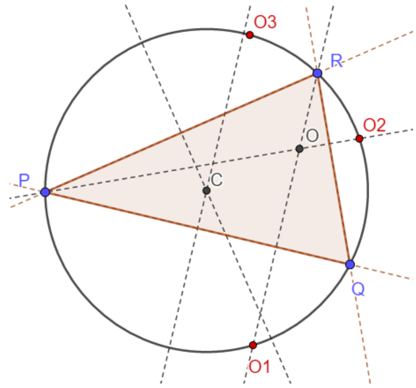
13.3. $\overline{AS} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$

Como S é o circuncentro do triângulo, é equidistante dos vértices do triângulo.

$\overline{OS} = \overline{AS} = \overline{BS} = 6,5$

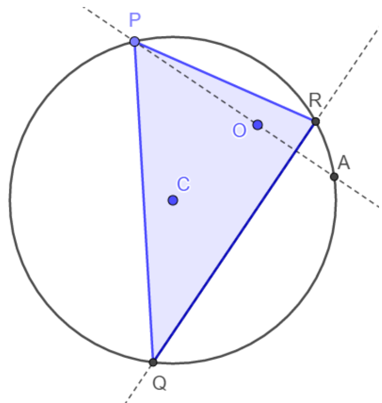
Página 27

14.1.



14.2. Os pontos obtidos por reflexão do ortocentro em relação às retas que contêm os lados de um triângulo pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo e são os pontos de interseção das retas que contêm as alturas com a circunferência circunscrita.

14.3. Traça-se a reta que contém a altura relativamente ao vértice P e obtém-se o ponto onde esta interseta a circunferência circunscrita, que podemos designar por A .
Sabe-se que a reta suporte do lado oposto a P é a mediatriz do segmento de reta $[OA]$.
Os pontos de interseção da mediatriz de $[OA]$ com a circunferência circunscrita são os outros vértices do triângulo.



Página 28

16.1. Se o triângulo $[UAC]$ é equilátero, $\overline{UC} = \overline{AC}$.

Como C é ponto médio do lado $[AE]$,

$\overline{AC} = \overline{CE}$

Então, $\overline{UC} = \overline{CE}$ o que garante que o triângulo $[UCE]$ é isósceles.

16.2. Como $[UAC]$ é equilátero,

$C\hat{A}U = U\hat{C}A = A\hat{U}C = 60^\circ$

$E\hat{C}U = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$C\hat{U}E = U\hat{E}C = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

Então, $E\hat{A}U = 60^\circ$; $U\hat{E}A = 30^\circ$;

$A\hat{U}E = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

16.3. **a)** $\overline{AC} = \frac{18}{3} = 6$

Seja h a medida da altura do triângulo $[ACU]$

$h^2 + 3^2 = 6^2 \Leftrightarrow h^2 = 27 \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{27}$

$A_{[ACU]} = \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{6\sqrt{27}}{2} = 3\sqrt{27} \approx 15{,}6$ u.a.

b) Como $\overline{CE} = \overline{AC}$, o triângulo $[UCE]$ tem a mesma área que o triângulo $[ACU]$, ou seja $3\sqrt{27}$ que é, aproximadamente, $15{,}6$ u.a.

Página 29

1. $[RM]$ e $[QN]$ são medianas do triângulo $[PQR]$.
O ponto B é o baricentro do triângulo.

2. Sabe-se que $\overline{PR} = 2\overline{PN}$ e $\overline{PQ} = 2\overline{PM}$, uma vez que N e M são pontos médios de $[PR]$ e $[PQ]$, respetivamente.
Então, o segmento $[QR]$ é uma ampliação do segmento $[MN]$ de centro P e razão 2.
Uma ampliação transforma segmentos em segmentos paralelos, logo $[MN]$ e $[QR]$ são paralelos.

3. Como MN e QR são retas paralelas, os ângulos RMN e MRQ são alternos internos e, por isso, $R\hat{M}N = M\hat{R}Q$.

Por outro lado, os ângulos QBR e NBM são verticalmente opostos e, por isso, $Q\hat{B}R = N\hat{B}M$.

Pelo critério AA de semelhança de triângulos conclui-se que os triângulos $[BMN]$ e $[BRQ]$ são semelhantes.

4. Como $[QR]$ é uma ampliação de $[MN]$ de razão 2, então $\frac{\overline{QR}}{\overline{MN}} = 2$. Como os triângulos

$[BMN]$ e $[BRQ]$ são semelhantes e $\frac{\overline{QR}}{\overline{MN}} = 2$,

a razão de semelhança é 2.

5.1. $\overline{BQ} = 2\overline{BN}$

5.2. $\overline{QN} = 3\overline{BN}$

5.3. $\overline{BR} = 2\overline{BM}$

5.4. $\overline{RM} = 3\overline{BM}$

6. $\overline{QN} = 3\overline{BN} \Leftrightarrow \overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{QN}$

$\overline{BQ} = 2\overline{BN} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2 \times \frac{1}{3}\overline{QN} \Leftrightarrow \overline{BQ} = \frac{2}{3}\overline{QN}$

$\overline{RM} = 3\overline{BM} \Leftrightarrow \overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{RM}$

$\overline{BR} = 2\overline{BM} \Leftrightarrow \overline{BR} = 2 \times \frac{1}{3}\overline{RM} \Leftrightarrow \overline{BR} = \frac{2}{3}\overline{RM}$

7.1. $\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{PS}$

7.2. $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{RM}$

7.3. $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BR}$

7.4. $\overline{BP} = 2\overline{BS}$

Página 30

Por exemplo, as três medianas do triângulo dividem-no em seis triângulos com igual área.

Página 31

17.1. $\overline{PL} = \frac{1}{3}\overline{AL} \Leftrightarrow \overline{PL} = \frac{1}{3} \times 5 \Leftrightarrow \overline{PL} = \frac{5}{3}$

Então, $\overline{PL} = \frac{5}{3}$ cm

17.2. $A_{[APN]} = \frac{1}{6} \times A_{[ABC]} = \frac{1}{6} \times 6 = 1$

Então, $A_{[APN]} = 1\text{ cm}^2$

17.3. $A_{[MBLP]} = 2 \times \frac{1}{6} \times A_{[ABC]} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$

Então, $A_{[MBLP]} = 2\text{ cm}^2$

Página 32

15.1. **a)** Falsa. O baricentro pertence ao segmento $[CM]$ porque este é uma mediana. O ortocentro pode ser exterior ao triângulo quando este é obtusângulo e, nesse caso, não pertence a $[CM]$.

b) Verdadeira. Como o triângulo é isósceles, a reta CM contém a altura relativa à base $[AB]$, a mediana $[CM]$, a bissetriz do ângulo ACB e é a mediatriz de $[AB]$.

15.2. $\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$\overline{MC}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 10^2 - 8^2$

$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 36 \Leftrightarrow \overline{MC} = 6,\ \overline{MC} > 0$

Se D é o baricentro, $\overline{DC} = \frac{2}{3}\overline{MC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$

A distância do baricentro ao vértice C é de 4 cm.

16. G é o baricentro.

$\overline{GH} = \frac{1}{3} \times \overline{FH} \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{1}{3} \times 5 \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{5}{3}$

$\overline{GE} = \frac{2}{3} \times \overline{JE} \Leftrightarrow \overline{GE} = \frac{2}{3} \times 5 \Leftrightarrow \overline{GE} = \frac{10}{3}$

$\overline{HE} = \frac{\overline{DE}}{2} \Leftrightarrow \overline{HE} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \overline{HE} = 3$

$P_{[GHE]} = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} + 3 = \frac{15}{3} + 3 = 8$

O perímetro é igual a 8 cm.

Página 33

17.1. Baricentro do triângulo

17.2. a) $\overline{BE} = 3 \times \overline{GE} = 3 \times 5,4 = 16,2$

b) $\overline{GD} = \frac{1}{3} \times \overline{CD} = \frac{1}{3} \times 12 = 4$

$\overline{GB} = 2\overline{GE} = 2 \times 5,4 = 10,8$

$\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$P_{[GDB]} = \overline{GD} + \overline{GB} + \overline{DB} = 4 + 10,8 + 8 = 22,8$

18.1. a) $A_{[PJH]} = \frac{1}{6} \times A_{[PQR]} = \frac{1}{6} \times 36 = 6\ \text{cm}^2$

A área do triângulo $[PJH]$ é $6\ \text{cm}^2$

b) $A_{[HJQM]} = 2 \times A_{[PJH]} = 2 \times 6 = 12\ \text{cm}^2$

A área do quadrilátero é $12\ \text{cm}^2$

18.2. $A_{[PJH]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{PJ} \times \overline{HJ}}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{3 \times \overline{HJ}}{2} = 6$

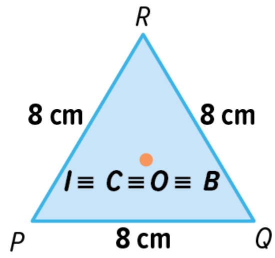
$\Leftrightarrow 3 \times \overline{HJ} = 12 \Leftrightarrow \overline{HJ} = 4$

$\overline{RH} = 2 \times \overline{HJ} = 2 \times 4 = 8$

Então, $\overline{RH} = 8$ cm

19.1. Sejam:

incentro: I; circuncentro: C; ortocentro: O; baricentro: B.



19.2. Os pontos notáveis são coincidentes.

19.3. Seja $[ABC]$ o triângulo equilátero.

$\overline{AB} = 8$

Seja G o baricentro e h a altura do triângulo.

$h^2 + 4^2 = 8^2 \Leftrightarrow h^2 = 48 \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{48}$

$\overline{CG}$ é o raio da circunferência circunscrita.

$\overline{CG} = \frac{2}{3} \times \sqrt{48} = \frac{2}{3} \times \sqrt{16 \times 3} = \frac{2}{3} \times 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\approx 4,62$

O raio da circunferência circunscrita é aproximadamente $4,62$ cm.

20.1. $\overline{PS} = \overline{SQ}$. Então, os triângulos $[PSR]$ e $[SQR]$ têm a mesma medida de base e a mesma altura. Logo, têm a mesma área.

20.2. a) Baricentro do triângulo $[PQR]$.

b) $\overline{RB} = \frac{2}{3} \times \overline{RS} = \frac{2}{3} \times 4,5 = 3$

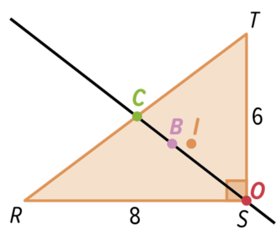
Os triângulos $[RVB]$ e $[RPS]$ são semelhantes (AA).

$\frac{\overline{RV}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{RS}} \Leftrightarrow \frac{\overline{RV}}{7,5} = \frac{3}{4,5} \Leftrightarrow \overline{RV} = 5$

Então $\overline{PV} = \overline{RP} - \overline{RV} = 7,5 - 5 = 2,5$

Página 34

18.1.



18.2. O incentro não pertence à reta de Euler.

Página 35

1.1. Ortocentro

1.2. O ortocentro é o ponto que é comum às três retas que contém as alturas do triângulo. Basta intersetar duas dessas retas para o identificar.

2. Baricentro

3. Circuncentro

4. Incentro

5.1. Os quatro pontos pertencem à reta de Euler quando o triângulo é isósceles.

5.2. Se o triângulo é equilátero, os quatro pontos notáveis são coincidentes.

6. Ao cuidado do aluno.

Página 36

19.1. Triângulo acutângulo e escaleno

19.2. Triângulo obtusângulo e isósceles

19.3. Triângulo retângulo e isósceles

20. Não. Quando, por exemplo, o circuncentro não pertence a um triângulo, isso significa que o triângulo é obtusângulo. Neste caso também o ortocentro não pertence ao triângulo. O baricentro e o incentro pertencem sempre ao triângulo.

Página 37

3.

$\overline{BC}$	$\overline{OB}$	$\dfrac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$
0,82	1,64	2
0,52	1,04	2
2,51	5,02	2
…	…	…

$\dfrac{\overline{OB}}{\overline{BC}} = 2$

4. $\overline{OB} = 2 \times \overline{BC}$ $\quad$ $\overline{OC} = 3 \times \overline{BC}$

Página 38

21.1. A circunferência c_2, porque é a única que passa pelos pontos M, H e L.

21.2. $\overline{OG} = 5$ cm

Seja C o circuncentro do triângulo.

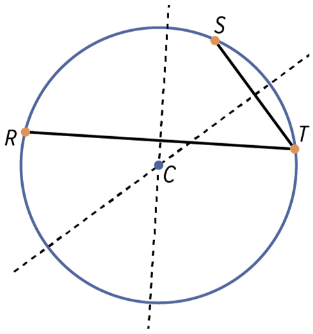
Sabendo que $\overline{OG} = 2\overline{GC}$, então $5 = 2\overline{GC}$

$\Leftrightarrow \overline{GC} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \overline{GC} = 2,5$

$\overline{OC} = 3 \times \overline{GC} = 3 \times 2,5 = 7,5$

A distância do ortocentro ao circuncentro é igual a 7,5 cm .

22.



Página 39

1. As circunferências são iguais.

A circunferência que passa pelos três pontos médios dos lados do triângulo é congruente com a que passa pelos pés das alturas e também pelos pontos médios entre o ortocentro O e os vértices do triângulo.

2. O ponto E é o centro da circunferência dos nove pontos.

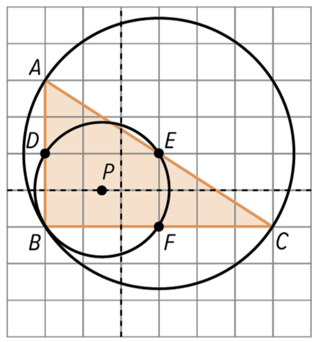
Página 40

23. $\overline{OB} = 2,5$ cm $\quad$ $\overline{BC} = \dfrac{\overline{OB}}{2} = \dfrac{2,5}{2} = 1,25$

$\overline{OC} = 3 \times 1,25 = 3,75$ $\quad$ $\overline{OD} = \dfrac{\overline{OC}}{2} = \dfrac{3,75}{2} = 1,875$

Conclui-se que $\overline{OD} = 1,875$ cm .

24.1. a 24.4.



O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto P.

O circuncentro do triângulo $[ABC]$ é o ponto E.

24.5. $\overline{AB} = 4$; $\overline{BC} = 6$

$\overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 52 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{52}$

$\overline{EC} = \dfrac{\sqrt{52}}{2} \approx 3,6$

$\overline{PE} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{52}}{2} = \dfrac{\sqrt{52}}{4} \approx 1,8$

As medidas dos raios das circunferências circunscrita e dos nove pontos do triângulo $[ABC]$ são $3,6$ e $1,8$ respetivamente.

Página 41

1.1. Pontos médios dos lados do triângulo

1.2. Pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são o ortocentro e cada um dos vértices do triângulo (O_A é o ponto médio de $[OA]$, O_B o de $[OB]$ e O_C o de $[OC]$).

1.3. Pés das alturas do triângulo (pés das perpendiculares tiradas a partir de cada vértice sobre a reta suporte do lado oposto.

2.1. O_C e O_B coincidem com M_2 e M_3, respetivamente.

O_A coincide com A.

H_B e H_C coincidem com A.

2.2. **a)** O_A e O_B coincidem com M_2 e M_1, respetivamente.

O_C, H_A e H_B coincidem com C.

H_C coincide com M_3.

b) H_A, H_B e H_C coincidem com M_1, M_2 e M_3, respetivamente.

Página 42

21.1. P_2, P_1 e P_4

21.2. P_1 representa o baricentro.

P_2 representa o circuncentro.

P_3 representa o incentro.

P_4 representa o ortocentro.

22.1. Opção **(B)**

22.2. **(A)** Triângulo escaleno e acutângulo, porque os pontos notáveis não são todos colineares e estão no interior do triângulo.

(C) Triângulo escaleno e retângulo, porque os pontos não são todos colineares mas há um que coincide com um vértice (do ângulo reto) e outro com o ponto médio de um dos lados (hipotenusa).

(D) Triângulo isósceles e obtusângulo, porque os quatro pontos são colineares, estando dois no exterior do triângulo.

23.1. $\overline{OB} = 2\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{4}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2$

$\overline{OC} = 3 \times \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \times 2 \Leftrightarrow \overline{OC} = 6$

A distância entre o circuncentro e o ortocentro é igual a 6 cm .

23.2. $\overline{RM} = 3\overline{BM} = 3 \times 3,4 = 10,2$ cm

Página 43

24.1. Circunferência dos nove pontos.

Seja P_E o perímetro da circunferência dos nove pontos e P_C o perímetro da circunferência circunscrita. Sabe-se que:

$P_E = \dfrac{P_C}{2}$. Então, $P_E = \dfrac{8\pi}{2} = 4\pi$.

A medida do perímetro da circunferência dos nove pontos é 4π .

24.2. $\overline{OP} = 2\overline{EO} = 2 \times 1,5 = 3$

Seja G o baricentro.

$\overline{GO} = \dfrac{2}{3}\overline{OP} = \dfrac{2}{3} \times 3 = 2$

A distância do baricentro ao ortocentro é 2 cm .

25.1. $\overline{OB} = 3$ cm

Seja M o ponto médio de um dos lados e E ponto médio de $[OC]$.

$\overline{EM} \rightarrow$ raio da circunferência dos nove pontos.

$\overline{EM} = 5$ cm

$P_E \rightarrow$ perímetro da circunferência dos nove pontos.

$P_E = 2\pi\overline{EM} = 2\pi \times 5 = 10\pi$

A medida, em centímetros, é 10π .

25.2. $r \rightarrow$ raio da circunferência circunscrita

$P_c \rightarrow$ perímetro da circunferência circunscrita

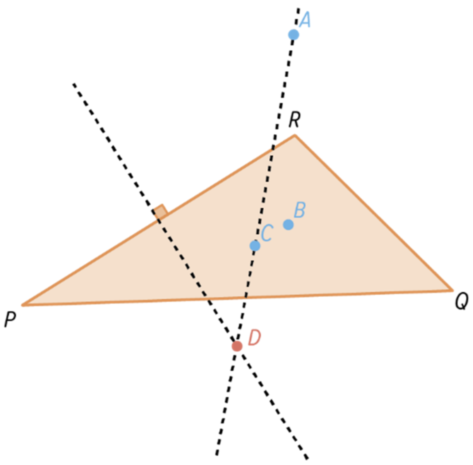
$r = 2 \times \overline{EM} = 2 \times 5 = 10$

$P_c = 2\pi \times 10 = 20\pi$

A medida, em centímetros, é 20π.

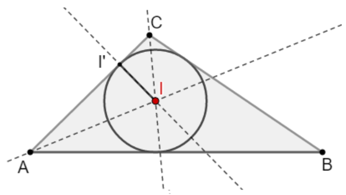
26.1. A: ortocentro; B: incentro; C: baricentro

26.2. Interseção da reta de Euler AC com, por exemplo, a mediatriz de $[PR]$. O ponto de interseção destas retas é o circuncentro do triângulo.



Página 44

1.



2. $P\hat{R}I = 180° - \hat{\alpha} - \hat{\beta} = 180° - 28° - 131° = 21°$

$I\hat{R}Q = P\hat{R}I = 21°$

$R\hat{Q}I = 180° - I\hat{R}Q - \hat{\gamma} = 180° - 21° - 118° = 41°$

$R\hat{Q}P = 2 \times R\hat{Q}I = 2 \times 41° = 82°$

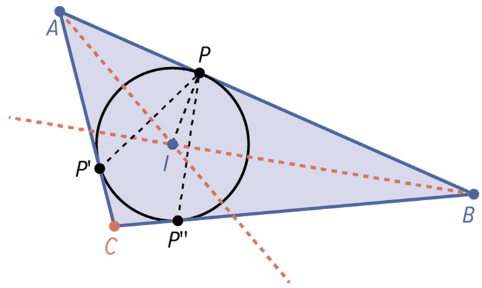
$Q\hat{P}B = 2 \times \hat{\alpha} = 2 \times 28° = 56°$

$P\hat{R}Q = 2 \times P\hat{R}I = 2 \times 21° = 42°$

3.1. A Cláudia construiu o circuncentro do triângulo.

3.2. O Luís construiu o incentro do triângulo.

4.



5. $\overline{AB} = 7$ cm $\overline{BC} = 3$ cm $\overline{AC} = 5$ cm

$A_{[ABC]} = 6,5 \text{ cm}^2$

$r \rightarrow$ raio da circunferência inscrita

$$\frac{\overline{AB} \times r}{2} + \frac{\overline{BC} \times r}{2} + \frac{\overline{AC} \times r}{2} = 6,5$$

$$\frac{7r}{2} + \frac{3r}{2} + \frac{5r}{2} = 6,5 \Leftrightarrow 7r + 3r + 5r = 13$$

$$\Leftrightarrow 15r = 13 \Leftrightarrow r = \frac{13}{15}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \times \left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{169\pi}{225} \approx 2,36 \text{ cm}^2$$

A área é, aproximadamente, $2,36 \text{ cm}^2$.

Página 45

6.1. Circuncentro do triângulo

6.2. Circunferência circunscrita

6.3. Triângulo obtusângulo

7.1. O ponto E é o incentro do triângulo, uma vez que é equidistante dos lados do triângulo: $\overline{EG} = \overline{EH}$. Sabe-se que EG é perpendicular a AC e EH é perpendicular a AB (retas tangentes aos raios). Como o triângulo é retângulo em A, conclui-se que o quadrilátero $[AEHG]$ tem os lados iguais e os ângulos retos, logo é um quadrado.

7.2. Opção **(C)** Ponto *D*.

7.3. **a)** $P = 2\pi \times 1,2 = 2,4\pi$

O perímetro é igual a $2,4\pi$ cm.

b) $\overline{BC}^2 = 3^2 + 7,2^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 9 + 51,84$

$\underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{60,84} \Leftrightarrow \overline{BC} = 7,8$

$$\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9$$

$P = 2\pi \times 3,9 = 7,8\pi$

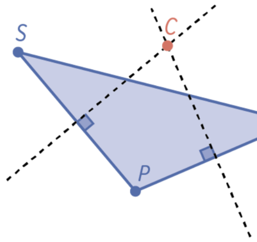
O perímetro é igual a $7,8\pi$ cm.

8.1. O circuncentro do triângulo $[PRS]$.

8.2. **1.º** Representar o triângulo $[PRS]$.

2.º Traçar duas mediatrizes dos lados do triângulo.

3.º Identificar o ponto de interseção dessas retas.



9.1. $\overline{DC} = \overline{DA} = r$

Então, $\overline{DM} = \overline{CM} - \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{DM} = 8 - r$

9.2. O triângulo $[AMD]$ é retângulo em M.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{AD}^2 = \overline{MD}^2 + 2^2 \Leftrightarrow r^2 = (8-r)^2 + 4$

$\Leftrightarrow r^2 = 64 - 16r + r^2 + 4 \Leftrightarrow 16r = 68$

$\Leftrightarrow r = 4,25$

$P = 2\pi \times 4,25 \approx 26,7$

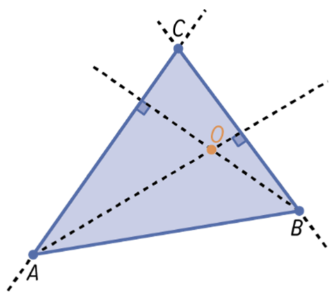
O comprimento da circunferência circunscrita é, aproximadamente, igual a $26,7$ cm .

Página 46

10.1. Ortocentro

10.2. Joaquim: II Simão: III Tiago: I.

11.



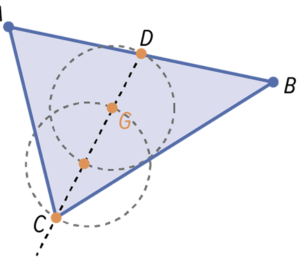
1.º Traçar a reta BO que contém a altura em relação a B.

2.º Traçar a perpendicular a BO que passa por A.

3.º Traçar AO.

4.º Traçar a perpendicular AO e que passa por B.

12.



13.1. Baricentro

13.2. a) $\overline{AG} = 12$ cm

$\overline{GE} = \frac{1}{2}\overline{AG} \Leftrightarrow \overline{GE} = \frac{1}{2} \times 12 \Leftrightarrow \overline{GE} = 6$

$\overline{GE} = 6$ cm

b) Pelo Teorema de Pitágoras

$\overline{GD}^2 + \overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{GD}^2 + 12^2 = 15^2$

$\Leftrightarrow \overline{GD}^2 = 81 \underset{\overline{GD}>0}{\Leftrightarrow} \overline{GD} = 9$

$\overline{CD} = 3 \times \overline{GD} = 3 \times 9 = 27$ cm

13.3. a) $A_{[ADG]} = \frac{\overline{GD} \times \overline{AG}}{2} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$

$A_{[ABC]} = 6 \times A_{[ADG]} = 6 \times 54 = 324$

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a 324 cm^2.

b) $A_{[CFGE]} = 2 \times A_{[ADG]} = 2 \times 54 = 108$

A área do quadrilátero $[CFGE]$ é igual a 108 cm^2.

Página 47

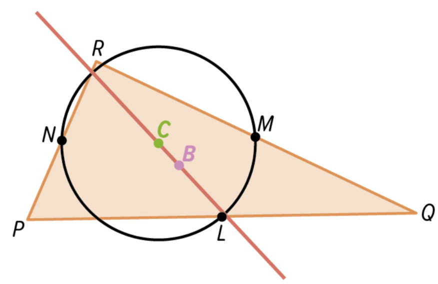
14. Opção **(D)**: os pontos B e C pertencem a r.

15.1. Opção **(B)**: ponto R.

15.2. Opção **(A)**: reta UV.

16. Os triângulos $[AED]$ e $[BCE]$ são isósceles ($\overline{AE} = \overline{ED}$ e $\overline{EC} = \overline{EB}$), por isso, os pontos notáveis pertencem à mediatriz de $[AD]$, que coincide com a mediatriz de $[BC]$ e passa por E.

17.



18. Seja r a medida do raio, em centímetros, da circunferência circunscrita.

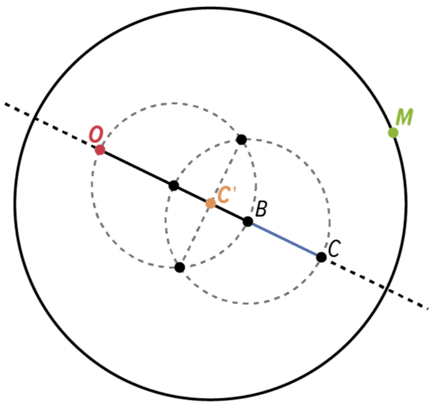
$r = 2 \times 4 = 8$

$P = 2\pi r = 2\pi \times 8 = 16\pi$

O comprimento da circunferência circunscrita é 16π cm .

19.1. A reta de Euler passa pelo baricentro, circuncentro e ortocentro de qualquer triângulo, pelo que a reta BC é a reta de Euler.

19.2. e **19.3.**



O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

O ponto M pertence à circunferência dos nove pontos.

Página 48

1. Opção **(B)**: incentro

2. Opção **(A)**: na hipotenusa

3. Opção **(C)**: obtusângulo

4. Opção **(B)**: incentro

5. Opção **(C)**: ortocentro

6. $\overline{OC} = 2 \times 4,2 = 8,4$

$\overline{BC} = \frac{\overline{OC}}{3} = \frac{8,4}{3} = 2,8$

Opção **(A)**: $\overline{BC} = 2,8$ cm

Página 49

1. Ponto D: circuncentro

Ponto F: incentro

2.1. Opção **(D)**: o ponto D é equidistante dos lados do triângulo.

2.2. $P = 12$ cm

$\overline{DE} = 1,5$ cm

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{DE}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{DE}}{2} + \frac{\overline{AC} \times \overline{DE}}{2}$

$= \frac{\overline{DE}}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\right) = \frac{1,5}{2} \times 12 = 9$

A área é igual a 9 cm^2.

3.1. Como se trata de um triângulo retângulo, o ponto O coincide com R, vértice do ângulo reto, e o ponto C é o ponto médio da hipotenusa, $[PQ]$.

3.2. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2$

$\overline{PQ}^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 = 169 \underset{\overline{PQ}>0}{\Leftrightarrow} \overline{PQ} = 13$

Seja r o raio da circunferência dos nove pontos.

C é o centro da circunferência circunscrita (ponto médio de $[PQ]$).

$\overline{PC} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$ $\qquad r = \frac{\overline{PC}}{2} = \frac{6,5}{2} = 3,25$

Designando por C_9 o comprimento da circunferência dos nove pontos,

$C_9 = 2\pi \times 3,25 \approx 20,420$ cm

3.3. $A_{[PQR]} = \frac{\overline{PR} \times \overline{RQ}}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = 30$

$\frac{\overline{PQ} \times h}{2} = 30 \Leftrightarrow \frac{13h}{2} = 30 \Leftrightarrow 13h = 60 \Leftrightarrow h = \frac{60}{13}$

Então $h \approx 4,62$.

A área do triângulo $[PQR]$ é igual a 30 cm^2 e h é aproximadamente igual a $4,62$ cm .

3.4. Como o triângulo é retângulo, o ponto O coincide com R. Então $\overline{OC} = \overline{RC} = \overline{PC} = 6,5$ cm , uma vez que C é equidistante dos vértices.

Página 52

3. Os pontos A, P' e C' são, respetivamente, as imagens de A, P e C pela rotação de centro A e amplitude $60°$.

Então, $\overline{AP} = \overline{AP'}$, sendo $P\hat{A}P' = 60°$.

Como, num triângulo, a lados iguais se opõem ângulos iguais, $A\widehat{P'}P = P'\hat{P}A = \frac{120°}{2} = 60°$.

Então, o triângulo $[APP']$ é equilátero.

Da mesma forma se conclui que o triângulo $[ACC']$ é equilátero.

4. Os pontos P' e C' são, respetivamente, as imagens de P e C pela rotação de centro A e amplitude 60°. Então, $\overline{CP} = \overline{C'P'}$.

Como $\overline{AP} = \overline{PP'}$ e $\overline{AC} = \overline{AC'}$, uma vez que os triângulos $[APP']$ e $[ACC']$ são equiláteros, pode escrever-se :

$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} = \overline{PP'} + \overline{BP} + \overline{C'P'}$

5.1. $C'\widehat{P'}A = 180^{\circ} - A\widehat{P'}P = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$

5.2. $C\hat{P}A = C'\widehat{P'}A = 120^{\circ}$

5.3. $B\hat{P}C = 360^{\circ} - C\hat{P}A - A\hat{P}B = 360^{\circ} - 120^{\circ} - 120^{\circ} = 120^{\circ}$

Página 53

6.1. As amplitudes dos ângulos APB, BPC e CPA são iguais a 120°.

6.2. a) Não.

b) Quando o ângulo interno do triângulo nesse vértice tem 120° de amplitude.

7.3. Quando a construção conduz a um ponto exterior ao triângulo (ângulo interno do triângulo de amplitude superior a 120°), a soma das distâncias desse ponto a cada um dos vértices já não é a menor possível. Nesse caso, a menor soma é a que resulta de considerar esse vértice do triângulo como sendo o ponto P.